Algèbres de Hall, groupes quantiques et bases canoniques

Résumé

Ce texte est la version écrite d'un cours d'environ quatre à cinq heures donné dans le cadre du DEA résident « Carquois et représentations géométriques », qui s'est tenu au CIRM à Luminy du 24 au 28 mai 2004. Le but poursuivi dans ce cours était de présenter deux résultats datant des années 1989–1990 : d'une part la découverte par Ringel d'un lien profond entre les représentations d'un carquois de type Dynkin et les groupes quantiques, lien qui passe par les algèbres de Hall ; d'autre part la construction par Lusztig de bases canoniques dans les représentations des algèbres de Lie simples. Les contraintes de temps ont conduit l'auteur à ne pas chercher à prouver complètement les résultats énoncés, mais à essayer au moins d'expliquer un certain nombre de liens qui unissent les objets considérés. Des changements dans l'ordre de présentation seraient nécessaires pour aboutir à des démonstrations parfaitement satisfaisantes du point de vue logique.

Table des matières

1 L'intérêt des bases canoniques pour la théorie des représentations

1.1 Présentation

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe. On choisit une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ et on appelle $R \subseteq \mathfrak{h}^*$ le système de racines de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$. On fait le choix d'un système de racines positives $R_+ \subseteq R$, et on note Δ l'ensemble des racines simples. L'ensemble Δ est une base de $\mathfrak{h}^*$, et on note $\mathbb{Z}\Delta$ (respectivement $\mathbb{N}\Delta$) l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers (respectivement entiers et positifs) des racines simples. Soit enfin $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathfrak{h}^*$ engendré par R. Sur cet espace $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, qui est une forme réelle de $\mathfrak{h}^*$, existe un produit scalaire invariant sous l'action du groupe de Weyl. Ce produit scalaire est unique à normalisation près ; on le choisit de sorte que les racines courtes aient $\sqrt{2}$ pour norme.

Au système de racines R est associé un graphe de Dynkin. L'ensemble I de ses sommets est en bijection avec Δ ; autrement dit, on indexe par I l'ensemble des racines simples :

$$\Delta = \{\alpha_i \mid i \in I\}.$$

Les arêtes du graphe de Dynkin codifient quant à elles les angles que font entre elles les racines simples. Cette donnée est équivalente à celle de la matrice de Cartan $(a_{ij})_{i,j\in I}$, que l'on peut définir par

$$a_{ij} = \frac{1}{d_i}\,(\alpha_i \cdot \alpha_j), \quad \text{où les coefficients} \quad d_i = \frac{\alpha_i \cdot \alpha_i}{2} \quad \text{sont des nombres entiers.}$$

On note $\alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}$ la forme linéaire $x \mapsto \frac{1}{d_i}\,(\alpha_i \cdot x)$ sur $\mathfrak{h}^*$, de sorte que $a_{ij} = \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle$.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ se décompose en somme de sous-espaces de poids par rapport à l'action adjointe de $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in R} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+, \quad \text{où} \quad \mathfrak{n}_\pm = \bigoplus_{\alpha\in\pm R_+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Dans chaque espace $\mathfrak{g}_{\alpha_i}$, on choisit un vecteur e_i non-nul. Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_+$ est engendrée par les e_i (pour $i \in I$), lesquels satisfont aux relations

$$(\operatorname{ad} e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0 \quad (\text{pour } i, j \in I \text{ avec } i \neq j)\,;$$

un théorème de Serre affirme que l'on obtient ainsi une présentation de $\mathfrak{n}_+$. On en déduit facilement que l'algèbre enveloppante $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$ peut être définie par la présentation suivante :

$$\begin{array}{lll} \text{générateurs :} & e_i & (\text{pour } i \in I) \;; \\ \text{relations :} & \displaystyle\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \binom{1-a_{ij}}{r} e_i^r e_j e_i^{1-a_{ij}-r} = 0 & (\text{pour } i, j \in I \text{ avec } i \neq j). \end{array}$$

On munit enfin l'algèbre $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$ d'une graduation par le groupe $\mathbb{Z}\Delta$ en décidant que le degré du générateur e_i est α_i. Les facteurs directs apparaissant dans la décomposition $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+) = \bigoplus_{\mu \in \mathbb{Z}\Delta} \mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)_\mu$ sont appelés sous-espaces de poids.

Le choix d'une base dans un espace vectoriel privilégie une famille de sous-espaces vectoriels, à savoir ceux qui sont engendrés par une partie de la base. Une terminologie logique pour de tels sous-espaces serait de les appeler « sous-espaces de coordonnées », de façon à généraliser les notions de « droites de coordonnées » ou de « plans de coordonnées » de la géométrie élémentaire. Il est immédiat de vérifier que la somme ou l'intersection de sous-espaces de coordonnées est encore un sous-espace de coordonnées.

En 1990, Lusztig a construit une base $\mathbf{B}$ du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$, pour laquelle les sous-espaces de poids $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)_\mu$, ainsi que les idéaux de la forme $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)e_i^n$ ou $e_i^n\,\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$ sont des sous-espaces de coordonnées. Nous expliquerons au paragraphe 6 la construction de Lusztig. Pour l'heure, nous allons présenter les conséquences de l'existence de $\mathbf{B}$ pour l'étude des représentations de $\mathfrak{g}$.

1.2 Bonnes bases

Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie. L'action de $\mathfrak{h}$ permet de décomposer V en sous-espaces de poids $V = \bigoplus_{\mu \in P(V)} V_\mu$. L'ensemble $P(V) \subseteq \mathfrak{h}^*$ des poids de V contient un unique élément $-\lambda$ tel que $P(V) \subseteq -\lambda + \mathbb{N}\Delta$. On sait de plus que λ est un poids dominant, c'est-à-dire que $\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \in \mathbb{N}$ pour tout $i \in I$. L'espace $V_{-\lambda}$ est de dimension 1, et si l'on choisit dedans un vecteur non-nul $v_{-\lambda}$, alors l'application

$$\varphi : \big(\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+) \to V, \quad X \mapsto X \cdot v_{-\lambda}\big)$$

est un épimorphisme de $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$-modules, dont le noyau est l'idéal à gauche $\sum_i \mathrm{U}(\mathfrak{n}_+) e_i^{\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle + 1}$. On voit ainsi que $\ker \varphi$ est un sous-espace de coordonnées par rapport à la base $\mathbf{B}$, d'où l'on déduit facilement que

$$\varphi(\mathbf{B}) \setminus \{0\} = \varphi\big(\mathbf{B} \setminus (B \cap \ker \varphi)\big)$$

est une base de V.

Il y a plus intéressant encore. Prenons λ et μ deux poids dominants, et appelons $V(-\lambda)$ le $\mathfrak{g}$-module simple de plus bas poids $-\lambda$, engendré par un vecteur de plus bas poids $v_{-\lambda}$, et $V(\mu)$ le $\mathfrak{g}$-module simple de plus haut poids μ, engendré par un vecteur de plus haut poids v_μ. Il est bien connu que le vecteur $v_{-\lambda} \otimes v_\mu$ engendre le $\mathfrak{g}$-module $V(-\lambda) \otimes V(\mu)$. De plus, si l'on choisit un système de générateurs de Chevalley (e_i, f_i, h_i) de $\mathfrak{g}$, alors l'annulateur de $v_{-\lambda} \otimes v_\mu$ dans $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ est l'idéal à gauche engendré par les éléments $e_i^{\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle + 1}$, $f_i^{\langle \alpha_i^\vee, \mu \rangle + 1}$ et $h_i - \langle \alpha_i^\vee, \mu - \lambda \rangle$, avec $i \in I$. Ainsi pour tout $\mathfrak{g}$-module W, l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(-\lambda) \otimes V(\mu), W)$ est en bijection naturelle avec

$$\{w \in W \mid e_i^{\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle + 1} \cdot w = f_i^{\langle \alpha_i^\vee, \mu \rangle + 1} \cdot w = 0 \text{ et } h_i \cdot w = \langle \alpha_i^\vee, \mu - \lambda \rangle \text{ pour tout } i\},$$

donc avec

$$\{w \in W_{\mu-\lambda} \mid e_i^{\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle + 1} \cdot w = 0 \text{ pour tout } i\} = W_{\mu-\lambda} \cap \bigcap_{i \in I} \ker \left((e_i)_W^{\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle + 1} \right),$$

où $W_{\mu-\lambda}$ est l'espace de poids $\mu - \lambda$ dans W et où $(e_i)_W$ est l'endomorphisme de W par lequel agit l'élément e_i de $\mathfrak{g}$. Cette analyse montre l'intérêt de la notion suivante :

Une base B d'un $\mathfrak{g}$-module W est dite bonne si elle est constituée de vecteurs de poids et si, pour tous $i \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel $\ker\left((e_i)_W^n\right)$ *de W est un sous-espace de coordonnées par rapport à B.*

Ainsi quand l'on connaît une bonne base B d'un $\mathfrak{g}$-module W, alors pour tous poids dominants λ et μ, on peut facilement construire une base de l'espace $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(-\lambda) \otimes V(\mu), W)$ à partir de ceux des vecteurs $b \in B$ qui sont de poids $\mu - \lambda$ et qui sont annulés par les $(e_i)_W^{\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle + 1}$. Cette possibilité d'application justifie la recherche des bonnes bases dans les $\mathfrak{g}$-modules. La base canonique $\mathbf{B}$ montre ici encore son utilité.

En effet, la définition duale de la définition d'une bonne base d'un $\mathfrak{g}$-module s'énonce ainsi :

Une base B d'un $\mathfrak{g}$-module W est dite duale-bonne[1] *si elle est constituée de vecteurs de poids et si, pour tous $i \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel* $\operatorname{im}\left((e_i)_W^n\right)$ *de W est un sous-espace de coordonnées par rapport à B.*

On vérifie alors immédiatement que B est une bonne base de W si et seulement si la base duale B^* est une base duale-bonne de W^*. Or la base canonique $\mathbf{B}$ de $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$ permet de construire aisément des bases duales-bonnes dans les $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie, comme le montre l'énoncé suivant.

Proposition 1 *Soit λ un poids dominant, $v_{-\lambda}$ un vecteur de plus bas poids de $V(-\lambda)$, $\varphi : \left(\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+) \to V,\ X \mapsto X \cdot v_{-\lambda}\right)$ l'épimorphisme de $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$-modules. Alors $\varphi(\mathbf{B}) \setminus \{0\}$ est une base duale-bonne de $V(-\lambda)$.*

Preuve. On sait déjà que $\varphi(\mathbf{B}) \setminus \{0\}$ est une base de $V(-\lambda)$. Elle est constituée de vecteurs de poids, car déjà $\mathbf{B}$ est constituée de vecteurs de poids, et φ ne fait que translater le poids de $-\lambda$. Il reste à vérifier que par rapport à cette base, l'image de $(e_i)_{V(-\lambda)}^n$ est un sous-espace de coordonnées de $V(-\lambda)$, pour tout $i \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Or cette dernière assertion découle immédiatement du fait que

$$\varphi^{-1}\left(\operatorname{im}\left((e_i)_{V(-\lambda)}^n\right)\right) = e_i^n\, \mathrm{U}(\mathfrak{n}_+) + \ker \varphi = e_i^n\, \mathrm{U}(\mathfrak{n}_+) + \sum_{i \in I} \mathrm{U}(\mathfrak{n}_+) e_i^{\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle + 1}$$

est un sous-espace de coordonnées de $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$ par rapport à la base $\mathbf{B}$. □

2 Rappels de théorie des carquois

2.1 Foncteurs de réflexion

Soit i un puits de Q, c'est-à-dire un sommet dont aucune flèche ne part. Alors le module simple S_i est projectif, de sorte que pour tout kQ-module M, il est équivalent de dire que le module indécomposable S_i n'est pas un facteur direct de M ou que $\operatorname{Hom}(M, S_i) = 0$. (Plus concrètement,

[1] Je concède que cette terminologie est très laide.

cela signifie que si l'on décrit M par la donnée de la collection $\{V_j ; f_{jk} : V_j \to V_k\}$ des espaces vectoriels et des flèches, alors l'application $\bigoplus_{\substack{j \text{t.q.} \\ j \to i}} f_{ji} : \bigoplus_{\substack{j \text{ t.q.} \\ j \to i}} V_j \to V_i$ est surjective.) On note kQ-$\mathbf{mod}_i^+$ la sous-catégorie pleine de kQ-$\mathbf{mod}$ formée par de tels modules M. N'importe quel objet de kQ-$\mathbf{mod}$ est lq somme directe d'un objet de kQ-$\mathbf{mod}_i^+$ et d'un module de la forme $S_i^{\oplus n}$. Dans une suite exacte courte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de kQ-modules, si M' et M'' appartiennent à kQ-$\mathbf{mod}_i^+$, alors il en est de même pour M.

De même, soit i une source de Q, c'est-à-dire un sommet où aucune flèche n'arrive. Alors le module simple S_i est injectif, de sorte que pour tout kQ-module M, il est équivalent de dire que le module indécomposable S_i n'est pas un facteur direct de M ou que $\mathrm{Hom}(S_i, M) = 0$. (Plus concrètement, cela signifie que si l'on décrit M par la donnée de la collection $\{V_j ; f_{jk} : V_j \to V_k\}$ des espaces vectoriels et des flèches, alors l'application $\bigoplus_{\substack{j \text{ t.q.} \\ i \to j}} f_{ij} : V_i \to \bigoplus_{\substack{j \text{t.q.} \\ i \to j}} V_j$ est injective.) On note kQ-$\mathbf{mod}_i^-$ la sous-catégorie pleine de kQ-$\mathbf{mod}$ formée par de tels modules M. N'importe quel objet de kQ-$\mathbf{mod}$ est lq somme directe d'un objet de kQ-$\mathbf{mod}_i^-$ et d'un module de la forme $S_i^{\oplus n}$. Dans une suite exacte courte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de kQ-modules, si M' et M'' appartiennent à kQ-$\mathbf{mod}_i^-$, alors il en est de même pour M.

On suppose désormais que i est un puits de Q et on note s_iQ le carquois obtenu en renversant les flèches arrivant en i. Ainsi i est une source de s_iQ. On définit deux foncteurs

$$\Phi_i^+ : kQ\text{-}\mathbf{mod} \to ks_iQ\text{-}\mathbf{mod}_i^- \qquad \text{et} \qquad \Phi_i^- : ks_iQ\text{-}\mathbf{mod} \to kQ\text{-}\mathbf{mod}_i^+$$

de la façon suivante sur les objets :

- À un kQ-module M décrit par la donnée de la collection $\{V_j ; f_{jk} : V_j \to V_k\}$, on associe le ks_iQ-module $\Phi_i^+(M) = M'$ décrit par la collection $\{V'_j ; f'_{jk} : V'_j \to V'_k\}$ avec $V'_j = V_j$ si $j \neq i$, $f'_{jk} = f_{jk}$ si $j \neq i$, V'_i est le noyau de $\bigoplus_{\substack{j \text{t.q.} \\ j \to i}} f_{ji} : \bigoplus_{\substack{j \text{ t.q.} \\ j \to i}} V_j \to V_i$, et f'_{ij} est l'application naturelle de V'_i dans $V'_j = V_j$ pour une flèche de j vers i dans Q.
- À un ks_iQ-module M décrit par la donnée de la collection $\{V_j ; f_{jk} : V_j \to V_k\}$, on associe le kQ-module $\Phi_i^-(M) = M''$ décrit par la collection $\{V''_j ; f''_{jk} : V''_j \to V''_k\}$ avec $V''_j = V_j$ si $j \neq i$, $f''_{jk} = f_{jk}$ si $k \neq i$, V''_i est le conoyau de $\bigoplus_{\substack{j \text{ t.q.} \\ i \to j}} f_{ij} : V_i \to \bigoplus_{\substack{j \text{t.q.} \\ i \to j}} V_j$, et f''_{ji} est l'application naturelle de $V''_j = V_j$ dans V''_i pour une flèche de i vers j dans s_iQ.

La définition des foncteurs $\Phi_i^\pm$ au niveau des flèches est analogue.

Ces notations permettent d'énoncer le théorème de Bernstein, Gelfand et Ponomarev :

Théorème 2 *Les foncteurs Φ_i^+ et Φ_i^- définissent des équivalences de k-catégories additives réciproques l'une de l'autre*

$$kQ\text{-}\mathbf{mod}_i^+ \overset{\Phi_i^+}{\longleftrightarrow} ks_iQ\text{-}\mathbf{mod}_i^-.$$

Si M est un objet de ks_iQ-$\mathbf{mod}_i^-$, alors $\mathbf{dim}(\Phi_i^- M)$ est l'image de $\mathbf{dim}\, M$ par la réflexion simple $s_i : \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}^I, \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \alpha_i)\alpha_i$.

Enfin, si l'on applique le foncteur Φ_i^- à une suite exacte courte

$$0 \to N \to P \to M \to 0$$

dans ks_iQ-$\mathbf{mod}$ formée d'objets de ks_iQ-$\mathbf{mod}_i^-$, on obtient une suite exacte courte

$$0 \to \Phi_i^- N \to \Phi_i^- P \to \Phi_i^- M \to 0$$

formée d'objets de kQ-$\mathbf{mod}_i^+$; appliquée à tous les kQ-modules P possibles, cette construction définit un isomorphisme $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^1_{kQ}(\Phi_i^- M, \Phi_i^- N)$ pour tout couple (M,N) d'objets de ks_iQ-$\mathbf{mod}_i^-$.

3 Algèbres de Hall

3.1 Contexte général

Nous partons ici de la donnée d'un corps k et d'une catégorie k-linéaire et abélienne $\mathscr{C}$, ce qui signifie que les groupes $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}$ sont des k-espaces vectoriels et que la composition des homomorphismes est une opération k-bilinéaire. Dans ce cas, les groupes d'extension $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{C}}$ sont aussi des k-espaces vectoriels. Les lecteurs que ce langage abstrait incommoderait peuvent sans réelle perte se contenter de penser au cas où $\mathscr{C}$ est la catégorie des représentations de dimension finie d'une k-algèbre.

On supposera que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(H1) Les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathscr{C}$ forment un ensemble, qui sera noté $\mathrm{Iso}(\mathscr{C})$.

(H2) Pour tous objets V, W de $\mathscr{C}$, les espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V,W)$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(V,W)$ sont de dimension finie sur k.

(H3) Pour tous objets V, W de $\mathscr{C}$, $\mathrm{Ext}^2_{\mathscr{C}}(V,W) = 0$.

(H4) Tout objet dans $\mathscr{C}$ possède une suite de Jordan-Hölder (c'est-à-dire une filtration finie dont les sous-quotients successifs sont simples).

La condition dans l'hypothèse (H2) stipulant que les k-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V,W)$ sont tous de dimension finie entraîne que la catégorie $\mathscr{C}$ est multiloculaire, c'est-à-dire que le théorème de Krull-Schmidt y est vrai : tout objet V de $\mathscr{C}$ s'écrit comme une somme directe finie $W_1 \oplus \cdots \oplus W_\ell$ d'objets indécomposables, les classes d'isomorphisme des termes (listées avec multiplicité) étant indépendants du choix de la décomposition. La preuve de cette indépendance repose sur le lemme de Fitting : si W est un objet indécomposable de $\mathscr{C}$, alors un endomorphisme de W est soit nilpotent, soit bijectif. Une conséquence de ce lemme de Fitting est que si W est un objet indécomposable de $\mathscr{C}$, alors $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(W)$ est un anneau local, c'est-à-dire que son radical de Jacobson est formé de tous les éléments non-inversibles et est le plus grand idéal de $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(W)$; le quotient de $\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(W)$ par son radical de Jacobson est un corps gauche.

Nous aurons besoin de quelques notations complémentaires. Si V est un objet de $\mathscr{C}$, nous noterons $[V] \in \mathrm{Iso}(\mathscr{C})$ sa classe d'isomorphisme. Inversement, dans chaque classe d'isomorphisme $\alpha \in \mathrm{Iso}(\mathscr{C})$, nous choisissons un objet $M(\alpha)$. La classe d'isomorphisme des objets nuls sera notée $[0]$. On définit enfin une opération interne $\oplus$ sur $\mathrm{Iso}(\mathscr{C})$ en posant $\alpha \oplus \beta$ égal à la classe d'isomorphisme de $M(\alpha) \oplus M(\beta)$.

Le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{C}$ est le groupe abélien $K(\mathscr{C})$ engendré par les symboles $d(\alpha)$ (pour $\alpha \in \mathrm{Iso}(\mathscr{C})$) soumis aux relations $d(\beta) = d(\alpha) + d(\gamma)$ chaque fois qu'il existe une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M(\gamma) \longrightarrow M(\beta) \longrightarrow M(\alpha) \longrightarrow 0.$$

Compte tenu de l'hypothèse (H4), le groupe $K(\mathscr{C})$ est isomorphe au groupe abélien libre sur les symboles $d(\alpha)$, où α décrit l'ensemble des classes de conjugaison d'objets simples. Pour simplifier les notations, nous noterons $d(V)$ plutôt que $d([V])$ l'image dans le groupe de Grothendieck de la classe d'isomorphisme d'un objet V de $\mathscr{C}$.

L'hypothèse (H3) entraîne l'existence, pour toute suite exacte courte

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

dans $\mathscr{C}$, de suites exactes longues à six termes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V'', W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V', W) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(V'', W) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(V', W) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, V') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(W, V'') \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(W, V') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(W, V) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(W, V'') \longrightarrow 0.$$

De cela, on déduit l'existence d'une forme biadditive $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur le groupe $K(\mathscr{C})$, appelée « forme d'Euler », telle que pour tous objets V, W de $\mathscr{C}$,

$$\langle d(V), d(W) \rangle = \dim \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V, W) - \dim \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(V, W).$$

On suppose à présent que k est un corps fini, disons $k = \mathbb{F}_q$. Dans ce cas, les espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V, W)$ et $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{C}}(V, W)$, qui sont de dimension finie sur k, sont des ensembles finis. Une conséquence de cela est que si l'on se donne trois classes d'isomorphisme $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Iso}(\mathscr{C})$, alors le nombre de sous-objets $X \subseteq M(\beta)$ tels que $X \in \gamma$ et $M(\beta)/X \in \alpha$ est fini[2] ; on l'appelle « nombre de Hall » et on le note $\phi^{\beta}_{\alpha\gamma}$. Enfin, on note g_α l'ordre du groupe $\mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(M(\alpha))$, pour toute classe d'isomorphisme $\alpha \in \mathrm{Iso}(\mathscr{C})$. La proposition suivante donne les principales propriétés de ces nombres.

Proposition 3 *Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{Iso}(\mathcal{A})$ sont des classes d'isomorphisme, alors*

(i) les ensembles $\{\lambda \in \mathrm{Iso}(\mathcal{C}) \mid \phi^{\lambda}_{\alpha\gamma} \neq 0\}$ et $\{(\rho, \sigma) \in \mathrm{Iso}(\mathcal{A})^2 \mid \phi^{\beta}_{\rho\sigma} \neq 0\}$ sont finis ;

(ii) $\phi^{\beta}_{\alpha[0]} = \delta_{\alpha\beta}$ et $\phi^{\beta}_{[0]\gamma} = \delta_{\beta\gamma}$ (symboles de Kronecker), et $g_{[0]} = 1$;

(iii) $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Iso}(\mathcal{A})} \phi^{\lambda}_{\alpha\beta} \phi^{\delta}_{\lambda\gamma} = \sum_{\lambda \in \mathrm{Iso}(\mathcal{A})} \phi^{\delta}_{\alpha\lambda} \phi^{\lambda}_{\beta\gamma}$;

(iv) le nombre $q^{\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M(\alpha), M(\gamma))} \, \phi^{\beta}_{\alpha\gamma} \, g_\alpha g_\gamma / g_\beta$ est un entier ;

(v) $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Iso}(\mathcal{A})} \phi^{\lambda}_{\alpha\gamma} \, g_\alpha g_\gamma / g_\lambda = q^{-\langle d(\alpha), d(\gamma) \rangle}$;

(vi) si $M(\alpha)$ and $M(\gamma)$ sont des objets indécomposables et si $M(\beta)$ est un objet décomposable, alors $q - 1$ divise $\phi^{\beta}_{\alpha\gamma} - \phi^{\beta}_{\gamma\alpha}$;

(vii) la formule suivante est valable :

$$g_\alpha g_\beta g_\gamma g_\delta \sum_{\lambda \in \mathrm{Iso}(\mathcal{A})} \phi^{\lambda}_{\alpha\beta} \, \phi^{\lambda}_{\gamma\delta} / g_\lambda = \sum_{\rho, \sigma, \tau, \upsilon \in \mathrm{Iso}(\mathcal{A})} q^{-\langle d(\rho), d(\upsilon) \rangle} \, \phi^{\alpha}_{\rho\sigma} \, \phi^{\beta}_{\tau\upsilon} \, \phi^{\gamma}_{\rho\tau} \, \phi^{\delta}_{\sigma\upsilon} \, g_\rho g_\sigma g_\tau g_\upsilon.$$

[2] Ce nombre peut être vu comme le nombre d'orbites du groupe $\mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(M(\alpha)) \times \mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(M(\gamma))$ agissant sur l'ensemble des couples

$$(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M(\gamma), M(\beta)) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M(\beta), M(\alpha))$$

tels que

$$0 \longrightarrow M(\gamma) \xrightarrow{f} M(\beta) \xrightarrow{g} M(\alpha) \longrightarrow 0$$

soit une suite exacte courte.

Preuve. L'assertion (i) provient des hypothèses de finitude imposées à $\mathscr{C}$; par exemple, la finitude du groupe d'extension $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M(\alpha), M(\gamma))$ entraîne la finitude de l'ensemble $\{\lambda \in \mathrm{Iso}(\mathcal{C}) \mid \phi^\lambda_{\alpha\gamma} \neq 0\}$. L'assertion (ii) est banale. Pour se persuader de la validité de l'assertion (iii), il suffit d'observer que les deux membres de la formule proposée comptent le nombre de filtrations $0 \subseteq X \subseteq Y \subseteq M(\delta)$ telles que $X \in \gamma$, $Y/X \in \beta$, $M(\delta)/Y \in \alpha$.

Pour montrer (iv), on commence par observer que $\phi^\beta_{\alpha\gamma}\, g_\alpha g_\gamma$ compte le nombre de suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow M(\gamma) \xrightarrow{f} M(\beta) \xrightarrow{g} M(\alpha) \longrightarrow 0.$$

On fait agir le groupe $\mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(M(\beta))$ sur l'ensemble de ces suites en posant $a \cdot (f, g) = (af, ga^{-1})$, pour tout $a \in \mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(M(\beta))$. Le stabilisateur d'un couple (f, g) dans cette action est

$$\{\mathrm{id}_{M(\beta)} + fhg \mid h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M(\alpha), M(\gamma))\},$$

un groupe isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M(\alpha), M(\gamma))$. Chaque $\mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(M(\beta))$-orbite dans l'ensemble des suites exactes courtes est donc de cardinal $g_\beta / q^{\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M(\alpha),M(\gamma))}$. Le nombre dans l'énoncé est donc égal au nombre d'orbites.

Pour montrer (vi), on écrit $M(\beta) = X \oplus Y$ et l'on regarde le sous-groupe $\Gamma = \{\mathrm{id}_X \oplus t\, \mathrm{id}_Y \mid t \in \mathbb{F}_q^\times\}$ de $\mathrm{Aut}(M(\beta))$. On fait alors agir $\mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(M(\alpha)) \times \mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}(M(\gamma)) \times \Gamma$ sur l'ensemble des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow M(\gamma) \xrightarrow{f} M(\beta) \xrightarrow{g} M(\alpha) \longrightarrow 0.$$

Les sous-groupes d'isotropie sont tous triviaux, sauf celui des suites de la forme

$$0 \longrightarrow M(\gamma) \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} f_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]} M(\gamma) \oplus M(\alpha) \xrightarrow{[\,0\ g_2\,]} M(\alpha) \longrightarrow 0$$

avec $f_1 \in \mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}\, M(\gamma)$ et $g_2 \in \mathrm{Aut}_{\mathscr{C}}\, M(\alpha)$. Nous voyons ainsi que $q - 1$ divise $\phi^\beta_{\alpha\gamma} - 1$ si $M(\beta) \cong M(\gamma) \oplus M(\alpha)$, et qu'il divise $\phi^\beta_{\alpha\gamma}$ dans le cas contraire.

Nous laissons la recherche d'une preuve de l'assertion (v) comme exercice pour le lecteur. En ce qui concerne l'assertion (vii), nous ne saurons mieux faire que de renvoyer le lecteur à l'article de J. A. Green cité dans la bibliographie. La preuve de Green est très astucieuse, quoique entièrement élémentaire ; c'est ici que l'hypothèse (H3) est réellement nécessaire. □

3.2 L'algèbre de Hall de $\mathscr{C}$

Nous allons à présent utiliser les données et les notations du paragraphe précédent pour construire une algèbre $\mathscr{H}(\mathscr{C})$. L'anneau de base sera l'algèbre $\widetilde{\mathscr{A}} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]/(v^2 - q)$, un quotient de l'anneau $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ des polynômes de Laurent à une indéterminée v sur l'anneau des entiers.

Nous noterons $\mathscr{H}(\mathscr{C})$ le $\widetilde{\mathscr{A}}$-module libre de base $\mathrm{Iso}(\mathscr{C})$; une classe d'isomorphisme $\alpha \in \mathrm{Iso}(\mathscr{C})$ peut donc être vue comme un vecteur de base de $\mathscr{H}(\mathscr{C})$.

Les assertions (i), (ii) et (iii) de la proposition 3 et la biadditivité de la forme d'Euler montrent que la multiplication

$$\alpha * \gamma = v^{\langle d(\alpha), d(\gamma)\rangle} \sum_{\beta \in \mathrm{Iso}(\mathscr{C})} \phi^\beta_{\alpha\gamma}\, \beta$$

munit $\mathscr{H}(\mathscr{C})$ d'une structure de $\widetilde{\mathscr{A}}$-algèbre associative, avec une unité donnée par $[0]$. Cette algèbre est graduée par le groupe $K(\mathscr{C})$, le symbole α étant homogène de degré $d(\alpha)$. Cette algèbre est appelée « l'algèbre de Hall » de la catégorie $\mathscr{C}$.

On peut également munir $\mathscr{H}(\mathscr{C})$ d'un coproduit $\Delta : \mathscr{H}(\mathscr{C}) \to \mathscr{H}(\mathscr{C}) \otimes_{\widetilde{\mathscr{C}}} \mathscr{H}(\mathscr{C})$ et d'une coünité $\varepsilon : \mathscr{H}(\mathscr{C}) \to \widetilde{\mathscr{A}}$ par

$$\Delta(\beta) = \sum_{\alpha,\gamma \in \mathrm{Iso}(\mathscr{C})} v^{\langle d(\alpha), d(\gamma)\rangle} \, \frac{g_\alpha g_\gamma}{g_\beta} \, \phi^\beta_{\alpha\gamma} \, (\alpha \otimes \gamma) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(\beta) = \delta_{\beta[0]},$$

pour tout $\beta \in \mathrm{Iso}(\mathscr{C})$. Les assertions (i)–(iv) de la proposition 3 montrent que $\mathscr{H}(\mathscr{C})$ devient une cogèbre quand on le munit de ces deux opérations, c'est-à-dire que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}(\mathscr{C}) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathscr{H}(\mathscr{C}) \otimes_{\widetilde{\mathscr{A}}} \mathscr{H}(\mathscr{C}) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] \\
\mathscr{H}(\mathscr{C}) \otimes_{\widetilde{\mathscr{A}}} \mathscr{H}(\mathscr{C}) \arrow[r, "\Delta\otimes\mathrm{id}"] & \mathscr{H}(\mathscr{C}) \otimes_{\widetilde{\mathscr{A}}} \mathscr{H}(\mathscr{C}) \otimes_{\widetilde{\mathscr{A}}} \mathscr{H}(\mathscr{C})
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{H}(\mathscr{C}) \arrow[dl, "\text{can.}"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\text{can.}"] & \\
\widetilde{\mathscr{A}} \otimes_{\widetilde{\mathscr{A}}} \mathscr{H}(\mathscr{C}) & \mathscr{H}(\mathscr{C}) \otimes_{\widetilde{\mathscr{A}}} \mathscr{H}(\mathscr{C}) \arrow[l, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"'] & \mathscr{H}(\mathscr{C}) \otimes_{\widetilde{\mathscr{A}}} \widetilde{\mathscr{A}}
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs. Par ailleurs, les structures d'algèbre et de cogèbre sur $\mathscr{H}(\mathscr{C})$ sont adjointes l'une de l'autre par rapport à la forme bilinéaire non dégénérée $(\cdot,\cdot)$ définie par

$$(\alpha, \beta) = \delta_{\alpha,\beta}/g_\alpha,$$

c'est-à-dire que pour tous $x, y, z \in \mathscr{H}(\mathscr{C})$, on a

$$(x * y, z) = (x \otimes y, \Delta(z)) \quad \text{et} \quad (x, 1) = \varepsilon(x),$$

convention étant faite de munir $\mathscr{H}(\mathscr{C}) \otimes_{\widetilde{\mathscr{A}}} \mathscr{H}(\mathscr{C})$ de la forme bilinéaire

$$(x \otimes y, z \otimes t) = (x, z)(y, t).$$

Nous pouvons résumer ces constructions dans le résultat suivant :

Proposition 4 *Muni du produit $*$, de l'unité $1 = [0]$, du coproduit Δ, de la coünité ε et de la forme bilinéaire non-dégénérée $(\cdot,\cdot)$, l'espace $\mathscr{H}(\mathscr{C})$ est une algèbre associative avec unité et une cogèbre coassociative avec coünité. Ces deux structures sont adjointes l'une de l'autre par rapport à $(\cdot,\cdot)$. De plus, ε est un homomorphisme d'algèbres, et Δ en est aussi un si l'on munit $\mathscr{H}(\mathscr{C}) \otimes_{\widetilde{\mathscr{A}}} \mathscr{H}(\mathscr{C})$ du produit tordu suivant :*

$$(\alpha \otimes \beta) * (\gamma \otimes \delta) = v^{\langle d(\beta), d(\gamma)\rangle + \langle d(\gamma), d(\beta)\rangle} \, (\alpha * \gamma) \otimes (\beta * \delta),$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{Iso}(\mathscr{A})$.

Preuve. Tous les résultats mentionnés dans la proposition ont été prouvés dans les lignes qui la précédaient, à l'exception du caractère multiplicatif de ε et de Δ. Le premier est banal, le second découle facilement de l'assertion (vii) dans la proposition 3. □

Pour rendre cette construction plus concrète, il nous faut expliquer comment on peut faire des calculs dans l'algèbre de Hall. Nous présenterons dans le paragraphe suivant 3.3 un exemple concret, mais nous pouvons dès à présent présenter deux règles générales. Pour cela, il nous faut renormaliser les éléments de la base naturelle de $\mathscr{H}(\mathscr{C})$ en posant

$$\langle\alpha\rangle = v^{\dim \operatorname{End}_{\mathscr{C}}(M(\alpha))}\alpha$$

pour tout $\alpha \in \operatorname{Iso}(\mathscr{C})$. Pour tous entiers positifs n et d, nous introduisons également l'élément

$$[n]_d^! = \frac{v^d - v^{-d}}{v^d - v^{-d}} \frac{v^{2d} - v^{-2d}}{v^d - v^{-d}} \cdots \frac{v^{nd} - v^{-nd}}{v^d - v^{-d}}$$

de $\widetilde{\mathscr{A}}$. Avec cette notation :

Proposition 5 *(i) Si* $\alpha, \gamma \in \operatorname{Iso}(\mathscr{C})$ *sont tels que* $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M(\gamma), M(\alpha)) = \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{C}}(M(\alpha), M(\gamma)) = 0$, *alors* $\langle\alpha\rangle * \langle\gamma\rangle = \langle\alpha \oplus \gamma\rangle$.

(ii) Si $\alpha \in \operatorname{Iso}(\mathscr{C})$ *est la classe d'isomorphisme d'un module indécomposable et sans auto-extension (c'est-à-dire* $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{C}}(M(\alpha), M(\alpha)) = 0$*), alors* $\langle\alpha\rangle^{*n} = [n]_d^! \langle\alpha^{\oplus n}\rangle$, *où* d *est la dimension sur* k *du corps gauche obtenu en quotientant l'algèbre locale* $\operatorname{End}_{\mathscr{C}}(M(\alpha))$ *par son idéal maximal.*

Preuve. Pour montrer l'assertion (i), on doit d'abord calculer les nombres de Hall $\phi^\beta_{\alpha\gamma}$. Toute suite exacte

$$0 \longrightarrow M(\gamma) \xrightarrow{f} M(\beta) \xrightarrow{g} M(\alpha) \longrightarrow 0$$

est scindable, puisque $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{C}}(M(\alpha), M(\gamma)) = 0$, de sorte qu'on peut supposer $\beta = \alpha \oplus \gamma$. Puisqu'en outre $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M(\gamma), M(\alpha)) = 0$, notre suite exacte est de la forme

$$0 \longrightarrow M(\gamma) \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} f_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]} M(\gamma) \oplus M(\alpha) \xrightarrow{[\,0\ g_2\,]} M(\alpha) \longrightarrow 0,$$

avec $f_1 \in \operatorname{Aut}_{\mathscr{C}}(M(\gamma))$ et $g_2 \in \operatorname{Aut}_{\mathscr{C}}(M(\alpha))$. Ainsi $\phi^\beta_{\alpha\gamma}$ vaut 1 pour $\beta = \alpha \oplus \gamma$ et vaut 0 sinon. D'un autre côté, il nous faut calculer

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{End}_{\mathscr{C}}(M(\alpha) \oplus M(\gamma)) &= \dim \operatorname{End}_{\mathscr{C}} M(\alpha) + \dim \operatorname{End}_{\mathscr{C}} M(\gamma) + \dim \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(M(\alpha), M(\gamma)) \\ &= \dim \operatorname{End}_{\mathscr{C}} M(\alpha) + \dim \operatorname{End}_{\mathscr{C}} M(\gamma) + \langle d(\alpha), d(\gamma)\rangle. \end{aligned}$$

En combinant ces deux résultats :

$$\begin{aligned} \langle\alpha\rangle * \langle\gamma\rangle &= v^{\dim \operatorname{End}_{\mathscr{C}} M(\alpha) + \dim \operatorname{End}_{\mathscr{C}} M(\gamma) + \langle d(\alpha), d(\gamma)\rangle} \sum_\beta v^{-\dim \operatorname{End} M(\beta)} \phi^\beta_{\alpha\gamma} \langle\beta\rangle \\ &= \langle\alpha \oplus \gamma\rangle. \end{aligned}$$

Pour donner une preuve complète de l'assertion (ii), il nous faudrait introduire une notation assez lourde. Pour simplifier un peu la présentation, nous allons donc nous contenter du cas où l'algèbre locale $\operatorname{End}_{\mathscr{C}}(M(\alpha))$ est sans radical, c'est-à-dire est une extension finie de degré d du corps de base $k = \mathbb{F}_q$. La preuve procède par récurrence sur n, et on comprend déjà bien l'idée de base dans le cas $n = 2$. Comme $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{C}}(M(\alpha), M(\alpha)) = 0$, la suite exacte à examiner est nécessairement scindable :

$$0 \longrightarrow M(\alpha) \xrightarrow{f} M(\alpha) \oplus M(\alpha) \longrightarrow M(\alpha) \longrightarrow 0$$

et l'on peut voir $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ comme une matrice non-nulle de taille 2×1 à coefficients dans le corps $\operatorname{End}_{\mathscr{C}} M(\alpha) \cong \mathbb{F}_{q^d}$. L'image de f ne détermine f qu'à multiplication à droite par un automorphisme de $M(\alpha)$ près, donc le nombre de Hall cherché est

$$\phi_{\alpha\alpha}^{\alpha\oplus\alpha} = \left|(\operatorname{End}_{\mathscr{C}} M(\alpha))^2 \setminus \{0\}\right| / \left|\operatorname{Aut}_{\mathscr{C}} M(\alpha)\right| = (q^{2d}-1)/(q^d-1) = q^d+1 = v^d[2]^!_d.$$

On termine alors les calculs de la même manière que pour l'assertion (i). Pour les cas $n > 2$, l'argument est analogue, mais il s'agit alors de calculer le nombre de drapeaux complets du $\operatorname{End}_{\mathscr{C}} M(\alpha)$-espace vectoriel $(\operatorname{End}_{\mathscr{C}} M(\alpha))^n$; c'est ainsi qu'apparaît le coefficient $[n]^!_d$. $\square$

3.3 Algèbre de Hall générique pour les représentations des carquois de t.r.f.

Dans le paragraphe 3.1, nous étions partis d'une catégorie k-linéaire et abélienne $\mathscr{C}$ satisfaisant à quatre hypothèses (H1)–(H4). Un exemple pour une telle $\mathscr{C}$ est la catégorie des représentations de dimension finie d'une k-algèbre, l'hypothèse (H3) exigeant en outre que cette k-algèbre soit « quasi-héréditaire », c'est-à-dire de dimension cohomologique au plus 1. C'est le cas de l'algèbre des chemins d'un carquois sans cycle orienté.

Nous considérons donc un graphe de Dynkin de type A, D ou E, dont on note I l'ensemble des sommets. En orientant chaque arête, on obtient un carquois Q. On se donne un corps k et on s'intéresse à la catégorie kQ-**mod** des représentations de dimension finie de la k-algèbre des chemins de Q. Cette catégorie kQ-**mod** satisfait à toutes les hypothèses du paragraphe 3.1.

À isomorphisme près, les objets simples de kQ-**mod** sont les modules S_i, concentrés en un seul degré. Le groupe de Grothendieck $K(kQ\text{-}\mathbf{mod})$ est isomorphe au groupe abélien libre sur les symboles $d(S_i)$ et peut donc être décrit de façon indépendante de k, à savoir par le groupe abélien libre $\mathbb{Z}^I$. À travers cet isomorphisme, le symbole $d(V)$ donnant l'image dans le groupe de Grothendieck d'une représentation V de Q s'identifie au vecteur-dimension $\mathbf{dim}\, V$ dans $\mathbb{N}^I \subseteq \mathbb{Z}^I$.

La forme d'Euler se calcule aisément dans cette description, puisque si V et W sont deux kQ-modules de vecteurs-dimensions (v_i) et $(w_i) \in \mathbb{N}^i$, alors

$$\langle d(V), d(W)\rangle = \dim \operatorname{Hom}_Q(V,W) - \dim \operatorname{Ext}^1_Q(V,W) = \sum_i v_i w_i - \sum_{i\to j} v_i w_j.$$

En fait, la forme quadratique $q : d \mapsto \langle d, d\rangle$ sur $\mathbb{Z}^I$ n'est autre que la forme de Tits du paragraphe 2.

Le théorème de Gabriel affirme que les classes d'isomorphisme des kQ-modules indécomposables sont en bijection avec l'ensemble $R_+ = \{d \in \mathbb{N}^I \mid q(d) = 1\}$ des racines positives de la forme de Tits. Combiné au théorème de Krull-Schmidt, ceci nous conduit à une description de l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations de Q, à savoir $\operatorname{Iso}(kQ\text{-}\mathbf{mod}) \cong \mathbb{N}^{R_+}$. Cette description étant indépendante de k, nous posons $\operatorname{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod}) = \mathbb{N}^{R_+}$.

La théorie d'Auslander-Reiten de la catégorie kQ-**mod**, qui permet de calculer entre autres les espaces d'homomorphismes et d'extensions de cette catégorie, est extrêmement bien comprise. Grâce à elle, Ringel a pu montrer le résultat que voici.

Proposition 6 *Pour toutes classes $\alpha, \beta, \gamma \in \operatorname{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})$, il existe des polynômes $\tilde{g}_\alpha$ et $\tilde{\phi}^\beta_{\alpha,\gamma} \in \mathbb{Z}[q]$ tels que pour tout corps fini k, les nombres g_α et $\phi^\beta_{\alpha,\gamma}$ définis au paragraphe 3.1 soient les évaluations de $\tilde{g}_\alpha$ et $\tilde{\phi}^\beta_{\alpha,\gamma}$ en $q = |k|$.*

Les polynômes $\tilde{g}_\alpha$ et $\tilde{\phi}^\beta_{\alpha,\gamma}$ vérifient les identités de la proposition 3, puisque ces identités sont satisfaites par leurs évaluations g_α et $\phi^\beta_{\alpha,\gamma}$ en tout q cardinal d'un corps fini.

Nous pouvons à présent définir l'algèbre de Hall générique des représentations du carquois Q. L'anneau de base est l'anneau $\mathscr{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ des polynômes de Laurent à coefficients entiers. On appelle $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ le $\mathscr{A}$-module libre de base $\mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})$, et on le munit de la multiplication $*$, de l'unité $[0]$, du coproduit $\Delta : \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \to \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$, de la coünité $\varepsilon : \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \to \mathscr{A}$ et de la forme bilinéaire non-dégénérée $(\cdot,\cdot)$ définis par

$$\alpha * \gamma = v^{\langle \mathbf{dim}\,\alpha, \mathbf{dim}\,\gamma\rangle} \sum_{\beta \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})} \tilde{\phi}^{\beta}_{\alpha,\gamma}(v^2)\beta$$

$$\Delta(\beta) = \sum_{\alpha,\gamma \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})} v^{\langle d(\alpha), d(\gamma)\rangle} \frac{\tilde{g}_\alpha \tilde{g}_\gamma}{\tilde{g}_\beta} \tilde{\phi}^{\beta}_{\alpha\gamma} \, (\alpha \otimes \gamma)$$

$$\varepsilon(\beta) = \delta_{\beta[0]}, (\alpha, \beta) \qquad = \delta_{\alpha\beta}/\tilde{g}_\alpha.$$

Un énoncé analogue à celui du la proposition 4 est valable pour cette algèbre de Hall générique $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$.

On sait que l'anneau des endomorphismes d'un kQ-module indécomposable V est trivial, et qu'un tel module est sans extension :

$$\mathrm{End}_{kQ}(V) = k \quad \text{et} \quad \mathrm{Ext}^1_{kQ}(V, V) = 0.$$

Par ailleurs, la connaissance du carquois d'Auslander-Reiten de $kQ\text{-}\mathbf{mod}$ permet d'énumérer les classes d'isomorphisme de représentations indécomposables $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ de sorte que

$$\big(\mathrm{Hom}_{kQ}(M(\beta_a), M(\beta_b)) \neq 0\big) \Rightarrow \big(a \leq b\big) \qquad \text{et} \qquad \big(\mathrm{Ext}^1_{kQ}(M(\beta_a), M(\beta_b)) \neq 0\big) \Rightarrow \big(a > b\big).$$

(De manière plus précise, il suffit de choisir la numérotation de sorte que $a \leq b$ dès qu'il existe un chemin allant de β_a vers β_b dans le carquois d'Aulslander-Reiten.)

Prenant alors une suite finie $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_\nu) \in \mathbb{N}^\nu$, on peut écrire (en utilisant une version générique de la proposition 5)

$$\begin{aligned}\langle \beta_1^{\oplus c_1} \oplus \cdots \oplus \beta_\nu^{\oplus c_\nu}\rangle &= \langle \beta_1^{\oplus c_1}\rangle * \cdots * \langle \beta_\nu^{\oplus c_\nu}\rangle \\ &= \frac{\langle \beta_1\rangle^{*c_1}}{[c_1]^!} * \cdots * \frac{\langle \beta_\nu\rangle^{*c_\nu}}{[c_\nu]^!},\end{aligned}$$

où les coefficients $[n]^!$ sont les éléments de $\mathscr{A}$ définis par

$$[n]^! = \frac{v - v^{-1}}{v - v^{-1}} \, \frac{v^2 - v^{-2}}{v - v^{-1}} \cdots \frac{v^n - v^{-n}}{v - v^{-1}}.$$

Ces éléments, dont le membre de droite donne une écriture comme produit de « puissances divisées », forment une base du $\mathscr{A}$-module $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$, puisque le terme entre crochets dans le membre de gauche parcourt $\mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ quand $\mathbf{c}$ décrit $\mathbb{N}^\nu$.

Le dernier résultat de ce paragraphe est un lemme dont nous nous servirons plusieurs fois dans la suite. Le contexte est le suivant. On numerote les sommets du carquois $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ de sorte qu'il ne puisse y avoir une flèche dans Q de i_a vers i_b que si $a > b$, ou, ce qui est équivalent, de sorte que

$$\mathrm{Ext}^1_{kQ}(S_{i_a}, S_{i_b}) \neq 0 \Rightarrow a > b.$$

Pour parvenir à cela, il suffit par exemple de prendre les éléments de I selon l'ordre dans lequel apparaissent les classes de représentations simples dans la suite $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$. Ceci fait, le choix d'un n-uplet $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ est équivalent au choix d'un vecteur-dimension, à savoir $\sum_a d_a \,\mathbf{dim}\, S_{i_a}$.

Proposition 7 *Pour tout n-uplet $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$,*

$$\frac{\langle [S_{i_n}] \rangle^{*d_n}}{[d_n]^!} * \cdots * \frac{\langle [S_{i_1}] \rangle^{*d_1}}{[d_1]^!} = \sum_{\beta} v^{-\dim \mathrm{Ext}^1_{kQ}(M(\beta), M(\beta))} \langle \beta \rangle,$$

où la somme dans le membre de droite porte sur toutes les classes d'isomorphisme $\beta \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ dont le vecteur-dimension est $\mathbf{dim}\,\beta = \sum_{1 \leq a \leq n} d_a \,\mathbf{dim}\, S_{i_a}$.

Preuve. On montre par récurrence sur $1 \leq a \leq n$ que

$$\frac{\langle [S_{i_a}] \rangle^{*d_a}}{[d_a]^!} * \cdots * \frac{\langle [S_{i_1}] \rangle^{*d_1}}{[d_n]^!} = \sum_{\beta} v^{-\dim \mathrm{Ext}^1_{kQ}(M(\beta), M(\beta))} \langle \beta \rangle,$$

où la somme dans le membre de droite porte sur toutes les classes d'isomorphisme $\beta \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ dont le vecteur-dimension est $\mathbf{dim}\,\beta = \sum_{1 \leq b \leq a} d_b \,\mathbf{dim}\, S_{i_b}$. L'assertion est banale pour $a = 1$; supposons-la vraie au cran $a - 1$ et montrons-la au cran a.

L'hypothèse de récurrence s'écrit

$$\frac{\langle [S_{i_{a-1}}] \rangle^{*d_{a-1}}}{[d_{a-1}]^!} * \cdots * \frac{\langle [S_{i_1}] \rangle^{*d_1}}{[d_n]^!} = \sum_{\substack{\gamma \\ \mathbf{dim}\,\gamma = \sum\limits_{1 \leq b \leq a-1} d_b \,\mathbf{dim}\, S_{i_b}}} v^{-\dim \mathrm{Ext}^1_{kQ}(M(\gamma), M(\gamma))} \langle \gamma \rangle.$$

N'importe quelle représentation V de Q de vecteur-dimension $\mathbf{dim}\, V = \sum_{1 \leq b \leq a} d_b \,\mathbf{dim}\, S_{i_b}$ admet un unique sous-module W isomorphe à $S_{i_a}^{\oplus d_a}$, et le quotient V/W est de vecteur-dimension $\mathbf{dim}(V/W) = \sum_{1 \leq b \leq a-1} d_b \,\mathbf{dim}\, S_{i_b}$. Si l'on appelle β et γ les classes d'isomorphisme de V et V/W respectivement, alors

$$\begin{aligned}
&\dim \mathrm{End}_{kQ} M(\beta) - \dim \mathrm{Ext}^1_{kQ}(M(\beta), M(\beta)) \\
&\quad = \langle \mathbf{dim}\,\beta, \mathbf{dim}\,\beta \rangle \\
&\quad = \langle \mathbf{dim}\, S_{i_a}^{\oplus d_a} + \mathbf{dim}\,\gamma, \mathbf{dim}\, S_{i_a}^{\oplus d_a} + \mathbf{dim}\,\gamma \rangle \\
&\quad = \langle \mathbf{dim}\, S_{i_a}^{\oplus d_a}, \mathbf{dim}\, S_{i_a}^{\oplus d_a} \rangle + \langle \mathbf{dim}\, S_{i_a}^{\oplus d_a}, \mathbf{dim}\,\gamma \rangle + \langle \mathbf{dim}\,\gamma, \mathbf{dim}\,\gamma \rangle \\
&\quad = \dim \mathrm{End}_{kQ}(S_{i_a}^{\oplus d_a}) + \langle \mathbf{dim}(S_{i_a}^{\oplus d_a}), \mathbf{dim}\,\gamma \rangle + \dim \mathrm{End}\, kQ M(\gamma) - \dim \mathrm{Ext}^1_{kQ}(M(\gamma), M(\gamma)),
\end{aligned}$$

puisque

$$\langle \mathbf{dim}\, S_{i_b}, \mathbf{dim}\, S_{i_a} \rangle = \dim \mathrm{Hom}_{kQ}(S_{i_b}, S_{i_a}) - \dim \mathrm{Ext}^1_{kQ}(S_{i_b}, S_{i_a}) = 0 \quad \text{si } b < a.$$

On calcule alors facilement :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\beta \\ \mathbf{dim}\,\beta=\sum_{1\leq b\leq a} d_b\,\mathbf{dim}\,S_{i_b}}} v^{-\dim \operatorname{Ext}^1_{kQ}(M(\beta),M(\beta))}\langle\beta\rangle \\
&\quad= \sum_{\substack{\gamma \\ \mathbf{dim}\,\gamma=\sum_{1\leq b\leq a-1} d_b\,\mathbf{dim}\,S_{i_b}}} v^{\dim \operatorname{End}_{kQ}(S_{i_a}^{\oplus d_a})+\dim \operatorname{End} kQM(\gamma)-\dim \operatorname{Ext}^1_{kQ}(M(\gamma),M(\gamma))}[S_{i_a}^{\oplus d_a}]*\gamma \\
&\quad= \langle [S_{i_a}]^{\oplus d_a}\rangle * \sum_{\substack{\gamma \\ \mathbf{dim}\,\gamma=\sum_{1\leq b\leq a-1} d_b\,\mathbf{dim}\,S_{i_b}}} v^{-\dim \operatorname{Ext}^1_{kQ}(M(\gamma),M(\gamma))}\langle\gamma\rangle \\
&\quad= \frac{\langle [S_{i_a}]\rangle^{*d_a}}{[d_a]^!} * \cdots * \frac{\langle [S_{i_1}]\rangle^{*d_1}}{[d_n]^!},
\end{aligned}$$

ce qui montre l'hypothèse de récurrence au cran a.

Si l'on fait abstraction des complications dans l'écriture de la preuve causées par la mise en place de la récurrence et le calcul des puissances de v, on s'aperçoit que le point crucial est l'observation que toute représentation V de Q de vecteur-dimension $\mathbf{dim}\,V = \sum_{1\leq b\leq a} d_b\,\mathbf{dim}\,S_{i_b}$ possède une unique filtration

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = M$$

pour laquelle $V_a/V_{a-1} \cong S_{i_a}^{\oplus d_a}$. $\square$

3.4 Une version géométrique de l'algèbre de Hall

Le but de ce paragraphe est de reformuler en langage géométrique la définition de l'algèbre de Hall $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ énoncée dans le paragraphe 3.3. Cette reformulation est une étape cruciale dans la preuve de Lusztig de l'existence de la base canonique (voir le lemme 27).

On considère donc un carquois Q de type de représentation finie et on appelle I l'ensemble de ses sommets. On se donne un nombre primaire q et on note k une clôture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_q$. Toutes les variétés algébriques considérées dans ce paragraphes seront définies sur k.

Pour tout vecteur-dimension $\alpha \in \mathbb{N}^I$, les classes d'isomorphisme de représentations de Q sur k en dimension α sont en correspondance bijective avec les $\mathrm{GL}(\alpha,k)$-orbites dans l'espace $\mathrm{Rep}_(Q,\alpha,k)$: à une classe d'isomorphisme λ de dimension α correspond l'orbite $\mathscr{O}_\lambda$ des représentations de Q sur k^α appartenant à λ. On note $F(\mathrm{Rep}(Q,\alpha,k),\mathscr{A})^{\mathrm{GL}(\alpha,k)}$ l'ensemble des fonctions $\mathrm{GL}(\alpha,k)$-invariantes sur $\mathrm{Rep}(Q,\alpha,k)$, à valeurs dans $\mathscr{A}$. Les fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{\mathscr{O}_\lambda}$ des différentes orbites $\mathscr{O}_\lambda$ forment une base du $\mathscr{A}$-module $F(\mathrm{Rep}(Q,\alpha,k),\mathscr{A})^{\mathrm{GL}(\alpha,k)}$, lequel est donc libre.

On prend à présent trois vecteurs-dimensions α, β et γ avec $\beta=\alpha+\gamma$. On considère le diagramme suivant, dans lequel les flèches sont des morphismes de variétés algébriques :

$$\mathrm{Rep}(Q,\alpha,k)\times\mathrm{Rep}(Q,\gamma,k) \xleftarrow{f} E \xrightarrow{g} F \xrightarrow{h} \mathrm{Rep}(Q,\beta,k).$$

Ici, E est l'ensemble des quadruplets (x,U,a,c) formés d'un point x de $\mathrm{Rep}(Q,\beta,k)$, d'un sous-espace U gradué de k^β stable par x et de dimension graduée γ, et de deux isomorphismes d'espaces vectoriels gradués $a : k^\beta/U \xrightarrow{\sim} k^\alpha$ et $c : U \xrightarrow{\sim} k^\gamma$. L'espace F est l'ensemble des couples (x,U) formés d'un point x de $\mathrm{Rep}(Q,\beta,k)$ et d'un sous-espace U gradué de k^β stable par x et de dimension graduée γ. L'application g est la projection qui consiste à oublier les composantes a et c. L'application h est la projection qui consiste à oublier U. L'application f envoie (x, U, a, c) sur le couple (y, z), où y et z sont les représentations de Q sur les espaces vectoriels gradués k^α et k^γ respectivement, obtenues en transportant par les isomorphismes a et c les représentations induites par x sur k^β/U et sur U, respectivement.

Le groupe $\mathrm{GL}(\alpha, k)$ agit sur E et $\mathrm{Rep}(Q, \alpha, k)$; le groupe $\mathrm{GL}(\gamma, k)$ agit sur E et $\mathrm{Rep}(Q, \gamma, k)$; le groupe $\mathrm{GL}(\beta, k)$ agit sur E, F et $\mathrm{Rep}(Q, \beta, k)$. Les applications f, g et h sont équivariantes par rapport à ces actions.

Nous avons alors l'interprétation géométrique suivante des coefficients de Hall. Si λ, μ et ν sont trois classes d'isomorphisme de représentations de Q de vecteurs-dimensions respectifs α, β et γ, alors pour tout entier $n \geq 1$, le coefficient de Hall $\tilde{\Phi}^\mu_{\lambda\nu}(q^n)$ est égal au nombre de points $\mathbb{F}_{q^n}$-rationnels de $h^{-1}(x) \cap g\big(f^{-1}(\mathcal{O}_\lambda \times \mathcal{O}_\nu)\big)$, où x est un point quelconque de $\mathcal{O}_\mu$ (le résultat ne dépend pas du choix de x).

Nous définissons alors une application bilinéaire

$$F(\mathrm{Rep}(Q, \alpha, k), \mathscr{A})^{\mathrm{GL}(\alpha,k)} \times F(\mathrm{Rep}(Q, \gamma, k), \mathscr{A})^{\mathrm{GL}(\gamma,k)} \to F(\mathrm{Rep}(Q, \beta, k), \mathscr{A})^{\mathrm{GL}(\beta,k)}$$

en posant

$$\varphi \cdot \psi = v^{-\dim f + \dim g} h_! g_\flat f^*(\varphi \times \psi)$$

pour tout $\varphi \in F(\mathrm{Rep}(Q, \alpha, k), \mathscr{A})^{\mathrm{GL}(\alpha,k)}$ et tout $\psi \in F(\mathrm{Rep}(Q, \gamma, k), \mathscr{A})^{\mathrm{GL}(\alpha,k)}$. Il faut ici expliquer les conventions d'écriture utilisées.

- f et g sont des fibrations localement triviales ; $\dim f$ et $\dim g$ désignent la dimension des fibres de f et g respectivement. On peut facilement vérifier que

$$\dim f - \dim g = \dim \mathrm{GL}(\beta, k) - \dim \mathrm{GL}(\alpha, k) - \dim \mathrm{GL}(\gamma, k) - \langle \alpha, \gamma \rangle.$$

- $\varphi \times \psi$ désigne la fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ sur $\mathrm{Rep}(Q, \alpha, k) \times \mathrm{Rep}(Q, \gamma, k)$; cette fonction est invariante sous l'action du groupe $\mathrm{GL}(\alpha, k) \times \mathrm{GL}(\gamma, k)$.
- Pour toute fonction χ sur une variété Y et tout morphisme de variétés $t : X \to Y$, la notation $t^*(\chi)$ désigne la fonction $\chi \circ t$. Dans notre cas, $f^*(\varphi \times \psi)$ est une fonction définie sur E et qui est invariante sous l'action des groupes $\mathrm{GL}(\alpha, k)$, $\mathrm{GL}(\beta, k)$ et $\mathrm{GL}(\gamma, k)$.
- Pour tout fibré principal $t : X \to Y$ sous un groupe G[3] et toute fonction χ sur X invariante sous l'action de G, il existe une unique fonction η sur Y telle que $\chi = t^*(\eta)$; on pose $t_\flat(\chi) = \eta$. Dans notre cas, le morphisme $g : E \to F$ est un fibré principal de groupe $\mathrm{GL}(\alpha, k) \times \mathrm{GL}(\gamma, k)$, et la construction fournit la fonction $g_\flat f^*(\varphi \times \psi)$ sur F, laquelle est invariante sous l'action du groupe $\mathrm{GL}(\beta, k)$.
- Enfin pour tout morphisme propre $u : X \to Y$ et toute fonction χ sur X, on souhaite définir $u_!(\chi)$ comme étant la fonction sur Y qui, en un point y, prend la valeur $\sum_{x \in u^{-1}(y)} \chi(x)$ (autrement dit, $u_!(\chi)$ est l'intégrale de χ le long des fibres de u). Le sens à donner à cette somme est que si y est un point $\mathbb{F}_{q^n}$-rationnel de Y, alors l'évaluation en $v = q^{n/2}$ de l'élément $u_!(\chi)(y)$ de $\mathscr{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ est

$$u_!(\chi)(y)\big|_{v=q^{n/2}} = \sum_{\substack{x \in X(\mathbb{F}_{q^n}) \\ \text{t.q. } u(x)=y}} \chi(x)\big|_{v=q^{n/2}}.$$

  L'existence d'une telle fonction $u_!(\chi)$ (c'est-à-dire la légalité de l'expression $\sum_{x \in u^{-1}(y)} \chi(x)$) n'est pas garantie dans la cas général d'un morphisme propre $u : X \to Y$ et d'une fonction

[3]Cela signifie que le groupe G agit librement sur X, que $Y = /G$, et que t est l'application quotient.

χ quelconques.[4] Toutefois cela marche dans notre cas : l'existence des polynômes de Hall (proposition 6) rend licite l'écriture $h_!\big(g_\flat f^*(\varphi\times\psi)\big)$. Cette dernière désigne une fonction sur $\mathrm{Rep}(Q,\beta,k)$ à valeurs dans $\mathscr{A}$ invariante sous l'action du groupe $\mathrm{GL}(\beta,k)$.

En recollant ces applications, on définit un produit sur l'espace somme

$$\mathscr{H}'(Q\text{-}\mathbf{mod})=\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{N}^I}F(\mathrm{Rep}(Q,\alpha,k),\mathscr{A})^{\mathrm{GL}(\alpha,k)},$$

ce qui munit ce dernier d'une structure d'algèbre. Par ailleurs pour chaque vecteur-dimension α, il y a un isomorphisme de $\mathscr{A}$-modules de $F(\mathrm{Rep}(Q,\alpha,k),\mathscr{A})^{\mathrm{GL}(\alpha,k)}$ sur la composante de degré α de l'algèbre de Hall $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ qui envoie la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathscr{O}_\lambda}$ sur $v^{\dim\mathrm{GL}(\alpha,k)}\lambda$, où le symbole λ est vu comme un élément de la base naturelle de $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$. Ces isomorphismes se combinent pour donner un isomorphisme de $\mathscr{A}$-modules de $\mathscr{H}'(Q\text{-}\mathbf{mod})$ sur $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$. Cet isomorphisme est en fait un isomorphisme de $\mathscr{A}$-algèbres. Les éléments $\langle\lambda\rangle$ et $v^{-\dim\mathrm{Ext}^1_{kQ}(M(\lambda),M(\lambda))}\langle\lambda\rangle$ de $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$, qui apparaissent par exemple dans les énoncés des propositions 5 et 7, correspondent respectivement dans la réalisation géométrique aux fonctions $v^{-\dim\mathscr{O}_\lambda}\mathbf{1}_{\mathscr{O}_\lambda}$ et $v^{-\dim\mathrm{Rep}(Q,\alpha,k)}\mathbf{1}_{\mathscr{O}_\lambda}$.

Nous terminons ce paragraphe en mentionnant que le coproduit Δ de l'algèbre de Hall peut être décrit par une construction géométrique du même genre que celle expliquée ici pour le produit.

4 Le théorème de Ringel

4.1 La bigèbre tordue f

Pour la construction que nous présentons dans cette section, nous partons d'un système de racines fini R dans un espace vectoriel $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$, comme dans le paragraphe 1.1. On note par un point l'unique produit scalaire sur $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ qui est invariant sous le groupe de Weyl et pour lequel les racines courtes ont pour norme $\sqrt{2}$. On choisit un ensemble de racines simples $\Delta=\{\alpha_i\mid i\in I\}$, ce qui permet de définir les entiers $d_i=\frac{1}{2}\alpha_i\cdot\alpha_i$ et la matrice de Cartan dont les coefficients sont $a_{ij}=\frac{1}{d_i}\alpha_i\cdot\alpha_j$. On appelle $\mathbb{Z}\Delta$ le sous-groupe de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ engendré par R. Enfin, on fait choix d'une indéterminée v, ce qui permet de considérer l'anneau de base $\mathscr{A}=\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$ et son corps des fractions $K=\mathbb{Q}(v)$.

Nous commençons par quelques conventions d'écriture. Pour tout $P\in K$, on note P_d l'élément de K obtenu en substituant v^d à la place de v dans P. On définit par ailleurs les éléments suivants de $\mathscr{A}$:

$$\begin{aligned}
&[n]=\frac{v^n-v^{-n}}{v-v^{-1}}=v^{n-1}+v^{n-3}+\cdots+v^{1-n} &&\text{pour tout } n\in\mathbb{Z},\\
&[n]^!=[1][2]\cdots[n] &&\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\\
&\begin{bmatrix}m\\n\end{bmatrix}=\frac{[m][m-1]\cdots[m-n+1]}{[1][2]\cdots[n]} &&\text{pour } m\in\mathbb{Z}\text{ et } n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

(Le fait que les expressions $\left[\begin{smallmatrix}m\\n\end{smallmatrix}\right]$ soient des polynômes de Laurent en v à coefficients entiers n'est ni difficile, ni complètement évident.) Si l'on substitue $v=1$ dans ces polynômes, on trouve comme valeurs n, $n!$ et $\binom{m}{n}$, respectivement.

[4] Le remède est de sortir du cadre des fonctions à valeurs dans $\mathscr{A}$ pour se placer dans celui des faisceaux pervers de Beilinson, Bernstein et Deligne. Le lien est le suivant : à un faisceau pervers L sur une k-variété X, on associe la fonction à valeurs dans $\mathscr{A}$ qui prend en un point $x\in X$ rationnel sur $\mathbb{F}_q$ la valeur $\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^iv^i\mathrm{tr}(\varphi,\mathscr{H}^i_x(L))$, où $\varphi:L\to\mathrm{Fr}_X^*L$ est un isomorphisme de L sur son tiré en arrière par le morphisme de Frobenius Fr_X de X.

Ceci posé, nous définissons l'algèbre $\mathbf{f}$ comme la K-algèbre engendrée par les symboles θ_i, pour $i \in I$, soumis aux relations suivantes, appelées « q-relations de Serre »

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{d_i} \theta_i^r \theta_j \theta_i^{1-a_{ij}-r} = 0.$$

On munit l'algèbre $\mathbf{f}$ d'une $\mathbb{Z}\Delta$-graduation en déclarant que le générateur θ_i est de degré α_i. De façon générale, le degré d'un élément homogène x sera noté $|x|$.

La proposition suivante montre que l'on peut munir $\mathbf{f}$ d'un coproduit Δ, d'une coünité ε, et d'une forme bilinéaire non-dégénérée $(\cdot,\cdot)$.

Proposition 8 *(i) Si $\mathbf{f} \otimes_K \mathbf{f}$ est munie de la multiplication*

$$(x \otimes y)(z \otimes t) = v^{|y|\cdot|z|}(xz \otimes yt) \quad \textit{(pour } y \textit{ et } z \textit{ homogènes),}$$

alors il existe des morphismes d'algèbres $\Delta : \mathbf{f} \to \mathbf{f} \otimes_K \mathbf{f}$ et $\varepsilon : \mathbf{f} \to K$ tels que

$$\Delta(\theta_i) = \theta_i \otimes 1 + 1 \otimes \theta_i \quad \textit{et} \quad \varepsilon(\theta_i) = 0.$$

Les morphismes Δ et ε sont uniquement déterminés par ces conditions. Muni de ces deux opérations, le K-espace vectoriel $\mathbf{f}$ est une K-cogèbre, c'est-à-dire que les diagrammes commutatifs de la page 9 restent commutatifs si l'on remplace $\mathscr{H}(\mathscr{C})$ et $\widetilde{\mathscr{A}}$ par $\mathbf{f}$ et K.

(ii) Il existe une unique forme bilinéaire symétrique $(\cdot,\cdot)$ sur le K-espace vectoriel $\mathbf{f}$ telle que

$$\begin{aligned} &(x, 1) = \varepsilon(x) && \textit{pour tout } x \in \mathbf{f}, \\ &(x, yz) = (\Delta(x), y \otimes z) && \textit{pour tous } x, y, z \in \mathbf{f}, \\ &(\theta_i, \theta_j) = \delta_{ij}/(1 - v^{-2d_i}). \end{aligned}$$

(Pour donner sens aux conditions figurant sur la deuxième ligne, on étend $(\cdot,\cdot)$ en une forme bilinéaire sur $\mathbf{f} \otimes_K \mathbf{f}$ en convenant que $(x \otimes y, z \otimes t) = (x, z)(y, t)$.) Deux éléments de $\mathbf{f}$ homogènes (pour la $\mathbb{Z}\Delta$-graduation) de degrés différents sont orthogonaux pour $(\cdot,\cdot)$.

(iii) La forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ est non-dégénérée.

Preuve. On appelle $\mathbf{f}'$ la K-algèbre libre sur un ensemble de générateurs $\{\theta'_i \mid i \in I\}$. À l'instar de $\mathbf{f}$, cette algèbre peut être munie d'une graduation par le groupe $\mathbb{Z}\Delta$, ce qui permet de définir un produit tordu sur $\mathbf{f}' \otimes_K \mathbf{f}'$ par

$$(x \otimes y)(z \otimes t) = v^{|y|\cdot|z|}(xz \otimes yt) \quad \text{(pour } y \text{ et } z \text{ homogènes).}$$

La propriété universelle de l'algèbre libre entraîne l'existence de deux homomorphismes d'algèbres $\Delta' : \mathbf{f}' \to \mathbf{f}' \otimes_K \mathbf{f}'$ et $\varepsilon' : \mathbf{f}' \to K$, uniquement déterminés par

$$\Delta'(\theta'_i) = \theta'_i \otimes 1 + 1 \otimes \theta'_i \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(\theta'_i) = 0.$$

Posons

$$f'_{i,j,1-a_{ij}} = \frac{1}{[1-a_{ij}]^!_{d_i}} \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{d_i} \theta'^r_i \theta'_j \theta'^{1-a_{ij}-r}_i \quad \text{pour } i, j \in I \text{ avec } i \neq j,$$

de sorte que les q-relations de Serre s'écrivent $f'_{i,j,1-a_{ij}} = 0$. Un calcul facile montre que

$$\Delta'(f'_{i,j,1-a_{ij}}) = f'_{i,j,1-a_{ij}} \otimes 1 + 1 \otimes f'_{i,j,1-a_{ij}} \quad \text{et} \quad \varepsilon'(f'_{i,j,1-a_{ij}}) = 0.$$

On en déduit qu'il est licite de définir Δ et ε en factorisant Δ' et ε' à travers l'épimorphisme canonique $\mathbf{f}' \to \mathbf{f}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{f}' \arrow[r, "\Delta'"] \arrow[d] & \mathbf{f}' \otimes_K \mathbf{f}' \arrow[d] \\ \mathbf{f} \arrow[r, dashed, "\Delta"'] & \mathbf{f} \otimes_K \mathbf{f} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{f}' \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d] & K \\ \mathbf{f} \arrow[ur, dashed, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Nous avons ainsi montré l'assertion (i).

Concernant l'assertion (ii), on définit d'abord une forme K-bilinéaire $(\cdot,\cdot)'$ sur $\mathbf{f}'$. Pour cela, on munit le dual $(\mathbf{f}')^*$ d'une structure d'algèbre en décrétant que son produit est

$$(\mathbf{f}')^* \otimes_K (\mathbf{f}')^* \hookrightarrow (\mathbf{f}' \otimes_K \mathbf{f}')^* \xrightarrow{(\Delta')^*} (\mathbf{f}')^*$$

et que son élément unité est $(\varepsilon')^*(\mathrm{id}_K)$. Il existe alors un unique morphisme d'algèbres $\Psi : \mathbf{f}' \to (\mathbf{f}')^*$ tel que $\Psi(\theta'_i)$ soit la forme linéaire sur $\mathbf{f}'$ qui envoie θ'_i sur $1/(1-v^{-2d_i})$ et qui envoie x sur 0 si x est homogène de degré différent de $|\theta'_i|$. On pose alors $(x,y)' = \Psi(x)(y)$ pour $x, y \in \mathbf{f}'$ et on vérifie immédiatement que $(x,y) = 0$ dès que x et y sont homogènes et de degrés différents. Le fait que Ψ soit un morphisme d'algèbres entraîne que

$$(xy, z)' = (x \otimes y, \Delta'(z))' \quad \text{et} \quad (1, x)' = \varepsilon'(x) \qquad \text{pour tous } x, y, z \in \mathbf{f}',$$

avec la convention que

$$(x \otimes y, z \otimes t)' = (x,z)'(y,t)'.$$

De plus, on vérifie aisément que l'ensemble des $x \in \mathbf{f}'$ vérifiant

$$(x, 1)' = \varepsilon'(x) \qquad \text{et} \qquad \forall (y,z) \in \mathbf{f}'^2,\ (x, yz)' = (\Delta'(x), y \otimes z)'$$

est une sous-algèbre de $\mathbf{f}'$ qui contient les générateurs θ'_i, donc est $\mathbf{f}'$ toute entière. Il s'ensuit que l'application $\Phi : \mathbf{f}' \to (\mathbf{f}')^*$ définie par $\Phi(x)(y) = \Psi(y)(x)$ pour $x, y \in \mathbf{f}'$ est également un morphisme d'algèbre ; comme Φ coïncide avec Ψ sur les générateurs θ'_i de $\mathbf{f}'$, il vient $\Phi = \Psi$, ce qui montre que la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)'$ est symétrique. Il nous reste à montrer que cette forme bilinéaire descend en une forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ sur $\mathbf{f}$, de façon à rendre commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{f}' \times \mathbf{f}' \arrow[r, "(\cdot,\cdot)'"] \arrow[d] & K. \\ \mathbf{f} \times \mathbf{f} \arrow[ur, dashed, "(\cdot,\cdot)"'] & \end{tikzcd}$$

Il suffit pour cela de montrer que les q-relations de Serre $f'_{i,j,1-a_{ij}}$ sont dans le radical de $(\cdot,\cdot)'$. Or si x et y sont deux éléments homogènes de degré non-nul de $\mathbf{f}'$, alors

$$(xy, f'_{i,j,1-a_{ij}})' = (x \otimes y, \Delta'(f'_{i,j,1-a_{ij}}))' = (x, f'_{i,j,1-a_{ij}})'(y,1)' + (x,1)'(y, f'_{i,j,1-a_{ij}})' = 0,$$

puisque $(x,1)' = \varepsilon'(x) = 0$ et $(y,1)' = \varepsilon'(y) = 0$. Le fait que tout élément de $\mathbf{f}'$ homogène de degré $|f'_{i,j,1-a_{ij}}|$ puisse s'écrire comme combinaison linéaire de tels produits xy entraîne alors que $(\mathbf{f}', f'_{i,j,1-a_{ij}})' = 0$, ce qui achève la démonstration de l'assertion (ii).

Démontrer la non-dégénrescence de la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ est un travail assez délicat. Une stratégie possible est de montrer que l'algèbre $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$, dont nous allons bientôt voir qu'elle est la spécialisation de $\mathbf{f}$ à $v = 1$, satisfait un résultat analogue. Cette spécialisation ne peut en revanche pas être conduite brutalement pour la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$, ne serait-ce qu'à cause de la condition $(\theta_i, \theta_j) = \delta_{ij}/(1 - v^{-2d_i})$. Il est par conséquent plus sage d'admettre l'assertion (iii). $\square$

4.2 La spécialisation à $v = 1$

On appelle « puissances divisées » des générateurs θ_i les expressions $\theta_i^{(r)} = \theta_i^r/[r]^!_{d_i}$. On note $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$ la sous-algèbre engendrée sur $\mathscr{A}$ par les $\theta_i^{(r)}$ pour $i \in I$ et $r \in \mathbb{N}$.

Proposition 9 *(i) $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$ est une $\mathscr{A}$-forme de $\mathbf{f}$, c'est-à-dire une sous-$\mathscr{A}$-algèbre, libre en tant que $\mathscr{A}$-module, telle que l'application naturelle $\mathbf{f}_{\mathscr{A}} \otimes_{\mathscr{A}} K \to \mathbf{f}$ soit un isomorphisme de K-algèbres.*

(ii) En envoyant v sur 1, on peut voir $\mathbb{C}$ comme une $\mathscr{A}$-algèbre, ce qui permet de considérer $\mathbf{f}_{\mathscr{A}} \otimes_{\mathscr{A}} \mathbb{C}$, la « spécialisation de $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$ à $v = 1$ ». Ceci étant, il existe un unique homomorphisme d'algèbres $\Xi : \mathrm{U}(\mathfrak{n}_+) \to \mathbf{f}_{\mathscr{A}} \otimes_{\mathscr{A}} \mathbb{C}$ tel que

$$\Xi(e_i^r/r!) = \theta_i^{(r)} \otimes 1$$

pour $i \in I$ et $r \in \mathbb{N}$, et Ξ est un isomorphisme.

Preuve. La preuve la plus simple de l'assertion (i) consiste à utiliser une réalisation concrète de $\mathbf{f}$. (Cette phrase pour le moment obscure devrait s'éclaircir à la fin du paragraphe 4.3.) Pour montrer l'existence de l'homomorphisme Ξ dans l'assertion (ii), il suffit d'utiliser la présentation par générateurs et relations de $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$ donnée au paragraphe 1.1. Montrer la bijectivité de Ξ est un travail plus délicat ; une solution assez satisfaisante consiste à construire des bases de type Poincaré-Birkhoff-Witt de $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$ et de $\mathbf{f}$ et à vérifier que Ξ envoie une base PBW de la première algèbre sur la spécialisation à $v = 1$ d'une base PBW de la seconde. $\square$

4.3 Le théorème de Ringel

On considère ici un graphe de Dynkin de type A, D ou E. À ce graphe, on fait correspondre une algèbre de Lie simple complexe $\mathfrak{g}$ et sa sous-algèbre $\mathfrak{n}_+$, comme dans le paragraphe 1.1. En munissant ce graphe d'une orientation, on obtient par ailleurs un carquois Q de type de représentation fini. Le théorème de Gabriel est la première entrée d'un dictionnaire qui relie la théorie des représentations de Q avec $\mathfrak{n}_+$: les représentations indécomposables du premier sont en bijection avec une base de la seconde. Lorsque Ringel a remis à la mode les algèbres de Hall à la fin des années 1980, sa motivation était de prolonger ce dictionnaire, en retrouvant les constantes de structures de $\mathfrak{n}_+$ à partir de la théorie des représentations de Q.

À partir du système de racines de $\mathfrak{g}$, on construit une algèbre $\mathbf{f}$ comme dans le paragraphe 4.1. Dans le paragraphe 4.2, nous avons établi le lien entre l'algèbre $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$ et l'algèbre $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$. Le théorème de Ringel que voici, qui montre que $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$ est isomorphe à l'algèbre de Hall $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$, permet donc de relier cette dernière à $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$.

Théorème 10 *Il existe un unique homomorphisme de K-algèbres $\Gamma_Q : \mathbf{f} \to \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \otimes_{\mathscr{A}} K$ tel que $\Gamma_Q(\theta_i) = \langle [S_i] \rangle \otimes 1$. Cet homomorphisme est bijectif, préserve le coproduit Δ, la coünité ε, et la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$, et envoie $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$ sur $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$.*

Preuve. Reprenons les notations de la preuve de la proposition 8. La propriété universelle des algèbres libres entraîne qu'il existe un unique homomorphisme de K-algèbres

$$\Gamma'_Q : \mathbf{f}' \to \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \otimes_{\mathscr{A}} K \quad \text{tel que} \quad \Gamma'_Q(\theta'_i) = \langle [S_i] \rangle \otimes 1.$$

L'algèbre $\mathbf{f}'$ est graduée par le groupe $\mathbb{Z}\Delta$ et l'algèbre $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ est graduée par le groupe $\mathbb{Z}^I$; ces deux groupes peuvent être identifiés de façon évidente, et alors Γ'_Q respecte la graduation. Les produits scalaires $\cdot$ sur $\mathbb{Z}\Delta$ et sur $\mathbb{Z}^I$ se correspondent également, de sorte que $\Gamma'_Q \otimes \Gamma'_Q$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbf{f}' \otimes_K \mathbf{f}'$ vers $(\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \otimes_{\mathscr{A}} K) \otimes_K (\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \otimes_{\mathscr{A}} K)$. Les coproduits $\Delta' : \mathbf{f}' \to \mathbf{f}' \otimes_K \mathbf{f}'$ et $\Delta : \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \to \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \otimes_{\mathscr{A}} \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ étant des homomorphismes d'algèbres, l'ensemble $\{x \in \mathbf{f}' \mid (\Gamma'_Q \otimes \Gamma'_Q) \circ \Delta' = \Delta \circ \Gamma'_Q\}$ est une sous-algèbre de $\mathbf{f}'$; comme elle contient les générateurs θ'_i de $\mathbf{f}'$, c'est $\mathbf{f}'$ toute entière. On vérifie de même que $\varepsilon \circ \Gamma'_Q = \varepsilon'$. Tout ceci montre que Γ'_Q est un morphisme de cogèbres.

Ensuite, on observe que la forme bilinéaire sur $\mathbf{f}'$ donnée par

$$(x, y) \in \mathbf{f}'^2 \mapsto (\Gamma'_Q(x), \Gamma'_Q(y)) \in K$$

coïncide avec la forme $(\cdot,\cdot)'$. En effet, l'application $x \in \mathbf{f}' \mapsto (\Gamma'_Q(x), \Gamma'_Q(?)) \in (\mathbf{f}')^*$ est un morphisme de K-algèbres, dont on vérifie aisément qu'il coïncide avec Ψ. Comme la forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ sur $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \otimes_{\mathscr{A}} K$ est non-dégénérée, cela montre que le noyau de Γ'_Q est égal au radical de la forme $(\cdot,\cdot)'$. La preuve de la proposition 8 montre que ce noyau est donc égal au noyau de l'épimorphisme canonique de $\mathbf{f}'$ sur $\mathbf{f}$. Cela montre que Γ'_Q se factorise à travers $\mathbf{f}$ et que l'homomorphisme Γ_Q qu'on obtient ainsi est injectif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{f}' \arrow[r, "\Gamma'_Q"] \arrow[d] & \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \otimes_{\mathscr{A}} K. \\ \mathbf{f} \arrow[ur, dashed, "\Gamma_Q"'] & \end{tikzcd}$$

On calcule ensuite

$$\Gamma_Q(\theta_i^{(r)}) = \frac{\Gamma_Q(\theta_i)^r}{[r]!} = \frac{\langle [S_i] \rangle^{*r}}{[r]!} = \langle [S_i^{\oplus r}] \rangle,$$

ce qui montre que $\Gamma_Q(\mathbf{f}_{\mathscr{A}}) \subseteq \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$. Il nous reste à montrer qu'il y a en fait égalité ; cela établira en effet en même temps que Γ_Q est surjective.

Il nous suffit pour cela de montrer que pour tout $\gamma \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})$, l'élément $\langle \gamma \rangle$ de $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ appartient à $\Gamma_Q(\mathbf{f}_{\mathscr{A}})$. Nous suivons ici une méthode inventée par Ringel. Nous adoptons les notations du paragraphe 3.3 et procédons par récurrence sur la dimension du k-espace vectoriel $M(\gamma)$. Nous distinguons deux cas selon la forme de la décomposition de γ en somme d'indécomposables :

$$\gamma = \beta_1^{\oplus c_1} \oplus \cdots \oplus \beta_\nu^{\oplus c_\nu}.$$

Le premier cas est quand au moins deux des coefficients c_a sont non-nuls. Alors tous les modules $M(\beta_a^{\oplus c_a})$ sont de dimension sur k plus petite que celle, de sorte que l'hypothèse de récurrence entraîne que tous les éléments $\langle \beta_a^{\oplus c_a} \rangle$ sont dans $\Gamma_Q(\mathbf{f}_{\mathscr{A}})$. Il en est alors de même du produit

$$\langle \beta_1^{\oplus c_1} \rangle * \cdots * \langle \beta_\nu^{\oplus c_\nu} \rangle = \langle \gamma \rangle.$$

La deuxième possibilité est qu'il n'y ait qu'un seul coefficient c_a non-nul, c'est-à-dire que γ est un multiple $\beta_a^{\oplus c_a}$ d'un indécomposable. On utilise alors la proposition 7. On numérote donc les sommets du carquois $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ comme dans l'énoncé de cette proposition et on choisit le vecteur $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ de sorte que $\mathbf{dim}\,\gamma = \sum_{1 \leq a \leq n} d_a\,\mathbf{dim}\,S_{i_a}$. Alors

$$\frac{\langle [S_{i_n}]\rangle^{*d_n}}{[d_n]^!} * \cdots * \frac{\langle [S_{i_1}]\rangle^{*d_1}}{[d_1]^!} = \sum_{\rho} v^{-\dim \mathrm{Ext}^1_{kQ}(M(\rho),M(\rho))} \langle \rho \rangle,$$

où la somme dans le membre de droite porte sur toutes les classes d'isomorphisme $\rho \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ de même vecteur-dimension que γ. Les vecteurs-dimensions de deux indécomposables n'étant jamais proportionnels (dans un système de racines réduit, deux racines ne sont jamais colinéaires), aucun ρ dans la somme autre que γ n'est multiple d'un indécomposable. La première alternative s'applique donc à ces ρ, de sorte que chaque élément $\langle \rho \rangle$ appartienne à $\Gamma_Q(\mathbf{f}_{\mathscr{A}})$. Par ailleurs, le produit $\frac{\langle [S_{i_n}]\rangle^{*d_n}}{[d_n]^!} * \cdots * \frac{\langle [S_{i_1}]\rangle^{*d_1}}{[d_1]^!}$ appartient également à $\Gamma_Q(\mathbf{f}_{\mathscr{A}})$. La différence

$$\frac{\langle [S_{i_n}]\rangle^{*d_n}}{[d_n]^!} * \cdots * \frac{\langle [S_{i_1}]\rangle^{*d_1}}{[d_1]^!} - \sum_{\substack{\rho \\ \rho \neq \gamma}} v^{-\dim \mathrm{Ext}^1_{kQ}(M(\rho),M(\rho))} \langle \rho \rangle = \langle \gamma \rangle$$

appartient donc à $\Gamma_Q(\mathbf{f}_{\mathscr{A}})$. $\square$

On peut interpréter ce théorème en disant que l'algèbre de Hall $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ est une réalisation concrète de l'algèbre $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$. On peut aussi dire que l'algèbre $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$ est un modèle pour les algèbres $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ qui est indépendant du choix de l'orientation de Q.

Remarque 11. Il est possible de spécialiser la $\mathscr{A}$-algèbre $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ à $v = 1$. En tant que $\mathscr{A}$-module, $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ est libre, les éléments β de $\mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ formant une base de $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$. Par suite, les éléments $\beta \otimes 1$, que nous désignerons par $\mathbf{u}_\beta$, forment une base de l'algèbre spécialisée $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \otimes_{\mathscr{A}} \mathbb{C}$. Dans cette base, la multiplication est donnée par la formule

$$\mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\gamma = \sum_{\beta \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})} \tilde{\phi}^\beta_{\alpha,\gamma}(1)\mathbf{u}_\beta.$$

La propriété (vi) de la proposition 3, étendue au cas des polynômes $\tilde{\phi}^\beta_{\alpha,\gamma}$, entraîne que l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}$ par les éléments $\mathbf{u}_\alpha$, pour α indécomposable, est une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \otimes_{\mathscr{A}} \mathbb{C}$. La dimension de $\mathfrak{k}$ est égale au cardinal de R_+.

Par ailleurs, en composant Γ_Q avec Ξ, nous obtenons un isomorphisme d'algèbres de $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$ sur $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \otimes_{\mathscr{A}} \mathbb{C}$, qui envoie e_i sur l'élément $\mathbf{u}_{[S_i]}$. La préimage de $\mathfrak{k}$ par cet isomorphisme est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$ qui contient les éléments e_i et qui est de dimension $|R_+|$. La sous-algèbre de Lie $\mathfrak{n}_+$ de $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$ est quant à elle engendrée par les e_i et est de même dimension ; elle coïncide donc avec cette préimage.

Pour résumer : dans l'identification de l'algèbre enveloppante $\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+)$ avec l'algèbre de Hall spécialisée $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \otimes_{\mathscr{A}} \mathbb{C}$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_+$ s'identifie avec la sous-algèbre $\mathfrak{k}$ définie ci-dessus. La théorie des représentations des carquois permet donc de retrouver non seulement une base de $\mathfrak{n}_+$, mais aussi le crochet de Lie de $\mathfrak{n}_+$, via cette construction d'algèbre de Hall spécialisée à $v = 1$.

5 Constructions dans f

Nous allons à présent définir plusieurs opérations dans $\mathbf{f}$. Nous Nous examinerons notamment les opérateurs de Kashiwara $\tilde{e}_i$ et $\tilde{f}_i$ et l'action du groupe des tresses donnée par les opérateurs T_i, cette dernière permettant de construire une base appelée « base de Poincaré-Birkhoff-Witt » ou « base PBW » de $\mathbf{f}$.

5.1 L'anti-automorphisme σ

La première opération est inoffensive : il s'agit de remarquer que l'algèbre $\mathbf{f}$ possède un unique anti-automorphisme σ qui fixe les générateurs θ_i. Autrement dit, σ agit sur un produit $\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_k}$ en renversant l'ordre des lettres :

$$\sigma(\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_k}) = \theta_{i_k}\cdots\theta_{i_1}.$$

Pour prouver l'existence de σ, on utilise la méthode habituelle : on définit un anti-automorphisme σ' de $\mathbf{f}'$, on observe que σ' fixe les q-relations de Serre $f'_{i,j,1-a_{ij}}$, et on en déduit que σ' se factorise à travers la surjection canonique de $\mathbf{f}'$ sur $\mathbf{f}$.

5.2 Les sous-algèbres $\mathbf{f}[i]$

Ici, on se fixe un indice $i \in I$. Pour tout indice $j \in I \setminus \{i\}$ et tout entier $0 \leq m \leq -a_{ij}$, on pose

$$f_{i,j,m} = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r v^{-rd_i(1-a_{ij}-m)} \theta_i^{(r)} \theta_j \theta_i^{(m-r)}.$$

Un calcul rapide montre que les éléments ainsi définis satisfont à la relation de récurrence

$$[m+1]_{d_i} f_{i,j,m+1} = f_{i,j,m}\theta_i - v^{|f_{i,j,m}|\cdot\alpha_i}\theta_i f_{i,j,m}.$$

Enfin, on note $\mathbf{f}[i]$ l'algèbre engendrée par les éléments $f_{i,j,m}$, pour $j \in I \setminus \{i\}$ et $m \in \{0, \ldots, -a_{ij}\}$.

Proposition 12 *(i) Il existe une unique application K-linéaire ${}_ir : \mathbf{f} \to \mathbf{f}$ telle que*

$${}_ir(1) = 1, \qquad {}_ir(\theta_j) = \delta_{ij} \qquad \text{et} \qquad {}_ir(xy) = {}_ir(x)y + v^{|x|\cdot\alpha_i} x\,{}_ir(y)$$

pour tous éléments homogènes x, y de $\mathbf{f}$.
(ii) Le noyau de ${}_ir$ coïncide avec la sous-algèbre $\mathbf{f}[i]$.
(iii) Tout élément $x \in \mathbf{f}$ s'écrit de façon unique comme une somme

$$x = \sum_{n\geq 0} \theta_i^{(n)} x_n, \qquad \text{avec } x_n \in \mathbf{f}[i],\ x_n = 0 \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

L'assertion (iii) de cette proposition permet de définir les opérateurs de Kashiwara. Ce sont les applications linéaires $\tilde{e}_i$ et $\tilde{f}_i$ de l'espace $\mathbf{f}$ dans lui-même qui envoient $x = \sum_{n\geq 0} \theta_i^{(n)} x_n$ sur

$$\tilde{e}_i(x) = \sum_{n\geq 1} \theta_i^{(n-1)} x_n \qquad \text{et} \qquad \tilde{f}_i(x) = \sum_{n\geq 0} \theta_i^{(n+1)} x_n$$

respectivement.

Preuve. Pour prouver l'assertion (i), on contemple l'application linéaire ${}_ir' : \mathbf{f}' \to \mathbf{f}'$ définie de manière unique par les conditions :

$${}_ir'(1) = 1, \qquad {}_ir'(\theta'_j) = \delta_{ij} \qquad \text{et} \qquad {}_ir'(xy) = {}_ir'(x)y + v^{|x|\cdot\alpha_i} x\,{}_ir'(y)$$

pour tous éléments homogènes x, y de $\mathbf{f}'$. On définit par ailleurs les éléments $f'_{i,j,m}$ par

$$f'_{i,j,m} = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r v^{-rd_i(1-a_{ij}-m)} \theta_i'^{(r)} \theta'_j \theta_i'^{(m-r)}$$

pour tout indice $j \in I \setminus \{i\}$ et tout entier $m \geq 0$. En utilisant les relations

$$[m+1]_{d_i} f'_{i,j,m+1} = f'_{i,j,m}\theta_i - v^{|f'_{i,j,m}|\cdot\alpha_i}\theta_i f'_{i,j,m},$$

on montre facilement par récurrence sur m que ${}_ir'(f'_{i,j,m}) = 0$. Cela établit que les q-relations de Serre $f'_{i,j,1-a_{ij}}$ sont dans le noyau de ${}_ir'$. Des calculs directs permettent par ailleurs de montrer que les autres q-relations de Serre sont également dans le noyau de ${}_ir'$. Il s'ensuit que l'on peut factoriser ${}_ir'$ à travers la surjection canonique de $\mathbf{f}'$ sur $\mathbf{f}$, et obtenir ainsi l'application ${}_ir$ cherchée.

Pour montrer (ii), on commence par observer que les propriétés

$${}_ir(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad {}_ir(xy) = {}_ir(x)y + v^{|x|\cdot\alpha_i}x\,{}_ir(y)$$

entraînent que le noyau de ${}_ir$ est une sous-algèbre de $\mathbf{f}$. Par ailleurs, les éléments $f_{i,j,m}$ appartiennent à ce noyau ; cette affirmation est en effet une conséquence immédiate de la preuve ci-dessus de l'assertion (i). On en déduit que $\mathbf{f}[i] \subseteq \ker {}_ir$. La preuve de l'inclusion inverse est plus délicate et sera omise.

L'assertion (iii) est une version aux q-différences de la formule de Taylor pour les polynômes. La preuve formalisée de ce résultat est la suivante. On appelle $\mathfrak{U}$ l'algèbre engendrée par deux générateurs ϵ et ϕ soumis à la relation $\epsilon\phi = \mathrm{id}_{\mathbf{f}} + v^{2d_i}\phi\epsilon$. L'algèbre $\mathbf{f}$ devient un $\mathfrak{U}$-module si l'on décrète que ϵ agit par l'application ${}_ir$ et que l'action de ϕ est la multiplication à gauche par θ_i. L'action de ϵ est localement nilpotente, ce qui signifie que tout élément est annulé par l'action d'une puissance suffisamment grande de ϵ. Pour tout $n \geq 0$, posons

$$\Pi_n = \sum_{k\geq 0} (-1)^k v^{d_i k(k+1)/2} \frac{1}{[k]^!_{d_i}} \phi^k \epsilon^{k+n}.$$

La somme est infinie, mais l'action de Π_n sur $\mathbf{f}$ est bien définie car ϵ y agit de façon localement nilpotente. Pour tout élément $x \in \mathbf{f}$ fixé, l'élément $\Pi_n(x)$ est donc bien défini, et est même nul si n est assez grand. On pose alors $x_n = v^{-d_i n(n-1)/2}\Pi_n(x)$. Des calculs basés sur la seule relation $\epsilon\phi = \mathrm{id}_{\mathbf{f}} + v^{2d_i}\phi\epsilon$ permettent alors d'obtenir facilement que $\epsilon \cdot x_n = 0$, d'où $x_n \in \mathbf{f}[i]$ d'après l'assertion (ii), puis que $x = \sum_n \frac{1}{[n]^!_{d_i}}\phi^n x_n$, d'où $x = \sum_n \theta_i^{(n)} x_n$. □

La proposition suivante précise le comportement de la décomposition $x = \sum_n \theta_i^{(n)} x_n$ et des opérateurs de Kashiwara par rapport à la $\mathscr{A}$-forme $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$ de $\mathbf{f}$.

Proposition 13 *(i)* $\mathbf{f}_{\mathscr{A}} \cap \mathbf{f}[i]$ *est une* $\mathscr{A}$*-forme de* $\mathbf{f}[i]$.

(ii) Si x *appartient à* $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$*, alors les* $x_n \in \mathbf{f}[i]$ *tels que* $x = \sum_n \theta_i^{(n)} x_n$ *appartiennent à* $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$.

(iii) $\tilde{e}_i$ *et* $\tilde{f}_i$ *laissent* $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$ *globalement stable.*

Preuve. Un calcul direct montre que ${}_ir$ laisse $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$ globalement stable. L'assertion (ii) est alors conséquence directe de la construction effectuée lors de la preuve de l'assertion (iii) de la proposition précédente. Cela entraîne immédiatement l'assertion (iii). L'assertion (i) est quant à elle banale. □

5.3 Les isomorphismes T_i et la base Poincaré-Birkhoff-Witt de f

Dans son livre *Introduction to quantum groups* (qui est tout sauf une introduction), Lusztig définit et étudie des isomorphismes d'algèbres qu'il note $T'_{i,-1}$ et que nous noterons simplement T_i. À l'aide de ces T_i, on peut construire une base de $\mathbf{f}$, dite base de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW en abrégé). Nous ne justifions ici aucun des résultats que nous énonçons, mais nous en présenterons une interprétation qui les rend plausibles et naturels dans le paragraphe 5.4.

Le système de racines R possède un groupe de Weyl W : c'est le sous-groupe du groupe des automorphismes de l'espace vectoriel $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ engendré par les « réflexions simples », qui sont les réflexions orthogonales s_i le long des racines simples α_i :

$$s_i : \lambda \mapsto \lambda - \frac{1}{d_i} \alpha_i \cdot \lambda.$$

Le groupe W stabilise le réseau $\mathbb{Z}\Delta$ de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Si l'on note S l'ensemble des réflexions simples, alors la paire (W, S) est un système de Coxeter, ce qui permet par conséquent de parler de longueur et d'expressions réduites.

Proposition 14 *(i) Il existe un unique isomorphisme d'algèbres $T_i : \sigma(\mathbf{f}[i]) \xrightarrow{\sim} \mathbf{f}[i]$ vérifiant*

$$T_i(\sigma(f_{i,j,m})) = f_{i,j,-a_{ij}-m}$$

pour tous $j \in I \setminus \{i\}$ et tout $0 \le m \le -a_{ij}$.

(ii) Si $x \in \sigma(\mathbf{f}[i])$ est homogène par rapport à la $\mathbb{Z}\Delta$-graduation de $\mathbf{f}$, alors il en est de même de $T_i(x)$ et $\bigl|T_i(x)\bigr| = s_i|x|$.

(iii) T_i envoie $\sigma(\mathbf{f}_{\mathscr{A}} \cap \mathbf{f}[i])$ sur $\mathbf{f}_{\mathscr{A}} \cap \mathbf{f}[i]$.

(iv) Soit $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p}$ une écriture réduite. Soit α_j une racine simple telle que $w(\alpha_j)$ soit une racine positive (autrement dit, l'écriture $s_{i_1} \cdots s_{i_p} s_j$ est réduite). Alors les éléments

$$\theta_j, \quad T_{i_p}(\theta_j), \quad T_{i_{p-1}} T_{i_p}(\theta_j), \quad \ldots, \quad T_{i_2} \cdots T_{i_p}(\theta_j)$$

appartiennent respectivement à

$$\sigma\bigl(\mathbf{f}[i_p]\bigr), \quad \sigma\bigl(\mathbf{f}[i_{p-1}]\bigr), \quad \sigma\bigl(\mathbf{f}[i_{p-2}]\bigr), \quad \ldots, \quad \sigma\bigl(\mathbf{f}[i_1]\bigr),$$

de sorte que l'expression $T_{i_1} \cdots T_{i_p}(\theta_j)$ a un sens. Le résultat ne dépend pas de la décomposition réduite utilisée pour écrire w, ce qui permet de le noter $T_w(\theta_j)$. Si de surcroît $w(\alpha_j)$ est une racine simple, disons α_k, alors $T_w(\theta_j) = \theta_k$.

Soit à présent w_0 l'élément de plus grande longueur dans W et ν sa longueur. Soit enfin

$$X = \{\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_\nu) \text{ suite d'éléments de } I \mid w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_\nu}\}$$

l'ensemble des décompositions réduites de w_0.

Il est bien connu que chaque décomposition réduite $\mathbf{I} \in X$ donne lieu à une énumération des racines positives :

$$\alpha_{i_1}, \quad s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \quad s_{i_1} s_{i_2}(\alpha_{i_3}), \quad \ldots, \quad s_{i_1} \cdots s_{i_{\nu-1}}(\alpha_{i_\nu}).$$

Pour toute suite d'entiers $\mathbf{c} \in \mathbb{N}^\nu$, on pose

$$E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}} = \theta_{i_1}^{(c_1)} \quad T_{i_1}\Bigl(\theta_{i_2}^{(c_2)}\Bigr) \quad T_{i_1} T_{i_2}\Bigl(\theta_{i_3}^{(c_3)}\Bigr) \quad \cdots \quad T_{i_1} \cdots T_{i_{\nu-1}}\Bigl(\theta_{i_\nu}^{(c_\nu)}\Bigr).$$

Théorème 15 *La famille $\bigl(E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}}\bigr)_{\mathbf{c} \in \mathbb{N}^\nu}$ est une K-base de $\mathbf{f}$ et une $\mathscr{A}$-base de $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$.*

5.4 Interprétations dans l'algèbre de Hall $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$

On se place ici dans le cadre des paragraphes 3.3 et 5.4. Un graphe de Dynkin est donc fixé, dont on note I l'ensemble des sommets. On oriente ce graphe, ce qui donne un carquois Q. Pour tout corps k, le groupe de Grothendieck $K(kQ\text{-}\mathbf{mod})$ s'identifie via l'application vecteur-dimension au groupe abélien libre $\mathbb{Z}^I$: la classe $d(S_i)$ du kQ-module simple concentré sur le sommet i correspond au vecteur-dimension de S_i, c'est-à-dire à l'élément $\alpha_i = (\delta_{ij})_{j\in I}$ de Z^I. Ces éléments α_i forment une base de $\mathbb{Z}^I$; on les appelle les racines simples et on note Δ leur ensemble.

La forme d'Euler est la forme bilinéaire sur $\mathbb{Z}^I$ donnée sur des éléments $\mathbf{v} = \sum_i v_i\alpha_i$ et $\mathbf{w} = \sum_i w_i\alpha_i$ par

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \sum_i v_iw_i - \sum_{i\to j} v_iw_j,$$

et la forme de Tits $q : \mathbb{Z}^I \to \mathbb{Z}$ est la forme quadratique donnée par $q(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle$. La forme de Tits est définie positive, et les racines de q sont les éléments de l'ensemble $R = \{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^I \mid q(\mathbf{v}) = 1\}$. Les racines positives sont les éléments de $R_+ = R\cap\mathbb{N}^I$. L'application vecteur-dimension établit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme indécomposables de la catégorie kQ-$\mathbf{mod}$ et les racines positives. Le théorème de Krull-Schmidt entraîne alors la description agréable suivante de l'ensemble des classes d'isomorphismes de kQ-$\mathbf{mod}$: $\mathrm{Iso}(kQ\text{-}\mathbf{mod}) \cong \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})$, avec par définition $\mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod}) = \mathbb{N}^{R_+}$.

Notons à présent $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^I$. L'ensemble R est alors un système de racines dans $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$. Le produit scalaire normalisé est

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle.$$

À partir de ces données, on peut construire la bigèbre tordue $\mathbf{f}$. On dispose alors de l'isomorphisme Γ_Q de $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$ sur l'algèbre de Hall générique $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ de Q (théorème 10).

Soit i un sommet du graphe de Dynkin. On suppose que i est un puits (respectivement, une source) de Q. On a défini au paragraphe 2.1 la sous-catégorie $kQ\text{-}\mathbf{mod}_i^+$ (respectivement, $kQ\text{-}\mathbf{mod}_i^-$) de kQ-$\mathbf{mod}$, formée des kQ-modules desquels le module simple S_i n'est pas facteur direct. Les classes d'isomorphisme des objets de $kQ\text{-}\mathbf{mod}_i^\pm$ correspondent à la partie $\mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^\pm)$ de $\mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod}) = \mathbb{N}^{R_+}$ formée des fonctions $f : R_+ \to \mathbb{N}$ nulles sur $[S_i]$. On peut alors regarder dans l'algèbre de Hall générique $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$ le sous-$\mathscr{A}$-module $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^\pm)$ engendré par les symboles α pour $\alpha \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^\pm)$. La catégorie $kQ\text{-}\mathbf{mod}_i^\pm$ étant une sous-catégorie stable par extension de kQ-$\mathbf{mod}$, $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^\pm)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$.

Proposition 16 *Si i est un puits (respectivement, une source) du carquois Q, alors la sous-algèbre $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}\cap\mathbf{f}[i]$ est envoyée sur $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^+)$ (respectivement, sur $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^-)$) par l'isomorphisme Γ_Q.*

Preuve. Considérons d'abord le cas où i est un puits de Q. Pour tout $j \in I\setminus\{i\}$ et tout $0 \le m \le -a_{ij}$, l'élément $\alpha_j + m\alpha_i$ est une racine positive, donc est le vecteur-dimension d'une unique classe d'isomorphisme indécomposable $\alpha^+_{i,j,m} \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^+)$. Ainsi, $\alpha_{i,j,0} = [S_j]$, et s'il y a une flèche $\overset{j}{\bullet} \to \overset{i}{\bullet}$, le kQ-module donné par $V_i = V_j = k$ et $f_{ji} = \mathrm{id}_k$ appartient à la classe $\alpha_{i,j,-1}$. Un calcul facile dans l'algèbre de Hall montre que

$$\langle\alpha^+_{i,j,m}\rangle = \begin{cases} \langle S_j\rangle & \text{si } m = 0,\\ \langle S_j\rangle * \langle S_i\rangle - \langle S_i\rangle * \langle S_j\rangle & \text{si } m = -1,\end{cases}$$

de sorte que $\langle\alpha^+_{i,j,m}\rangle = \Gamma_Q(f_{i,j,m})$ dans tous les cas. Il s'ensuit que Γ_Q envoie $\mathbf{f}[i]$ dans la sous-algèbre $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^+)\otimes_{\mathscr{A}} K$ de $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})\otimes_{\mathscr{A}} K$.

Un raisonnement analogue à celui utilisé pour prouver la surjectivité de Γ_Q (voir la preuve du théorème 10) permet de montrer que la K-algèbre $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^+) \otimes_{\mathscr{A}} K$ est engendrée par les $\alpha^+_{i,j,m}$, pour $j \in I \setminus \{i\}$ et $0 \leq m \leq -a_{ij}$, ce qui permet de conclure à l'égalité $\Gamma_Q(\mathbf{f}[i]) = \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^+) \otimes_{\mathscr{A}} K$.

Le cas où i est une source de Q est analogue ; dans ce cas, la classe d'isomorphisme $\alpha^-_{i,j,m}$ de vecteur-dimension $\alpha_j + m\alpha_i$ est donnée dans l'algèbre de Hall par la formule

$$\langle \alpha^-_{i,j,m} \rangle = \begin{cases} \langle S_j \rangle & \text{si } m = 0, \\ \langle S_i \rangle * \langle S_j \rangle - \langle S_j \rangle * \langle S_i \rangle & \text{si } m = -1. \end{cases}$$

□

Remark 17. Il est ici possible de compléter la preuve de l'assertion (ii) de la proposition 12 dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de type A, D ou E. Il s'agit de montrer que la sous-algèbre $\ker {}_i r$ de $\mathbf{f}$ coïncide avec l'algèbre $\mathbf{f}[i]$ engendrée par les éléments $f_{i,j,m}$. Pour cela, commençons par observer que la preuve page 23 de l'assertion (iii) de la proposition 12 montre l'existence et l'unicité, pour tout élément x de $\mathbf{f}$, d'une décomposition $x = \sum_n \theta_i^{(n)} x_n$ avec des x_n appartenant à $\ker {}_i r$, plutôt qu'à $\mathbf{f}[i]$. Considérons à présent un élément x de $\ker {}_i r$ et montrons qu'il appartient à $\mathbf{f}[i]$. La décomposition de ce x se réduit à l'écriture $x = x_0$ et $x_n = 0$ pour $n > 0$. Choisissons une orientation du graphe de Dynkin de sorte que i soit un puits du carquois, et écrivons

$$\Gamma_Q(x) = \sum_{\alpha \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})} a_\alpha \langle \alpha \rangle \qquad \text{avec} \qquad a_\alpha \in \mathscr{A}.$$

Pour chaque $\alpha \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})$, il existe $n_\alpha \in \mathbb{N}$ et $\beta_\alpha \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^+)$ tels que $M(\alpha) \cong S_I^{\oplus n_\alpha} \oplus M(\beta_\alpha)$. Alors $\langle \alpha \rangle = \langle S_i \rangle^{(n_\alpha)} * \langle \beta_\alpha \rangle$, de sorte que

$$x = \sum_{\alpha \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})} a_\alpha \theta_i^{(n_\alpha)} \Gamma_Q^{-1}(\langle \beta_\alpha \rangle).$$

Chaque $\Gamma_Q^{-1}(\langle \beta_\alpha \rangle)$ est dans $\mathbf{f}[i]$, donc dans $\ker {}_i r$. L'unicité nous permet alors d'dentifier les deux décompositions et donc d'écrire

$$x = \sum_{\substack{\alpha \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \\ \text{t.q. } n_\alpha = 0}} a_\alpha \Gamma_Q^{-1} \langle \beta_\alpha \rangle.$$

Chaque $\langle \beta_\alpha \rangle$ appartient à $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^+) = \Gamma_Q(\mathbf{f}_{\mathscr{A}} \cap \mathbf{f}[i])$, ce qui montre que $x \in \mathbf{f}[i]$, comme désiré.

Plaçons-nous dans le cas où i est un puits de Q. Nous disposons alors des foncteurs de réflexions $\Phi_i^\pm$, qui établissent des équivalences réciproques entre les catégories $kQ\text{-}\mathbf{mod}_i^+$ et $ks_iQ\text{-}\mathbf{mod}_i^-$ (voir le paragraphe 2.1), et donc des bijections réciproques entre les classes d'isomorphisme d'objets de ces catégories. Cela entraîne l'existence de bijections réciproques :

$$\mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^+) \underset{\varphi_i^-}{\overset{\varphi_i^+}{\rightleftarrows}} \mathrm{Iso}(s_iQ\text{-}\mathbf{mod}_i^-).$$

Rappelons enfin que les ensembles $\mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^+)$ et $\mathrm{Iso}(s_iQ\text{-}\mathbf{mod}_i^-)$ sont des bases des $\mathscr{A}$-modules $\mathscr{H}(s_iQ\text{-}\mathbf{mod}_i^-)$ et $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^+)$.

Proposition 18 *L'application* $\mathscr{H}(\Phi_i^-) : \mathscr{H}(s_iQ\text{-}\mathbf{mod}_i^-) \to \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^+)$ *qui prolonge linéairement* φ_i^- *est un isomorphisme de* $\mathscr{A}$*-algèbres. Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}(s_iQ\text{-}\mathbf{mod}_i^-)\otimes_{\mathscr{A}} K \arrow[r, "\mathscr{H}(\Phi_i^-)"] \arrow[d, "\Gamma_{s_iQ}"'] & \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^+)\otimes_{\mathscr{A}} K \arrow[d, "\Gamma_Q"] \\ \sigma(\mathbf{f}[i]) \arrow[r, "T_i"] & \mathbf{f}[i] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Preuve. Le foncteur Φ_i^- préservant la structure de treillis des sous-objets, l'application φ^- conserve les nombres de Hall :

$$\tilde{\phi}^{\varphi(\beta)}_{\varphi(\alpha),\varphi(\gamma)} = \tilde{\phi}^{\beta}_{\alpha,\gamma} \qquad \text{pour tous } \alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ dans } \operatorname{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^-).$$

La remarque à la fin du paragraphe 2.1 montre que φ_i^- préserve également la forme d'Euler, et par conséquent est un morphisme d'algèbres de $\mathscr{H}(s_iQ\text{-}\mathbf{mod}_i^-)$ vers $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^+)$.

Dans la preuve de la proposition 16, nous avons remarqué que $\alpha_j + m\alpha_i$ était une racine positive pour tout $j \in I \setminus \{i\}$ et tout $m \in \{0, \ldots, -a_{ij}\}$, et donc qu'elle était le vecteur-dimension d'une unique classe d'isomorphisme $\alpha^+_{i,j,m}$ de kQ-modules (respectivement, d'une unique classe d'isomorphisme $\alpha^-_{i,j,m}$ de ks_iQ-modules). Les foncteurs de réflexions préservant le caractère indécomposable, φ_i^- envoie $\alpha^-_{i,j,m}$ sur une classe indécomposable de vecteur-dimension $s_i(\alpha_j + m\alpha_i) = \alpha_j + (-a_{ij} - m)\alpha_i$, c'est-à-dire sur $\alpha_{i,j,-a_{ij}-m}$. Cette condition décrit complètement le morphisme d'algèbres φ_i^-, puisque les K-algèbres $\mathscr{H}(s_iQ\text{-}\mathbf{mod}_i^-)\otimes_{\mathscr{A}} K$ et $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}_i^+)\otimes_{\mathscr{A}} K$ sont engendrées par les éléments $\alpha^+_{i,j,m}$ et $\alpha^-_{i,j,m}$, respectivement. La vérification que le diagramme mentionné dans l'énoncé est commutatif est alors banale. □

Il nous reste à interpréter la construction des bases PBW. Pour cela, choisissons une orientation du graphe de Dynkin de façon à obtenir un carquois Q et énumérons les racines positives $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$ comme dans le paragraphe 3.3, de sorte que

$$\big(\operatorname{Hom}_{kQ}(M(\beta_a), M(\beta_b)) \neq 0\big) \Rightarrow \big(a \leq b\big) \qquad \text{et} \qquad \big(\operatorname{Ext}^1_{kQ}(M(\beta_a), M(\beta_b)) \neq 0\big) \Rightarrow \big(a > b\big).$$

Il existe alors une suite $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_\nu) \in I^\nu$ telle que

– i_1 est un puits de Q, i_2 est un puits de $s_{i_1}Q$, i_3 est un puits de $s_{i_2}s_{i_1}Q$, etc.

– $\beta_1 = \alpha_{i_1}$, $\beta_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2})$, $\beta_3 = s_{i_1}s_{i_2}(\alpha_{i_3})$, etc.

(On trouvera une preuve basée sur la « transformation de Coxeter » dans l'article de Ringel cité en référence, p. 80.) Ainsi, $\mathbf{i}$ appartient à X.

Soit $a \in \{+, \ldots, \nu\}$. Nous pouvons appliquer tour à tour les foncteurs $\Phi^-_{i_{a-1}}$, $\Phi^-_{i_{a-2}}$, …, $\Phi^-_{i_2}$, $\Phi^-_{i_1}$ au $ks_{i_a}s_{ia-1}\cdots s_{i_2}s_{i_1}Q$-module simple S_{i_a} :

$$ks_{i_{a-1}}s_{ia-2}\cdots s_{i_2}s_{i_1}Q\text{-}\mathbf{mod} \overset{\Phi^-_{i_{a-1}}}{\rightsquigarrow} ks_{i_{a-2}}s_{ia-3}\cdots s_{i_2}s_{i_1}Q\text{-}\mathbf{mod} \overset{\Phi^-_{i_{a-2}}}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{\Phi^-_{i_2}}{\rightsquigarrow} ks_{i_1}Q\text{-}\mathbf{mod} \overset{\Phi^-_{i_1}}{\rightsquigarrow} kQ\text{-}\mathbf{mod}.$$

On montre facilement par récurrence que les modules successivement obtenus sont indécomposables et appartiennent aux sous-catégories $ks_{i_b}\cdots s_{i_1}Q\text{-}\mathbf{mod}^-_{i_b}$, pour tout $b \in \{0, \ldots, a\}$. À la fin du processus, on obtient le kQ-module $M(s_{i_1}\cdots s_{i_{a-1}}\alpha_{i_a}) = M(\beta_a)$. En exploitant le diagramme commutatif de la proposition 18, on en déduit qu'il est licite d'appliquer successivement $T_{i_{a-1}}$, $T_{i_{a-2}}$, …, T_{i_2}, T_{i_1} à θ_{i_a} et que

$$\Gamma_Q(T_{i_1}\cdots T_{i_{a-1}}\theta_{i_a}) = \langle\beta_a\rangle.$$

La suite θ_{i_1}, $T_{i_1}(\theta_{i_2})$, $T_{i_1}T_{i_2}(\theta_{i_3})$, …, $T_{i_1}\cdots T_{i_{\nu-1}}(\theta_{i_\nu})$ est donc envoyée par Γ_Q sur la suite $\langle\beta_1\rangle$, $\langle\beta_2\rangle$, $\langle\beta_3\rangle$, …, $\langle\beta_\nu\rangle$. Pour tout $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_\nu)$ de $\mathbb{N}^\nu$, l'élément de $\mathbf{f}$ construit à la fin du paragraphe 5.3

$$E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}} = \theta_{i_1}^{(c_1)} \quad T_{i_1}\Big(\theta_{i_2}^{(c_2)}\Big) \quad T_{i_1}T_{i_2}\Big(\theta_{i_3}^{(c_3)}\Big) \quad \cdots \quad T_{i_1}\cdots T_{i_{\nu-1}}\Big(\theta_{i_\nu}^{(c_\nu)}\Big)$$

est donc envoyé par Γ_Q sur l'élément $\langle\beta_1^{\oplus c_1}\oplus\cdots\oplus\beta_\nu^{\oplus c_\nu}\rangle$. Cela permet de déduire le théorème 15 des constructions du paragraphe 3.3, au moins dans le cas d'un système de racines de type A, D ou E. (Dans l'article au *Journal de Crelle* cité en référence bibliographique, Ringel a en fait étendu cette construction à tous les types.)

6 La base canonique de f

6.1 Le réseau $\mathscr{L}$ et la base B

Nous reprenons les notations des paragraphes 4.1 et 5.3. Pour chaque décomposition réduite $\mathbf{i}\in X$ de w_0, on dispose de la base PBW $(E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}})_{\mathbf{c}\in\mathbb{N}^\nu}$ correspondante du K-espace vectoriel $\mathbf{f}$ (théorème 15).

Proposition 19 *(i) Le sous-$\mathbb{Z}[v^{-1}]$-module de* $\mathbf{f}$ *engendré par* $\{E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}}\mid\mathbf{c}\in\mathbb{N}^\nu\}$ *est indépendant du choix de* $\mathbf{i}$ *; on le note* $\mathscr{L}$.

(ii) L'image dans $\mathscr{L}/v^{-1}\mathscr{L}$ *de* $\{E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}}\mid\mathbf{c}\in\mathbb{N}^\nu\}$ *est une base du* $\mathbb{Z}$*-module* $\mathscr{L}/v^{-1}\mathscr{L}$*, indépendante du choix de* $\mathbf{i}$ *; on la note* B.

Preuve. Il s'agit de montrer que $\mathscr{L}$ et B ne changent pas quand on passe d'une décomposition réduite de w_0 à une autre. On commence par le cas où le système de racines est de rang 2. L'ensemble I des sommets du graphe de Dynkin est alors réduit à deux éléments, disons i et j, et l'ensemble X des décompositions réduites de w_0 contient lui aussi deux éléments, à savoir

$$\mathbf{i}=(i,j,i,j,\ldots) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{j}=(j,i,j,i,\ldots),$$

la longueur de chacune de ces suites étant 2, 3, 4 ou 6 selon que le système de racines est de type $\mathrm{A}_1\times\mathrm{A}_1$, A_2, B_2 ou G_2. Pour ces cas de rang 2, la preuve se fait par un calcul direct (assez pénibles pour les deux derniers cas).

Dans le cas d'un système de racines quelconque, on commence par regarder le cas où les deux décompositions réduites de w_0 considérées, disons $\tilde{\mathbf{i}}$ et $\tilde{\mathbf{j}}$, sont reliées l'une à l'autre par un « mouvement de tresses » : cela signifie que pour deux sommets $i,j\in I$, on peut trouver dans $\tilde{\mathbf{i}}$ un sous-mot de la forme $\mathbf{i}$ (comme ci-dessus en rang 2) de sorte que quand on substitue $\mathbf{j}$ à la place de ce sous-mot, on obtienne $\tilde{\mathbf{j}}$. La définition même des bases PBW montre que dans ce cas, la propriété voulue est une conséquence immédiate de celle pour le système de racines de rang 2 correspondant. Le cas général d'un système de racines quelconque se déduit de ce cas particulier et du fait que deux écritures réduites de w_0 sont toujours reliées par une suite de « mouvements de tresses ». $\square$

Ici nous avons défini $\mathscr{L}$ et B à l'aide des bases PBW. Il est possible de donner une définition alternative grâce aux opérateurs de Kashiwara.

Proposition 20 *(i) Les opérateurs* $\tilde{e}_i$ *et* $\tilde{f}_i$ *laissent stable le sous-*$\mathbb{Z}[v^{-1}]$*-module* $\mathscr{L}$*. Ils induisent donc une action sur* $\mathscr{L}/v^{-1}\mathscr{L}$*, dans laquelle ils laissent stable* $B\cup\{0\}$.

(ii) $\mathscr{L}$ *est le plus petit sous-*$\mathbb{Z}[v^{-1}]$*-module de* $\mathbf{f}$ *qui contient 1 et qui est stable par les opérateurs* $\tilde{f}_i$*. Tout élément de* B *s'obtient en appliquant une suite d'opérateurs* $\tilde{f}_i$ *à 1.*

Preuve. Montrons la première assertion. Pour cela, on se donne un indice $i \in I$. On veut montrer que $\mathscr{L}$ et $B \cup \{0\}$ sont stables par l'action de $\tilde{e}_i$ et $\tilde{f}_i$. Choisissons une écriture réduite $\mathbf{j}$ de w_0 commençant par i, c'est-à-dire $j_1 = i$. Les définitions et les résultats des paragraphes 5.2 et 5.3 entraînent que

$$\tilde{e}_i E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} = \begin{cases} E_{\mathbf{j}}^{(c_1-1,c_2,c_3,\ldots)} & \text{si } c_1 > 0 \\ 0 & \text{si } c_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \tilde{f}_i E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} = E_{\mathbf{j}}^{(c_1+1,c_2,c_3,\ldots)}.$$

On déduit facilement de cela que $\mathscr{L}$ et $B \cup \{0\}$ sont stables par l'action de $\tilde{e}_i$ et $\tilde{f}_i$.

Un raisonnement analogue montre la seconde assertion. Il est toutefois nécessaire de prouver d'abord que $\bigcap_{i\in I} \mathbf{f}[i] = \{0\}$, où $\mathbf{f}[i] = \operatorname{Vect}\{E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} \mid c_1 = 0\}$ si l'on choisit $\mathbf{j}$ commençant par i. Ce dernier résultat se montre de la façon suivante. Prenons x dans l'intersection des $\mathbf{f}[i]$. Alors ${}_ir(x) = 0$ pour tout i. Donc pour tout indice i et pour tout monôme y en les θ_j, nous avons

$$(\theta_i y, x) = (\theta_i, \theta_i)(y, {}_ir(x)) = 0.$$

Ainsi x est orthogonal à tous les monômes de la forme $\theta_i y$, c'est-à-dire à tous les monômes, donc à $\mathbf{f}$, donc x est nul. □

Enfin, l'usage des bases PBW permet de montrer facilement la proposition suivante.

Proposition 21 *L'antiautomorphisme σ laisse stable le sous-$\mathbb{Z}[v^{-1}]$-module $\mathscr{L}$. Il induit donc une action sur $\mathscr{L}/v^{-1}\mathscr{L}$, dans laquelle il laisse stable B.*

Preuve. Soit $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_\nu)$ une décomposition réduite de w_0. Définissons $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_\nu)$ en posant $\alpha_{j_a} = -w_0(\alpha_{i_{\nu+1-a}})$. Alors

$$w_0 = s_{i_{a-1}} s_{i_{a-2}} \cdots s_{i_2} s_{i_1} s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_{\nu-a}} s_{j_{\nu+1-a}}$$

est une écriture réduite de w_0 et

$$s_{i_{a-1}} s_{i_{a-2}} \cdots s_{i_2} s_{i_1} s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_{\nu-a}} (\alpha_{j_{\nu+1-a}}) = \alpha_{i_a},$$

de sorte que

$$T_{i_{a-1}} T_{i_{a-2}} \cdots T_{i_2} T_{i_1} T_{j_1} T_{j_2} \cdots T_{j_{\nu-a}} (\theta_{j_{\nu+1-a}}) = \theta_{i_a}.$$

Il vient alors[5]

$$T_{j_1} T_{j_2} \cdots T_{j_{\nu-a}} (\theta_{j_{\nu+1-a}}) = \sigma\big(T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_{a-2}} T_{i_{a-1}} (\theta_{i_a})\big).$$

Cela montre que $\sigma(E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}}) = E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{d}}$ pour tout $c \in \mathbb{N}^\nu$, avec $\mathbf{d} = (c_\nu, c_{\nu-1}, \ldots, c_2, c_1)$. La proposition résulte alors du fait que $\mathscr{L}$ et B sont indépendants du choix de la décomposition réduite de w_0 utilisée pour les définir. □

6.2 Énoncé du théorème de Lusztig

On note $f \mapsto \bar{f}$ l'involution de $K = \mathbb{Q}(v)$ consistant à envoyer une fonction rationnelle f sur $f(v^{-1})$. On note $x \mapsto \bar{x}$ l'automorphisme involutif de la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbf{f}$ qui coïncide avec la précédente sur K et qui fixe les θ_i.

[5] La proposition 14 entraîne que $T_i \circ \sigma$ est un antiautomorphisme involutif de $\mathbf{f}[i]$, d'où $T_i^{-1} = \sigma \circ T_i \circ \sigma$.

Théorème 22 *(i) Pour tout $b \in B$, il existe un unique élément $G(b)$ dans $\mathscr{L}$, fixé par l'involution $\bar{\cdot}$, tel que $G(b) - b \in v^{-1}\mathscr{L}$.*

(ii) L'ensemble $\mathbf{B} = \{G(b) \mid b \in B\}$ est une base du K-espace vectoriel $\mathbf{f}$, du $\mathscr{A}$-module $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$, et du $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-module $\mathscr{L}$.

(iii) $\mathbf{B}$ est globalement stable par σ.

(iv) Pour tout $i \in I$ et tout $n \in N$, les idéaux $\mathbf{f}\theta_i^{(n)}$ et $\theta_i^{(n)}\mathbf{f}$ de $\mathbf{f}$ sont des sous-espaces de coordonnées de l'espace vectoriel $\mathbf{f}$ muni de la base $\mathbf{B}$.

Exemples 23.

- Type A_1. Ici $I = \{1\}$, $d_1 = 1$, et $a_{11} = 2$. La base canonique de $\mathbf{f}$ est $\mathbf{B} = \{\theta_1^{(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Type A_2. Ici $I = \{1, 2\}$, $d_1 = d_2 = 1$, $a_{11} = a_{22} = 2$, et $a_{12} = a_{21} = -1$. La base canonique de $\mathbf{f}$ est
$$\mathbf{B} = \{\theta_1^{(p)}\theta_2^{(q)}\theta_1^{(r)} \mid q \geq p + r\} \cup \{\theta_2^{(r)}\theta_1^{(q)}\theta_2^{(p)} \mid q \geq p + r\},$$
avec d'ailleurs $\theta_1^{(p)}\theta_2^{(p+r)}\theta_1^{(r)} = \theta_2^{(r)}\theta_1^{(p+r)}\theta_2^{(p)}$ pour tous entiers p et r.
- Des formules explicites pour les types B_2, A_3 et A_4 ont également été calculées (et publiées pour les deux premiers).
- Il n'y a pas de recette générale permettant de calculer la base canonique. Cependant, Wilhelm de Graaf a conçu un algorithme et l'a implanté sous la forme d'un paquetage pour GAP.

Remarque 24. Fixons-nous une décomposition réduite $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_\nu)$ de w_0. Appelons j l'indice tel que $\alpha_j = -w_0(\alpha_{i_\nu})$, de sorte que $T_{i_1} \cdots T_{i_{\nu-1}}(\theta_{i_\nu}) = \theta_j$. Un élement

$$E_{\mathbf{i}}^{\mathbf{c}} = \theta_{i_1}^{(c_1)} \quad T_{i_1}\left(\theta_{i_2}^{(c_2)}\right) \quad T_{i_1}T_{i_2}\left(\theta_{i_3}^{(c_3)}\right) \quad \cdots \quad T_{i_1} \cdots T_{i_{\nu-1}}\left(\theta_{i_\nu}^{(c_\nu)}\right)$$

de la base PBW correspondant à $\mathbf{i}$ est dans l'idéal à droite $\theta_{i_1}^{(n)}\mathbf{f}$ (respectivement, dans l'idéal à gauche $\mathbf{f}\theta_j^{(n)}$) si et seulement si $c_1 \geq n$ (respectivement, $c_\nu \geq n$). Il est immédiat de vérifier que les éléments de la base PBW ainsi sélectionnés engendrent $\theta_{i_1}^{(n)}\mathbf{f}$ (respectivement, $\mathbf{f}\theta_j^{(n)}$) en tant que K-espace vectoriels. Autrement dit, ces deux idéaux sont des sous-espaces de coordonnées de l'espace vectoriel $\mathbf{f}$ muni de la base PBW. L'intérêt de la base canonique $\mathbf{B}$ est de pouvoir faire cela pour tous les $i \in I$ simultanément, et non pas seulement pour i_1 et j. Nous avons vu dans le paragraphe 1 quelques uns des avantages que cette propriété confère à la base canonique en vue des applications à l'étude de la théorie des représentations des algèbres de Lie semi-simples.

6.3 Preuve : partie algébrique

Dans ce paragraphe, nous prouvons le théorème 22. Il s'agit de construire une base $\mathbf{B}$ de $\mathbf{f}$ formée d'éléments fixés par l'involution $\bar{\cdot}$ à partir de la base PBW associée au choix d'une écriture réduite $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_\nu)$ de w_0. Pour cela, nous commençons par construire une troisième base $\left(L_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}}\right)_{\mathbf{c} \in \mathbb{N}^\nu}$ formée elle aussi d'éléments fixés par $\bar{\cdot}$, dont la matrice de passage avec la base PBW $\left(E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}}\right)_{\mathbf{c} \in \mathbb{N}^\nu}$ est unitriangulaire supérieure. La construction est la suivante.

Le choix de $\mathbf{j}$ fournit une énumération des racines positives

$$\beta_1 = \alpha_{j_1},\ \beta_2 = s_{j_1}(\alpha_{j_2}),\ \beta_3 = s_{j_1}s_{j_2}(\alpha_{j_3}),\ \ldots,\ \beta_n u = s_{j_1} \cdots s_{j_{\nu-1}}(\alpha_{j_\nu}).$$

Les racines simples apparaissent dans cette liste, dans l'ordre disons $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}$; cela nous fournit une énumération de I, à savoir $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$. Donnons-nous un ν-uplet d'entiers $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_\nu)$.

Pour tout $1 \leq a \leq \nu$, on écrit $c_a\beta_a = \sum_{b=1}^n k_{a,b}\alpha_{i_b}$ sur la base des racines simples. On pose ensuite

$$L_{\mathbf{j}}^{(0,\ldots,0,c_a,0,\ldots,0)} = \theta_{i_n}^{(k_{a,n})}\cdots\theta_{i_1}^{(k_{a,1})},$$

puis on fait le produit de ces éléments :

$$L_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} = L_{\mathbf{j}}^{(c_1,0,\ldots,0)}L_{\mathbf{j}}^{(0,c_2,0,\ldots,0)}L_{\mathbf{j}}^{(0,0,c_3,0,\ldots,0)}\cdots L_{\mathbf{j}}^{(0,\ldots,0,c_\nu)}.$$

Nous avons alors :

Lemme 25 *Les éléments $L_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}}$ forment une $\mathscr{A}$-base de $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$ formée d'éléments fixés par $\bar{\cdot}$. De façon plus précise, il existe un ordre partiel $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{N}^\nu$ tel que :*
- *chaque élément de $\mathbb{N}^\nu$ n'a qu'un nombre fini de successeurs ;*
- *quand on écrit $L_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} = \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\nu} h_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}}E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{d}}$, alors $h_{\mathbf{c}}^{\mathbf{c}} = 1$ et*

$$h_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}} \neq 0 \Longrightarrow \big(\mathbf{c} \preccurlyeq \mathbf{d},\ c_1 \leq d_1,\ c_\nu \leq d_\nu\big).$$

La seule preuve aujourd'hui connue de ce lemme utilise les liens explicités dans les paragraphes précédents entre l'algèbre $\mathbf{f}$ et la théorie des représentations des carquois. Nous exposerons cette preuve dans le paragraphe suivant. Montrons à présent comment ce lemme permet de conclure la démonstration du théorème 22.

Pour montrer l'assertion (i), on utilise une sorte de récurrence sur $\mathbf{c}$ pour construire les éléments $C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}}$ de $\mathbf{f}$ fixés par $\bar{\cdot}$ et tels que $C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} - E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} \in v^{-1}\mathscr{L}$. De façon plus précise, on les cherche sous la forme $C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} = \sum_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}^\nu} \zeta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}}E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{d}}$ avec :
- $\zeta_{\mathbf{c}}^{\mathbf{c}} = 1$;
- $\zeta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}} \in v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]$ si $\mathbf{c} \neq \mathbf{d}$;
- $\zeta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}} \neq 0 \Longrightarrow \big(\mathbf{c} \preccurlyeq \mathbf{d},\ c_1 \leq d_1,\ c_\nu \leq d_\nu\big)$.

La récurrence porte sur la longueur maximale des chaînes strictement croissantes $\mathbf{c} \prec \mathbf{d_1} \prec \mathbf{d_2} \prec \cdots$.
- L'initialisation de la récurrence concerne donc le cas $\mathbf{c}$ est maximal pour l'ordre $\preccurlyeq$. Alors $E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}}$ est fixé par $\bar{\cdot}$, puisqu'il est égal à $L_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}}$. On peut donc prendre $C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} = E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}}$.
- À l'étape suivante, on suppose que les chaînes strictement croissantes s'arrètent au cran $\mathbf{d_1}$. On peut alors écrire

  $$E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} = L_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} - \sum_{\mathbf{d}\succ\mathbf{c}} h_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}}E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{d}}, \qquad \text{avec} \quad E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{d}} = C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{d}} \quad \text{puisque } \mathbf{d} \text{ est ici nécessairement maximal.}$$

  On peut alors modifier les polynômes $h_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}}$ en leur ajoutant un polynôme $\zeta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}} \in v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]$ de sorte que $h_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}} + \zeta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}}$ soit invariant sous $\bar{\cdot}$ (c'est-à-dire symétrique sous l'échange $v \leftrightarrow v^{-1}$). Alors on peut prendre

  $$C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} = E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} - \sum_{\mathbf{d}\succ\mathbf{c}} \zeta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}}E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{d}},$$

  puisque le membre de droite de cette égalité, égal à $L_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} - \sum_{\mathbf{d}\succ\mathbf{c}}(h_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}} + \zeta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}})C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{d}}$, est fixé par $\bar{\cdot}$.
- La récurrence se poursuit de manière analogue ; à chaque étape, on se trouve confronté à un système linéaire mis sous forme triangulaire, dont la solution est unique.

Cette construction montre non seulement la clause d'existence dans l'assertion (i) du théorème 22, mais aussi le fait que l'ensemble $\mathbf{B} = \{C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} \mid \mathbf{c} \in \mathbb{N}^\nu\}$ est une base de $\mathbf{f}$, de $\mathbf{f}_{\mathscr{A}}$ et de $\mathscr{L}$, puisque la matrice de passage de la base PBW à $\mathbf{B}$ est unitriangulaire (pour l'ordre $\preccurlyeq$) à coefficients dans $\mathbb{Z}[v^{-1}]$. L'assertion (ii) est donc elle aussi prouvée.

La clause d'unicité dans l'assertion (i) est facile. L'assertion (iii) découle très facilement de l'assertion (i) et de la proposition 21.

Il nous reste donc à montrer l'assertion (iv). On commence en observant que pour tout entier n, l'ensemble $\{E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} \mid c_1 \geq n\}$ est une base de l'idéal $\theta_{j_1}^{(n)}\mathbf{f}$.[6] Or la construction des éléments $C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}}$ entraîne que

$$C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} = \sum_{\mathbf{d} \succ \mathbf{c}} \zeta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}} E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{d}}$$

avec $\zeta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}} \neq 0 \Longrightarrow c_1 \leq d_1$. Il en résulte que $\{E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} \mid c_1 \geq n\}$ et $\{C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} \mid c_1 \geq n\}$ engendrent le même sous-espace vectoriel, à savoir $\theta_{j_1}^{(n)}\mathbf{f}$.

Ainsi $\theta_{j_1}^{(n)}\mathbf{f}$ est un sous-espace de coordonnées du K-espace vectoriel $\mathbf{f}$ muni de la base $\mathbf{B}$. La base $\mathbf{B}$ étant indépendante du choix de le décomposition réduite $\mathbf{j}$ de w_0, la propriété que $\theta_i^{(n)}\mathbf{f}$ est un sous-espace de coordonnées de $\mathbf{f}$ pour la base $\mathbf{B}$ est vraie pour tout indice i pour lequel il existe $\mathbf{j} \in X$ tel que $i = j_1$. Mais cela signifie que lq propriété est vraie pour tout i. Le case des idéaux à gauche $\mathbf{f}\theta_i^{(n)}$ s'obtient en appliquant σ. L'assertion (iv), et avec elle le théorème 22, sont prouvés.

6.4 Preuve : partie géométrique

Il nous reste à montrer le lemme 25. Nous commençons par deux sous-lemmes. On considère ici un corps k algébriquqment clos et un carquois Q de Dynkin. On étudie la géometrie des k-représentations de Q.

Lemme 26 *Soit M un kQ-module de vecteur-dimension α.*

(i) La codimension dans $\operatorname{Rep}(Q,\alpha)$ *de la* $\operatorname{GL}(\alpha)$*-orbite des représentations isomorphes à M est égale à* $\dim \operatorname{Ext}^1_{kQ}(M,M)$.

(ii) Si M est indécomposable, alors pour tout entier n, la $\operatorname{GL}(n\alpha)$*-orbite des représentations isomorphes à $M^{\otimes n}$ est dense dans* $\operatorname{Rep}(Q,n\alpha)$.

Preuve. L'assertion (i) a été prouvée au paragraphe 2. Supposons que M soit indécomposable. Alors l'orbite de M est dense. D'après l'assertion (i), il vient $\operatorname{Ext}^1_{kQ}(M,M) = 0$, d'où $\operatorname{Ext}^1_{kQ}(M^{\otimes n}, M^{\otimes n}) = 0$. L'assertion (i) entraîne alors que l'orbite des représentations isomorphes à $M^{\otimes n}$ est de codimension nulle dans $\operatorname{Rep}(Q,n\alpha)$, donc est dense. Cela montre l'assertion (ii). $\square$

Lemme 27 *Soient L, L', M', N, N' des représentations de Q. On suppose que $L \leq_{\deg} L'$, que $N \leq_{\deg} N'$, et que* $\operatorname{Ext}^1_{kQ}(L,N) = \operatorname{Hom}_{kQ}(N,L) = 0$. *Si on a une suite exacte $0 \to N' \to M' \to L' \to 0$, alors $L \oplus N \leq_{\deg} M'$. L'égalité ne peut avoir lieu que si $L \cong L'$ et $N \cong N'$.*

L'interprétation intuitive de ce résultat est la suivante. D'abord, on fait dégénérer L en L' et N en N', donc on fait dégénérer $L \oplus N$ en $L' \oplus N'$. Puis on déforme $L' \oplus N'$ en M'. Mais la situation du côté de L et N est assez rigide : à cause des hypothèses $\operatorname{Ext}^1_{kQ}(L,N) = \operatorname{Hom}_{kQ}(N,L) = 0$, toute déformation de $L \oplus N$ en une représentation M telle qu'il y ait une suite exacte $0 \to N \to M \to L \to 0$ est triviale. Tandis qu'on déforme $L' \oplus N'$ en M', la représentation $L \oplus N$ n'est pas déformée. Le résultat est que M' reste une dégénérescence de $L \oplus N$.

Voici maintenant la preuve formalisée de ce résultat, dû à Lusztig.

[6] En effet, n'importe quel élément x de cet idéal s'écrit sous la forme $\theta_{j_1}^{(n)}y$ avec $y \in \mathbf{f}$. En développant y sur la base PBW, on écrit x comme une combinaison linéaire d'éléments de la forme $\theta_{j_1}^{(n)}E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}}$, lequel est proportionnel à $E_{\mathbf{j}}^{(c_1+n,c_2,c_3,\ldots,c_\nu)}$.

Preuve. Pour éviter un cas banal, on suppose que l'on n'a pas simultanément $L \cong L'$ et $N \cong N'$. Soit α le vecteur-dimension de L et L', soit γ celui de N et N', posons $\beta = \alpha + \gamma$.

Nous reprenons l'approche géométrique de l'algèbre de Hall que nous avons expliquée au paragraphe 3.4. Nous considérons donc à nouveau le diagramme

$$\operatorname{Rep}(Q, \alpha, k) \times \operatorname{Rep}(Q, \gamma, k) \xleftarrow{f} E \xrightarrow{g} F \xrightarrow{h} \operatorname{Rep}(Q, \beta, k).$$

Je dis maintenant que h envoie de façon bijective la partie $Z = g\big(f^{-1}(\mathscr{O}_{[L]} \times \mathscr{O}_{[N]})\big)$ sur l'orbite $\mathscr{O}_{[L \oplus N]}$. Pour voir cela, donnons-nous un point x de $\operatorname{Rep}(Q, \beta, k)$. Cet élément x correspond à un kQ-module M sur l'espace k^β. Les antécédents de x par h sont les couples (x, U) où U est un sous-espace gradué de k^β stable par x. Pour que (x, U) appartienne à Z, il faut et il suffit qu'il y ait deux isomorphismes $a : k^\beta/U \to k^\alpha$ et $c : U \to k^\gamma$ sous le transport desquels les représentations de Q induites par x sur k^β/U et U respectivement soient isomorphes à L et N. Si tel est le cas, alors il y a un diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "c"] & k^\beta \arrow[r] \arrow[d, equal] & k^\beta/U \arrow[r] \arrow[d, "a"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & M \arrow[r] & L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

commutatif de kQ-modules dans lequel les lignes sont des suites exactes. L'hypothèse $\operatorname{Ext}^1_{kQ}(L, N) = 0$ entraîne que ces suites exactes sont scindées, d'où l'existence d'un isomorphisme $u : M \to N \oplus L$. L'hypothèse $\operatorname{Hom}_{kQ}(N, L) = 0$ force alors la forme de i : il existe un automorphisme a' de N tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d, "c"] & k^\beta \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\left[\begin{smallmatrix} a' \\ 0 \end{smallmatrix}\right]"'] & M \arrow[d, "u"] \\
& & N \oplus L
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. On voit ainsi qu'il n'y a qu'un seul choix possible pour le sous-espace U de k^β. Pour résumer : le point x ne possède un antécédent dans Z par h que si x appartient à l'orbite $\mathscr{O}_{[L \oplus N]}$, et dans ce cas, il en possède un seul. Autrement dit, h envoie de façon bijective la partie $Z = g\big(f^{-1}(\mathscr{O}_{[L]} \times \mathscr{O}_{[N]})\big)$ sur l'orbite $\mathscr{O}_{[L \oplus N]}$.

Par hypothèse, $\mathscr{O}_{[L']} \times \mathscr{O}_{[N']} \subset \overline{\mathscr{O}_{[L]} \times \mathscr{O}_{[N]}}$, inclusion dans laquelle la dimension du membre de gauche est strictement plus petite que celle du membre de droite. Comme f est une fibration localement triviale à fibre lisse, l'inclusion $f^{-1}\big(\mathscr{O}_{[L']} \times \mathscr{O}_{[N']}\big) \subset \overline{f^{-1}(\mathscr{O}_{[L]} \times \mathscr{O}_{[N]})}$ est également vraie, avec ici encore une inégalité stricte de dimension entre les deux membres. Comme g est un fibré principal, on a aussi $g\big(f^{-1}\big(\mathscr{O}_{[L']} \times \mathscr{O}_{[N']}\big)\big) \subset \overline{Z}$, avec une inégalité stricte entre les dimensions des deux membres.

L'existence d'une suite exacte $0 \to N' \to M' \to L' \to 0$ entraîne l'inclusion

$$\mathscr{O}_{[M']} \subseteq h\big(g\big(f^{-1}(\mathscr{O}_{[L']} \times \mathscr{O}_{[N']})\big)\big),$$

de sorte que

$$\mathscr{O}_{[M']} \subset h\big(\overline{Z}\big) \subseteq \overline{h(Z)} = \overline{\mathscr{O}_{[L \oplus N]}},$$

d'où $M' \geq_{\deg} L \oplus N$. Et puisque $h : Z \to \mathscr{O}_{[L\oplus N]}$ est un isomorphisme, on a même

$$\dim \mathscr{O}_{[M']} \leq \dim g\big(f^{-1}(\mathscr{O}_{[L']} \times \mathscr{O}_{[N']})\big) < \dim Z = \dim \mathscr{O}_{[L\oplus N]},$$

ce qui entraîne $M' >_{\deg} L \oplus N$ et achève la preuve. □

Revenons à la démonstration du lemme 25. Munissons le graphe de Dynkin ayant servi à construire $\mathbf{f}$ d'une orientation, appelons Q le carquois résultant, et supposons que l'écriture réduite $\mathbf{j}$ de w_0 soit compatible avec Q, au sens de la fin du paragraphe 5.4.[7] L'ordre $\preccurlyeq$ utilisé est défini par

$$\mathbf{c} \preccurlyeq \mathbf{d} \iff \Big(c_1\beta_1 + \cdots + c_\nu\beta_\nu = d_1\beta_1 + \cdots + d_\nu\beta_\nu \quad \text{et} \quad \bigoplus_{a=1}^{\nu} M(\beta_a)^{\oplus c_a} \leq_{\deg} \bigoplus_{a=1}^{\nu} M(\beta_a)^{\oplus d_a}\Big).$$

Utilisant la proposition 7, on observe que

$$\begin{aligned}\Gamma_Q(L_{\mathbf{j}}^{(0,\ldots,0,c_a,0,\ldots,0)}) &= \frac{\langle[S_{i_n}]\rangle^{*k_{a,n}}}{[k_{a,n}]^!} * \cdots * \frac{\langle[S_{i_1}]\rangle^{*k_{a,1}}}{[k_{a,1}]^!} \\ &= \sum_{\gamma} v^{-\dim \operatorname{Ext}^1_{kQ}(M(\gamma),M(\gamma))}\langle\gamma\rangle,\end{aligned}$$

où la somme porte sur toutes les classes d'isomorphisme de kQ-modules de vecteur-dimension $c_a\beta_a$. Notant $\mathscr{O}_\gamma$ l'orbite dans $\operatorname{Rep}(Q, c_a\beta_a)$ des représentations de la classe γ, le lemme 26 permet de continuer le calcul :

$$\begin{aligned}\Gamma_Q(L_{\mathbf{j}}^{(0,\ldots,0,c_a,0,\ldots,0)}) &= \sum_{\gamma} v^{-\operatorname{codim}\mathscr{O}_\gamma}\langle\gamma\rangle \\ &= \langle\beta_a^{\oplus c_a}\rangle + \sum_{\gamma >_{\deg} \beta_a^{\oplus c_a}} v^{-\operatorname{codim}\mathscr{O}_\gamma}\langle\gamma\rangle,\end{aligned}$$

et grâce au lemme 27 :

$$\begin{aligned}\Gamma_Q(L_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}}) &= \prod_{a=1}^{\nu}\Big(\langle\beta_a^{\oplus c_a}\rangle + \sum_{\gamma >_{\deg} \beta_a^{\oplus c_a}} v^{-\operatorname{codim}\mathscr{O}_\gamma}\langle\gamma\rangle\Big) \\ &= \langle\bigoplus_a \beta_a^{\oplus c_a}\rangle + \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma >_{\deg} \bigoplus_a \beta_a^{\oplus c_a}}} h^\gamma\langle\gamma\rangle\end{aligned}$$

pour certains coefficients $h^\gamma \in \mathscr{A}$. Observant de surcroît que

$$\Gamma_Q(L_{\mathbf{j}}^{(c_1,0,\ldots,0)}) = \langle\beta_1^{\oplus c_1}\rangle \qquad \text{et} \qquad \Gamma_Q(L_{\mathbf{j}}^{(0,\ldots,0,c_\nu)}) = \langle\beta_\nu^{\oplus c_\nu}\rangle,$$

on vérifie aisément que si l'on écrit $M(\gamma) = \bigoplus_a M(\beta_a)^{\oplus d_a}$, alors $h^\gamma \neq 0$ seulement si $c_1 \leq d_1$ et $c_\nu \leq d_\nu$. Le lemme 25 découle alors facilement du dictionnaire du paragraphe 5.4.

[7] Il est fort possible que le lemme 25 ne soit d'ailleurs valable que dans ce cas. Cela ne nuit pas à la validité de la preuve du théorème 22, puisqu'il suffit de construire les éléments $C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}}$ pour un seul $\mathbf{j}$. Tout au plus faut-il s'assurer pour la preuve de l'assertion (iv) que pour tout indice i, on peut trouver un $\mathbf{j}$ commençant par i *et* compatible avec une orientation de carquois. C'est là un point facile, puisqu'il suffit de prendre une orientation de carquois pour laquelle i est un puits.

7 Autres résultats liés aux bases canoniques

7.1 Extension au cas des algèbres de Kac-Moody symétrisables

Les constructions et les résultats présentés dans les paragraphes 4.1, 4.2, 5.1 et 5.2 sont encore valables quand la donnée de départ présidant à la construction de $\mathbf{f}$ est une matrice de Cartan généralisée symétrisable. Si l'on transforme la proposition 20 en une définition du réseau $\mathscr{L}$ et de la base B, alors les énoncés de la proposition 21 et du théorème 22 font sens et sont vrais.

En revanche, les preuves sont plus difficiles, car on ne peut plus s'appuyer sur la technique des bases PBW. Kashiwara prouve ces résultats par des raisonnements mêlant combinatoire et théorie des représentations des groupes quantiques. Lusztig utilise à nouveau la théorie des représentations de carquois.

Pour donner une idée de cette dernière approche, plaçons-nous dans le cas où la matrice de Cartan A est symétrique. Dans ce cas, $2\mathrm{id} - A$ est la matrice d'incidence d'un graphe. En munissant ce graphe d'une orientation choisie de sorte qu'il n'y ait pas de cycle, on obtient un carquois. Mais ce dernier est de type de représentation infini, de sorte que $\mathrm{Iso}(kQ\text{-}\mathbf{mod})$ ne peut plus être défini de façon indépendante du corps k. Il n'est donc plus possible de parler d'algèbre de Hall générique. On peut toutefois fixer q et étudier l'algèbre de Hall $\mathscr{H}(\mathbb{F}_q Q\text{-}\mathbf{mod})$ des représentations de Q sur le corps fini $\mathbb{F}_q$. Ringel a décidé d'appeler « algèbre de composition » la sous-algèbre de $\mathscr{H}(\mathbb{F}_q Q\text{-}\mathbf{mod})$ engendrée par les classes simples $[S_i]$. Il se trouve que dans ce cadre des algèbres de composition, on peut faire varier q ; on obtient ainsi une algèbre de composition générique, et on montre qu'elle est isomorphe à $\mathbf{f}$.

7.2 Changement d'orientation et transformée de Fourier

Donnons-nous un graphe de Dynkin de type A, D ou E. On note I l'ensemble de ses sommets et H l'ensemble de ses arêtes. On peut construire une algèbre $\mathbf{f}$ à partir de la matrice de Cartan correspondant à ce graphe. Par ailleurs, une orientation du graphe donne naissance à un carquois Q de type de représentation finie, d'où une algèbre de Hall générique $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$. Cette dernière est indépendante du choix de l'orientation dont on a muni le graphe, puisqu'elle est isomorphe à $\mathbf{f}$ dans tous les cas. Nous voulons ici expliquer la raison de fond cause de cette invariance. L'argument fonctionne également également en type infini, c'est-à-dire quand le graphe n'est pas de type Dynkin, aussi bien pour l'algèbre de composition générique (voir le paragraphe 7.1) que pour l'algèbre de Hall $\mathscr{H}(\mathbb{F}_q Q\text{-}\mathbf{mod})$ toute entière spécialisée en une valeur q fixée.

Soit k un corps, quelconque pour le moment. Soit I l'ensemble des sommets du graphe et Ω l'ensemble des arêtes. Soient Q et Q' deux orientations du graphe : il existe une partition $\Omega = \Omega^+ \sqcup \Omega^-$ telle qu'une arête a du graphe appartienne à Ω^+ (respectivement, Ω^-) si et seulement si les orientations de cette arête dans Q et Q' sont identiques (respectivement, opposées). Fixons un vecteur-dimension α. Alors les définitions

$$\mathrm{Rep}(Q,\alpha) = \prod_{\substack{a\colon i \to j \\ \text{dans } Q}} \mathrm{Hom}(k^{\alpha_i}, k^{\alpha_j}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Rep}(Q,\alpha) = \prod_{\substack{a\colon i \to j \\ \text{dans } Q'}} \mathrm{Hom}(k^{\alpha_i}, k^{\alpha_j})$$

se cassent en morceaux

$$\mathrm{Rep}(Q,\alpha) = \mathrm{Rep}^+ \times \mathrm{Rep}^- \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Rep}(Q',\alpha) = \mathrm{Rep}^+ \times \mathrm{Rep}^{-\prime}$$

si l'on pose

$$\mathrm{Rep}^{\pm} = \prod_{\substack{a\colon i\to j\\ \text{dans } Q,\\ a\in\Omega^{\pm}}} \mathrm{Hom}(k^{\alpha_i}, k^{\alpha_j}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Rep}^{-\prime} = \prod_{\substack{a\colon i\to j\\ \text{dans } Q',\\ a\in\Omega^{-}}} \mathrm{Hom}(k^{\alpha_i}, k^{\alpha_j}).$$

Pour tous entiers m et n et tout corps k, les espaces vectoriels de matrices $\mathrm{Hom}(k^m, k^n)$ et $\mathrm{Hom}(k^n, k^m)$ sont canoniquement duaux l'un de l'autre grâce à la forme bilinéaire non-dégénérée

$$\mathrm{Hom}(k^m, k^n) \times \mathrm{Hom}(k^n, k^m) \to k, \quad (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB).$$

Ce fait entraîne que les espaces vectoriels Rep^- et $\mathrm{Rep}^{-\prime}$ sont canoniquement duaux l'un de l'autre. Si maintenant k est un corps fini ou bien est le corps des nombres réels, alors il existe un isomorphisme de groupes abéliens localement compacts entre $(k, +)$ et son dual de Pontryagin. Ayant fixé un tel isomorphisme, le groupe abélien localement compact $\mathrm{Rep}^{-\prime}$ s'identifie au dual de Pontryagin du groupe abélien Rep^-. On peut donc définir une transformation de Fourier allant de l'ensemble des fonctions sur Rep^- vers l'ensemble des fonctions sur $\mathrm{Rep}^{-\prime}$. Rajoutant Rep^+ comme espace de paramètres, on dispose alors d'une bijection linéaire $\mathscr{F}_\alpha$ entre fonctions sur $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$ et fonctions sur $\mathrm{Rep}(Q', \alpha)$.

La dernière étape consiste à reformuler la définition de l'algèbre de Hall $\mathscr{H}(kQ\text{-}\mathbf{mod})$ en termes de fonctions sur les espaces de représentations $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$. Du point de vue ensembliste, on associe à une classe d'isomorphisme λ de vecteur-dimension α la fonction caractéristique de l'orbite $\mathscr{O}_\lambda$. Quant au produit, il est essentiellement donné par la construction décrite dans la preuve du lemme 27. Procédant ainsi, on définit un isomorphisme entre $\mathscr{H}(kQ\text{-}\mathbf{mod})$ et la somme directe $\bigoplus_\alpha F(\mathrm{Rep}(Q, \alpha), k)^{\mathrm{GL}(\alpha)}$, où la notation $F(\mathrm{Rep}(Q, \alpha), k)^{\mathrm{GL}(\alpha)}$ désigne l'ensemble des fonctions sur $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$ à valeurs dans k et invariantes par l'action du groupe $\mathrm{GL}(\alpha)$. On peut alors montrer que les bijections $\mathscr{F}_\alpha : F(\mathrm{Rep}(Q, \alpha), k)^{\mathrm{GL}(\alpha)} \to F(\mathrm{Rep}(Q', \alpha), k)^{\mathrm{GL}(\alpha)}$ définissent un isomorphisme $\mathscr{F}$ de $\mathscr{H}(kQ\text{-}\mathbf{mod})$ sur $\mathscr{H}(kQ'\text{-}\mathbf{mod})$. Passant au niveau des algèbres de Hall génériques ou des algèbres de composition, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod}) \arrow[rr, dashed, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "\Gamma_Q"'] & & \mathscr{H}(Q'\text{-}\mathbf{mod}) \arrow[dl, "\Gamma_{Q'}"] \\ & \mathbf{f} & \end{tikzcd} .$$

7.3 Compatibilité avec les modules de Demazure

Pour tout $i \in I$, notons $\mathbf{f}_i$ la sous-algèbre de $\mathbf{f}$ engendrée par θ_i. Étant donné un élément w du groupe de Weyl, on choisit une écriture réduite $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ et on pose $\mathbf{f}_w = \mathbf{f}_{i_1} \cdots \mathbf{f}_{i_k}$; autrement dit, $\mathbf{f}_w$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{f}$ engendré par les monômes $\theta_{i_1}^{(n_1)} \cdots \theta_{i_k}^{(n_k)}$ pour $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$. (Le résultat ne dépend que de w et pas de la décomposition réduite utilisée). Nous avons alors le résultat suivant, dû à Kashiwara :

Théorème 28 *L'espace* $\mathbf{f}_w$ *est un sous-espace de coordonnées pour* $\mathbf{f}$ *muni de la base canonique* $\mathbf{B}$.

Ce résultat, vue dans le cadre du paragraphe 1.2, donne une propriété supplémentaire de la base $\mathbf{B}$. Soit V un $\mathfrak{g}$-module simple de dimension finie, $v_{-\lambda}$ un vecteur de plus bas poids dans V, $\varphi : \big(\mathrm{U}(\mathfrak{n}_+) \to \ X \to X \cdot v_{-\lambda}\big)$ la surjection habituelle. Alors φ envoie $\mathbf{B}_w \setminus (\mathbf{B}_w \cap \ker\varphi)$ sur une base du module de Demazure, c'est-à-dire du sous-$\mathrm{U}(\mathfrak{n}_-)$-module de V engendré par le vecteur de poids $-w\lambda$ (ce vecteur est unique à multiplication par un scalaire près, puisque le sous-espace de poids $-w\lambda$ est de dimension 1).

7.4 Paramétrisation des bases canoniques

La base canonique $\mathbf{B}$ est paramétrée par la « base cristalline » B, laquelle est un objet combinatoire. Il y a essentiellement trois méthodes pour paramétrer numériquement B, et par suite $\mathbf{B}$.

La première méthode, due à Lusztig, utilise les bases PBW, suivant en cela la définition du paragraphe 6.1. Pour chaque décomposition réduite $\mathbf{j}$ de w_0, on peut construire une base PBW, laquelle est indexée par $\mathbb{N}^\nu$. La base cristalline B se trouve alors elle aussi indexée par $\mathbb{N}^\nu$. Dans ce cadre, la matrice de passage entre la base PBW et la base canonique est unitriangulaire. Dans le cas où le graphe de Dynkin est du type A, D ou E, c'est une conséquence directe de la construction effectuée dans la preuve du théorème 22. La triangularité est ici obtenue pour l'ordre $\preccurlyeq$ sur l'ensemble $\mathbb{N}^\nu$ servant à indexer les éléments des deux bases. Défini à partir des dégénérescences des représentations de carquois, cet ordre n'est pas facile à expliciter en termes numériques. De Graaf a toutefois prouvé que la relation entre la base PBW et la base canonique est également unitriangulaire quand on munit $\mathbb{N}^\nu$ de l'ordre lexicographiqu, et ce dernier résultat est également valable pour les types autres que A, D ou E.

Une deuxième méthode utilise la « combinatoire des cristaux », c'est-à-dire la donnée des opérations $\tilde{e}_i$ et $\tilde{f}_i$ sur B. Donnons-nous une écriture réduite $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_\nu)$ de w_0. Chaque élément b de B s'écrit

$$b = \tilde{f}_{j_1}^{n_1} \cdots \tilde{f}_{j_\nu}^{n_\nu}(1 + v^{-1}\mathscr{L})$$

pour au moins un ν-uplet $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_\nu)$ d'entiers, et l'on indexe b par le plus grand de ces ν-uplets pour l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^\nu$. L'ensemble $\mathcal{C}_\mathbf{j}$ des $\mathbf{n}$ que l'on obtient quand b décrit la base cristalline B est l'ensemble des points entiers d'un cône convexe polyédral dans $\mathbb{R}^\nu$ (ce résultat est dû à Littelmann et à Berenstein et Zelevinsky). L'ensemble des monômes

$$\{\theta_{j_1}^{(n_1)} \cdot \theta_{j_\nu}^{(n_\nu)} \mid \mathbf{n} \in \mathcal{C}_\mathbf{j}\}$$

est une K-base de $\mathbf{f}$ et une $\mathscr{A}$-base de $\mathbf{f}_\mathscr{A}$, appelée base monomiale. La matrice de passage reliant cette base monomiale à la base canonique est unitriangulaire quand on munit l'ensemble $\mathcal{C}_\mathbf{j}$ indiçant ces deux bases de l'ordre lexicographique (cette observation est due à Lakshmibai). La clé de la preuve de ce dernier résultat est la proposition suivante :

Proposition 29 *Soit $b \in B$, $i \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $G(b) \in \theta_i^{(n)}\mathbf{f}$ si et seulement si $b \in \tilde{f}_i^n(B)$. De plus, si $G(b) \notin \theta_i\mathbf{f}$, alors*

$$G(\tilde{f}_i^n b) - \theta_i^{(n)} G(b) \in \theta_i(n+1)\mathbf{f}.$$

Une troisième méthode utilise le modèle des chemins de Littelmann. Là encore, on dispose d'un modèle numérique concret permettant d'indicer B. Ce modèle dépend du choix, non pas d'une décomposition réduite de w_0, mais d'un poids dominant régulier (ou, plus exactement, d'un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier ample sur la variété de drapeaux). Là encore, on peut construire une base de $\mathbf{f}$ (ou, plus exactement, d'une base de la spécialisation $\mathbf{f}_\mathscr{A} \otimes_\mathscr{A} \mathbb{C}$ à $v = 1$) liée à ce modèle combinatoire, et on s'attend à ce que la matrice de passage entre cette base et la base canonique soit unitriangulaire pour un ordre lexicographique convenable.

La deuxième et la troisième méthode s'étendent au cas Kac-Moody.

7.5 Interprétation des bases canoniques en termes de faisceaux pervers

Nous considérons ici un graphe de Dynkin de type A, D ou E. Le choix d'une orientation des arêtes de ce graphe nous donne un carquois Q, le choix d'une décomposition réduite $\mathbf{j}$ de w_0 nous permet d'énumérer les racines positives et d'indexer par $\mathbb{N}^\nu$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de Q. Ces classes d'isomorphisme forment une base de l'algèbre de Hall $\mathscr{H}(Q\text{-}\mathbf{mod})$, qui correspond à son tour à une base PBW de $\mathbf{f}$ via l'isomorphisme Γ_Q.

Pour tout vecteur-dimension α, les $\mathrm{GL}(\alpha)$-orbites dans l'espace de représentation $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$ correspondent aux différentes classes d'isomorphismes en vecteur-dimension α. Ces orbites correspondent à la base PBW de $\mathbf{f}$, de sorte qu'il se pose la question de comprendre la base $\mathbf{B}$ dans $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$. Le résultat est que les coefficients $\zeta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}}$ de la matrice de transition entre la base PBW et le base canonique, à savoir

$$C_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}} = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^\nu} \zeta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}} E_{\mathbf{j}}^{\mathbf{d}},$$

s'interprètent comme les polynômes de Poincaré, évalués en v^{-1}, des fibres de faisceaux de cohomologie d'intersection : si $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$ corespondent respectivement aux classes d'isomorphismes γ et δ de représentations de Q, si x est un point de l'orbite $\mathcal{O}_\delta$, alors

$$\zeta_{\mathbf{d}}^{\mathbf{c}} = \sum_{i \geq 0} v^{-i} \dim \mathscr{H}_x^i(\mathrm{IC}(\mathcal{O}_\gamma, 1).$$

En approfondissant ce résultat, Lusztig a réussi à montrer que si l'on munit $\mathbf{f}$ de la base $\mathbf{B}$ et si l'on munit $\mathbf{f} \otimes \mathbf{f}$ de la base $\mathbf{B} \times \mathbf{B}$, alors la multiplication de $\mathbf{f}$ est donnée par une matrice dont les coefficients sont des polynômes de Laurent en v à coefficients entiers positifs. (Le point difficile est la positivité.) Un résultat analogue est valable pour la comultiplication Δ de la proposition 8.

Ces résultats de positivité s'étendent au cas Kac-Moody. Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe 7.1, la construction est ici plus compliquée, car il n'y a pas de base de PBW dans ce cas. Plus précisément, les espaces $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$ contiennent une infinité d'orbites sous le groupe $\mathrm{GL}(\alpha)$, et ces orbites ne permettent plus une description « propre » de $\mathbf{B}$. Les éléments de B s'obtiennent alors de façon géométrique comme les « composantes simples » des faisceaux pervers obtenus par image directe propre de certaines résolutions de parties fermées singulières de $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$ stables sous l'action de $\mathrm{GL}(\alpha)$. Par exemple, les éléments $L_{\mathbf{j}}^{\mathbf{c}}$ utilisés dans la preuve du théorème 22 sont la trace au niveau de l'algèbre $\mathbf{f}$ d'une résolution de l'adhérence de l'orbite $\mathcal{O}_\gamma$, où γ est la classe d'isomorphisme correspondant à $\mathbf{c} \in \mathrm{Iso}(Q\text{-}\mathbf{mod})$. Nous ne pouvons à ce stade qu'encourager le lecteur à poursuivre son étude en étudiant les travaux de Lusztig.

8 Références bibliographiques

Pour préparer ce cours, j'ai essentiellement eu recours aux deux articles suivants :

C. M. Ringel, *PBW-bases of quantum groups*, J. reine angew. Math. **470** (1996), 51–88.

G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447–498.

Le texte suivant, disponible sur le Web à `http:www.amsta.leeds.ac.uk/~pmtwc/quivlecs.ps`, est une introduction claire et complète à la théorie des représentations des carquois :

W. Crawley-Boevey, *Lectures on representations of quivers.*

L'introduction recommandée pour aborder l'étude des groupes quantiques est le livre de Jantzen :

J.-C. Jantzen, *Lectures on quantum groups*, Graduate studies in mathematics vol. 6, AMS, 1996.

L'ouvrage de référence, dans lequel la théorie est présentée de façon complète et dans un cadre un peu élargi permettant l'extension aux algèbres de Kac-Moody, est le livre de Lusztig :

G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progress in mathematics vol. 110, Birkhäuser, 1993.

Kashiwara a donné une construction de la base canonique indépendante des travaux de Lusztig, par une méthode basée uniquement sur l'utilisation des opérateurs $\tilde{e}_i$ et $\tilde{f}_i$ et qui n'utilise pas du tout la théorie des représentations des carquois. Cette méthode s'appuie sur une approche combinatoire des représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, appelée « base cristalline ». Un résumé de cette approche est proposé dans l'article :

M. Kashiwara, *On crystal bases*, Canadian Math. Soc. Conference proceedings vol. 16, CMS-AMS, 1995, pp. 155–197.

Un lien partiel entre la théorie des cristaux de Kashiwara et la théorie des représentations des carquois est indiqué dans :

M. Kashiwara et Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases*, Duke Math. J. **89** (1997), 9–36.

Une référence récente sur le problème du calcul explicite de la base canonique est :

W. A. de Graaf, *Constructing canonical bases of quantized enveloping algebras*, Experiment. Math. **11** (2002), 161–170.

Au sujet des algèbres de Hall, on peut aussi consulter :

M. M. Kapranov, *Eisenstein series and quantum affine algebras*, Algebraic geometry **7**, J. Math. Sci. (New York) **84** (1997), 1311–1360.

J. A. Green, *Hall algebras, hereditary algebras and quantum groups*, Invent. Math. **120** (1995), 361–377.

B. Sevenhant et M. van den Bergh, *On the double of the Hall algebra of a quiver*, J. Algebra **221** (1999), 135–160.

Pierre Baumann
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et CNRS
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex
France

E-mail : `baumann@math.u-strasbg.fr`