Ce texte ne diffère des notes distribuée en cours que de façon marginale, l'objectif étant de proposer un document propre et lisible en période de confinement. J'en ai profité pour reprendre quelques explications que je trouvais désordonnées, ajouter une poignée de compléments, notamment la section 1.8 sur les couvertures projectives, et donner une présentation de la théorie d'Auslander–Reiten.

Pour le fun, j'ai tenté dans ces notes de m'appuyer le moins possible sur l'axiome du choix [1]. Quelques résultats généraux agréables (existence d'idéaux maximaux dans un anneau et de sous-modules maximaux dans un module de type fini, théorème de Hopkins, théorème de Eckmann–Schöpf, ...) s'en trouvent sacrifiés, mais l'essentiel peut être sauvé en imposant des hypothèses de finitude adéquates, que satisfont les objets auxquels j'ai envie de prêter attention. Un peu d'anticipation est cependant ici nécessaire. Par exemple pour développer l'algèbre homologique, il est commode de savoir que les catégories impliquées ont assez d'objets injectifs ou projectifs ; mais sur un anneau général, cela n'est pas le cas de la catégorie (pourtant abélienne) des modules de longueur finie, et au bout du compte il faut accepter de perdre de l'universalité et d'utiliser des résolutions par des objets acycliques pour chaque foncteur qu'on souhaite dériver. Les choses rentrent cependant dans l'ordre avec la catégorie des modules de dimension finie sur une algèbre de dimension finie sur un corps, car dans ce cadre tout objet admet une enveloppe injective et une couverture projective.

Un regret de cet enseignement aura été d'avoir dû faire l'impasse sur les catégories dérivées et sur le basculement. Pour les catégories dérivées, je recommande la lecture de l'article *Derived categories for the working mathematician* de R. Thomas (arXiv:math/0001045). Pour la théorie du basculement, je suggère le résumé *Tilted algebras* de K. Bongartz (dans le recueil *Representations of algebras*, pp. 26–38, Lecture Notes in Math. vol. 903, Springer, 1981). Les deux théories se marient très bien avec la théorie d'Auslander–Reiten, comme l'expliquent D. Happel (*Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. vol. 119, Cambridge Univ. Press, 1988), B. Keller (*Derived categories and tilting*, Handbook of tilting theory, pp. 49–104, London Math. Soc. Lecture Note Ser. vol. 332, Cambridge Univ. Press, 2007) et T. Bridgeland (*Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math. **166** (2007), 317–345).

1 Dévissage des modules

Dans ce cours, A sera un anneau.

1.1 Modules artiniens et noethériens

Définition.

(1) Un A-module est dit **de type fini** s'il est engendré par un nombre fini d'eléments.

(2) Un A-module est dit **noethérien** (respectivement, **artinien**) si toute suite croissante (respectivement, décroissante) de sous-modules de M stationne à partir d'un certain rang.

1. Je parle ici de l'axiome du choix général. Il ne serait pas raisonnable de se priver de l'axiome du choix dénombrable, dont trop de constructions dépendent.

(3) Un A-module est dit **de longueur finie** s'il est noethérien et artinien.

1.1.1 Proposition.

Il y a équivalence entre :

(i) *M est noethérien.*

(ii) *Toute famille non-vide de sous-modules de M admet un élément maximal (pour l'inclusion).*

(iii) *Tout sous-module de M est de type fini.*

Preuve. Si (ii) est faux, alors il existe une famille non-vide $\mathscr{N}$ de sous-modules de M qui n'a pas d'élément maximal. On construit alors par récurrence une suite (M_n) d'éléments de $\mathscr{N}$ telle que $M_{n+1} \supsetneq M_n$ pour chaque n ; chaque pas de la construction est possible puisque M_n n'est pas maximal dans $\mathscr{N}$. Ainsi (i) est faux.

Supposons (ii) vraie. Soit $N \subset M$ un sous-module, soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des sous-modules de N qui sont de type fini. Alors $\{0\}$ appartient à $\mathscr{N}$, donc $\mathscr{N} \neq \varnothing$. L'hypothèse (ii) garantit alors l'existence d'un élément maximal L dans $\mathscr{N}$. Pour chaque $x \in N$, le sous-module $L + Ax$ de N est de type fini donc appartient à $\mathscr{N}$; il contient L donc lui est égal par maximalité de ce dernier ; donc $x \in L$. Ainsi $N = L$ et (iii) est vrai.

Supposons (iii). Soit (M_n) une suite croissante de sous-modules de M et notons M_∞ l'union des M_n. Alors M_∞ est un sous-module de M (exercice : écrire les détails prouvant ce fait). Il est donc de type fini, engendré par des éléments x_1, ..., x_p. Alors il existe des entiers n_1, ..., n_p tels que $x_1 \in M_{n_1}$, ..., $x_p \in M_{n_p}$, et l'hypothèse de croissance fait que tous les x_i appartiennent à M_n avec $n = \max(n_1, \ldots, n_p)$. Par suite $M_\infty = M_n$ et donc toutes les inclusions $M_n \subset M_{n+1} \subset \cdots \subset M_\infty$ sont des égalités. (i) est donc vrai. □

1.1.2 Proposition.

Il y a équivalence entre :

(i) *M est artinien.*

(ii) *Toute famille non-vide de sous-modules de M admet un élément minimal (pour l'inclusion).*

La preuve est laissée en exercice.

1.1.3 Proposition.

(i) *Soit $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ une suite exacte courte de A-modules. Alors M est noethérien (respectivement, artinien) si et seulement si L et N sont tous deux noethériens (respectivement, artiniens).*

(ii) *Soit M un A-module et $n \geq 0$ un entier. Si M est noethérien (respectivement, artinien), alors M^n l'est également.*

Preuve. Il suffit de prouver (i). Nous ne prouverons que l'implication (L et N noethériens) $\Rightarrow$ (M noethérien), laissant en exercice la preuve des autres énoncés.

Supposons donc L et N noethériens. Soit (M_n) une suite croissante de sous-modules de M. Posons $L_n = f^{-1}(M_n)$ et $N_n = g(M_n)$. Alors (L_n) est une suite croissante de sous-modules de L et (N_n) est une suite croissante de sous-modules de N ; par conséquent ces deux suites stationnent à partir d'un certain rang. De plus, le lemme des cinq appliqué au diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & M_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & N_n \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_{n+1} \arrow[r, "f"] & M_{n+1} \arrow[r, "g"] & N_{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

montre que

$$(L_n = L_{n+1} \text{ et } N_n = N_{n+1}) \Rightarrow (M_n = M_{n+1}).$$

Ainsi (M_n) stationne à partir d'un certain rang. Ceci prouve que M est noethérien. □

Remarque importante. On peut munir A d'une structure de A-module à gauche, l'action étant donnée par multiplication à gauche ; le A-module obtenu est appelé le **module régulier** à gauche et noté ${}_AA$, avec un A en indice à gauche pour rappeler que A agit à gauche.

Un anneau A est dit noethérien (respectivement, artinien) à gauche si le module régulier à gauche ${}_AA$ est noethérien (respectivement, artinien).

Un A-module de type fini n'est alors rien d'autre qu'un module isomorphe à un quotient d'un module de la forme $({}_AA)^n$. Il suit alors de la proposition 1.1.3 qu'un module de type fini sur un anneau noethérien (respectivement, artinien) est noethérien (respectivement, artinien).

1.2 Théorème de Krull–Schmidt–Azumaya

Définition.

(1) Un A-module M est dit **indécomposable** si $M \neq 0$ et si M ne s'écrit pas $M' \oplus M''$, avec M', M'' sous-modules non-nuls.

(2) Un anneau B est dit **anneau à division** si l'ensemble $B^\times$ des éléments inversibles de B coïncide avec l'ensemble $B \setminus \{0\}$.

(3) Un anneau B est dit **local** si l'ensemble $B \setminus B^\times$ des éléments non-inversibles de B est un idéal bilatère de B.

Par convention, si B est l'anneau nul, alors $B = B^\times = \{0\}$; dans ce cas, B n'est pas un anneau à division ; de plus $B \setminus B^\times = \varnothing$ n'est pas un idéal et donc B n'est pas local.

L'objectif de ce paragraphe est de prouver les deux résultats ci-dessous :

1.2.1 Proposition. *Si M est un A-module indécomposable de longueur finie, alors* $\operatorname{End}_A(M)$ *est un anneau local.*

1.2.2 Théorème de Krull–Schmidt–Azumaya.

(i) *Soit M un A-module noethérien ou artinien. Alors M s'écrit $M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ avec $m \geq 0$ et M_1, ..., M_m sous-modules indécomposables.*

(ii) *Soit M un A-module de longueur finie. Soit $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ deux décompositions de M en somme directe de sous-modules indécomposables. Alors $m = n$ et il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ et*

$$M = N_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus N_{\sigma(i)} \oplus M_{i+1} \oplus \cdots \oplus M_n$$

pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Quelques remarques avant de prouver ces résultats.

Remarques.

(1) La somme directe de deux modules M' et M'' est un module M muni d'applications $i' : M' \to M$, $i'' : M'' \to M$, $p' : M \to M'$, $p'' : M \to M''$ telles que

$$\begin{pmatrix} p' \\ p'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i' & i'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{M'} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{M''} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} i' & i'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ p'' \end{pmatrix} = (\mathrm{id}_M).$$

(On applique ici les règles du calcul matriciel mais les produits sont des compositions d'homomorphismes.) On notera en particulier que $e' = i' \circ p'$ et $e'' = i'' \circ p''$ vérifient les relations $(e')^2 = e'$, $(e'')^2 = e''$, $e' + e'' = \mathrm{id}_M$, $e' \circ e'' = e'' \circ e' = 0$; on dit que ce sont des idempotents orthogonaux dans $\mathrm{End}_A(M)$. Ces observations se généralisent de façon évidente à des sommes directes d'un nombre fini de modules.

(2) Un anneau local n'a que deux idempotents : 0 et 1. En effet, si e est un idempotent d'un anneau local B, l'égalité $e + (1 - e) = 1$ impose que e ou $1 - e$ soit inversible (dans un anneau local, la somme de deux éléments non inversibles est un élement non inversible) ; en multipliant l'égalité $e(1 - e) = 0$ par l'inverse de e ou de $1 - e$, suivant le cas, on trouve $e = 1$ ou $e = 0$.

(3) En combinant les deux remarques précédentes, on voit qu'un A-module M est nécessairement indécomposable si $\mathrm{End}_A(M)$ est local.

(4) Supposons que M et N soient deux A-modules. Un homomorphisme $r : N \to M$ est appelé **rétraction** (ou **épimorphisme scindé**) s'il admet un inverse à droite (il existe $s : M \to N$ tel que $r \circ s = \mathrm{id}_M$). Sous ces hypothèses, $N = (\ker r) \oplus (\operatorname{im} s)$, $(\operatorname{im} s) \cong M$, et la suite exacte courte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (\ker r) \arrow[r] & N \arrow[r, "r"] & M \arrow[l, bend left, dotted, "s"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est scindée.

(5) Supposons que M et N soient deux A-modules. Un homomorphisme $c : M \to N$ est appelé **corétraction** (ou **monomorphisme scindé**) s'il admet un inverse à gauche (il existe $t : N \to M$ tel que $t \circ c = \mathrm{id}_M$). Sous ces hypothèses, $N = (\operatorname{im} c) \oplus (\ker t)$, $(\operatorname{im} c) \cong M$, $(\ker t) \cong (\operatorname{coker} c)$, et la suite exacte courte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "c"] & N \arrow[l, bend left, dotted, "t"] \arrow[r] & (\operatorname{coker} c) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est scindée.

(6) La proposition 1.2.1 est grossièrement fausse si l'on omet l'hypothèse que M est de longueur finie, comme le montre l'exemple du $\mathbb{Z}$-module régulier.

La preuve de la proposition 1.2.1 commence par l'énoncé classique suivant, que nous réutiliserons dans la section 1.8.

1.2.3 Lemme de Fitting. *Soit M un A-module noethérien et artinien, soit $f \in \operatorname{End}_A(M)$. Alors il existe une décomposition $M = M' \oplus M''$ avec M', M'' sous-modules stables par f tels que $f|_{M'}$ est nilpotent et $f|_{M''} \in \operatorname{Aut}_A(M'')$.*

Preuve. La suite des noyaux itérés $(\ker f^n)$ est croissante, donc stationne à partir d'un certain rang ; soit M' sa limite. La suite des images itérées $(\operatorname{im} f^n)$ est décroissante, donc stationne à partir d'un certain rang ; soit M'' sa limite. Ainsi il existe $n \geq 0$ tel que $M' = \ker f^n = \ker f^{2n}$ et $M'' = \operatorname{im} f^n = \operatorname{im} f^{2n}$. Certainement M' et M'' sont stables par f. C'est alors un jeu classique que de prouver $M = M' \oplus M''$. Enfin $f|_{M'}$ est nilpotent et $f|_{M''}$ est un automorphisme, ce dernier point découlant de

$$\operatorname{im} f|_{M''} = f(\operatorname{im} f^n) = \operatorname{im} f^{n+1} = M'' \quad \text{et} \quad \ker f|_{M''} \subset (\ker f^n) \cap M'' = M' \cap M'' = \{0\}.$$

□

Preuve de la proposition 1.2.1. Dans le cas où M est indécomposable, le lemme de Fitting dit qu'un endomorphisme $f \in \operatorname{End}_A(M)$ est inversible ou nilpotent (ou exclusif, car M est non-nul). Posons $B = \operatorname{End}_A(M)$ et $J = B \setminus B^\times$; ainsi J est l'ensemble des endomorphismes nilpotents de M, et nous voulons établir que c'est un idéal bilatère de B.

Soit $(f, b) \in J \times B$. Certainement $\ker f \neq 0$, donc $\ker(b \circ f) \neq 0$, donc $b \circ f$ n'est pas inversible, et donc $b \circ f \in J$. De même, $\operatorname{coker} f \neq 0$, donc $\operatorname{coker}(f \circ b) \neq 0$, donc $f \circ b$ n'est pas inversible, et donc $f \circ b \in J$. Il reste à prouver que pour tout $(f, g) \in J^2$, on a $f + g \in J$. Supposons au contraire que $f + g$ soit inversible. Alors il existe $b \in B$ tel que $1 - b \circ f = b \circ g$. Alors $b \circ f$ et $b \circ g$ sont nilpotents (nous venons de prouver qu'ils appartiennent à J), donc $1 - b \circ f$ est inversible (d'inverse $\sum_{n \geq 0} (b \circ f)^n$). Ainsi $b \circ g$ est nilpotent et inversible, ce qui est impossible. □

1.2.4 Lemme. *Soit $M = M' \oplus M'' = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ avec $\operatorname{End}_A(M')$ local et N_1, ..., N_n indécomposables. Alors il existe $s \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $M' \cong N_s$ et $M = N_s \oplus M''$.*

Preuve. Pour $t \in \{1, \ldots, n\}$, notons $i_t : N_t \to M$ et $p_t : M \to N_t$ les inclusions et projections données par la somme directe $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$. Notons $\varphi' : M' \to M$, $\varphi'' : M'' \to M$, $\psi' : M \to M'$ et $\psi'' : M \to M''$ les inclusions et projections données par la somme directe $M = M' \oplus M''$. Alors

$$\operatorname{id}_{M'} = \psi' \circ \varphi' = \sum_{t=1}^{n} \psi' \circ i_t \circ p_t \circ \varphi'.$$

Comme $\operatorname{End}_A(M')$ est local, il existe $s \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $(\psi' \circ i_s) \circ (p_s \circ \varphi')$ soit inversible. Ceci implique que $N_s = \ker(\psi' \circ i_s) \oplus \operatorname{im}(p_s \circ \varphi')$, où $\operatorname{im}(p_s \circ \varphi') \cong M'$. Comme N_s est supposé indécomposable, cela donne $\ker(\psi' \circ i_s) = 0$, donc $\psi' \circ i_s$ est injectif ; l'inversibilité de $(\psi' \circ i_s) \circ (p_s \circ \varphi')$ imposant à $\psi' \circ i_s$ d'être surjectif, nous concluons que $\psi' \circ i_s$ est un isomorphisme.

Notons $\chi \in \mathrm{Aut}_A(M')$ l'inverse de $(\psi' \circ i_s) \circ (p_s \circ \varphi')$; ainsi $\chi \circ \psi' \circ i_s : N_s \to M'$ est un isomorphisme dont l'inverse est $p_s \circ \varphi'$, et l'on a

$$(\psi' \circ i_s) \circ (p_s \circ \varphi') \circ \chi = \mathrm{id}_{M'} \quad \text{et} \quad (p_s \circ \varphi') \circ (\chi \circ \psi' \circ i_s) = \mathrm{id}_{N_s}.$$

Définissons $\widetilde{p}_s : M \to N_s$ et $\widetilde{\psi}'' : M \to M''$ par

$$\widetilde{p}_s = (p_s \circ \varphi') \circ \chi \circ \psi' \quad \text{et} \quad \widetilde{\psi}'' = \psi'' \circ (\mathrm{id}_M - i_s \circ \widetilde{p}_s).$$

Alors $\widetilde{p}_s \circ i_s = \mathrm{id}_{N_s}$ et $(\psi' \circ i_s) \circ \widetilde{p}_s = \psi'$, et on vérifie que

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p}_s \\ \widetilde{\psi}'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_s & \varphi'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{N_s} & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{M''} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} i_s & \varphi'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{p}_s \\ \widetilde{\psi}'' \end{pmatrix} = (\mathrm{id}_M).$$

Ceci montre que M est la somme directe de ses sous-modules $(\mathrm{im}\, i_s) = N_s$ et $(\mathrm{im}\, \varphi'') = M''$, les homomorphismes $\widetilde{p}_s$ et $\widetilde{\psi}''$ étant les projections associées à cette décomposition. □

Preuve du théorème 1.2.2. (i) Nous traiterons le cas où M est noethérien, laissant le cas artinien en exercice. Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des sous-modules N de M tels que M/N n'admette pas de décomposition. Il s'agit de prouver que le sous-module nul $\{0\}$ n'appartient pas à $\mathscr{N}$. Nous allons en fait prouver que $\mathscr{N} = \varnothing$. Si ce n'était pas le cas, $\mathscr{N}$ possèderait un élément maximal, disons N. Comme M/N n'a pas de décomposition de somme directe finie d'indécomposables, il n'est ni 0 ni indécomposable. On peut donc l'écrire $M/N = \widetilde{M'} \oplus \widetilde{M''}$, avec $\widetilde{M'}$ et $\widetilde{M''}$ des sous-modules non-nuls de M/N. Soit M' et M'' les préimages de $\widetilde{M'}$ et $\widetilde{M''}$ par l'application quotient $M \to M/N$; autrement dit, $\widetilde{M'} = M'/N$ et $\widetilde{M''} = M''/N$. Puisque M' et M'' contiennent strictement N, ils n'appartiennent pas à $\mathscr{N}$, par maximalité de N. Ainsi $M/M'' \cong \widetilde{M'}$ et $M/M' \cong \widetilde{M''}$ admettent l'un et l'autre une décomposition comme somme directe finie de modules indécomposables. En assemblant ces deux décompositions, on en obtient une de M/N, contredisant le choix de N.

(ii) On construit par récurrence sur $\ell \in \{0, \ldots, n\}$ une application injective $\sigma : \{1, \ldots, \ell\} \to \{1, \ldots, n\}$ telle que pour chaque $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, on ait $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ et

$$M = N_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus N_{\sigma(i)} \oplus M_{i+1} \oplus \cdots \oplus M_m.$$

L'initialisation $\ell = 0$ est banale. Prenons $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ et supposons $\sigma(1)$, ..., $\sigma(\ell - 1)$ construits. On applique le lemme 1.2.4 aux décompositions

$$M = M_\ell \oplus (N_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus N_{\sigma(\ell-1)} \oplus M_{\ell+1} \oplus \cdots \oplus M_n) = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$$

en observant que $\mathrm{End}_A(M_\ell)$ est local d'après le lemme de Fitting. Cela nous donne $s \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $M_\ell \cong N_s$ et

$$M = N_s \oplus ((N_{\sigma(1)} \oplus \cdots \oplus N_{\sigma(\ell-1)} \oplus M_{\ell+1} \oplus \cdots \oplus M_n).$$

Manifestement $s \notin \{\sigma(1), \ldots, \sigma(\ell - 1)\}$ (sinon cette dernière somme ne serait pas directe) et il suffit de poser $\sigma(\ell) = s$ pour conclure le pas de récurrence. □

Remarque. Le théorème de Krull–Schmidt–Azumaya affirme qu'un A-module M de longueur finie est caractérisé à isomorphisme près par les multiplicités apparaissant dans une décomposition de M en somme directe d'indécomposables. Ainsi le problème de la classification des classes d'isomorphisme de A-modules de longueur finie se réduit à celui des classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables. Mais celui-ci s'avère souvent formidable : alors que tous les A-modules simples se retrouvent comme quotients de A (voir la remarque au début de la prochaine section), il arrive que les A-modules indécomposables soient beaucoup plus gros que A. Par exemple, si k est un corps et si (x, y) désigne l'idéal engendré par x et y dans l'anneau de polynômes $k[x, y]$, alors $A = k[x, y]/(x, y)^2$ est une k-algèbre de dimension 3, et le quotient $(x, y)^n/(x, y)^{n+2}$, qui est de façon naturelle un A-module indécomposable, est de dimension $2n + 3$.

1.3 Théorème de Jordan–Hölder

Définition. Un A-module est dit simple s'il a exactement deux sous-modules : 0 et lui-même.

Remarque. Soit M un A-module simple et m un élément non-nul de M. Alors l'application $a \mapsto am$ de ${}_AA$ dans M est un homomorphisme de A-modules, surjectif car son image est un sous-module non-nul de M qui est simple. Ainsi $M \cong {}_AA/\mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est le noyau de cet homomorphisme. On notera que $\mathfrak{m}$ est un idéal à gauche de A (puisque c'est un sous-module de ${}_AA$) maximal (car un idéal coincé entre $\mathfrak{m}$ et A fournirait un sous-module non-trivial de ${}_AA/\mathfrak{m}$).

1.3.1 Lemme de Schur. *Un homomorphisme entre deux modules simples est soit nul, soit un isomorphisme. L'anneau des endomorphismes d'un module simple est un anneau à division.*

Définition.

(1) Un **filtration croissante** d'un module M est une suite croissante $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-modules de M ; on demande généralement que $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} M_n = M$ (la filtration est **exhaustive**) et que $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} M_n = \{0\}$ (la filtration est **séparante**). On demande parfois que la suite soit en fait finie.

(2) Les **facteurs** ou **sous-quotients** d'une filtration (M_n) sont les quotients successifs M_{n+1}/M_n.

(3) Une filtration (M_n) de M **raffine** une filtration (N_n) s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $N_n = M_{\varphi(n)}$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$.

(4) Une **série de composition** d'un module M est une filtration finie dont tous les quotients sont simples (en particulier, non-nuls ; c'est la définition traditionnelle).

1.3.2 Lemme du papillon. *Soit $0 \subset M' \subset M \subset L$ et $0 \subset N' \subset N \subset L$ deux filtrations de longueur 3 d'un module L. Alors*

$$\frac{(M \cap N) + M'}{(M \cap N') + M'} \cong \frac{M \cap N}{(M \cap N') + (M' \cap N)} \cong \frac{(M \cap N) + N'}{(M' \cap N) + N'}.$$

Preuve. La restriction à $M \cap N$ de la surjection canonique $M \to M/((M \cap N') + M')$ a pour noyau $(M \cap N') + (M' \cap N)$ et a pour image $((M \cap N) + M')/((M \cap N') + M')$. Le premier isomorphisme s'en déduit par factorisation. La preuve du second est analogue. □

1.3.3 Théorème de raffinement de Schreier. *On peut toujours raffiner deux filtrations finies d'un A-module donné de façon à avoir la même suite de facteurs, à permutation et à isomorphisme près.*

Preuve. Soient $(M_s)_{0 \leq s \leq m}$ et $(N_t)_{0 \leq t \leq n}$ deux filtrations finies d'un même module M. Posons $M_{s,t} = (M_s \cap N_t) + M_{s-1}$ et $N_{t,s} = (M_s \cap N_t) + N_{t-1}$. À s fixé, lorsque t croît de 0 à n, le sous-module $M_{s,t}$ croît de M_{s-1} à M_s. Ainsi

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & = & M_{1,0} & \subseteq & M_{1,1} & \subseteq & M_{1,2} & \subseteq \cdots \subseteq & M_{1,n} & & \\
 & = & M_{2,0} & \subseteq & M_{2,1} & \subseteq & M_{2,2} & \subseteq \cdots \subseteq & M_{2,n} & & \\
 & = & M_{3,0} & \subseteq & M_{3,1} & \subseteq & M_{3,2} & \subseteq \cdots & & & \\
 & & & & & & & \cdots \subseteq & M_{m-1,n} & & \\
 & = & M_{m,0} & \subseteq & M_{m,1} & \subseteq & M_{m,2} & \subseteq \cdots \subseteq & M_{m,n} & = & M
\end{array}$$

est un filtration de M qui raffine

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_{m-1} \subseteq M_m = M.$$

De même, les $N_{t,s}$, convenablement ordonnés, sont les termes d'une filtration de M qui raffine $(N_t)_{0 \leq t \leq n}$.

Le lemme du papillon dit que pour $M_{s,t}/M_{s,t-1} \cong N_{t,s}/N_{t,s-1}$ pour tous entiers strictement positifs s et t. À réindexation près, nos deux filtrations ont donc même suite de facteurs. □

1.3.4 Théorème de Jordan–Hölder. *Soit M un A-module artinien et noethérien. Alors M admet une série de composition. Deux séries de composition de M ont même suite de facteurs, à permutation et isomorphisme près.*

Preuve. La dernière phrase de l'énoncé étant une conséquence du théorème de Schreier, il suffit d'établir l'existence. Soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des sous-modules de M possédant une série de composition. Certainement $\{0\}$ appartient à M, donc $\mathscr{M} \neq \varnothing$. Comme M est noethérien, $\mathscr{M}$ possède un élément maximal, disons N. Supposons $N \subsetneq M$; alors l'ensemble $\mathscr{N}$ des sous-modules de M contenant strictement L est non-vide. Choisissons un élément minimal L dans $\mathscr{N}$. Alors L/N est simple, et en ajoutant L au bout d'une série de composition de N, on obtient une série de composition de L, contredisant le choix de N. La supposition $N \subsetneq M$ était donc incorrecte, et finalement $M \in \mathscr{M}$. □

Exemple. Soit k un corps algébriquement clos. Un $k[X]$-module artinien et noethérien M est la donnée d'un k-espace vectoriel E de dimension finie munie d'un endomorphisme u. Un tel module est simple si et seulement si E est de dimension 1 ; u agit alors par un scalaire qui détermine sa classe d'isomorphisme. Plus généralement, une série de composition de M est la donnée d'un drapeau complet

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$$

formé de sous-espaces stables par u. Dans une base adaptée, la matrice de u est triangulaire, et la suite des coefficients diagonaux de cette matrice indique la suite des classes d'isomorphisme des $k[X]$-modules $(E_{i+1}/E_i, u_i)$, où u_i est l'endomorphisme induit par u sur E_{i+1}/E_i. A permutation près, cette suite ne dépend pas du choix du drapeau — ce sont les valeurs propres de u, répétées selon leurs multiplicités algébriques.

Notation. Soit M un A-module artinien et noethérien.

(1) La **longueur** $\ell(M)$ de M est le nombre de facteurs d'une série de composition de M. Ce nombre est nécessairement fini, ce qui justifie la terminologie « module de longueur finie » pour les modules artiniens et noethériens.

(2) Pour tout A-module simple S, le nombre de facteurs isomorphes à S dans une série de composition de M est la **multiplicité de Jordan–Hölder** $(M : S)$ de S dans M.

1.4 Groupe de Grothendieck

A chaque catégorie exacte $\mathcal{C}$, on peut associer son groupe de Grothendieck $\mathbf{K}(\mathcal{C})$. La catégorie des A-modules peut être munie de plusieurs structures exactes, selon par exemple que l'on regarde les suites exactes courtes habituelles (pour la structure de catégorie abélienne) ou seulement les suites exactes scindées (en se limitant à elles, on obtient la structure exacte minimale, qui est définie pour n'importe quelle catégorie additive).

Je considérerai ci-dessous seulement le cas de la catégorie des A-modules de longueur finie munie de la structure de catégorie abélienne. La notation qui semblait s'imposer il y a une vingtaine d'années pour le groupe de Grothendieck de cette catégorie est $G_0(A)$. Je l'adopterai. A l'époque, la notation $K_0(A)$ était utilisée pour désigner le groupe de Grothendieck de la sous-catégorie pleine des A-modules projectifs de type fini ; c'est une catégorie additive mais pas abélienne, et on peut la munir de la structure exacte minimale.

1.4.1 Proposition. *Soit* $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ *une suite exacte courte de A-modules de longueur finie. Alors* $\ell(M) = \ell(L) + \ell(N)$ *et* $(M : S) = (L : S) + (N : S)$ *pour tout A-module simple S.*

Preuve. A partir de séries de composition $0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_{\ell(L)} = L$ et $0 = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_{\ell(N)} = N$ de L et N, on construit la série de composition de M

$$f(L_0) \subset f(L_1) \subset \cdots \subset f(L_{\ell(L)-1}) \subset \operatorname{im} f \subset g^{-1}(N_1) \subset \cdots \subset g^{-1}(N_{\ell(N)}).$$

Elle est manifestement de longueur $\ell(L)+\ell(N)$ et ses facteurs sont l'union (au sens des multi-ensembles, c'est-à-dire avec multiplicités) des facteurs des séries de composition de L et de N. $\square$

Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules de longueur finie et $\mathbb{Z}^{(\mathscr{I})}$ le groupe abélien libre de base $\mathscr{I}$. À la classe d'siomorphisme d'un A-module M de longueur finie correspond donc un élément (M) de la base de $\mathbb{Z}^{(\mathscr{I})}$; les éléments de $\mathbb{Z}^{(\mathscr{I})}$ sont les combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires des symboles (M), avec un symbole par classe d'isomorphisme.

Définition. On note $G_0(A)$ le quotient de $\mathbb{Z}^{(\mathscr{I})}$ par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $(M)-(L)-(N)$, chaque fois qu'existe une suite exacte courte $0 \to L \to M \to N \to 0$. On note $[M]$ l'image de (M) dans $G_0(A)$.

1.4.2 Proposition. *Soit $\mathscr{S} \subset \mathscr{I}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules simples. Alors il existe un isomorphisme $d : G_0(A) \to \mathbb{Z}^{(\mathscr{S})}$ tel que $d([M]) = ((M:S))_{S\in\mathscr{S}}$.*

Preuve. En utilisant la propriété universelle des groupes abéliens libres, on peut définir un unique homomorphisme de groupes abéliens $\widetilde{d} : \mathbb{Z}^{(\mathscr{I})} \to \mathbb{Z}^{(\mathscr{S})}$ tel que $\widetilde{d}((M)) = ((M:S))_{S\in\mathscr{S}}$. La proposition 1.4.1 prouve que $\widetilde{d}((M)-(L)-(N)) = 0$ pour toute suite exacte courte $0 \to L \to M \to N \to 0$. Ainsi $\widetilde{d}$ se factorise à travers l'application quotient $p : \mathbb{Z}^{(\mathscr{I})} \to G_0(A)$, ce qui permet de définir d.

Soit $i : \mathbb{Z}^{(\mathscr{S})} \to \mathbb{Z}^{(\mathscr{I})}$ l'homomorphisme de groupes abéliens induit par l'inclusion $\mathscr{S} \subset \mathscr{I}$ — ainsi i envoie un vecteur de base sur un vecteur de base. Si S et T sont deux (classes d'isomorphisme de) A-modules simples, alors $(T:S)$ vaut 1 ou 0 selon que S et T sont isomorphes ou non. Traçant les définitions, ce fait se traduit par la relation $d \circ p \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^{(\mathscr{S})}}$ dans le triangle

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^{(\mathscr{I})} \arrow[rr, "p"] & & G_0(A) \arrow[dl, "d"] \\ & \mathbb{Z}^{(\mathscr{S})} \arrow[ul, "i"] & \end{tikzcd}$$

La proposition sera alors démontrée dès lors que nous aurons établi la surjectivité de $p \circ i$.

Les éléments de la forme $[M]$ engendrent le groupe abélien $G_0(A)$. Prouvons par récurrence sur la longueur de M que $[M] \in \mathrm{im}(p\circ i)$. Si M est de longueur 0, alors $M = 0$; or la suite exacte courte $0 \to 0 \to 0 \to 0 \to 0$ (!) impose la relation $[0] = 0$ dans $G_0(A)$; par conséquent dans ce cas $[M] \in \mathrm{im}(p \circ i)$. Si M est de longueur 1, alors il est simple, donc $(M) \in \mathrm{im}\, i$ et finalement dans ce cas également $[M] \in \mathrm{im}(p\circ i)$. Si M est de longueur supérieure ou égale à 2, alors on peut construire une suite exacte courte $0 \to L \to M \to N \to 0$ avec L et N non-nuls. Certainement $\ell(L)$ et $\ell(N)$ sont tous deux strictement inférieurs à $\ell(M)$, de sorte qu'on peut supposer connu par récurrence que $[L]$ et $[N]$ appartiennent tous deux à l'image de $p \circ i$. Par conséquent $[M] = [L] + [N]$ appartient aussi à $\mathrm{im}(p \circ i)$. $\square$

1.4.3 Corollaire. *Le $\mathbb{Z}$-module $G_0(A)$ est libre et $\{[S] \mid S \in \mathscr{S}\}$ en est une base.*

1.5 Filtration de Harder–Narasimhan

Les résultats présentés dans les sections 1.2 et 1.3 permettent d'associer des multiplicités à chaque A-module M (soit de modules indécomposables apparaissant dans une décomposition de Krull–Schmidt, soit de modules simples apparaissant comme facteurs dans une série de composition), mais les décompositions de M ne sont pas uniques ; d'ailleurs un espace vectoriel (sauf s'il est de dimension 0 ou 1) peut s'écrire de plusieurs façons comme somme directe de droites et possède plusieurs drapeaux complets.

Il existe une autre méthode de découpage d'un module en morceaux qui, elle, fournit une unicité. Les morceaux en question semblent moins naturels que les modules simples ou indécomposables, mais cette méthode, découverte dans les années 1970 dans un cadre de géométrie algébrique (construction des espaces de modules de fibrés vectoriels sur une courbe algébrique), est aussi fondamentale et riche d'applications que les deux autres. Par manque de temps, cette méthode sera traitée en exercice (exercice 11 de la feuille 1).

1.6 Modules complètement réductibles

Définition. Soit M un module sur un anneau A.

(1) Un sous-module $N \subset M$ est dit **maximal** si le quotient M/N est simple (de façon équivalente, $N \subsetneq M$ et il n'existe pas de sous-module L tel que $N \subsetneq L \subsetneq M$).

(2) Un sous-module $N \subset M$ est dit **facteur direct** s'il admet un supplémentaire, c'est-à-dire s'il existe un sous-module $L \subset M$ tel que $M = N \oplus L$.

(3) Le **socle** $\operatorname{soc} M$ de M est la somme des sous-modules simples de M.

(4) Le **radical** $\operatorname{rad} M$ de M est l'intersection des sous-modules maximaux de M.

(5) La **tête** de M (aussi appelée cosocle et notée $\operatorname{top} M$ ou $\operatorname{hd} M$) est le quotient $M/\operatorname{rad} M$.

1.6.1 Théorème. *Soit M un A-module. Les énoncés suivants sont équivalents.*

(i) M est la somme directe d'une famille finie de modules simples.

(ii) M est noethérien et $\operatorname{soc} M = M$.

(iii) M est artinien et $\operatorname{rad} M = \{0\}$.

(iv) M est noethérien ou artinien, et tout sous-module de M est facteur direct.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) : utiliser la proposition 1.1.3 pour prouver que M est noethérien.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : écrire $M = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$, constater que chaque sous-module $H_i = L_1 \oplus \cdots \oplus L_{i-1} \oplus L_{i+1} \oplus \cdots \oplus L_n$ est maximal, et noter que $H_1 \cap \cdots \cap H_n = \{0\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv) : supposons (ii) vraie. Soit $N \subset M$ un sous-module. On veut prouver l'existence d'un supplémentaire de N dans M. Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des sous-modules $L \subset M$ tels que $L \cap N = \{0\}$. Certainement $\mathscr{N}$ n'est pas vide, parce que $\{0\} \in \mathscr{N}$. Comme M est supposé noethérien, $\mathscr{N}$ possède un élément maximal, disons N'.

Soit S un sous-module simple de M. Si $S \not\subset N'$, alors $N' + S \notin \mathscr{N}$ par maximalité de N', c'est-à-dire $N \cap (N' + S) \neq \{0\}$. Ainsi la somme $N + N' + S$ n'est pas directe dans M ; autrement dit il existe $(x, y, z) \in N \times N' \times S$ tel que $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ et $x + y + z = 0$. Comme $N \cap N' = \{0\}$, nécessairement $z \neq 0$; il s'ensuit que $(N + N') \cap S \neq \{0\}$. La simplicité de S force alors $S \subset N + N'$. Cette conclusion vaut aussi si $S \subset N'$.

Ainsi $N + N'$ contient tous les sous-modules simples de M, donc contient $\operatorname{soc} M = M$. Joint à $N \cap N' = \{0\}$, cela nous dit que N' est un supplémentaire de N dans M.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : supposons (iii) vraie. Soit $N \subset M$ un sous-module. On veut prouver l'existence d'un supplémentaire de N dans M. Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des sous-modules $L \subset M$ tels que $L + N = M$. Certainement $\mathscr{N}$ n'est pas vide, parce que $M \in \mathscr{N}$. Comme M est supposé artinien, $\mathscr{N}$ possède un élément minimal, disons N'.

Soit H un sous-module maximal de M. Si $H \not\supset N'$, alors $N' \cap H \notin \mathscr{N}$ par minimalité de N', c'est-à-dire $N + (N' \cap H) \neq M$. Ainsi l'intersection $N \cap N' \cap H$ n'est pas transverse dans M ; autrement dit l'application naturelle $M \to (M/N) \times (M/N') \times (M/H)$ n'est pas surjective. Comme $N + N' = M$, il s'ensuit que $(N \cap N') + H \neq M$. La maximalité de H force alors $H \supset N \cap N'$. Cette conclusion vaut aussi si $H \supset N'$.

Ainsi $N \cap N'$ est inclus dans tous les sous-modules maximaux de M, donc dans $\operatorname{rad} M = \{0\}$. Joint à $N + N' = M$, cela nous dit que N' est un supplémentaire de N dans M.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : supposons par exemple M noethérien (la preuve dans le cas où M est artinien est semblable et laissée en exercice). Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des sous-modules de M pouvant s'écrire comme somme directe finie de sous-modules simples. Alors $\mathscr{N} \neq \varnothing$ (puisque $\{0\} \in \mathscr{N}$) donc possède un élément maximal, disons N. Soit N' un supplémentaire de N dans M. Certainement N' est noethérien. Si N' était non-nul, il contiendrait un sous-module maximal L ; alors $N \oplus L$ serait un sous-module maximal de M (vu que $M/(N \oplus L) \cong N'/L$ serait simple) ; on pourrait alors trouver un supplémentaire S de $N \oplus L$ dans M, qui serait simple ; ainsi $N \oplus S$ serait une somme directe finie de sous-modules simples strictement plus grande que N. Cette contradiction avec le choix de N prouve que $N' = \{0\}$. On conclut que $N = M$ et donc que $M \in \mathscr{N}$. □

Définition. Un A-module M (de type fini) satisfaisant les énoncés du théorème 1.6.1 est dit **complètement réductible**.

Exemple. Tout module M de type fini sur un anneau à division Δ est complètement réductible. De fait, si x est un élément non-nul de M, alors Δx est un sous-module simple de M ; par suite, M est la somme de ses modules simples, d'où $\operatorname{soc} M = M$; de plus M est noethérien car de type fini sur un anneau Δ qui est lui-même noethérien.

Remarque. On peut supprimer « finie » dans (i) et les hypothèses « artinien » et « noethérien » dans les énoncés (ii)–(iv), mais on a alors seulement (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (iii) et la preuve utilise le lemme de Zorn, donc l'axiome du choix. Dans ce cadre, il est d'usage courant de dire d'un module M qu'il est complètement réductible s'il satisfait (i), (ii) et (iv).

La preuve des deux propositions suivantes est laissée en exercice.

1.6.2 Proposition. *Tout sous-module (respectivement, tout module quotient) d'un module complètement réductible est complètement réductible.*

1.6.3 Proposition. *Soit M un A-module de longueur finie. Alors* $\operatorname{soc} M$ *(respectivement,* $\operatorname{top} M$*) est le plus grand sous-module (respectivement, module quotient) complètement réductible de M.*

Tout module de longueur finie admet une filtration dont les sous-quotients sont complètement réductibles (il suffit de prendre une série de composition). La définition suivante introduit un entier sur lequel il est parfois pertinent de raisonner par récurrence.

Définition. On appelle **longueur de Loewy** d'un A-module M la longueur minimale d'une filtration de M dont tous les facteurs sont complètement réductibles.

Pour conclure cette section, nous introduisons la notion de composante isotypique.

Soit M un A-module complètement réductible, écrit comme somme directe $\bigoplus_{i\in I} L_i$ de sous-modules simples L_i. Regroupons les L_i par paquets selon leurs classes d'isomorphisme : pour S module simple, nous posons $M_{(S)} = \sum_{i\in I_S} L_i$ où I_S est l'ensemble des $i \in I$ tels que $L_i \cong S$. Alors par construction I est l'union disjointe des I_S, et donc

$$M = \bigoplus_{S\in\mathscr{S}} M_{(S)}$$

la somme portant sur l'ensemble $\mathscr{S}$ des classes d'isomorphisme de A-modules simples.

1.6.4 Proposition. *Les sous-modules $M_{(S)}$ ne dépendent pas de la décomposition $M = \bigoplus_{i\in I} L_i$ utilisée pour les construire.*

Preuve. Prenons une seconde décomposition $M = \bigoplus_{j\in J} L'_j$ de M en somme directe de sous-modules simples. Soit S un module simple, notons J_S l'ensemble des $j \in J$ tels que $L'_j \cong S$, et posons $M'_{(S)} = \sum_{j\in J_S} L'_j$. Dans ces décompositions de M, l'identité de M se représente par une matrice, le coefficient en position (i,j) étant un élément de $\operatorname{Hom}_A(L'_j, L_i)$. D'après le lemme de Schur, cette matrice est diagonale par blocs : le coefficient en position (i,j) n'est non-nul que s'il existe un module simple S tel que $(i,j) \in I_S \times J_S$. Cette structure de matrice diagonale par blocs entraîne que l'identité de M envoie $M'_{(S)}$ dans $M_{(S)}$, pour chaque (classe d'siomorphisme de) module simple. Ceci prouve l'inclusion $M'_{(S)} \subset M_{(S)}$. L'inclusion opposée se prouve de façon symétrique. □

Définition. Les $M_{(S)}$ s'appellent les **composantes isotypiques** de M.

Les composantes isotypiques ne sont définies que pour les modules complètement réductibles. On vérifie à l'aide du lemme de Schur que si $f : M \to N$ est un homomorphisme entre deux modules complètement réductibles, alors $f(M_{(S)}) \subset N_{(S)}$ pour chaque module simple S ; la preuve de cette propriété est laissée en exercice.

1.7 Sous-modules petits et grands

Les notions exposées dans cette section ont été introduites en TD pour compléter le cours sur les couvertures projectives.

Définition. Soit M un module sur un anneau A et N un sous-module de M.

(1) N est dit **petit** si pour tout sous-module $X \subsetneq M$, on a $N + X \subsetneq M$.

(2) N est dit **grand** si pour tout sous-module $X \neq 0$, on a $N \cap X \neq 0$.

Ces définitions peuvent se traduire en langage catégorique :

Définition.

(1) Un épimorphisme (= homomorphisme surjectif) de A-modules $f : M \to N$ est dit **essentiel**[2] si tout homomorphisme $g : L \to M$ tel que $f \circ g$ soit surjectif est surjectif.

(2) Un monomorphisme (= homomorphisme injectif) de A-modules $f : M \to N$ est dit **essentiel** si tout homomorphisme $g : N \to L$ tel que $g \circ f$ est injectif est injectif.

1.7.1 Proposition.

(i) Un épimorphisme $f : M \to N$ est essentiel si et seulement si son noyau est un petit sous-module.

(ii) Un monomorphisme $f : M \to N$ est essentiel si et seulement si son image est un grand sous-module.

Preuve. Supposons que $f : M \to N$ soit un épimorphisme essentiel. Soit $X \subsetneq M$. L'injection $g : X \to M$ n'étant pas surjective, la composée $f \circ g$ ne l'est pas non plus ; ainsi

$$f(M) = N \supsetneq \operatorname{im}(f \circ g) = f(X) = f(X + \ker f)$$

et donc $M \supsetneq X + \ker f$. Ceci prouve que $\ker f$ est un petit sous-module.

Réciproquement, supposons que $f : M \to N$ soit un épimorphisme et que $\ker f$ soit un petit sous-module. Soit $g : L \to M$ tel que $f \circ g$ soit surjectif. Alors $f(M) = N = \operatorname{im}(f \circ g) = f(\operatorname{im} g)$, et c'est une vérification de routine que de voir qu'alors $M = (\operatorname{im} g) + (\ker f)$. Comme $\ker f$ est petit, cela donne $M = \operatorname{im} g$, c'est-à-dire g surjectif.

Les deux alinéas précédents établissent (i). La preuve de (ii), semblable, est laissée en exercice. □

2. Certains auteurs préfèrent dire « superflu ». De fait, on dit parfois « sous-module superflu » plutôt que « petit sous-module », et de même « sous-module essentiel » plutôt que « grand sous-module ».

1.7.2 Proposition. *Soit M un A-module.*

(i) Si M est noethérien, alors un sous-module de M est petit si et seulement s'il est inclus dans $\operatorname{rad} M$.

(ii) Si M est artinien, alors un sous-module de M est grand si et seulement s'il contient $\operatorname{soc} M$.

Preuve. (i) Si N est un petit sous-module de M et H un sous-module maximal, alors nécessairement $H + N \subsetneq M$, ce qui force $N \subset H$. Ainsi un petit sous-module doit être inclus dans l'intersection de tous les sous-modules maximaux, à savoir $\operatorname{rad} M$. Par ailleurs, un sous-module strict $X \subsetneq M$ est toujours inclus dans un sous-module maximal H (on utilise ici que M est noethérien), et alors $X + \operatorname{rad} M \subset H \subsetneq M$; cela montre que $\operatorname{rad} M$ est un petit sous-module. A fortiori, tout sous-module inclus dans $\operatorname{rad} M$ est petit.

(ii) Un grand sous-module de M doit avoir une intersection non-nulle avec chaque sous-module simple de M, donc doit le contenir ; autrement dit, un grand sous-module de M doit contenir $\operatorname{soc} M$. Par ailleurs, si X est un sous-module non-nul de M, alors il contient un sous-module minimal (on utilise ici que M est artinien), c'est-à-dire simple, donc il rencontre $\operatorname{soc} M$; cela montre que $\operatorname{soc} M$ est un grand sous-module. A fortiori, tout sous-module contenant $\operatorname{soc} M$ est grand. □

Remarque. En utilisant l'axiome du choix, on peut prouver, sans hypothèse sur M, que $\operatorname{soc} M$ est l'intersection des grands sous-modules de M et $\operatorname{rad} M$ est la somme des petits sous-modules de M ; voir *Rings and categories of modules* de F. W. Anderson et K. R. Fuller, Graduate Texts in Mathematics vol. 13, propositions 9.7 et 9.13.

1.8 Couvertures projectives

Rappelons que pour un anneau A quelconque, un A-module P est dit **projectif** s'il vérifie les propriétés équivalentes suivantes :

(i) Si $f : M \to N$ est un épimorphisme de A-modules, alors $\operatorname{Hom}_A(P, f) : \operatorname{Hom}_A(P, M) \to \operatorname{Hom}_A(P, N)$ est surjectif.

(ii) $\operatorname{Ext}^1_A(P, L) = 0$ pour tout A-module L.

(iii) Tout épimorphisme $X \to P$ est scindé.

(iv) P est facteur direct d'un A-module libre.

Définition. Une **couverture projective** d'un A-module M est un couple (P, f) où P est un A-module projectif et $f : P \to M$ est un épimorphisme essentiel.

Par abus, on dit simplement que P est une couverture projective.

Dans la suite de cette section, A sera un anneau artinien et noethérien à gauche : nous demandons donc que le module régulier ${}_AA$ soit artinien et noethérien, c'est-à-dire de longueur finie. Les A-modules de type fini sont alors les A-modules de longueur finie.

1.8.1 Proposition. *Soit $f : P \to M$ un épimorphisme de A-modules avec P projectif et M et P de type fini. Les énoncés suivants sont équivalents.*

(i) (P, f) *est une couverture projective de M.*

(ii) f *induit un isomorphisme* $\operatorname{top} P \to \operatorname{top} M$.

(iii) *Un endomorphisme $h : P \to P$ tel que $f \circ h = f$ est un automorphisme de P.*

(iv) *Si $g : Q \to M$ est un épimorphisme avec Q projectif, alors il existe $h : Q \to P$ épimorphisme scindé tel que $g = f \circ h$.*

(v) *P est de longueur minimale parmi les modules projectifs Q tels qu'il existe un épimorphisme $Q \to M$.*

(vi) $\ker f$ *ne contient pas de facteur direct non-nul de P.*

Preuve. Supposons (i). Alors $\ker f$ est un petit sous-module de P, donc est inclus dans le radical de P. Utilisant la surjectivité de f, on vérifie sans peine que l'image directe par f et la préimage par f définissent une paire de bijections réciproques entre l'ensemble des sous-modules maximaux de P et l'ensemble de ceux de M. Ceci implique que $\operatorname{rad} P = f^{-1}(\operatorname{rad} M)$, puis que f induit un isomorphisme de $P/\operatorname{rad} P$ sur $M/\operatorname{rad} M$: (ii) est vrai.

Supposons (ii) et considérons un endomorphisme $h : P \to P$ tel que $f \circ h = f$. Alors h induit l'identité sur la tête de P. Ceci entraîne que $(\operatorname{im} h) + (\operatorname{rad} P) = P$, et donc $\operatorname{im} h = P$. Ainsi h est surjective, donc inversible (voir l'exercice 10 de la feuille 1), ce qui établit (iii).

Supposons (iii). Soit $g : L \to P$ un homomorphisme tel que $f \circ g : L \to M$ soit surjectif. Comme P est projectif, $f : P \to M$ se relève à travers cet épimorphisme : il existe $k : P \to L$ tel que $f = (f \circ g) \circ k$. Utilisant (ii), nous voyons que $h = g \circ k$ est un automorphisme de P, et donc que g est surjectif. Ceci montre que f est un épimorphisme essentiel : (i) est vrai.

Supposons à nouveau (iii). Soit $g : Q \to M$ un épimorphisme avec Q module projectif. Puisque $f : P \to M$ est surjectif, g se factorise à travers f : il existe $h : Q \to P$ tel que $g = f \circ h$. De même, la projectivité de P et la surjectivité de g donnent l'existence de $k : P \to Q$ tel que $f = g \circ k$. Alors $f = f \circ (h \circ k)$ et (iii) impose à $h \circ k$ d'être un automorphisme de P. Ainsi h est un épimorphisme scindé et (iv) est vrai.

Supposons (iv). Soit Q un module projectif tel qu'il existe un épimorphisme $Q \to M$. Alors il existe un épimorphisme scindé $Q \to P$; dit autrement P est isomorphe à un facteur direct de Q. Certainement alors la longueur de P est inférieure ou égale à celle de Q, et (v) est vrai.

Supposons que (vi) soit fausse. Alors on peut écrire $P = P_0 \oplus P_1$ avec P_0 non-nul inclus dans $\ker f$. Alors P_1 est projectif car facteur direct d'un projectif, et $f|_{P_1} : P_1 \to M$ est surjectif. De plus, $\ell(P) = \ell(P_0) + \ell(P_1) > \ell(P_1)$. Ainsi P n'est pas de longueur minimale parmi les projectifs qui se surjectent sur M, et (v) est faux. Ceci prouve (v) $\Rightarrow$ (vi) par contraposition.

Supposons enfin (vi). Soit $h : P \to P$ un endomorphisme tel que $f \circ h = f$. Écrivons la décomposition de Fitting de P par rapport à h : $P = (\operatorname{im} h^\infty) \oplus (\ker h^\infty) = P_1 \oplus P_0$. Alors la restriction de h à P_1 est un automorphisme de P_1 et la restriction de h à P_0 est nilpotente ; il existe donc $n \geq 0$ tel que $P_0 \subset \ker h^n$. L'égalité $f = f \circ h^n$ implique ici que $P_0 \subset \ker f$, et (vi) requiert alors $P_0 = 0$. Ainsi $P_1 = P$ et h est un automorphisme de P. Ainsi (iii) est vrai. $\square$

1.8.2 Théorème. *Tout A-module M de type fini possède une couverture projective (P, f), et P est un module de type fini. Si (P, f) et (Q, g) sont deux couvertures projectives de M, alors il existe un isomorphisme $h : Q \to P$ tel que $g = f \circ h$.*

Preuve. Si M est un A-module de type fini, alors il existe un épimorphisme $({}_AA)^n \to M$. Il existe donc des couples (P, f) avec P projectif de type fini et $f : P \to M$ épimorphisme. Un tel couple avec P de longueur minimale est une couverture projective de M.

Il reste à prouver l'unicité. Soient (P, f) et (Q, g) deux couvertures projectives de M. Comme dans la preuve de (iii) $\Rightarrow$ (iv) dans la proposition 1.8.1, il existe $h : Q \to P$ et $k : P \to Q$ tels que $g = f \circ h$ et $f = g \circ k$. Alors $f = f \circ (h \circ k)$ et $g = g \circ (k \circ h)$. Le critère (iii) de la proposition 1.8.1 nous dit alors que $h \circ k$ est un automorphisme de P et que $k \circ h$ est un automorphisme de Q. Ceci entraîne que h est un isomorphisme. $\square$

1.8.3 Proposition.

(i) Soit M' et M'' deux modules de type fini, soit (P', f') une couverture projective de M' et (P'', f'') une couverture projective de M''. Alors $(P' \oplus P'', f' \oplus f'')$ est une couverture projective de $M' \oplus M''$.

(ii) Un module projectif de type fini est indécomposable si et seulement si sa tête est simple.

Preuve. L'énoncé (i) est un corollaire de la caractérisation (ii) dans la proposition 1.8.1 et de l'additivité de la tête.

(ii) peut certainement être vu comme un corollaire de (i). On peut aussi prouver cet énoncé directement de la façon suivante. L'additivité de la tête entraîne qu'un module décomposable a nécessairement une tête décomposable ; par conséquent, un module ayant une tête simple est nécessairement indécomposable. Réciproquement, soit P un module projectif indécomposable. Supposons que P ait deux sous-modules maximaux distincts M et N. Alors $M + N = P$, et donc l'addition induit un épimorphisme $M \oplus N \to P$. Comme P est projectif, cet épimorphisme est nécessairement scindé, et P apparaît donc comme facteur direct de $M \oplus N$. Le théorème de Krull–Schmidt et l'indécomposabilité de P impliquent alors que P est isomorphe à un facteur direct de M ou de N, ce qui est impossible pour des raisons de longueur. Ce raisonnement par l'absurde prouve que P possède exactement un sous-module maximal. Ainsi le radical de P est maximal, et la tête de P est simple. $\square$

Un intérêt de la notion de couverture projective est le résultat suivant.

1.8.4 Proposition. *Soit S un A-module simple et P la couverture projective de S. Alors pour tout A-module M de type fini, la longueur du $\operatorname{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$-module $\operatorname{Hom}_A(P, M)$ est égale à la multiplicité de Jordan–Hölder $(M : S)$.*

Preuve. Chaque suite exacte courte $0 \to L \to M \to N \to 0$ de A-modules donne lieu à une suite exacte de $\operatorname{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$-modules

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(P, L) \to \operatorname{Hom}_A(P, M) \to \operatorname{Hom}_A(P, N) \to 0$$

et donc à des égalités

$$(M:S) = (L:S) + (N:S) \quad \text{et} \quad \ell(\mathrm{Hom}_A(P,M)) = \ell(\mathrm{Hom}_A(P,L)) + \ell(\mathrm{Hom}_A(P,N)).$$

Il suffit ainsi d'établir la proposition lorsque M est un module simple.

La tête de P est simple, autrement dit P a un unique sous-module maximal, et le quotient $P/\operatorname{rad} P$ est isomorphe à S. Par conséquent, si M est simple et pas isomorphe à S, alors $\mathrm{Hom}_A(P,M) = 0$, et les deux membres de l'égalité désirée sont nuls.

Prenons à présent $f : P \to S$ un homomorphisme non nul. Il est alors surjectif. Alors, comme P est projectif, pour tout $g \in \mathrm{Hom}_A(P,S)$, il existe $h \in \mathrm{End}_A(P)$ tel que $g = f \circ h$. Ceci montre que f engendre le $\mathrm{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$-module $\mathrm{Hom}_A(P,S)$. Ainsi ce module est engendré par n'importe lequel de ses éléments non-nuls : il est donc simple, c'est-à-dire de longueur 1. Donc dans le cas $M = S$, les deux membres de l'égalité désirée valent 1. □

La notion duale de couverture projective est celle d'enveloppe injective : une **enveloppe injective** d'un A-module M est un couple (I,i) où I est un A-module injectif et $i : M \to I$ est un monomorphisme essentiel. Il y a existence et unicité (théorème de Eckmann–Schöpf) dans un sens analogue à celui du théorème 1.8.2, sans avoir besoin de supposer M de type fini ni faire des hypothèses sur A, mais au prix de l'utilisation de l'axiome du choix. L'enveloppe injective d'un module de type fini peut ne pas être de type fini, et les méthodes utilisées plus haut (proposition 1.8.1) pour caractériser et prouver l'existence de couvertures projectives sont inopérantes du côté injectif.

La symétrie entre les deux situations est cependant rétablie lorsque A est une algèbre de dimension finie sur un corps k, car les deux notions sont alors échangées par la dualité $\mathrm{Hom}_k(-,k)$ (dans cette situation, les A-modules projectifs ou injectifs indécomposables sont des k-espaces vectoriels de dimension finie [3]). La proposition 1.8.3 (ii) et son analogue pour les enveloppes injectives entraînent alors l'existence de bijections

$$\left\{\begin{array}{c}\text{classes d'isom. de}\\ \text{projectifs indécomp.}\end{array}\right\} \underset{\text{tête}}{\overset{\text{couv. proj.}}{\leftrightarrows}} \left\{\begin{array}{c}\text{classes d'isom. de}\\ \text{modules simples}\end{array}\right\} \underset{\text{socle}}{\overset{\text{env. inj.}}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{c}\text{classes d'isom. de}\\ \text{injectifs indécomp.}\end{array}\right\}.$$

2 Théorie élémentaire des anneaux

2.1 Radical de Jacobson

Rappel : on note $A^\times$ le groupe des unités (éléments inversibles) d'un anneau A.

2.1.1 Proposition. *Soit A un anneau. L'ensemble des idéaux bilatères I tels que*

$$1 + I = \{1 + a \mid a \in I\}$$

soit inclus dans $A^\times$ possède un plus grand élément pour l'inclusion.

3. Pour les projectifs, la preuve utilise l'axiome du choix.

Preuve. Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des idéaux bilatères I tels que $(1+I) \subset A^\times$. L'idéal $\{0\}$ appartient à $\mathscr{I}$ (même dans le cas $A = \{0\}$).

Commençons par montrer que $\mathscr{I}$ est stable par somme finie. Prenons deux éléments I et J de $\mathscr{I}$. Soit $a \in I+J$. On écrit $a = b+c$, avec $b \in I$ et $c \in J$. Comme $(1+I) \subset A^\times$, l'élement $1+b$ est inversible, et comme J est un idéal, $(1+b)^{-1}c \in J$, et puisque $(1+J) \subset A^\times$, l'élement $1+(1+b)^{-1}c$ est inversible. Ainsi $1+a = (1+b)(1+(1+b)^{-1}c)$ est produit de deux éléments inversibles donc est inversible. Nous avons montré que $(1+I+J) \subset A^\times$, donc que $I+J \in \mathscr{I}$.

Soit J la somme de tous les éléments de $\mathscr{I}$. C'est un idéal bilatère de A. Chaque élément a de J appartient à une somme finie $I_1 + \cdots + I_n$ d'idéaux appartenant à $\mathscr{I}$. L'étape précédente prouve que $I_1 + \cdots + I_n \in \mathscr{I}$; par suite l'élément $1+a$ est inversible. Ainsi $(1+J) \subset A^\times$, et donc $J \in \mathscr{I}$. Par construction, J est le plus grand élément de $\mathscr{I}$. □

Définition. Le **radical de Jacobson** d'un anneau A est le plus grand des idéaux bilatères I tels que $(1+I) \subset A^\times$. On le note $J(A)$.

Exemples. Le radical de Jacobson de $\mathbb{Z}$ est réduit à $\{0\}$. Le radical de Jacobson d'un anneau local A est l'idéal $A \setminus A^\times$ formé par les éléments non inversibles de A. Si k est un corps, le radical de Jacobson de l'anneau des polynômes $k[X]$ est réduit à $\{0\}$, mais celui de l'anneau des séries formelles $k[\![X]\!]$ est l'idéal principal (X).

2.1.2 Proposition. *Pour tout anneau A, l'idéal $J(A)$ coïncide avec les trois parties suivantes :*

$$J_1 = \{x \in A \mid \forall a \in A,\ 1 - ax \in A^\times\},$$

$$J_2 = \{x \in A \mid \forall a \in A,\ 1 - xa \in A^\times\},$$

$$J_3 = \{x \in A \mid \forall a \in A,\ 1 - ax \textit{ possède un inverse à gauche}\}.$$

Preuve. Soit $x \in J_1$. Pour tout $a \in A$, l'élément $1 - ax$ possède un inverse, disons b ; partant des égalités $b(1-ax) = (1-ax)b = 1$, les calculs

$$(1 + xba)(1 - xa) = 1 - x(1 - b + bax)a = 1$$

et

$$(1 - xa)(1 + xba) = 1 - x(1 - b + axb)a = 1$$

prouvent alors que $1 - xa$ est inversible. Par conséquent $x \in J_2$. Nous avons établi l'inclusion $J_1 \subset J_2$, et par symétrie nous obtenons l'égalité $J_1 = J_2$.

Soit x et y deux éléments de J_1. Pour tout $a \in A$, l'élément $1 - ax$ est inversible, d'inverse disons b, et l'élément $1 - bay$ est inversible, d'inverse disons c. On vérifie alors que cb est l'inverse de $1 - a(x+y)$:

$$cb(1 - a(x+y)) = cb((1-ax) - ayb(1-ax)) = c(1-bay)b(1-ax) = b(1-ax) = 1$$

$$(1 - a(x+y))cb = ((1-ax) - (1-ax)bay)cb = (1-ax)(1-bay)cb = (1-ax)b = 1.$$

Ainsi $1-a(x+y)$ est inversible pour chaque $a \in A$, ce qui montre que $x+y \in J_1$. Nous venons de prouver que J_1 est stable par somme. Comme J_1 contient 0 et est stable par passage à l'opposé, c'est un sous-groupe additif de A. Enfin, de la définition de J_1 et J_2 découle directement le fait que J_1 (respectivement, J_2) est stable par multiplication à gauche (respectivement, à droite) par les éléments de A.

Puisque $J_1 = J_2$, nous voyons alors que J_1 est un idéal bilatère de A qui, par définition, vérifie $(1 + J_1) \subset A^\times$: ceci nous donne $J_1 \subset J(A)$, l'inclusion opposée étant banale.

Il reste à démontrer que $J_1 = J_3$. Soit $x \in J_3$. Pour tout $a \in A$, l'élément $1 - ax$ admet un inverse à gauche, disons b. Alors b est égal à $1+bax$, et puisque $x \in J_3$ l'élément $1+bax$ admet un inverse à gauche. Ainsi b possède un inverse à gauche, mais également un inverse à droite, à savoir $1 - ax$. Il est donc inversible, d'inverse $1 - ax$. Par conséquent $1 - ax$ est inversible pour tout $a \in A$, c'est-à-dire $x \in J_1$. Nous avons donc établi l'inclusion $J_3 \subset J_1$, et l'inclusion opposée est banale. □

Voyons à présent le lien entre le radical de Jacobson d'un anneau A et les A-modules. Si I est un idéal bilatère de A et N un sous-module d'un A-module M, alors on note

$$IN = \{a_1m_1 + \cdots + a_nm_n \mid n \geq 0,\ a_i \in I,\ m_i \in N\}.$$

2.1.3 Théorème (lemme de Nakayama). *Un A-module M de type fini qui vérifie $J(A)M = M$ est nécessairement le module nul.*

Preuve. Choisissons une famille finie $(m_1, \ldots, m_n)$ d'éléments engendrant M avec n minimal. Supposons que $n \geq 1$. Soit N le sous-module engendré par m_1, ..., m_{n-1}. Par construction, N est un sous-module strict de M, et donc le module quotient $Q = M/N$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Ce module Q est engendré par la classe $\overline{m_n}$ de m_n modulo N et vérifie $Q = J(A)Q$. De ce fait, il existe $a \in J(A)$ tel que $\overline{m_n} = a\,\overline{m_n}$. Comme alors $1 - a$ est inversible, nous obtenons $\overline{m_n} = 0$, puis $Q = \{0\}$. Cette contradiction montre que $n = 0$; par conséquent, M est le module nul. □

Par exemple, si M est un A-module simple, alors il est de type fini (engendré par n'importe quel élément non nul) et n'est pas réduit à $\{0\}$; le lemme de Nakayama dit alors que le sous-module $J(A)M$ ne peut donc pas être M tout entier, et comme M est supposé simple, on a $J(A)M = \{0\}$. On voit ainsi que $J(A)$ annule tous les modules simples.

Définition. L'**annulateur** d'un A-module M est le noyau de l'homomorphisme d'anneaux de A dans $\mathrm{End}_{\mathbf{Z}}(M)$ définissant la structure de A-module.

Rappel : le A-module régulier ${}_AA$ est le groupe abélien $(A, +)$, muni de l'opération à gauche de A par multiplication. Les sous-modules de ${}_AA$ sont les idéaux à gauche de l'anneau A. Un endomorphisme de ${}_AA$ est de la forme $a \mapsto ab$, où $b \in A$.

2.1.4 Théorème. *Soit A un anneau noethérien à gauche. L'idéal $J(A)$ coïncide avec les deux ensembles suivants :*

- *le radical* $\operatorname{rad}_A A$ *du A-module à gauche régulier, c'est-à-dire l'intersection des idéaux à gauche maximaux de A ;*
- *l'intersection des idéaux annulateurs des A-modules simples.*

Cet énoncé reste valide même sans l'hypothèse que A est noethérien à gauche, au prix d'utiliser l'axiome du choix.

Preuve. Soit $z \in A$. Si $z \in J(A)$, alors z annule tous les A-modules simples, en particulier tous les A-modules de la forme ${}_AA/\mathfrak{m}$ avec $\mathfrak{m}$ idéal à gauche maximal ; en particulier z envoie sur l'élément $1 + \mathfrak{m}$ de ${}_AA/\mathfrak{m}$ sur zéro, ce qui signifie $z \in \mathfrak{m}$. Ainsi z appartient à tous les idéaux à gauche maximaux, autrement dit $z \in \operatorname{rad}_A A$. Inversement si $z \notin J(A)$, alors il existe $a \in A$ tel que $1 - az$ n'est pas inversible à gauche. L'idéal à gauche $A(1 - az)$ est alors propre ; il existe donc un idéal à gauche maximal $\mathfrak{m}$ tel que $1 - az \in \mathfrak{m}$, et alors $z \notin \mathfrak{m}$; a fortiori $z \notin \operatorname{rad}_A A$. Ces raisonnements prouvent l'égalité $J(A) = \operatorname{rad}_A A$.

Notons $\mathfrak{r}$ l'intersection des annulateurs des A-modules simples. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal à gauche maximal, alors l'annulateur du A-module simple $A/\mathfrak{m}$ est inclus dans

$$\{a \in A \mid a \cdot \overline{1} = \overline{0} \text{ dans } A/\mathfrak{m}\} = \mathfrak{m}$$

et donc $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{m}$. Ceci étant vrai pour tout $\mathfrak{m}$, on a $\mathfrak{r} \subset \operatorname{rad}_A A$. Réciproquement, si S est un A-module simple, alors son annulateur est l'intersection pour $x \in S \setminus \{0\}$ des idéaux à gauche maximaux $\mathfrak{m}_x = \{a \in A \mid a \cdot x = 0\}$, donc contient $\operatorname{rad}_A A$. Ceci étant valable pour tout A-module simple S, on a $\operatorname{rad}_A A \subset \mathfrak{r}$. Ainsi $\mathfrak{r} = \operatorname{rad}_A A = J(A)$. □

Remarques.

- La définition de $J(A)$ montre immédiatement que $J(A^{\mathrm{op}}) = J(A)$, où A^{op} est l'anneau opposé. Par conséquent, si l'on admet l'axiome du choix, $J(A)$ est également le radical du A-module régulier à droite A_A, et ainsi $\operatorname{rad}_A A = \operatorname{rad} A_A$.
- En revanche, on peut très bien avoir $\operatorname{soc}_A A \neq \operatorname{soc} A_A$! Noter ici (exercice) que $\operatorname{soc}_A A$ et $\operatorname{soc} A_A$ sont des idéaux bilatères de A.
- Un A-module simple S peut être regardé comme un $A/J(A)$-module (l'isomorphisme $A \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(S)$ se factorise à travers $A/J(A)$). Par conséquent, il y a une bjection naturelle entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules simples et l'ensemble des classes d'isomorphisme de $A/J(A)$-modules simples.
- Le lemme de Nakayama est souvent énoncé de la façon suivante : soit M est un A-module de type fini et X un sous-module de M ; si $J(A)M + X = M$, alors $X = M$. (On se ramène au théorème 2.1.3 en observant que nos présentes hypothèses impliquent que le module quotient $Q = M/X$ est de type fini et vérifie $Q = J(A)Q$.) Avec le vocabulaire introduit dans la section 1.7 : si M est un A-module de type fini, alors $J(A)M$ est un petit sous-module de M.

Remarques culturelles.

- Un idéal d'un anneau A est dit primitif s'il est l'annulateur d'un A-module simple (quand A est commutatif, un idéal est primitif si et seulement s'il est maximal). La proposition précédente entraîne que $J(A)$ est l'intersection des idéaux primitifs de A.
- Les premières définitions du radical d'un anneau A étaient limitées au cas d'un anneau artinien ; quand A est artinien à gauche ou à droite, $J(A)$ est le plus grand idéal nilpotent. L'apport de Jacobson fut de trouver la définition adaptée au cas général : il a compris qu'un anneau A s'étudiait avec ses modules, et a défini le radical de A comme l'intersection des idéaux primitifs de A. L'inconvénient de cette définition est que l'égalité $J(A) = J(A^{\mathrm{op}})$ n'est pas évidente : la notion d'idéal primitif n'est pas stable par passage à l'anneau opposé.

2.2 Cas des anneaux artiniens

Définition.

(1) Un annean A est dit **artinien à gauche** (respectivement, **noethérien à gauche**) si le module régulier à gauche ${}_AA$ est artinien (respectivement, noethérien).

(2) Le produit de deux idéaux bilatères I et J d'un anneau est défini par

$$IJ = \{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \mid n \geq 0,\ a_i \in I,\ b_i \in J\}.$$

(3) Un idéal bilatère I d'un anneau est dit nilpotent s'il existe $n \geq 1$ tel que $I^n = \{0\}$.

2.2.1 Théorème. *Soit A un anneau artinien et noethérien à gauche.*

(i) Le A-module à gauche $A/J(A)$ est complètement réductible.

(ii) Un A-module M de type fini est complètement réductible si et seulement si $J(A)M = \{0\}$, autrement dit si $J(A)$ est inclus dans l'annulateur de M.

(iii) $J(A)$ est un idéal nilpotent.

Preuve. (i) L'application quotient $p : {}_AA \to A/J(A)$ définit une bijection entre l'ensemble des sous-modules maximaux de $A/J(A)$ et l'ensemble des sous-modules maximaux de ${}_AA$; noter ici qu'un sous-module maximal de ${}_AA$ contient nécessairement $\operatorname{rad}{}_AA = J(A)$. Le radical du A-module $A/J(A)$ est ainsi donné par

$$p^{-1}\bigl(\operatorname{rad}(A/J(A))\bigr) = \bigcap_{\substack{M \subset A/J(A) \\ M \text{ maximal}}} p^{-1}(M) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \text{ idéal à gauche} \\ \text{maximal de } A}} \mathfrak{m} = J(A)$$

donc $\operatorname{rad}(A/J(A))$ est réduit à zéro. De plus, le module régulier ${}_AA$ est artinien, donc son quotient $A/J(A)$ est artinien.

(ii) Le sens direct vient du fait que $J(A)$ annule tous les A-modules simples. Pour la réciproque, supposons que $J(A)M = \{0\}$. Soit $x \in M$; soit $f_x : {}_AA \to M$ l'homomorphisme de A-modules donné par $f_x(a) = ax$. Alors $J(A) \subset \ker f_x$, donc f_x se factorise à travers $A/J(A)$; l'image de f_x est donc un quotient du module complètement réductible $A/J(A)$, donc est un module complètement réductible, donc est incluse dans le socle de M : ainsi $x \in \operatorname{soc} M$. Ceci étant valable pour tout $x \in M$, nous avons donc $M = \operatorname{soc} M$. On conclut en observant que M est noethérien et en appliquant le théorème 1.6.1.

(iii) La suite d'idéaux $(J(A)^n)_{n \geq 1}$ (bilatères, donc à gauche) est décroissante, donc stationne à partir d'un certain rang (hypothèse que A est artinien à gauche). Choisissons n tel que $J(A)^n = J(A)^{n+1}$. Alors $J(A) \cdot J(A)^n = J(A)^n$. Le lemme de Nakayama (d'usage licite puisque $J(A)^n$ est un A-module noethérien donc de type fini) donne alors $J(A)^n = \{0\}$. $\square$

Remarque. Le (i) et le (iii) sont en fait vrais si l'on suppose A seulement artinien à gauche, avec une preuve un peu plus compliquée pour le (iii). En fait, , on peut même prouver qu'un anneau artinien à gauche est nécessairement noethérien à gauche (théorème de Hopkins, voir par exemple *Basic Algebra II* de N. Jacobson, sect. 4.4, exerc. 4). Toutefois la preuve utilise à un moment le lemme de Zorn, donc nécessite l'axiome du choix.

Conséquences.

(1) Un anneau artinien à gauche n'a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de modules simples, car tout module simple apparaît dans la tête de ${}_AA$ (voir la remarque au début de la section 1.3), qui est un module complètement réductible de longueur finie (équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (iii) du théorème 1.6.1).

(2) Si A est un anneau artinien et noethérien à gauche et M un A-module de type fini, alors $\operatorname{soc} M = \{x \in A \mid J(A)x = \{0\}\}$ et $\operatorname{rad} M = J(A)M$ (preuve en exercice ; l'hypothèse de type fini n'est pas utile pour prouver la première égalité, et on peut s'en dispenser pour la seconde en utilisant le lemme de Zorn).

(3) Si A est un anneau artinien (et noethérien) à gauche, alors $J(A)$ est le plus grand idéal bilatère nilpotent de A. En effet, si I est un idéal bilatère nilpotent, alors I est formé d'éléments nilpotents, donc $1 + I \subset A^\times$, et donc $I \subset J(A)$.

2.3 Idempotents

Les décompositions d'un A-module M en somme directe de sous-modules sont données par des idempotents dans $\operatorname{End}_A(M)$: à chaque idempotent e correspond la décomposition $(\operatorname{im} e) \oplus (\ker e)$. Dans le cas où M est le module régulier à gauche, $\operatorname{End}_A({}_AA)$ est l'anneau A^{op}, agissant sur A par multiplication à droite. Ainsi les décompositions de ${}_AA$ sont données par les idempotents de A, un idempotent e donnant lieu à la somme directe $Ae \oplus A(1-e)$.

Définition.

(1) Un idempotent est un élément $e \in A$ tel que $e^2 = e$. (On exigeait jadis $e \neq 0$.)

(2) Deux idempotents e et f sont **orthogonaux** si $ef = fe = 0$.

(3) Un idempotent e est dit **primitif** si $e \neq 0$ et si sa seule décomposition $e = e_1 + \cdots + e_n$ en somme d'idempotents non-nuls deux à deux orthogonaux est la décomposition triviale $e = e$.

2.3.1 Proposition.

(i) Si $e = e_1 + \cdots + e_n$ est une décomposition en somme d'idempotents deux à deux orthogonaux, alors $Ae = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$.

(ii) Toute décomposition en somme directe $Ae = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$ provient d'une décomposition de e en somme d'idempotents deux à deux orthogonaux, comme dans (i).

(iii) Si e est un idempotent, alors le A-module Ae est indécomposable si et seulement si e est primitif.

(iv) Si e est un idempotent et M est un A-module, alors $\mathrm{Hom}_A(Ae, M) \cong eM$ en tant que groupes abéliens. (Ici $eM = \{em \mid m \in M\} = \{m \in M \mid em = m\}$ est un sous-groupe de M, mais n'est en général pas un sous-A-module.)

(v) Comme cas particulier de (iv), $\mathrm{End}_A(Ae) \cong (eAe)^{\mathrm{op}}$, où $eAe = \{x \in A \mid ex = xe = x\}$ est un anneau pour la multiplication héritée de A, avec e pour unité multiplicative.

Preuve. (i) L'inclusion $Ae \subset Ae_1 + \cdots + Ae_n$ est évidente. Dans l'autre sens, si $x \in Ae_i$, alors $x = xe_i$, donc $xe_j = xe_ie_j = 0$ si $i \neq j$ par orthogonalité, d'où $xe = xe_1 + \cdots + xe_n = xe_i = x$, ce qui montre que $x \in Ae$. Enfin la somme est directe, car si $(x_1, \ldots, x_n) \in Ae_1 \times \cdots \times Ae_n$ est tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0$, alors en multipliant à droite cette égalité par e_i, on obtient $x_i = 0$, ceci pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(ii) On part de $Ae = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$. Alors e se décompose dans la somme directe : $e = e_1 + \cdots + e_n$, avec $e_i \in I_i$. Ainsi $Ae_i \subset I_i$. Comme $I_i \subset Ae$, on a également $e_ie = e_i$. Ainsi $e_i = e_ie_1 + \cdots + e_ie_n$, et cette écriture doit coïncider avec la décomposition de e_i dans la somme directe $I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$. Par unicité, nous avons donc $e_ie_j = 0$ si $i \neq j$ et $e_i^2 = e_i$. Par conséquent, $e = e_1 + \cdots + e_n$ est une décomposition en somme d'idempotents deux à deux orthogonaux, et (i) donne $Ae = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$. Comparant avec la décomposition initiale, nous voyons que les inclusions $Ae_i \subset I_i$ sont des égalités.

(iii) s'obtient en combinant (i) et (ii).

(iv) Si $f \in \mathrm{Hom}_A(Ae, M)$, alors $f(e) = f(e^2) = ef(e)$ appartient à eM. On vérifie alors sans difficulté que les homomorphismes de groupes abéliens

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_A(Ae, M) \to eM & \multirow{2}{*}{et} & eM \to \mathrm{Hom}_A(Ae, M) \\ f \mapsto f(e) & & ex \mapsto (ae \mapsto aex) \end{array}$$

sont des bijections réciproques.

(v) La vérification est laissée en exercice ; noter que $(eAe)^{\mathrm{op}}$ agit sur Ae par multiplication à droite (d'où le passage à l'anneau opposé). □

Définition. Un facteur direct indécomposable du A-module régulier ${}_AA$ est appelé **module principal indécomposable** ; il est nécessairement de la forme Ae avec e idempotent primitif.

Chaque module principal indécomposable est projectif, car facteur direct du module libre ${}_AA$. Réciproquement, si A est un anneau noethérien et artinien à gauche, alors tout module projectif indécomposable P est de type fini, donc est facteur direct d'un module libre $({}_AA)^n$; écrivant ${}_AA$ comme somme directe de modules principaux indécomposables et appliquant le théorème de Krull–Schmidt, on voit alors que P est isomorphe à un module principal indécomposable.

2.4 Blocs d'un anneau

On cherche à regrouper les A-modules simples en paquets, de sorte que pour tout A-module indécomposable M, tous les facteurs de composition de M appartiennent au même paquet. Faire cela passe par l'étude des idempotents du centre $Z(A)$ de A.

Notation. Si A et B sont deux anneaux, un A-B-bimodule M sur lequel A agit à gauche et B agit à droite sera indiqué ${}_AM_B$. La donnée d'un tel bimodule revient à celle d'un homomorphisme d'anneaux de $A \otimes_{\mathbb{Z}} B^{\mathrm{op}}$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$. Le A-bimodule régulier ${}_AA_A$ est A muni des actions de A par multiplication à gauche et à droite. Le centre $Z(A)$ s'identifie à l'anneau des endomorphismes du A-bimodule régulier. Les sous-bimodules de ${}_AA_A$ sont les idéaux bilatères de A.

2.4.1 Proposition. *Soit A un anneau. On suppose que $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$ est une décomposition du A-bimodule régulier en somme directe de sous-bimodules indécomposables. Alors :*

(i) Il existe une décomposition $1 = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r$, où les ε_i sont des idempotents centraux (i.e., appartenant à $Z(A)$) deux à deux orthogonaux et $B_s = A\varepsilon_s = \varepsilon_s A$.

(ii) Tout idéal bilatère I de A se décompose comme $I = (B_1 \cap I) \oplus \cdots \oplus (B_r \cap I)$.

(iii) Dans (ii), si I admet un supplémentaire (i.e., $A = I \oplus J$ avec J idéal bilatère), alors il existe $S \subset \{1, \ldots, r\}$ tel que $I = \bigoplus_{s\in S} B_s$.

(iv) Adoptons les notations de (i). Tout A-module M se décompose en somme directe de sous-modules $M = \varepsilon_1 M \oplus \cdots \oplus \varepsilon_r M$. Si M est indécomposable, alors il existe un unique $s \in \{1, \ldots, r\}$ tel que ε_s agisse par l'identité sur M ; les autres ε_t agissent par 0.

Remarque. D'après le théorème 1.2.2 (i), l'existence d'une décomposition $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$ est assurée dès que le A-bimodule régulier est artinien ou noethérien ; une condition suffisante pour cela est que l'anneau A soit artinien ou noethérien, à gauche ou à droite. L'unicité de la décomposition quant à elle est automatique, garantie par l'énoncé (iii) de la proposition.

Preuve de la proposition 2.4.1. (i) On décompose selon la somme directe $1 = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_r$. Regardant $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_r$ comme une décomposition du A-module régulier à gauche ${}_AA$ et appliquant la proposition 2.3.1, on obtient que les ε_i sont des idempotents deux à deux orthogonaux et que $B_s = A\varepsilon_s$. Regardant maintenant notre somme directe comme une décomposition du A-module régulier à droite A_A et appliquant la même proposition, on obtient à présent $B_s = \varepsilon_s A$. Enfin, prenons $x \in A$ et décomposons-le dans la somme directe : $x = x_1 + \cdots + x_r$ où $x_s \in B_s$ pour chaque $s \in \{1, \ldots, r\}$, c'est-à-dire $x_s = x_s\varepsilon_s = \varepsilon_s x_s$. En utilisant les relations d'orthogonalité, on trouve $x_s = x\varepsilon_s = \varepsilon_s x$, ce qui montre que chaque ε_s est central.

(ii) La somme $(B_1 \cap I) + \cdots + (B_r \cap I)$ est clairement directe et incluse dans I. Pour justifier l'inclusion opposée, il suffit d'écrire chaque $x \in I$ sous la forme $x\varepsilon_1 + \cdots + x\varepsilon_r$, où $x\varepsilon_s \in I \cap B_s$.

(iii) Si $A = I \oplus J$, alors $B_1 \oplus \cdots \oplus B_r = (B_1 \cap I) \oplus (B_1 \oplus J) \oplus \cdots \oplus (B_r \cap I) \oplus (B_r \oplus J)$, d'où $B_s = (B_s \cap I) \oplus (B_s \oplus J)$ pour chaque $s \in \{1, \ldots, r\}$. L'hypothèse d'indécomposabilité des B_s donne alors $B_s \cap I = B_s$ ou $B_s \cap I = \{0\}$ et il suffit de poser $S = \{s \in \{1, \ldots, r\} \mid B_s \cap I = B_s\}$.

(iv) Le fait que chaque ε_s soit central dans A a pour conséquence que $\varepsilon_s M$ est un sous-module de M. Si M est indécomposable, il existe un unique $s \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $M = \varepsilon_s M$ et $\varepsilon_t M = \{0\}$ pour $t \neq s$. Ainsi les ε_t agissent sur M par 0 et $\varepsilon_s = 1 - \sum_{t \neq s} \varepsilon_t$ agit par l'identité. □

Définition.

(1) Les B_s, dont l'existence est garantie sous les hypothèses mentionnées dans la remarque ci-dessus, s'appellent les **blocs** de A. Les ε_s sont les **idempotents de blocs**.

(2) Un module M est dit **appartenir** au bloc B_s si ε_s agit par l'identité sur M.

Remarques.

(1) Un bloc B_s est un idéal bilatère de A, mais c'est aussi un anneau pour la multiplication héritée de A, avec ε_s pour neutre multiplicatif. L'application évidente $B_1 \times \cdots \times B_r \to A$ est un isomorphisme d'anneaux.

(2) Si deux modules indécomposables M et N appartiennent à des blocs distincts, alors $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$; de fait, si ε est l'idempotent du bloc auquel M appartient, alors $\varepsilon M = M$ et $\varepsilon N = 0$, et pour chaque homomorphisme $f : M \to N$ il vient $f(M) = f(\varepsilon M) = \varepsilon f(M) \subset \varepsilon N = 0$. On peut de même démontrer que $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) = 0$ pour tout $i \geq 0$.

2.5 Blocs et modules principaux indécomposables

On note $\pi(A)$ l'ensemble des idempotents primitifs de A et on le munit de la relation d'équivalence suivante : $e \sim f$ s'il existe une suite $e = e_0$, e_1, ..., $e_\ell = f$ dans $\pi(A)$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, on a $\mathrm{Hom}_A(Ae_{i-1}, Ae_i) \neq 0$ ou $\mathrm{Hom}_A(Ae_i, Ae_{i-1}) \neq 0$.

Remarque. Soient e, f dans $\pi(A)$. Le module principal Ae est un module projectif (car facteur direct du module régulier, qui est libre) indécomposable. Supposons que A soit artinien et noethérien à gauche. Alors la tête de Ae est simple et Ae en est la couverture projective. D'après la proposition 1.8.4, $\mathrm{Hom}_A(Ae, Af) \neq 0$ si et seulement si la tête de Ae est un facteur de composition de Af. On voit ainsi que si $e \sim f$, alors il existe une suite de modules indécomposables reliant Ae à Af telle que deux termes consécutifs de cette suite ont toujours un facteur de composition commun. L'énoncé réciproque est également vrai (et n'est pas plus difficile à justifier).

2.5.1 Proposition. *Soit A un anneau artinien ou noethérien à gauche, soient B_1, ..., B_r les blocs de A.*

(i) Un module principal indécomposable Ae appartient au bloc B_s si et seulement si $Ae \subset B_s$.

(ii) Un bloc B_s est la somme des modules principaux indécomposables appartenant à ce bloc.

(iii) Deux modules principaux indécomposables Ae et Af appartiennent au même bloc si et seulement si $e \sim f$.

Preuve. (i) Si Ae appartient au bloc B_s, alors en notant ε_s l'idempotent de bloc correspondant, on a $Ae = \varepsilon_s Ae \subset \varepsilon_s A = B_s$. La réciproque est vraie car le sous-module Ae ne peut être inclus que dans un seul bloc, les blocs étant en somme directe.

(ii) Chaque bloc B_s est un A-module à gauche artinien ou noethérien, donc s'écrit comme une somme directe finie de sous-modules indécomposables : $B_s = A\varepsilon_s = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$. Les I_i sont ici des facteurs directs indécomposables du module régulier ${}_AA$, i.e. des modules principaux indécomposables.

(iii) Si e et f sont deux idempotents primitifs tels que $\operatorname{Hom}_A(Ae, Af) \neq 0$ ou $\operatorname{Hom}_A(Af, Ae) \neq 0$, alors Ae et Af ont un facteur de composition commun, et donc Ae et Af appartiennent au même bloc que ce facteur de composition. De proche en proche, on voit donc que si $e \sim f$, alors Ae et Af appartiennent au même bloc.

Considérons à présent une décomposition ${}_AA = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$ du module régulier en somme directe de modules principaux indécomposables. Pour chaque classe d'équivalence $C \subset \pi(A)$, notons B'_C la comme des sous-modules Ae_i tels que $e_i \in C$. Chaque B'_C est un idéal à gauche de A. Si $e_j \notin C$, alors $e_iAe_j = \operatorname{Hom}_A(Ae_i, Ae_j) = 0$ pour chaque $e_i \in C$, et donc $B'_C Ae_j = 0$. Si $e_j \in C$, alors $B'_C Ae_j \subset Ae_j \subset B'_C$. Faisant la somme sur tous les $j \in \{1, \ldots, n\}$, nous obtenons $B'_C A \subset B'_C$, ce qui prouve que B'_C est un idéal bilatère. Par construction, $A = \bigoplus_{C \in \pi(A)/} B'_C$, et d'après l'alinéa précédent, chaque B'_C est inclus dans un bloc. On déduit alors de la proposition 2.4.1 (iii) que les B'_C sont les blocs de A.

Ceci vu, soit $f \in \pi(A)$. L'inclusion $Af \to Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$ peut être vue comme donnée par une matrice par blocs, avec des éléments de matrice dans $\operatorname{Hom}_A(Af, Ae_i)$; comme $\operatorname{Hom}_A(Af, Ae_i)$ est nul sauf si $f \sim e_i$, on voit que $Af \subset B'_C$ où C est la classe d'équivalence de f. Par conséquent, si Ae et Af appartiennent au même bloc, alors e et f appartiennent à la même classe d'équivalence C, et donc $e \sim f$. □

2.6 Anneaux artiniens semi-simples

Définition.

(1) Un anneau est dit **simple** s'il est non-nul et s'il n'a pas d'autre idéal bilatère que $\{0\}$ et lui-même.

(2) Un anneau **artinien semi-simple** est un anneau artinien à gauche de radical de Jacobson réduit à $\{0\}$.

2.6.1 Proposition. *Soit A un anneau artinien semi-simple.*

(i) Les blocs de A sont les composantes isotypiques du module régulier ${}_AA$.

(ii) Les blocs de A sont des anneaux artiniens à gauche simples.

Preuve. (i) Dans le cas où le module régulier ${}_AA$ est complètement réductible, les modules principaux indécomposables sont les sous-modules simples de ${}_AA$. De plus, si e et f sont des idempotents primitifs, alors $\operatorname{Hom}_A(Ae, Af) \neq 0 \iff Ae \cong Af$, d'après le lemme de Schur, et alors $e \sim f \iff Ae \cong Af$ par transitivité. Pour conclure, il suffit de rapprocher la preuve de la proposition 2.5.1 (iii) de la construction des composantes isotypiques dans la proposition 1.6.4.

(ii) Soit B un bloc de A et I un idéal bilatère non-nul de B. Alors I est un idéal bilatère de A, car si B' est un autre bloc de A, alors $IB' \subset BB' = \{0\}$ et $B'I \subset B'B = \{0\}$. En tant que A-module à gauche, B est complètement réductible, donc I admiet un supplémentaire I' dans B. Écrivant I et I' comme somme directe de A-modules indécomposables (i.e., simples), on trouve $n \geq m \geq 1$ et des idempotents primitifs e_1, ..., e_n tels que $I = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_m$ et $I' = Ae_{m+1} \oplus \cdots \oplus Ae_n$. Les modules Ae_i sont ici tous simples et deux à deux isomorphes, puisque B est une composante isotypique de ${}_AA$. Alors $e_1Ae_i \cong \operatorname{Hom}_A(Ae_1, Ae_i) \neq 0$ pour tout i, et donc $Ae_1Ae_i = Ae_i$ par simplicité du A-module Ae_i. Comme $I \supset Ae_1$ et I est un idéal bilatère, cela donne $I \supset Ae_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et donc $I = B$. □

2.6.2 Proposition. *Un anneau A est simple et artinien à gauche si et seulement s'il est isomorphe à un anneau $\mathbf{Mat}_n(\Delta)$ de matrices $n \times n$ (avec $n \geq 1$) à coefficients dans un anneau à division Δ.*

Preuve. $\Leftarrow$) Soit $A = \mathbf{Mat}_n(\Delta)$ avec $n \geq 1$ et Δ anneau à division. Alors le groupe Δ^n des vecteurs colonnes est un A-module. On vérifie facilement que ce module est simple : si $x \in \Delta^n$ est non-nul, il possède une composante non-nulle, disons x_j, et alors tout $y \in \Delta^n$ s'écrit

$$y = \underbrace{y \cdot (0 \cdots 0 \; x_j^{-1} \; 0 \cdots 0)}_{\in \mathbf{Mat}_n(\Delta)} \cdot x$$

donc appartient au sous-module $A \cdot x$ engendré par x. De plus, le module régulier ${}_AA$ est somme directe de n copies de ce module simple : ${}_AA = \bigoplus_{j=1}^n AE_{jj}$, où E_{jj} est la matrice avec 1 en position (j, j) et 0 partout ailleurs. (Autrement dit, chaque matrice est la donnée de ses vecteurs colonnes. On notera également que $1 = \sum_{j=1}^n E_{jj}$ est une décomposition en somme d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux.) Par conséquent, ${}_AA$ est artinien, complètement réductible et isotypique. Donc A est artinien semi-simple et possède un seul bloc. On conclut à l'aide de la proposition précédente.

$\Rightarrow$) Supposons A simple artinien à gauche. Alors $J(A) = \{0\}$, donc A est semi-simple artinien, et A possède un seul bloc. Le module régulier ${}_AA$ est alors complètement réductible et isotypique, c'est-à-dire est isomorphe à la somme d'un nombre fini n de copies d'un module simple S. Soit $\Delta = \operatorname{End}_A(S)$; c'est un anneau à division d'après le lemme de Schur. Alors $A^{\mathrm{op}} \cong \operatorname{End}_A({}_AA) \cong \operatorname{End}_A(S^{\oplus n}) \cong \mathbf{Mat}_n(\Delta)$ et donc $A \cong \mathbf{Mat}_n(\Delta^{\mathrm{op}})$ (en transposant les matrices). □

2.6.3 Corollaire (théorème de Wedderburn–Artin). *Les énoncés suivants concernant un anneau A sont équivalents :*

(i) A est artinien à gauche et $J(A) = \{0\}$ (i.e., A est artinien semi-simple).

(ii) A est artinien à droite et $J(A) = \{0\}$.

(iii) A est artinien à gauche et ne contient pas d'idéal bilatère nilpotent.

(iv) Le module régulier ${}_AA$ est la somme directe d'une famille finie de modules simples (i.e., ${}_AA$ est complètement réductible [de type fini]).

(v) Il existe un entier $r \geq 0$, des entiers n_1, ..., $n_r \geq 1$, et des anneaux à division Δ_1, ..., Δ_r tels que $A \cong \mathbf{Mat}_{n_1}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathbf{Mat}_{n_r}(\Delta_r)$.

Remarques.

(1) Dans (v), les entiers $r, n_1, ..., n_r$ et les classes d'isomorphisme des anneaux à division Δ_1, ..., Δ_r sont uniquement déterminés (à permutation près) par la classe d'isomorphisme de A. Cela provient de l'unicité de la décomposition en blocs et de la preuve de la proposition 2.6.2.

(2) (v) ne distingue pas gauche ou droite ; c'est ce qui justifie l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii), et permet que l'on dise simplement « anneau artinien semi-simple », sans préciser à gauche ou à droite.

(3) Ici il n'y a pas besoin d'ajouter « noethérien » ; c'est automatique, même si l'on refuse l'axiome du choix.

2.6.4 Conséquence. *Soit A un anneau artinien à gauche et $I \subset A$ un idéal bilatère nilpotent. On suppose que A/I est semi-simple artinien. Alors $I = J(A)$.*

Preuve. L'inclusion $I \subset J(A)$ vient de la conséquence (3) du théorème 2.2.1. Au même endroit est justifié que $J(A)/I$ est le radical de Jacobson de A/I. Ce dernier étant réduit à zéro par hypothèse, on a bien $I = J(A)$. □

Exemple. Soit $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carquois (fini) **acyclique** et k un corps. Soit I le sous-espace vectoriel de kQ engendré par les chemins de longueur strictement positive. Alors I est un idéal bilatère nilpotent de kQ (un chemin de Q ne peut pas passer plus d'une fois à un sommet, donc la longueur des chemins est majorée par $t = |Q_0|$, donc $I^{t+1} = \{0\}$) ; dans kQ/I ne restent que les chemins paresseux, et ainsi kQ/I est isomorphe au produit $k \times \cdots \times k$ (une copie de k par sommet de Q), donc est semi-simple. On en déduit $I = J(kQ)$.

De plus, soit S une représentation irréductible de Q sur k, c'est-à-dire un kQ-module simple. Alors S est annulé par $J(kQ)$, ce qui signifie que chaque chemin de longueur strictement positive agit par zéro sur S. En particulier, toutes les flèches (les éléments de Q_1) agissent par zéro. Comme S est simple, il est nécessairement de dimension 1, concentré sur un sommet.

3 Pourquoi les carquois ?

Dans cette section, nous prouvons un théorème de Gabriel, qui affirme qu'une k-algèbre A de dimension finie sur un corps algébriquement clos est Morita équivalente à l'algèbre des chemins d'un carquois avec relations. Concrètement, cela signifie qu'on essaie de présenter A par générateurs et relations. La présentation obtenue en fin de compte, à l'aide d'un carquois donc, va permettre d'étudier les A-modules indécomposables en termes des A-modules simples. Plus précisément, on sait qu'un A-module possède des séries de composition ; le premier sous-module de la filtration est dans le socle, le dernier dans la tête, et entre les deux les modules simples s'empilent comme un tas de briques, sans que l'ordre soit a priori unique. (Les modules ayant une unique série de composition sont assez rares ; on les appelle unisériels ; les algèbres de Nakayama sont les algèbres dont tous les modules indécomposables sont unisériels.) Cette visualisation en tas de briques peut être précisée : les types de briques (les classes d'isomorphisme des modules simples) sont les sommets du carquois de Gabriel, et le ciment liant les briques sont indiquées par les flèches du carquois.

3.1 Relèvement des idempotents

Définition. Deux idempotents e et f d'un anneau A sont dits **équivalents** s'il existe $u \in eAf$ et $v \in fAe$ tels que $uv = e$ et $vu = f$.

3.1.1 Proposition. *Soit e et f deux idempotents d'un anneau A. Alors les A-modules Ae et Af sont isomorphes si et seulement si $e \simeq f$.*

Preuve. Soient $\varphi : Ae \to Af$ et $\psi : Af \to Ae$ des isomorphismes réciproques de A-modules. Alors $u = \varphi(e)$ appartient à eAf et $v = \psi(f)$ appartient à fAe, et on a $uv = u\psi(f) = \psi(uf) = \psi(u) = (\psi \circ \varphi)(e) = e$ et de même $vu = f$, donc e et f sont équivalents. Réciproquement, partant de $u \in eAf$ et $v \in fAe$ tels que $uv = e$ et $vu = f$, on définit φ et ψ par $\varphi(x) = xu$ et $\psi(y) = yv$. $\square$

3.1.2 Proposition. *Soit A un anneau et I un idéal nilpotent de A. On note $a \mapsto \overline{a}$ l'homomorphisme canonique $A \to A/I$.*

- *(i) Pour chaque idempotent $\overline{c}$ dans A/I, il existe un idempotent e dans A tel que $\overline{e} = \overline{c}$. De plus, pour n'importe quel relèvement c de $\overline{c}$, e peut être construit comme un polynôme en c à coefficients entiers sans terme constant.*
- *(ii) Soit e un idempotent de A. Pour chaque décomposition $\overline{e} = \overline{c}_1 + \cdots + \overline{c}_n$ en somme d'idempotents deux à deux orthogonaux dans A/I, il existe une décomposition $e = e_1 + \cdots + e_n$ en somme d'idempotents deux à deux orthogonaux dans A telle que $\overline{e}_i = \overline{c}_i$ pour chaque i.*
- *(iii) Un idempotent e de A est primitif si et seulement si $\overline{e}$ est primitif dans A/I.*
- *(iv) Deux idempotents e et f de A sont équivalents si et seulement si les idempotents $\overline{e}$ et $\overline{f}$ de A/I sont équivalents.*

Preuve. (i) Soit $c \in A$ un relevé de $\overline{c}$. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des $a \in A$ s'écrivant comme polynôme sans terme constant en c et tels que $\overline{a} = \overline{c}$. Si $a \in \mathscr{E}$, alors $a^2 - a$ appartient à I donc est nilpotent : on peut ainsi noter $n(a)$ le plus petit entier naturel n tel que $(a^2 - a)^n = 0$. Soit $e \in \mathscr{E}$ choisi de sorte que $n(e)$ est minimal. Posons $t = e^2 - e$ et $e' = e - 2et + t$. Certainement $t \in I$ et $e' \in \mathscr{E}$; un calcul facile fournit $(e')^2 - e' = 4t^3 - 3t^2$. Si $t \neq 0$, alors $n(e) > 1$, d'où $n(e') < n(e)$, ce qui contredit le choix de e. Bref $t = 0$ et e est le relèvement cherché de c.

(ii) On procède par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant banal. Admettons le résultat pour $n - 1$. On peut relever $\overline{c}_1$ en un idempotent e_1 dans A ; on peut même construire e_1 comme polynôme sans terme constant en ec_1e, où c_1 est un relevé de $\overline{c_1}$, puisqu'alors ec_1e est aussi un relevé de $\overline{c_1}$. Ce choix conduit à $e_1 = ee_1 = e_1e$, ce qui entraîne que $e' = e - e_1$ est un idempotent orthogonal à e_1. L'hypothèse de récurrence appliquée à l'idempotent e' et à la décomposition en $n - 1$ termes $\overline{e'} = \overline{c_2} + \cdots + \overline{c_n}$ donne une décomposition idempotente orthogonale $e' = e_2 + \cdots + e_n$ dans A telle que $\overline{e_i} = \overline{c_i}$. Pour $i \geq 2$, nous avons $e_i = e'e_i = e_ie'$, ce qui implique $e_1e_i = e_ie_1 = 0$. L'écriture $e = e_1 + \cdots + e_n$ est ainsi une décomposition idempotente orthogonale dans A qui relève $\overline{e} = \overline{c_1} + \cdots + \overline{c_n}$.

(iii) Supposons que e ne soit pas primitif : soit il est nul, soit il s'écrit $e_1 + e_2$ avec e_1, e_2 non-nuls et orthogonaux. Dans le premier cas, $\overline{e}$ est nul donc n'est pas primitif. Dans le second, $\overline{e} = \overline{e_1} + \overline{e_2}$ avec $\overline{e_1}$ et $\overline{e_2}$ orthogonaux et non-nuls, donc $\overline{e}$ n'est pas primitif non plus. (Si par exemple $\overline{e_1}$ était nul, alors e_1 appartiendrait à I, donc serait nilpotent, tout en étant unipotent ; il serait alors nul, contrairement à notre prémisse.) En conclusion : si e n'est pas primitif, alors $\overline{e}$ ne l'est pas non plus. Une argumentation analogue, utilisant (ii), établit la réciproque.

(iv) Il est clair que si e et f sont équivalents, alors $\overline{e}$ et $\overline{f}$ le sont. Réciproquement, supposons que $\overline{e} \simeq \overline{f}$. Il existe $\overline{u} \in \overline{eAf}$ et $\overline{v} \in \overline{fAe}$ tels que $\overline{uv} = \overline{e}$ et $\overline{vu} = \overline{f}$. Remontons $\overline{u}$ et $\overline{v}$ en des éléments u et v de A. Quitte à remplacer u par euf et v par fve, on peut supposer que $u \in eAf$ et $v \in fAe$. Ensuite, $e - uv \in I \cap eAe$. Comme $I \cap eAe$ est un idéal nilpotent de eAe, ceci entraîne que uv est un élément inversible de eAe. De même, vu est un élément inversible de fAf. Soit $x \in eAe$ et $y \in fAf$ tels que $uvx = e$ et $yvu = f$. Alors $yv = yve = yvuvx = fvx = vx$, et donc e et f sont équivalents. □

3.2 Anneaux artiniens basiques

L'ajout de la section 1.8 rend essentiellement inutile le paragraphe du cours intitulé « Réduction modulo $J(A)$ ». Je le remplace par la définition d'anneau basique, présentée en cours de façon un peu sommaire.

3.2.1 Proposition. *Soit A un anneau artinien et noethérien à gauche, de radical de Jacobson $J(A)$; ainsi $A/J(A)$ est un anneau artinien semi-simple. On note $a \mapsto \overline{a}$ l'homomorphisme canonique $A \to A/J(A)$. Soit $1 = e_1 + \cdots + e_n$ une décomposition en somme d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux. Les énoncés suivants sont équivalents.*

(i) Les modules principaux indécomposables apparaissant dans la décomposition ${}_AA = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n$ en somme directe d'indécomposables sont deux à deux non isomorphes.

(ii) Les modules simples apparaissant dans la décomposition $A/J(A) = A\overline{e_1} \oplus \cdots \oplus A\overline{e_n}$ en somme directe de modules simples sont deux à deux non isomorphes.

(iii) Dans un isomorphisme $A/J(A) \cong \mathbf{Mat}_{n_1}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathbf{Mat}_{n_r}(\Delta_r)$ donné par le théorème de Wedderburn–Artin, tous les n_i sont égaux à 1.

(iv) $A/J(A)$ est isomorphe à un produit fini d'anneaux à division.

Preuve. L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) peut être vue comme une conséquence du (iv) de la proposition 3.1.2.

On peut aussi justifier cette équivalence de la façon suivante : l'homomorphisme canonique $A \to A/J(A)$ induit un homomorphisme $Ae_i \to A\overline{e_i}$, visiblement surjectif, et de noyau $Ae_i \cap J(A) = J(A)e_i = J(A)(Ae_i) = \mathrm{rad}(Ae_i)$. Il s'agit donc d'un épimorphisme essentiel, donc d'une couverture projective. On déduit de l'unicité à isomorphisme près des couvertures projectives que $Ae_i \cong Ae_j$ si et seulement si $A\overline{e_i} \cong A\overline{e_j}$.

L'équivalence entre (ii) et (iii) vient de ce que les n_i sont les multiplicités des modules simples dans le $A/J(A)$-module régulier à gauche, voir la preuve de la proposition 2.6.2. □

Définition. Un anneau artinien et noethérien à gauche est dit **basique** s'il vérifie les énoncés de la proposition ci-dessus.

Dans le cas d'une algèbre de dimension finie sur un corps k algébriquement clos, le (iv) devient : l'algèbre $A/J(A)$ est isomorphe à l'algèbre produit k^n pour un certain $n \geq 0$. En effet dans ce cas, k est (à isomorphisme près) la seule k-algèbre à division de dimension finie.

3.2.2 Proposition. *Soit A une algèbre basique de dimension finie sur un corps k algébriquement clos. Alors il existe une sous-algèbre $S \subset A$ telle que la composée $S \to A \to A/J(A)$ est un isomorphisme d'algèbres.*

Preuve. On écrit $A/J(A) \cong k^n$ et pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on appelle $\overline{e_i}$ l'élément de $A/J(A)$ correspondant au i-ième vecteur de base dans k^n. Alors $\overline{1} = \overline{e_1} + \cdots + \overline{e_n}$ est une décomposition idempotente orthogonale dans $A/J(A)$. On la relève dans A à l'aide de la proposition 3.1.2, obtenant alors $1 = e_1 + \cdots + e_n$, et on prend pour S le sous-espace vectoriel engendré par les éléments e_1, ..., e_n. □

3.3 Équivalence de Morita

Définition. Deux catégories $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont dites **équivalentes** s'il existe deux foncteurs $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ et $\mathbf{G} : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ tels que $\mathbf{GF}$ soit isomorphe au foncteur identité de $\mathscr{A}$ et $\mathbf{FG}$ soit isomorphe au foncteur identité de $\mathscr{B}$.

Dans la pratique, tout ceci est assez compliqué à écrire et on se contente du critère suivant.

3.3.1 Critère. *Un foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ réalise une équivalence de catégories si et seulement si F est fidèle, plein et essentiellement surjectif.*

Preuve. Voir N. Jacobson, *Basic Algebra II*, sect. 1.4. □

Définition.

(1) Un foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est **fidèle** si $\mathbf{F} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathbf{F}X, \mathbf{F}Y)$ est injectif pour tous objets $X, Y \in \mathscr{A}$.

(2) Un foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est **plein** si $\mathbf{F} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathbf{F}X, \mathbf{F}Y)$ est surjectif pour tous objets $X, Y \in \mathscr{A}$.

(3) Un foncteur $\mathbf{F} : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est **essentiellement surjectif** (ou **dense**) si tout objet de B est isomorphe à un objet de la forme $\mathbf{F}X$ avec $X \in \mathscr{A}$.

L'étude générale des équivalences entre catégories de modules sur un anneau est due à Morita et à Bass ; je renvoie aux sections 3.12–3.15 du livre de Jacobson pour un exposé complet (voir aussi *Algebraic K-theory* de H. Bass). Nous allons nous contenter d'un résultat bébé, qui suffira à nos besoins et présente l'avantage d'être adapté aux modules de type fini.

Notations. Ici A est un anneau quelconque.

(1) On note A-Mod la catégorie des A-modules et A-mod la sous-catégorie pleine des modules de type fini.

(2) Pour un A-module X, on note $\operatorname{add} X$ la sous-catégorie pleine de A-Mod formée des objets qui sont facteurs directs d'un $X^{\oplus n}$ avec $n \geq 0$. Par exemple, $\operatorname{add}{}_A A$ est la sous-catégorie pleine des A-modules projectifs de type fini.

(3) On note $\operatorname{fp} X$ (pour *finitely presented*) la sous-catégorie pleine de A-Mod formée des objets M pour lesquels existe une suite exacte courte $Q_q \to Q_0 \to M \to 0$ avec Q_0, Q_1 dans $\operatorname{add} X$.

(4) On remarquera que dans le cas où A est un anneau noethérien, tous les A-modules de type fini admettent une résolution par des A-modules projectifs de type fini ; ainsi $\operatorname{fp}{}_A A = A\text{-mod}$.

3.3.2 Proposition. *Soit X un A-module et $B = \operatorname{End}_A(X)^{\mathrm{op}}$. Soit $e_X = \operatorname{Hom}_A(X, -)$; c'est un foncteur de A-Mod dans B-Mod (l'action de B sur un $\operatorname{Hom}_A(X, M)$ vient de l'action de $\operatorname{End}_A(X)$ sur X).*

(i) Pour tout $Q \in \operatorname{add} X$ et tout $M \in A$-Mod, $e_X : \operatorname{Hom}_A(Q, M) \to \operatorname{Hom}_B(e_X Q, e_X M)$ est bijectif.

(ii) Si $Q \in \operatorname{add} X$, alors $e_X(Q)$ est un B-module projectif.

(iii) e_X définit une équivalence de catégories $\operatorname{add} X \xrightarrow{\simeq} \operatorname{add}{}_B B$.

Preuve. (i) Pour $Q = X$, le groupe $\operatorname{Hom}_B(e_X Q, e_X M)$ est

$$\operatorname{Hom}_B(B, \operatorname{Hom}_A(X, M)) \cong \operatorname{Hom}_A(X, M)$$

et dans cette identification, l'application $e_X : \operatorname{Hom}_A(Q, M) \to \operatorname{Hom}_B(e_X Q, e_X M)$ de l'énoncé est simplement l'identité de $\operatorname{Hom}_A(X, M)$. Le résultat annoncé est donc vrai dans ce cas.

Le cas de $Q = X^n$ pour $n \geq 0$ s'en déduit par additivité du (bi)foncteur $\operatorname{Hom}(-, -)$ par rapport à la première variable. Toujours par additivité, on passe ensuite au cas où Q est un facteur direct d'un X^n.

(ii) Pour $Q = X$, le module $e_X(Q)$ est le module régulier ${}_B B$, donc est un B-module projectif. Le cas général s'en déduit à nouveau par additivité.

(iii) La restriction de e_X à $\operatorname{add} X$ est un foncteur fidèle et plein d'après le (i). Il reste à voir l'essentielle surjectivité. Soit donc P un B-module projectif de type fini. Il est isomorphe à un facteur direct d'un B-module libre de type fini $({}_B B)^{\oplus n}$, autrement dit au noyau d'un idempotent $f \in \operatorname{End}_B({}_B B^n)$. Avec (i), on écrit $f = e_X(u)$ où $u \in \operatorname{End}_A(X^n)$ est un idempotent. Alors $Q = \ker u$ est un facteur direct de X^n, donc un objet de $\operatorname{add} X$, et comme e_X est exact à gauche, il préserve les noyaux : $e_X(Q) = \ker f \cong P$. $\square$

3.3.3 Théorème. *Soit P un A-module projectif et $B = \mathrm{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$. Alors le foncteur exact $e_P : A$-Mod $\to B$-Mod se restreint en une équivalence de catégories* $\mathrm{fp}\, P \xrightarrow{\simeq} \mathrm{fp}\,_B B$.

Preuve. Comme P est projectif, le foncteur e_P est exact. En particulier, il préserve les conoyaux.

Justifions que e_P envoie un objet M de $\mathrm{fp}\, P$ sur un objet dans $\mathrm{fp}\,_B B$. Pour cela, écrivons M comme le conoyau d'un homomorphisme $u : Q_1 \to Q_0$, avec Q_0 et Q_1 dans $\mathrm{add}\, P$. Alors $e_P(M)$ est le conoyau de $e_P(u) : e_P(Q_1) \to e_P(Q_0)$, avec $e_P(Q_0)$ et $e_P(Q_1)$ dans $\mathrm{add}\,_B B$ d'après la proposition précédente. Ainsi $e_P(M)$ est bien dans $\mathrm{fp}\,_B B$.

Le foncteur e_P se restreint donc en un foncteur $\mathrm{fp}\, P \to \mathrm{fp}\,_B B$, et cette restriction est essentiellement surjective. En effet, un B-module N dans $\mathrm{fp}\,_B B$ s'écrit comme conoyau d'un homomorphisme $v : R_1 \to R_0$ entre deux modules projectifs de type fini. La proposition précédente fournit deux modules Q_0 et Q_1 dans $\mathrm{add}\, P$ tels que $R_0 \cong e_P(Q_0)$ et $R_1 \cong e_P(Q_1)$, puis un homomorphisme $u : Q_1 \to Q_0$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
e_P(Q_1) \arrow[r, "e_P(u)"] \arrow[d, "\simeq"] & e_P(Q_0) \arrow[d, "\simeq"] & & \\
R_1 \arrow[r, "v"] & R_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

commute. On obtient alors $N \cong e_P(\mathrm{coker}\, u)$, avec $\mathrm{coker}\, u \in \mathrm{fp}\, P$ par construction.

Il reste à établir que $e_P : \mathrm{fp}\, P \to \mathrm{fp}\,_B B$ est fidèle et plein. Soit M et N dans $\mathrm{fp}\, P$. Écrivant $Q_1 \to Q_0 \to M \to 0$ avec Q_0 et Q_1 dans $\mathrm{add}\, P$, nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "e_P"'] & \mathrm{Hom}_A(Q_0,N) \arrow[r] \arrow[d, "e_P"'] & \mathrm{Hom}_A(Q_1,N) \arrow[d, "e_P"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(e_P(M), e_P(N)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(e_P(Q_0), e_P(N)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(e_P(Q_1), e_P(N))
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. Les deux flèches verticales de droite sont bijectives d'après le (i) de la proposition 3.3.2, par suite la flèche verticale de gauche l'est également. □

3.3.4 Corollaire. *Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps k. Alors il existe une algèbre B basique de dimension finie sur k telle que les catégories A-mod et B-mod soient équivalentes.*

Preuve. Soit P_1, ..., P_n un jeu complet de A-modules projectifs de type fini indécomposables [4] et soit $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$. Alors chaque P_i est un k-espace vectoriel de dimension finie, donc $B = \mathrm{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$ est une k-algèbre de dimension finie. L'équivalence de catégorie $e_P : \mathrm{add}\, P \cong \mathrm{add}\,_B B$ de la proposition 3.3.2 montre que les B-modules projectifs indécomposables de type fini sont les $e_P(P_i)$, et qu'ils sont deux à deux non isomorphes. Comme $_B B = e_P(P) = e_P(P_1) \oplus \cdots \oplus e_P(P_n)$, on voit que B est basique.

4. En utilisant l'axiome du choix, on peut montrer qu'un module projectif indécomposable sur un anneau artinien à gauche est nécessairement de type fini.

Par construction de P, les objets de $\operatorname{add} P$ sont les A-modules projectifs de type fini, et ceux de $\operatorname{add}{}_B B$ sont les B-modules projectifs de type fini. Comme A et B sont des k-algèbres de dimension finie, et donc a fortiori des anneaux noethériens à gauche, on a $\operatorname{fp} P = A\text{-mod}$ et $\operatorname{fp}{}_B B = B\text{-mod}$. Le théorème affirme alors que e_P définit une équivalence $A\text{-mod} \xrightarrow{\simeq} B\text{-mod}$. $\square$

3.4 Un théorème de Gabriel

Définition. Soit $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carquois (fini), k un corps, kQ l'algèbre des chemins, J l'idéal bilatère de kQ linéairement engendré par les chemins de longueur strictement positive. Dans ce contexte, un idéal bilatère I de kQ est dit **admissible** s'il existe un entier $t \geq 2$ tel que $J^t \subset I \subset J^2$.

Exercice. Avec les notations de la définition ci-dessus, supposons que I soit un idéal admissible de kQ. Alors kQ/I est une algèbre de dimension finie sur k, de radical de Jacobson J/I. (Indication : observer que kQ/J^t est de dimension finie, que J/I est un idéal nilpotent de kQ/I, et que kQ/J est une algèbre semi-simple.)

Dans la suite de cette section, on suppose que A est une algèbre basique de dimension finie sur un corps k algébriquement clos. Procédant comme dans la preuve de la proposition 3.2.2, on trouve une sous-algèbre $S \subset A$ telle que la composée $S \to A \to A/J(A)$ soit un isomorphisme d'algèbre. Plus précisément, on construit des idempotents primitifs e_1, ..., e_n de A deux à deux orthogonaux tels que $e_1 + \cdots + e_n = 1$; alors S est le sous-espace vectoriel de base $(e_1, \ldots, e_n)$.

3.4.1 Lemme. *Avec les notations ci-dessus, tout S-S-bimodule M se décompose en somme directe de k-espaces vectoriels*

$$M = \bigoplus_{i,j=1}^{n} e_j M e_i.$$

Preuve. Chaque e_i définit deux endomorphismes du k-espace vectoriel M : l'un, disons L_{e_i}, définit l'action à gauche de e_i, l'autre, disons R_{e_i}, l'action à droite. D'après la proposition 2.3.1, la somme $\mathrm{id}_M = R_{e_1} \oplus \cdots \oplus R_{e_n}$ d'idempotents deux à deux orthogonaux donne la décomposition $M = \bigoplus_{i=1}^n Me_i$. De même, la somme $\mathrm{id}_M = L_{e_1} \oplus \cdots \oplus L_{e_n}$ fournit la décomposition $M = \bigoplus_{j=1}^n e_j M$. Pour conclure, on observe que tous ces endomorphismes idempotents L_{e_j} et R_{e_i} commutent deux à deux dans $\operatorname{End}_k(M)$; ils sont donc simultanément diagonalisables. $\square$

Pour alléger l'écriture nous désignerons le radical de Jacobson de A par la lettre $\mathfrak{r}$. Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $P_i = Ae_i$ et $S_i = \operatorname{top} P_i = P_i/\mathfrak{r}P_i$ (l'égalité $\operatorname{rad} P_i = \mathfrak{r}P_i$ provient de la conséquence (2) du théorème 2.2.1). Ainsi P_i est un A-module principal indécomposable, i.e. un A-module projectif indécomposable, et est la couverture projective du module simple S_i ; les modules P_1, ..., P_n (respectivement, S_1, ..., S_n) sont deux à deux non isomorphes, et tout A-module projectif indécomposable (respectivement, simple) est isomorphe à l'un des P_i (respectivement, à l'un des S_i). Enfin, $\operatorname{End}_A(S_i) \cong k$ d'après le lemme de Schur.

3.4.2 Proposition. *Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a*

$$\dim_k e_j(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i = \big(\mathfrak{r}P_i/\mathfrak{r}^2P_i : S_j\big) = \dim_k \operatorname{Ext}^1_A(S_i, S_j).$$

Preuve. On applique $\operatorname{Hom}_A(-, S_j)$ à la suite exacte courte $0 \to \mathfrak{r}P_i \to P_i \to S_i \to 0$:

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(S_i, S_j) \to \operatorname{Hom}_A(P_i, S_j) \xrightarrow{h} \operatorname{Hom}_A(\mathfrak{r}P_i, S_j) \to \operatorname{Ext}^1_A(S_i, S_j) \to 0.$$

Tout homomorphisme de P_i dans S_j se factorise à travers la tête de P_i, donc sa restriction à $\mathfrak{r}P_i$ est nulle ; ceci entraîne que $h = 0$, d'où $\operatorname{Ext}^1_A(S_i, S_j) \cong \operatorname{Hom}_A(\mathfrak{r}P_i, S_j)$ (c'est un isomorphisme de groupes abéliens, en fait de k-espaces vectoriels). À nouveau, un homomorphisme de $\mathfrak{r}P_i$ dans S_j se factorise à travers la tête de $\mathfrak{r}P_i$. Désignons par $M = \mathfrak{r}P_i/\mathfrak{r}^2P_i$ cette dernière ; alors

$$\operatorname{Ext}^1_A(S_i, S_j) \cong \operatorname{Hom}_A(\mathfrak{r}P_i, S_j) \cong \operatorname{Hom}_A(M, S_j).$$

En décomposant M en somme directe de sous-modules simples et en utilisant le lemme de Schur, on trouve $(M : S_j) = \dim_k \operatorname{Hom}_A(M, S_j)$, ce qui entraîne la seconde des égalités annoncées.

Des raisonnements tout à fait analogues conduisent à $(M : S_j) = \dim_k \operatorname{Hom}_A(S_j, M)$ et à

$$\operatorname{Hom}_A(S_j, M) = \operatorname{Hom}_A(P_j/\mathfrak{r}P_j, M) \cong \operatorname{Hom}_A(P_j, M) = \operatorname{Hom}_A(Ae_j, M) \cong e_jM.$$

Décomposant chaque terme de la suite exacte de A-bimodules $0 \to \mathfrak{r}^2 \to \mathfrak{r} \to \mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2 \to 0$ selon l'action à droite des idempotents e_i, on obtient

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{r}^2 e_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{r}e_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} (\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i \to 0$$

d'où $0 \to \mathfrak{r}^2P_i \to \mathfrak{r}P_i \to (\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i \to 0$ pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$. Il vient ainsi $M \cong (\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i$ puis $e_jM = e_j(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i$. □

Définition. Le **carquois** (de Gabriel) de A est le graphe orienté avec $\{1, \ldots, n\}$ comme ensemble de sommets et avec $\dim_k \operatorname{Ext}^1_A(S_i, S_j)$ flèches de i vers j pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$.

Le carquois de A comprend généralement des boucles et des cycles orientés. Il est bien défini à la numérotation des sommets près. (Il serait en fait plus intrinsèque d'indexer les sommets par l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules simples.)

3.4.3 Théorème (Gabriel). *Soit A une algèbre basique de dimension finie sur un corps k algébriquement clos, soit Q le carquois de A. Alors il existe un idéal admissible I de kQ et un isomorphisme $A \cong kQ/I$.*

Preuve. On reprend l'algèbre $S = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_n$. Comme la composée $S \to A \to A/\mathfrak{r}$ est un isomorphisme, on a $A = S \oplus \mathfrak{r}$.

La suite exacte de A-bimodules $0 \to \mathfrak{r}^2 \to \mathfrak{r} \to /\mathfrak{r}^2 \to 0$ se scinde quand on la regarde comme une suite exacte de S-bimodules. Pour le voir, il suffit de décomposer chaque terme selon le lemme 3.4.1

$$0 \to \bigoplus_{i,j=1}^{n} e_j\mathfrak{r}^2 e_i \to \bigoplus_{i,j=1}^{n} e_j\mathfrak{r}e_i \to \bigoplus_{i,j=1}^{n} e_j(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i \to 0$$

et de scinder les suites courtes de k-espaces vectoriels $0 \to e_j\mathfrak{r}^2 e_i \to e_j\mathfrak{r}e_i \to e_j(\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2)e_i \to 0$ ainsi mises en évidence. (On peut aussi raisonner en disant qu'un S-bimodule est la même chose qu'un $S \otimes_k S^{\mathrm{op}}$-module et que l'algèbre $S \otimes_k S^{\mathrm{op}}$ est semi-simple car isomorphe à k^{n^2}.) On peut donc trouver un sous-S-bimodule V de $\mathfrak{r}$ tel que $\mathfrak{r} = V \oplus \mathfrak{r}^2$.

Formons l'algèbre tensorielle

$$T_S V = \bigoplus_{d \geq 0} T^d \quad \text{avec} \quad T^0 = S, \quad T^1 = V, \quad T^d = \underbrace{V \otimes_S \cdots \otimes_S V}_{d \text{ facteurs}}.$$

Observant que $\dim_k(e_j V e_i)$ est le nombre de flèches de i vers j dans le carquois Q, il est facile de définir un isomorphisme d'algèbres $T_S V \cong kQ$. De fait, T^d s'identifie au sous-espace vectoriel de kQ engendré par les chemins de longueur d, pour chaque $d \geq 0$.

Par la propriété universelle des algèbres tensorielles, les deux applications $S \to A$ et $V \to A$ définissent un homomorphisme d'algèbres $\Phi : T_S V \to A$. Comme $V \subset \mathfrak{r}$, on a $\Phi(T^d) \subset \mathfrak{r}^d \subset \mathfrak{r}^2$ pour tout $d \geq 2$. De plus, $A = S \oplus V \oplus \mathfrak{r}^2$. Par conséquent, $\ker \Phi \subset \bigoplus_{d \geq 2} T^d$. Par ailleurs, la nilpotence de $\mathfrak{r}$ entraîne l'existence d'un entier $t \geq 2$ tel que $\mathfrak{r}^t = \{0\}$, de sorte que $\ker \Phi \supset \bigoplus_{d \geq t} T^d$. Ceci prouve que $\ker \Phi$ est un idéal admissible de $T_S V$, identifié à kQ.

Enfin, en développant le produit

$$\mathfrak{r}^d = \underbrace{(V \oplus \mathfrak{r}^2) \otimes_S \cdots \otimes_S (V \oplus \mathfrak{r}^2)}_{d \text{ fois}}$$

et en utilisant l'inclusion $V \subset \mathfrak{r}$, on trouve $\mathfrak{r}^d = \Phi(T^d) + \mathfrak{r}^{d+1}$. Une récurrence facile, initialisée par $A = S + V + \mathfrak{r}^2 = \Phi(T^0 \oplus T^1) + \mathfrak{r}^2$, montre alors que $A = \Phi(T^0 \oplus \cdots \oplus T^{d-1}) + \mathfrak{r}^d$ pour tout $d \geq 2$. De $\mathfrak{r}^t = \{0\}$ découle alors la surjectivité de Φ. $\square$

Remarques.

(1) Le carquois de A ne dépend que de l'algèbre $A/\mathfrak{r}$ et du $A/\mathfrak{r}$-bimodule $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2$. Le reste de la structure de A est encodée dans l'idéal admissible I.

(2) On dit qu'un anneau A est **héréditaire** si tout sous-module d'un A-module projectif de type fini est projectif. Les algèbres de chemins de carquois sont héréditaires. On peut prouver (exercice 4 de la feuille 6) qu'une algèbre kQ/I avec I idéal admissible est héréditaire si et seulement si Q est acyclique et $I = \{0\}$; ainsi, sur un corps algébriquement clos, les algèbres basiques héréditaires de dimension finie sont les algèbres de chemins de carquois acycliques (et sans relation).

3.5 Compléments

Une étape importante de la démonstration précédente est d'avoir su relever l'algèbre quotient $A/\mathfrak{r}$ en une sous-algèbre de A. Pour cela, nous avons utilisé le théorème de relèvement des idempotents, mais il existe en fait un résultat plus général.

Définition. Une algèbre A de dimension finie sur un corps k est dite séparable si pour toute extension K de k, la K-algèbre $A \otimes_k K$ est semi-simple.

Exemples.

(1) Pour tout corps k et tout entier $n \geq 1$, l'algèbre $\mathbf{Mat}_n(k)$ est séparable sur k.

(2) Soit E/k une extension finie de corps. Alors l'algèbre E est séparable sur k au sens ci-dessus si et seulement si elle l'est au sens de la théorie des extensions de corps.

Cette notion d'algèbre séparable peut être définie de plusieurs façons différentes. De fait, les énoncés suivants, portant sur une algèbre A de dimension finie sur un corps k, sont équivalents (liste non limitative) : (i) A est séparable sur k ; (ii) le centre de A est une algèbre séparable sur k ; (iii) pour toute k-algèbre semi-simple B, l'algèbre $A \otimes_k B$ est semi-simple ; (iv) l'algèbre $A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$ est semi-simple.

3.5.1 Théorème (Wedderburn–Malcev). *Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps k, de radical de Jacobson $\mathfrak{r}$. On suppose que $A/\mathfrak{r}$ est séparable sur k.*

(i) Il existe une sous-algèbre $S \subset A$ telle que $A = S \oplus \mathfrak{r}$ (en tant que k-espace vectoriel).

(ii) Si S et S' sont deux sous-algèbres de A telles que $A = S \oplus \mathfrak{r} = S' \oplus \mathfrak{r}$, alors il existe $x \in \mathfrak{r}$ tel que S' se déduise de S par la conjugaison par $1 + x$.

Pour une preuve, voir par exemple N. Jacobson, *Basic Algebra II*, exercices du §6.11.

Un second complément au théorème de Gabriel concerne la notion suivante :

Définition. Un anneau A est dit héréditaire à gauche si tout sous-module d'un A-module à gauche projectif est projectif.

Nous avons vu (dans le cours de F. Chapoton) que l'algèbre des chemins d'un carquois est héréditaire (même si le carquois contient des boucles ou des cycles orientés).

3.5.2 Proposition. *Soit Q un carquois, k un corps, I un idéal admissible de l'algèbre des chemins kQ. Si kQ/I est héréditaire à gauche, alors Q est acyclique et $I = \{0\}$.*

Une preuve sera apportée dans l'exercice 4 de la feuille 6.

3.6 Le bifoncteur Ext^1

Dans ce paragraphe, A est un anneau quelconque.

Soit M et N deux A-modules. On note $Ext_A^1(M,N)$ la classe des suites exactes courtes de la forme
$$\xi :\ 0 \to N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \to 0.$$

Étant donné deux éléments ξ et
$$\xi' :\ 0 \to N \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} M \to 0$$
de $Ext_A^1(M,N)$, on écrit $\xi \sim \xi'$ s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & E \arrow[dd, "\theta"] \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[ur] \arrow[dr] & & M \arrow[r] & 0. \\ & & E' \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Le lemme des cinq impose à $\theta : E \to E'$ d'être un isomorphisme ; on en déduit que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $Ext_A^1(M,N)$. On note $\mathrm{Ext}_A^1(M,N)$ l'ensemble quotient $Ext_A^1(M,N)/\sim$ et on note $[\xi] \in \mathrm{Ext}_A^1(M,N)$ la classe d'équivalence d'une suite exacte courte ξ.

Une suite exacte courte ξ comme ci-dessus est dite scindée si le sous-module $\operatorname{im} f = \ker g$ de E admet un supplémentaire, disons S. Il est équivalent de demander que f admette un inverse à gauche (si $h : E \to N$ est tel que $h \circ f = \mathrm{id}_N$, alors $E = \operatorname{im} f \oplus \ker h$) ou que g admette un inverse à droite (si $k : M \to E$ est tel que $g \circ k = \mathrm{id}_M$, alors $E = \ker g \oplus \operatorname{im} k$). Ainsi les suites exactes courtes scindées sont les éléments de la classe d'équivalence modulo $\sim$ de la suite
$$0 \to N \xrightarrow{\binom{1}{0}} N \oplus M \xrightarrow{(0\ 1)} M \to 0.$$

On note $0 \in \mathrm{Ext}_A^1(M,N)$ cette classe d'équivalence.

L'ensemble $\mathrm{Ext}_A^1(M,N)$ est un groupe abélien : pour construire la somme $[\xi] + [\xi']$, on choisit des représentants ξ et ξ' de ces classes, notées comme précédemment, on introduit deux sous-modules
$$K = \{(e,e') \mid g(e) = g'(e')\} \quad \text{et} \quad L = \{(f(n), -f'(n)) \mid n \in N\}$$
de $E \oplus E'$, on remarque que K contient L, et on pose $E'' = K/L$,
$$f'' : \begin{pmatrix} N \to E'' \\ n \mapsto (f(n),0) + L \end{pmatrix}, \quad g'' : \begin{pmatrix} E'' \to M \\ (e,e') + L \mapsto g(e) \end{pmatrix},$$
et
$$\xi'' :\ 0 \to N \xrightarrow{f''} E'' \xrightarrow{g''} M \to 0.$$

On vérifie que ξ'' est une suite exacte courte et on pose $[\xi] + [\xi'] = [\xi'']$. On vérifie que cela a un sens (c'est-à-dire que la classe d'équivalence de ξ'' ne dépend que de $[\xi]$ et $[\xi']$ et pas du choix de ξ et ξ'), que l'on obtient ainsi une loi associative et commutative sur $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$, que 0 est l'élément neutre, et que l'opposé de $[\xi]$ est la classe de

$$0 \to N \xrightarrow{-f} E \xrightarrow{g} M \to 0.$$

Soit $f : M' \to M$ et $g : N \to N'$ des homomorphismes de A-modules. Étant donnée une suite exacte courte

$$\xi :\ 0 \to N \to E \to M \to 0,$$

on peut construire les diagrammes pullback et pushout

$$\begin{tikzcd}
f^*\xi : & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\xi : & 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
g_*\xi : & 0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & Q \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Les classes d'équivalence $[f^*\xi]$ et $[g_*\xi]$ ne dépendent pas du choix de ξ dans sa classe, ce qui permet de définir sans ambiguïté $\mathrm{Ext}^1_A(f,N)[\xi] = [f^*\xi]$ et $\mathrm{Ext}^1_A(M,g)[\xi] = [g_*\xi]$. On obtient ainsi deux foncteurs $\mathrm{Ext}^1_A(-,N)$ et $\mathrm{Ext}^1_A(M,-)$ de la catégorie des A-modules vers la catégorie des groupes abéliens (le premier foncteur est contravariant). Ces foncteurs sont additifs. On a $\mathrm{Ext}^1_A(f,N')\circ\mathrm{Ext}^1_A(M,g) = \mathrm{Ext}^1_A(M',g)\circ\mathrm{Ext}^1_A(f,N)$ en tant qu'homomorphismes de groupes de $\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ dans $\mathrm{Ext}^1_A(M',N')$; l'application composée est notée $\mathrm{Ext}^1(f,g)$.

Soit à nouveau une suite exacte courte ξ comme ci-dessus, et soit X et Y des A-modules. On dispose alors de deux suites exactes longues de groupes abéliens

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(X,L) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(X,f)"] & \mathrm{Hom}_A(X,M) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(X,g)"] & \mathrm{Hom}_A(X,N) \arrow[dll, rounded corners] \\
 & \mathrm{Ext}^1_A(X,L) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_A(X,f)"] & \mathrm{Ext}^1_A(X,M) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_A(X,g)"] & \mathrm{Ext}^1_A(X,N)
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(N,Y) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(g,Y)"] & \mathrm{Hom}_A(M,Y) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_A(f,Y)"] & \mathrm{Hom}_A(L,Y) \arrow[dll, rounded corners] \\
 & \mathrm{Ext}^1_A(N,Y) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_A(g,Y)"] & \mathrm{Ext}^1_A(M,Y) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_A(f,Y)"] & \mathrm{Ext}^1_A(L,Y)
\end{tikzcd}$$

dans lesquelles les homomorphismes de liaison sont respectivement $h \mapsto \mathrm{Ext}^1_A(h,L)[\xi]$ et $k \mapsto \mathrm{Ext}^1_A(N,k)[\xi]$.

Il serait ici cohérent d'écrire Ext^0 au lieu de Hom. On pourrait alors poursuivre indéfiniment les suites exactes longues ci-dessus en introduisant des groupes $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)$ pour $i \geq 1$, définis comme ensembles de classes d'équivalence de suites exactes de la forme

$$0 \to N \to E_i \to E_{i-1} \to \cdots \to E_2 \to E_1 \to M \to 0.$$

La relation d'équivalence est toutefois un peu plus compliquée à décrire que dans le cas $i = 1$. Enfin, si L, M et N sont trois A-modules et si i et j sont deux entiers naturels, il existe un « produit de Yoneda » $\mathrm{Ext}_A^j(M,N) \times \mathrm{Ext}_A^i(L,M) \to \mathrm{Ext}_A^{i+j}(L,N)$: pour $i = j = 0$, ce produit est le produit de composition $\circ$ des homomorphismes ; pour $i = 0$ et $j = 1$, le produit de $[\xi] \in \mathrm{Ext}_A^1(M,N)$ et $f \in \mathrm{Hom}_A(L,M)$ est $\mathrm{Ext}_A^1(f,N)[\xi]$. Notons que pour $L = M = N$, on obtient ainsi une structure d'anneau gradué sur $\bigoplus_{i\in\mathbf{N}} \mathrm{Ext}_A^i(M,M)$.

Enfin, soit $P^\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ une résolution projective de M. Étant donnée une suite exacte courte ξ, construisons un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P^2 \arrow[r, "d^1"] & P^1 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "k"'] & P^0 \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & \\ & & & & M \arrow[r] & 0. \\ & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"'] & E \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

L'homomorphisme h tel que $g \circ h = \varepsilon$ est construit en utilisant la projectivité de P^0. Comme $\varepsilon \circ d^0 = 0$, l'homomorphisme $h \circ d^0 : P^1 \to E$ prend ses valeurs dans $\ker g = \mathrm{im}\, f$, donc il existe $k : P^1 \to N$ tel que $f \circ k = h \circ d^0$. On constate que $f \circ k \circ d^1 = 0$; comme f est un monomorphisme, il vient $k \circ d^1 = 0$. Par ailleurs, l'homomorphisme h n'est déterminé qu'à l'addition près d'un homomorphisme de la forme $f \circ s$, avec $s \in \mathrm{Hom}_A(P^0, N)$, et donc k, qui dépend du choix de h, n'est déterminé à l'addition près de $s \circ d^0$. Ainsi k est un 1-cocycle déterminé à un 1-cobord près dans le complexe

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P^0, N) \to \mathrm{Hom}_A(P^1, N) \to \mathrm{Hom}_A(P^2, N) \to \cdots$$

La classe d'homologie de k ne depend donc que de ξ et pas des choix effectués pour définir h et k. On peut démontrer (c'est plus fastidieux que difficile) que cette construction permet d'identifier les deux définitions de $\mathrm{Ext}_A^1(M,N)$: comme un ensemble de classes d'équivalence de suites exactes courtes ou comme le foncteur derivé de $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ évalué en M.

4 Représentations de carquois sans relation

Le théorème 3.4.3 affirme que toute algèbre basique de dimension finie sur un corps algébriquement clos est l'algèbre des chemins d'un carquois modulo un idéal admissible. Dans ce chapitre, nous nous restreignons au cas où l'idéal est réduit à zéro. La théorie est beaucoup plus avancée dans ce cadre, car l'algèbre est alors héréditaire (autrement dit, les groupes Ext^i sont nuls pour $i \geq 2$).

Les résultats de base de la théorie sont valables même si le carquois contient des boucles et des cycles orientés, auquel cas l'algèbre des chemins est de dimension infinie et n'est pas artinienne. Nos representations seront cependant de dimension finie sur le corps de base, garantissant la validité du théorème de Krull–Schmidt–Azumaya.

Je suivrai d'assez près les notes de W. Crawley-Boevey, *Lectures on representations of quivers*, disponibles sur la page web de l'auteur (un lien est inséré dans ce fichier PDF).

4.1 Graphes et formes quadratiques

On se donne un graphe fini Γ, d'ensemble de sommets $\{1,\dots,n\}$. Boucles et arêtes multiples sont autorisées. Pour $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$, soit $m_{i,j}=m_{j,i}$ le nombre d'arêtes entre les sommets i et j. Les éléments de $\mathbb{Z}^n$ seront désignés par des lettres grasses, par exemple $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$. La base canonique de $\mathbb{Z}^n$ sera notée $(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)$.

Définitions.

(1) q est la forme quadratique sur $\mathbb{Z}^n$ donnée par $q(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^n x_i^2-\sum_{1\leq i\leq j\leq n} m_{i,j}x_ix_j$.

(2) $(\ ,\ ):\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}$ est la forme polaire de q, donnée par

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=q(\mathbf{x}+\mathbf{y})-q(\mathbf{x})-q(\mathbf{y})=\sum_{i=1}^n(2-2m_{i,i})x_iy_i-\sum_{1\leq i<j\leq n}m_{i,j}(x_iy_j+x_jy_i).$$

(3) Le radical de q est l'ensemble $\operatorname{rad}(q)=\{\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^n \mid \forall\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n,\ (\mathbf{x},\mathbf{y})=0\}$.

(4) Un élement $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n$ est dit positif (on écrit alors $\mathbf{x}\geq 0$) si toutes ses coordonnées sont positives. Il est dit sincère si toutes ses coordonnées sont non-nulles.

Rappelons que la forme quadratique q est dite définie positive si $q(\mathbf{x})>0$ pour tout vecteur $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}$, et semi-définie positive si $q(\mathbf{x})\geq 0$ pour tout $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n$.

4.1.1 Lemme. *On suppose que Γ est connexe et que* $\operatorname{rad}(q)$ *contient un vecteur* $\mathbf{y}$ *positif non-nul. Alors y est sincère, q est semi-définie positive, et*

$$\operatorname{rad}(q)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n \mid q(\mathbf{x})=0\}=\mathbb{Q}\mathbf{y}\cap\mathbb{Z}^n.$$

Preuve. La condition $\mathbf{y}\in\operatorname{rad}(q)$ signifie que pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, on a $(\mathbf{e}_i,\mathbf{y})=0$, ou encore

$$(2-2m_{i,i})y_i=\sum_{j\neq i}m_{i,j}y_j.$$

S'il existe i tel que $y_i=0$, alors la positivité des $m_{i,j}$ et des y_j implique que $m_{i,j}y_j=0$ pour chaque $j\neq i$, et donc que $y_j=0$ pour chaque j relié à i par une arête de Γ. La connexité de Γ entraîne alors $\mathbf{y}=0$, en contradiction avec l'hypothèse. Ainsi $\mathbf{y}$ doit être sincère.

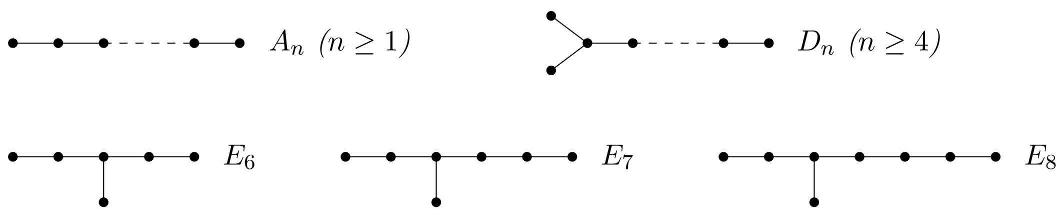
On calcule ensuite, pour $\mathbf{x}\in\mathbb{Z}^n$:

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq n}m_{i,j}\frac{y_iy_j}{2}\left(\frac{x_i}{y_i}-\frac{x_j}{y_j}\right)^2 &= \sum_{1\leq i<j\leq n}m_{i,j}\frac{y_j}{2y_i}x_i^2-\sum_{1\leq i<j\leq n}m_{i,j}x_ix_j+\sum_{1\leq i<j\leq n}m_{i,j}\frac{y_i}{2y_j}x_j^2\\ &=\sum_{i=1}^n\sum_{j\neq i}m_{i,j}y_j\frac{x_i^2}{2y_i}-\sum_{1\leq i<j\leq n}m_{i,j}x_ix_j\\ &=\sum_{i=1}^n(1-m_{i,i})x_i^2-\sum_{1\leq i<j\leq n}m_{i,j}x_ix_j\\ &=q(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Ainsi $q(\mathbf{x}) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\frac{x_i}{y_i} = \frac{x_j}{y_j}$ chaque fois que i et j sont reliés par une arête. Le graphe Γ étant connexe, cette condition est équivalente à ce que $\mathbf{x}$ soit proportionnel à $\mathbf{y}$, c'est-à-dire $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}\mathbf{y} \cap \mathbb{Z}^n$. On conclut en notant que $\mathbf{x} \in \mathbb{Q}\mathbf{y} \cap \mathbb{Z}^n \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathrm{rad}(q)$ et que $\mathbf{x} \in \mathrm{rad}(q) \Rightarrow q(\mathbf{x}) = 0$. $\square$

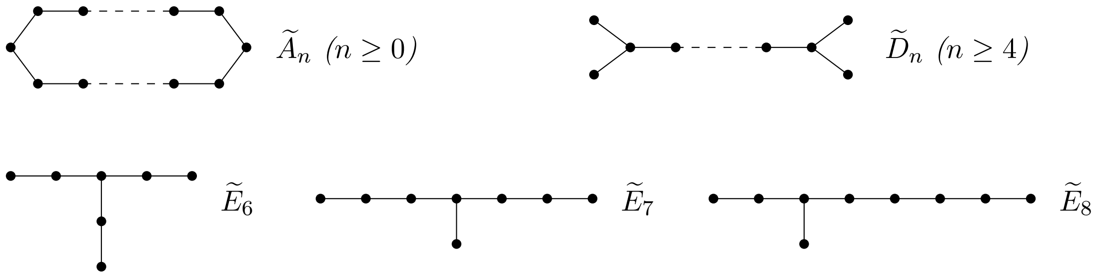
4.1.2 Théorème de classification. *On suppose Γ connexe.*

(i) (Cas Dynkin.) Si Γ est appartient à la liste suivante, alors q est définie positive.



(L'entier n en indice indique le nombre de sommets du graphe.)

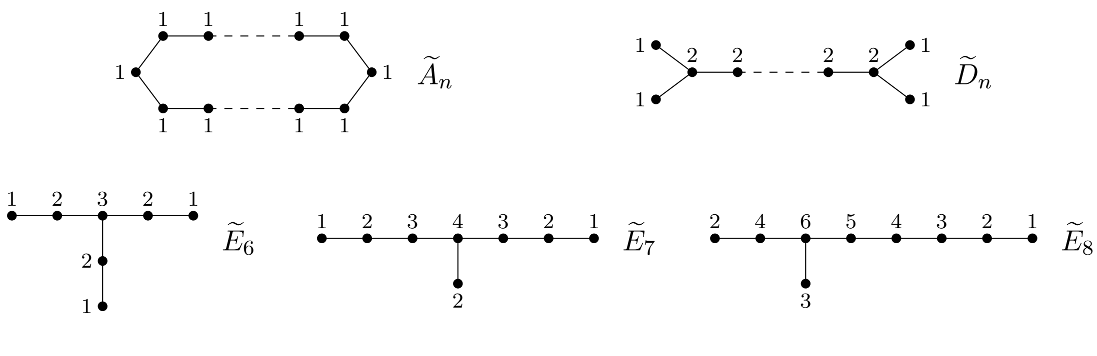
(ii) (Cas euclidien.) Si Γ est appartient à la liste suivante, alors $\mathrm{rad}(q)$ contient un vecteur $\mathbf{y}$ positif non-nul.



(L'entier n en indice indique le nombre de sommets du graphe, moins un ; $\widetilde{A}_0$ est le carquois de Jordan, à un sommet et une boucle ; $\widetilde{A}_1$ est le carquois de Kronecker, à deux sommets reliés par deux arêtes.)

(iii) Dans tous les autres cas, il existe un vecteur positif $\mathbf{x}$ tel que $q(\mathbf{x}) < 0$ et $(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) \leq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Preuve. (ii) Il suffit d'exhiber $\mathbf{y}$.



(i) On peut plonger le graphe de Dynkin Γ dans le graphe euclidien $\widetilde{\Gamma}$ correspondant, en ajoutant un sommet traditionnellement numéroté 0. La forme quadratique q définie par Γ est ainsi la restriction de la forme $\widetilde{q}$ définie par $\widetilde{\Gamma}$ à l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$. Si $\mathbf{x}$ est un élément non-nul de cet hyperplan, alors $\mathbf{x}$ ne peut pas être multiple de $\mathbf{y}$, vu que $y_0 \neq 0$ (d'après (ii)). Appliquant le lemme précédent, on conclut que $q(\mathbf{x}) = \widetilde{q}(\mathbf{x}) \neq 0$.

(iii) Un graphe Γ qui n'est ni Dynkin, ni euclidien, contient strictement un sous-graphe Γ' qui est euclidien. Soit q' la forme quadratique définie par Γ'. Si Γ ne diffère de Γ' que par des arêtes ajoutées, alors on prend pour $\mathbf{x}$ le vecteur $\mathbf{y}$ du (ii) ; le fait que $\mathbf{y}$ soit sincère lui permet de détecter les arêtes ajoutées, d'où $q(\mathbf{x}) < q'(\mathbf{y}) = 0$. Si Γ contient des sommets additionnels, alors on choisit un sommet k hors de Γ' mais relié à Γ' par une arête, et on prend $\mathbf{x} = 2\mathbf{y} + \mathbf{e}_k$. Alors $(\mathbf{e}_k, \mathbf{y}) < 0$ (à cause de l'arête reliant k à Γ' et parce que $\mathbf{y}$ est sincère), d'où

$$q(\mathbf{x}) = q'(2\mathbf{y}) + q(\mathbf{e}_k) + (\mathbf{e}_k, 2\mathbf{y}) \leq 0 + 1 + 2(\mathbf{e}_k, \mathbf{y}) < 0.$$

□

On suppose désormais que Γ ne contient pas de boucle.

Définition.

(1) On note $s_i \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ l'application $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - (\mathbf{e}_i, \mathbf{x})\mathbf{e}_i$. On note $W \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ le sous-groupe engendré par s_1, ..., s_n.

(2) On appelle racine réelle le conjugué par W d'un des vecteurs $\mathbf{e}_i$. On note Φ^{re} l'ensemble des racines réelles.

4.1.3 Proposition.

(i) Chaque s_i est une réflexion orthogonale : $s_i^2 = \mathrm{id}$ et $q \circ s_i = q$. Ainsi W agit sur $\mathbb{Z}^n$ par automorphismes orthogonaux.

(ii) Si Γ est Dynkin ou euclidien, alors $\Phi^{\mathrm{re}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid q(\mathbf{x}) = 1\}$ et toute racine $\mathbf{x} \in \Phi^{\mathrm{re}}$ est positive ou négative (c'est-à-dire $\mathbf{x} \geq 0$ ou $-\mathbf{x} \geq 0$).

(iii) Si Γ est Dynkin, alors Φ^{re} est fini.

Preuve. (i) se démontre par des calculs directs.

(ii) Posons $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \mid q(\mathbf{x}) = 1\}$. L'inclusion $\Phi^{\mathrm{re}} \subset S$ vient de ce que l'action de W préserve q et de l'égalité $q(\mathbf{e}_i) = 1$ pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$.

Prouvons maintenant qu'un élément de $\mathbf{x} \in S$ est nécessairement positif ou négatif. Pour cela, on écrit $\mathbf{x} = \mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-$ avec $\mathbf{x}^+$ et $\mathbf{x}^-$ positifs à supports disjoints. Certainement $(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-) \leq 0$ et $1 = q(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}^+) + q(\mathbf{x}^-) - (\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-) \geq q(\mathbf{x}^+) + q(\mathbf{x}^-)$. Comme $q(\mathbf{x}^+)$ et $q(\mathbf{x}^-)$ sont des entiers positifs, l'un des deux vaut un et l'autre est nul. Supposons par exemple que $q(\mathbf{x}_+) = 1$ et $q(\mathbf{x}_-) = 0$; alors $\mathbf{x}_+ \neq 0$, donc $\mathbf{x}_-$ ne peut pas être sincère, l'égalité $q(\mathbf{x}_-) = 0$ implique alors $\mathbf{x}_- = 0$, et ainsi $\mathbf{x} = \mathbf{x}_+$ est positif.

Prouvons maintenant que $(\mathbf{x} \in S$ et $\mathbf{x} \geq 0) \Rightarrow \mathbf{x} \in \Phi^{\mathrm{re}}$. On procède par récurrence sur la hauteur $\mathrm{haut}(\mathbf{x}) = x_1 + \cdots + x_n$. L'implication est évidemment vraie pour $\mathrm{haut}(\mathbf{x}) = 1$, puisqu'alors $\mathbf{x}$ est l'un des $\mathbf{e}_i$. Soit $k \geq 1$, admettons l'implication pour tout $\mathbf{x}$ de hauteur au plus k, et prenons $\mathbf{x} \in S$ positif de hauteur $k+1$. De $2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{x})$, on déduit l'existence d'un i tel que $(\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) > 0$. Alors $s_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{e}_i, \mathbf{x})\mathbf{e}_i \leq \mathbf{x}$. Comme s_i préserve q, on a $s_i(\mathbf{x}) \in S$, et donc $s_i(\mathbf{x})$ est positif ou négatif. Comme $\mathbf{x}$ n'est pas multiple de $\mathbf{e}_i$ (sinon on aurait $\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}_i$ avec $x_i = \mathrm{haut}(\mathbf{x}) \geq 2$, ce qui contredirait $\mathbf{x} \in S$), $\mathbf{x}$ possède une coordonnée $x_j > 0$ avec $j \neq i$; comme s_i ne touche qu'à la i-ème coordonnée, $s_i(\mathbf{x})$ ne peut pas être négatif, donc est positif, de hauteur $\mathrm{haut}(\mathbf{x}) - (\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) < \mathrm{haut}(\mathbf{x})$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence : $s_i(\mathbf{x}) \in \Phi^{\mathrm{re}}$. On conclut que $\mathbf{x} \in \Phi^{\mathrm{re}}$.

Pour conclure la preuve de (ii), on note que $-\mathbf{e}_i = s_i(\mathbf{e}_i) \in \Phi^{\mathrm{re}}$, ce qui prouve que Φ^{re} est stable par $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$.

(iii) La forme quadratique q est la restriction à $\mathbb{Z}^n$ d'une forme définie positive sur $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid q(\mathbf{x}) \leq 1\}$ est donc borné, par conséquent il rencontre $\mathbb{Z}^n$ en un nombre fini de points. L'action de W sur $\mathbb{Z}^n$ définit un homomorphisme de groupes de W dans le groupe des permutations de Φ^{re}, et cet homomorphisme est forcément injectif puisque Φ^{re} contient une base de $\mathbb{Z}^n$. On conclut que W est fini. □

Définition. Un élément de Coxeter est un élement de W de la forme $s_{i_1} \cdots s_{i_n}$ où $(i_1, \ldots, i_n)$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$. (On prend donc le produit de tous les s_i, dans un ordre quelconque, chaque s_i apparaissant une seule fois.)

4.1.4 Proposition. *On suppose que Γ est Dynkin. Soit $c \in W$ un élément de Coxeter.*

(i) Le seul élément de $\mathbb{Z}^n$ fixé par c est 0.

(ii) Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, il existe $i \geq 0$ tel que $c^i\mathbf{x}$ n'est pas positif.

Preuve. (i) Écrivons $c = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$. Soit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ un point de $\mathbf{Z}^n$ fixé par c. Définissons $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ par $\mathbf{b} = s_{i_2} \cdots s_{i_n}\mathbf{a}$. Comme s_i n'altère que la i-ème coordonnée d'un vecteur, le produit $s_{i_2} \cdots s_{i_n}$ ne touche pas à la i_1-ème coordonnée, autrement dit $b_{i_1} = a_{i_1}$. L'hypothèse $\mathbf{a} = c\mathbf{a}$ donne alors $\mathbf{a} = s_{i_1}\mathbf{b} = \mathbf{b} - (\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{b})\mathbf{e}_{i_1}$. De l'égalité $b_{i_1} = a_{i_1}$, on déduit $(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{b}) = 0$ puis $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. On voit alors que $s_{i_2} \cdots s_{i_n} s_{i_1}\mathbf{a} = s_{i_2} \cdots s_{i_n} s_{i_1}\mathbf{b} = s_{i_2} \cdots s_{i_n}\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{a}$. On peut alors refaire le même raisonnement avec l'elément de Coxeter $s_{i_2} \cdots s_{i_n} s_{i_1}$, et trouver $(\mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{a}) = 0$. En itérant le procédé, on obtient $(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{a}) = (\mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{a}) = \cdots = 0$. Ainsi $\mathbf{a}$ est orthogonal à chaque $\mathbf{e}_i$ et est donc nul.

(ii) Supposons qu'il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ tel que $c^i\mathbf{x} \geq 0$ pour tout $i \geq 0$. Comme W est fini, il existe j tel que $c^j = \mathrm{id}$. Alors $\mathbf{a} = \mathbf{x} + c\mathbf{x} + c^2\mathbf{x} + \cdots + c^{j-1}\mathbf{x}$ est positif, non nul, et invariant par c : c'est impossible. □

4.2 Actions de groupes algébriques

On suppose connues des notions de base sur les variétés algébriques sur un corps k algébriquement clos.

Définition.

(1) Un groupe algébrique affine est une variété algébrique affine G munie d'une loi de groupe telle que la multiplication $G \times G \to G$ et le passage à l'inverse $G \to G$ soient des homomorphismes de variétés.

(2) Une action algébrique d'un groupe algébrique G sur une variété algébrique X est un homomorphisme de variétés $G \times X \to X$ qui est une action du groupe G sur X.

Exemples.

(1) Le groupe $\mathbf{GL}_n(k)$ des matrices inversibles à coefficients dans k est un groupe algébrique sur k : c'est en effet un ouvert affine de $\mathbf{Mat}_n(k)$ (donné par la non annulation du déterminant), et les coefficients du produit de deux matrices (respectivement, de l'inverse d'une matrice) sont des polynômes en les coefficients des matrices (respectivement, et de l'inverse du déterminant).

(2) Un sous-groupe fermé d'un groupe algébrique affine est un groupe algébrique affine.

4.2.1 Proposition. *Soit G un groupe algébrique affine agissant algébriquement sur une variété algébrique X et soit $x \in X$.*

(i) Le stabilisateur (groupe d'isotropie) $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ est un sous-groupe fermé de G.

(ii) L'orbite $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ est une sous-variété localement fermée et lisse de X. Toutes les composantes irréductibles de $G \cdot x$ sont de dimension $\dim G - \dim G_x$.

(iii) L'adhérence d'orbite $\overline{G \cdot x}$ est l'union de $G \cdot x$ et d'orbites de dimension strictement plus petite. Elle contient au moins une orbite fermée.

(iv) Si G est connexe, alors l'orbite $G \cdot x$ et son adhérence $\overline{G \cdot x}$ sont des variétés irréductibles.

Preuve. L'énoncé (i) est clair.

(ii) D'après le théorème de constructibilité de Chevalley, $G \cdot x$ est l'union finie de parties localement fermées de X : $G \cdot x = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Soit I une partie de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $\overline{G \cdot x} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$, minimale pour l'inclusion. Soit $i \in I$ et soit $y \in A_i \setminus \left(\bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} \overline{A_j}\right)$. Il existe ω_y voisinage ouvert de y dans X tel que $\omega_y \cap \left(\bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} \overline{A_j}\right) = \varnothing$ et $\omega_y \cap \overline{A_i} \subset A_i$. Alors $\omega_y \cap \overline{G \cdot x} = \omega_y \cap \left(\overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}\right) \subset \omega_y \cap \overline{A_i} \subset A_i \subset G \cdot x$. Faisant agir G sur y, on voit que $G \cdot x = G \cdot y$ est ouvert dans $\overline{G \cdot x}$, c'est-à-dire que $G \cdot x$ est localement fermé. L'égalité sur les dimensions découle des résultats généraux sur les dimensions des fibres des morphismes de variétés algébriques. Enfin, comme toute variété algébrique, $G \cdot x$ possède un point lisse ; l'action de G fait alors que $G \cdot x$ est lisse en chacun de ses points.

(iii) L'adhérence $\overline{G \cdot x}$ est stable sous l'action de G, donc est union d'orbites. Comme $G \cdot x$ est localement fermée, les autres orbites incluses dans $\overline{G \cdot x}$ sont incluses dans le fermé $\overline{G \cdot x} \setminus G \cdot x$, donc sont de dimension plus petite. Ainsi une orbite incluse dans $\overline{G \cdot x}$ de dimension minimale est nécessairement fermée.

(iv) Faisant agir G par multiplication à gauche sur lui-même, nous voyons que G est lisse. S'il est connexe, alors il est irréductible, et ainsi $G \cdot x$, image de G par le morphisme $g \mapsto g \cdot x$, est également irréductible. L'adhérence $\overline{G \cdot x}$ est alors irréductible elle aussi. □

4.2.2 Corollaire. *Soit $\varphi : G \to H$ un homomorphisme de groupes algébriques affines. Alors* $\ker \varphi$ *et* $\operatorname{im} \varphi$ *sont des sous-groupes fermés de G et H, respectivement, et* $\dim G = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi$.

Preuve. On fait agir G sur H par $g \cdot h = \varphi(g)h$. Cetta action est algébrique et les orbites sont les classes à droite $(\operatorname{im} \varphi)h$, pour $h \in H$. L'une de ces orbites est fermée, d'après la proposition 4.2.1 (iii). Comme ces orbites sont permutées par l'action à droite de H sur lui-même, toutes ces orbites sont fermées. C'est en particulier le cas de $\operatorname{im} \varphi$. L'égalité de dimension découle de la proposition 4.2.1 (ii). □

Une excellente référence pour les résultats présentés ici, et aller beaucoup beaucoup plus loin, est *Geometrische Methoden in der Invariantentheorie* de H. Kraft, publié chez Vieweg en 1984.

4.3 Variétés de représentations de carquois

Ici, je vais suivre les notes de cours de M. Brion, *Representations of quivers*, disponibles sur la page web de l'auteur.

On se donne un carquois $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ pouvant avoir des boucles et des cycles orientés, et un corps k algébriquement clos. Une représentation X de Q sur k de vecteur-dimension $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ est la donnée, pour chaque $i \in Q_0$, d'un k-espace vectoriel X_i de dimension n_i, et pour chaque $a \in Q_1$, d'une application k-linéaire $X_a : X_{s(a)} \to X_{t(a)}$. Le choix de bases permet d'identifier X_i à k^{n_i} et X_a à une matrice de taille $n_{t(a)} \times n_{s(a)}$.

Définition. L'espace de représentation de Q en dimension $\mathbf{n}$ est

$$\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n}) = \bigoplus_{a \in Q_1} \mathbf{Mat}_{n_{t(a)} \times n_{s(a)}}(k),$$

où $\mathbf{Mat}_{m \times n}(k)$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans k. L'espace $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$ est muni d'une action du groupe $G(\mathbf{n}) = \prod_{i \in Q_0} \mathbf{GL}_{n_i}(k)$: le résultat de l'action de $(g_i)_{i \in I}$ sur $(X_a)_{a \in Q_1}$ est $\left(g_{t(a)} X_a g_{s(a)}^{-1}\right)_{a \in Q_1}$.

Chaque point $(X_a) \in \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$ définit une structure de kQ-module sur l'espace vectoriel $\bigoplus_{i \in Q_0} k^{n_i}$. Ceci induit une bijection de l'ensemble des $G(\mathbf{n})$-orbites dans $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations de Q en vecteur-dimension $\mathbf{n}$. Le groupe d'automorphismes du kQ-module défini par un point $x = (X_a)$ de $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$ s'identifie au stabilisateur $G(\mathbf{n})_x$ de ce point.

4.3.1 Proposition. *Soit $X = (X_i, X_a)$ et $Y = (Y_i, Y_a)$ deux représentations de Q.*

(i) Il y a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kQ}(X,Y) \to \prod_{i\in Q_0} \mathrm{Hom}_k(X_i,Y_i) \xrightarrow{\varphi} \prod_{a\in Q_1} \mathrm{Hom}_k(X_{s(a)},Y_{t(a)}) \to \mathrm{Ext}^1_{kQ}(X,Y) \to 0$$

où $\varphi\big((u_i)_{i\in Q_0}\big) = \big(u_{t(a)}X_a - Y_a u_{s(a)}\big)_{a\in Q_1}$.

(ii) On a

$$\dim \mathrm{Hom}_{kQ}(X,Y) - \dim \mathrm{Ext}^1_{kQ}(X,Y) = \sum_{i\in Q_0} x_i y_i - \sum_{a\in Q_1} x_{s(a)} y_{t(a)}$$

où (x_i) et (y_i) sont les vecteurs-dimensions de X et Y, respectivement.

Preuve. Pour (i), on part de la résolution standard de X :

$$0 \to \bigoplus_{a\in Q_1} (kQ)e_{t(a)} \otimes_k e_{s(a)}X \xrightarrow{f} \bigoplus_{i\in Q_0} (kQ)e_i \otimes_k e_i X \to X \to 0$$

et on écrit la suite exacte longue obtenue après application du foncteur $\mathrm{Hom}_{kQ}(-,Y)$ en utilisant les identifications $X_i = e_i X$ et $Y_i = e_i Y = \mathrm{Hom}_{kQ}((kQ)e_i, Y)$. L'écriture explicite de φ provient de ce que

$$f\left(\sum_{a\in Q_1} b_a \otimes x_a\right) = \sum_{a\in Q_1} \underbrace{ba\otimes x}_{\in (kQ)e_{s(a)}\otimes e_{s(a)}X} - \underbrace{b\otimes ax}_{\in (kQ)e_{t(a)}\otimes e_{t(a)}X}.$$

L'énoncé (ii) se déduit de (i) et du théorème du rang. □

Notons $\mathfrak{g}(\mathbf{n}) = \prod_{i\in Q_0} \mathbf{Mat}_{n_i}(k)$ l'algèbre de Lie du groupe $G(\mathbf{n})$, c'est-à-dire l'espace tangent à $G(\mathbf{n})$ au point 1. Le résultat suivant est un cas particulier d'un résultat appelé « lemme de Voigt ».

4.3.2 Théorème. *Soit $x = (X_a)$ un point de* $\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{n})$*, vu comme un kQ-module X.*

(i) Il y a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{End}_{kQ}(X) \to \mathfrak{g}(\mathbf{n}) \xrightarrow{\varphi_x} \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{n}) \to \mathrm{Ext}^1_{kQ}(X,X) \to 0$$

où $\varphi_x\big((u_i)_{i\in Q_0}\big) = \big(u_{t(a)}X_a - X_a u_{s(a)}\big)_{a\in Q_1}$.

(ii) L'application φ_x s'identifie à la différentielle en l'identité de l'application $g \mapsto g\cdot x$ de $G(\mathbf{n})$ dans $\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{n})$*.*

(iii) L'image de φ_x s'identifie à l'espace tangent de Zariski $T_x\big(G(\mathbf{n})\cdot x\big)$, vu comme sous-espace de $T_x \mathrm{Rep}(Q,\mathbf{n})$, identifié à $\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{n})$*.*

(iv) L'orbite $G(\mathbf{n})\cdot x$ est ouverte dans $\mathrm{Rep}(Q,\mathbf{n})$ *si et seulement si* $\mathrm{Ext}^1_{kQ}(X,X) = 0$*.*

Preuve. L'énoncé (i) s'obtient en prenant $Y = X$ dans la proposition précédente, et (ii) est un bête calcul de différentielle.

(iii) La différentielle envoie l'espace tangent dans l'espace tangent, donc $\operatorname{im} \varphi_x \subset T_x\big(G(\mathbf{n}) \cdot x\big)$. Comme l'orbite est lisse,

$$\begin{aligned}\dim T_x\big(G(\mathbf{n}) \cdot x\big) = \dim G(\mathbf{n}) \cdot x &= \dim G(\mathbf{n}) - \dim G(\mathbf{n})_x \\ &= \dim \mathfrak{g}(\mathbf{n}) - \dim \operatorname{End}_{kQ}(X) = \dim \operatorname{im} \varphi_x,\end{aligned}$$

et donc l'inclusion est une égalité.

(iv) Si $\operatorname{Ext}^1_{kQ}(X, X) = 0$, alors φ_x est surjective, donc $T_x\big(G(\mathbf{n}) \cdot x\big) = \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$, donc $\dim G(\mathbf{n}) \cdot x = \dim \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$, et en fin de compte $\overline{G(\mathbf{n}) \cdot x} = \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$. L'orbite $G(\mathbf{n}) \cdot x$ étant localement fermée, elle est ouverte dans $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$. La réciproque utilise les mêmes ingrédients, en plus simple. □

4.4 Complément : orbites fermées et fonctions polynomiales invariantes

Étant donnés une algèbre A sur un corps k et un A-module M, on note $a \mapsto a_M$ l'application $A \to \operatorname{End}_k(M)$ définissant la structure de A-module sur M.

4.4.1 Proposition. *On suppose k de caractéristique 0. Soit A une k-algèbre, soit M et N deux A-modules complètement réductibles de dimension finie sur k. Pour que M et N soient isomorphes, il faut et il suffit que $\operatorname{tr}(a_M) = \operatorname{tr}(a_N)$ pour tout $a \in A$.*

Preuve. Soit I l'idéal annulateur dans A du module $M \oplus N$ et soit $B = A/I$. Alors $L = M \oplus N$ est un B-module complètement réductible fidèle, c'est-à-dire que l'application $B \to \operatorname{End}_k(L)$ est injective. Si $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ est une base du k-espace vectoriel L, alors $\big(B \to L^p, b \mapsto (b\ell_1, \ldots, b\ell_p)\big)$ est un homomorphisme injectif de B-modules, donc le B-module à gauche régulier est complètement réductible puisque sous-module du B-module complètement réductible L^p. Par conséquent, B est une algèbre semi-simple de dimension finie, isomorphe à un produit $\mathbf{Mat}_{q_1}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathbf{Mat}_{q_r}(\Delta_r)$, où Δ_1, ..., Δ_r sont des k-algèbres à division de dimension finie. Soit $S_1 = \Delta_1^{q_1}$, ..., $S_r = \Delta_r^{q_r}$ les B-modules simples, et écrivons $M \cong S_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus S_r^{\oplus m_r}$, $N \cong S_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus S_r^{\oplus n_r}$. Supposons que $\operatorname{tr}(a_M) = \operatorname{tr}(a_N)$ pour chaque $a \in A$. Alors $\operatorname{tr}(b_M) = \operatorname{tr}(b_N)$ pour chaque $b \in B$. Prenant b correspondant à la matrice identité du s-ème facteur dans l'isomorphisme $B \cong \mathbf{Mat}_{q_1}(\Delta_1) \times \cdots \times \mathbf{Mat}_{q_r}(\Delta_r)$, cela donne $m_s q_s(\Delta_s : k) = n_s q_s(\Delta_s : k)$ (égalité dans k), et donc $m_s = n_s$ puisque k est de caractéristique 0. Ceci étant vrai pour chaque $s \in \{1, \ldots, r\}$, on en déduit $M \cong N$. L'autre sens est évident. □

On considère un carquois Q et un corps k algébriquement clos. Étant donné un kQ-module X, de vecteur-dimension $\mathbf{n}$, on note $\mathcal{O}_X$ la $G(\mathbf{n})$-orbite des points de $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$ définissant des kQ-modules isomorphes à X.

4.4.2 Proposition. *Soit* $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ *une suite exacte courte de* kQ*-modules, soit* $\mathbf{n}$ *le vecteur-dimension de* X*. Alors* $\mathcal{O}_{X'\oplus X''} \subset \overline{\mathcal{O}_X}$*. Si la suite n'est pas scindée, alors* $\mathcal{O}_{X'\oplus X''} \neq \mathcal{O}_X$*.*

Preuve. Soit $\mathbf{n}'$ le vecteur-dimension de X'. On regarde chaque X'_i comme un sous-espace vectoriel de X_i. Prenons des bases dans chaque X'_i et complétons-les en des bases des X_i. Chaque X_a, pour $a \in Q_1$, s'écrit alors comme une matrice de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} X'_a & Y_a \\ \hline 0 & X''_a \end{array}\right).$$

Soit $x \in \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$ la collection de ces matrices et pour $t \in k^\times$ soit $g(t) \in G(\mathbf{n})$ défini par

$$g(t)_i = \left(\begin{array}{c|c} t\,\mathrm{id}_{n'_i} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{id}_{n''_i} \end{array}\right).$$

L'action de $g(t)$ sur x revient alors à multiplier les matrices Y_a par t. L'application $t \mapsto g(t) \cdot x$, définie sur $k^\times$, se prolonge donc en $t = 0$, définissant un morphisme de variétés $\mathbb{A}^1 \to \operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$. Pour $t \neq 0$, l'élément $g(t) \cdot x$ appartient à $\mathcal{O}_X$; la limite pour $t \to 0$ appartient donc à l'adhérence de cette orbite. Ainsi $\mathcal{O}_{X'\oplus X''} \subset \overline{\mathcal{O}_X}$. Dans ces conditions, si $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{X'\oplus X''}$, c'est-à-dire si $X \cong X' \oplus X''$, alors la suite

$$0 \to \operatorname{Hom}_{kQ}(X'', X') \to \operatorname{Hom}_{kQ}(X'', X) \to \operatorname{Hom}_{kQ}(X'', X'') \to 0$$

est non seulement exacte à gauche, mais aussi à droite pour des raisons de dimension, et donc $\mathrm{id}_{X''}$ se factorise à travers $X \to X''$; autrement dit la suite exacte $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ est scindée. □

Soit X un kQ-module. Choisissant une série de composition $0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_\ell = X$, on peut former le kQ-module $X^{\mathrm{ss}} = \bigoplus_{i=1}^{\ell} X_i/X_{i-1}$, appelé le « semi-simplifié » de X. C'est l'unique (à isomorphisme près) kQ-module complètement réductible ayant même classe que X dans le groupe de Grothendieck $G_0(kQ)$. La proposition 4.4.2 implique : $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{ss}}} \subset \overline{\mathcal{O}_X}$.

4.4.3 Théorème. *On suppose le corps* k *algébriquement clos de caractéristique* 0*. Soit* X *un* kQ*-module de vecteur-dimension* $\mathbf{n}$*.*

(i) L'orbite $\mathcal{O}_X$ *est fermée dans* $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$ *si et seulement si* X *est complètement réductible.*

(ii) L'orbite $\overline{\mathcal{O}_X}$ *contient une unique fermée, à savoir* $\mathcal{O}_{X^{ss}}$*.*

Preuve. (i) Si X n'est pas complètement réductible, alors il existe une suite exacte $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ non scindée. D'après la proposition 4.4.2, $\mathcal{O}_{X'\oplus X''} \subset \overline{\mathcal{O}_X} \setminus \mathcal{O}_X$, et en particulier $\mathcal{O}_X$ n'est pas fermée. Pour la réciproque, supposons que X est complètement réductible, mais que $\mathcal{O}_X$ n'est pas fermée. Soit donc $\mathcal{O}_Y \subset \overline{\mathcal{O}_X} \setminus \mathcal{O}_X$ et soit $\mathcal{O}_Z \subset \overline{\mathcal{O}_Y}$ une orbite fermée. Alors X et Z sont complètement réductibles et $\mathcal{O}_Z \subset \overline{\mathcal{O}_X}$. Si $a \in kQ$, alors l'application $M \mapsto \operatorname{tr}(a_M)$ définit une application polynomiale $G(\mathbf{n})$-invariante sur $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$; cette application est constante sur $\mathcal{O}_X$, donc sur $\overline{\mathcal{O}_X}$, donc $\operatorname{tr}(a_X) = \operatorname{tr}(a_Z)$. Ceci étant valable pour tout $a \in kQ$, on obtient $X \cong Z$ par la proposition 4.4.1, ce qui contredit $\mathcal{O}_Z \subset \overline{\mathcal{O}_X} \setminus \mathcal{O}_X$. Bref $\mathcal{O}_X$ ne peut qu'être fermée si X est complètement réductible.

(ii) Si $\mathcal{O}_Y$ et $\mathcal{O}_Z$ sont deux orbites fermées incluses dans $\overline{\mathcal{O}_X}$, alors Y et Z sont deux modules complètement réductibles. De plus, pour chaque $a \in kQ$, on a $\operatorname{tr}(a_Y) = \operatorname{tr}(a_X) = \operatorname{tr}(a_Z)$ par l'argument utilisé dans (i). La proposition 4.4.1 donne alors $Y \cong Z$, d'où $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Z$. □

Remarque. En remplaçant les traces par des déterminants, on peut en fait se dispenser de l'hypothèse que k est de caractéristique nulle.

Pour conclure ce paragraphe, nous mentionnons sans preuve le théorème suivant, dû à Le Bruyn et Procesi :

4.4.4 Théorème. *On suppose que k est algébriquement clos de caractéristique 0. Alors l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$ invariantes sous $G(\mathbf{n})$ est engendrée par les fonctions $M \mapsto \operatorname{tr}(a_M)$, pour $a \in kQ$ cycle orienté de Q.*

Exemple. Supposons Q acyclique. En vecteur-dimension $\mathbf{d}$, il n'y a qu'un seul kQ-module complètement réductible à isomorphisme près, à savoir $S_1^{\oplus d_1} \oplus \cdots \oplus S_n^{\oplus d_n}$. Il n'y a donc qu'une seule orbite fermée dans $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{d})$, à savoir le point $\{0\}$. Ce point appartient donc à l'adhérence de chaque orbite. Enfin, les fonctions polynomiales sur $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{d})$ invariante sous le groupe $G(\mathbf{d})$ sont constantes.

4.5 L'argument de Tits

4.5.1 Théorème. *Soit Q un carquois connexe, Si kQ n'a qu'un nombre fini de modules indécomposables (à isomorphisme près), alors le graphe non-orienté Γ sous-jacent à Q est Dynkin.*

Preuve. Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{Q_0}$ un vecteur-dimension non-nul. D'après le théorème de Krull–Schmidt, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de kQ-modules en vecteur-dimension $\mathbf{n}$. Autrement dit, $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$ ne contient qu'un nombre fini de $G(\mathbf{n})$-orbites, disons $\mathcal{O}_1$, ..., $\mathcal{O}_p$. Certainement, $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n}) = \overline{\mathcal{O}_1} \cup \cdots \cup \overline{\mathcal{O}_p}$, et comme $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$ est une variété irréductible (c'est l'espace affine), il existe j tel que $\mathcal{O}_j$ soit dense dans $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$. Comme l'orbite $\mathcal{O}_j$ est localement fermée, elle est donc ouverte dans $\operatorname{Rep}(Q, \mathbf{n})$. Soit X un kQ-module de la classe d'isomorphisme représentée par cette orbite. D'après le théorème 4.3.2, on a $\operatorname{Ext}^1_{kQ}(X, X) = 0$, et donc en utilisant la proposition 4.3.1

$$1 \leq \dim \operatorname{End}_{kQ}(X) - \dim \operatorname{Ext}^1_{kQ}(X, X) = \sum_{i \in Q_0} n_i^2 - \sum_{a \in Q_1} n_{s(a)} n_{t(a)} = q(\mathbf{n}),$$

où q est la forme quadratique associée au graphe Γ (voir le paragraphe 4.1). Ainsi q prend des valeurs strictement positives en tout point $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{Q_0} \setminus \{0\}$. Le théorème de classification 4.1.2 dit alors que Γ est Dynkin. □

4.6 Foncteurs de réflexion

Soit $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carquois et k un corps.

Définition. Un sommet $i \in Q_0$ est appelé puits s'il n'y a pas d'arête partant de i : pour chaque $a \in Q_1$, on a $s(a) \neq i$.

Soit i un puits de Q. Notons Q^* le carquois Q privé du sommet i et des flèches incidentes à i. Un kQ-module est la donnée d'une représentation de Q^* sur un k-espace vectoriel $X^* = \bigoplus_{j \in Q_0 \setminus \{i\}} X_j$, d'un k-espace vectoriel X_i, et d'une application k-linéaire $g_X : \widetilde{X} \to X_i$, où $\widetilde{X} = \bigoplus_{\substack{a \in Q_1 \\ t(a)=i}} X_{s(a)}$.

4.6.1 Proposition. *On suppose que i est un puits de Q.*

(i) Le kQ-module simple S_i est projectif.

(ii) Soit X un kQ-module, représenté selon les conventions ci-dessus. Alors

$$\operatorname{Hom}_{kQ}(X, S_i) = 0 \;\Leftrightarrow\; g_X \text{ est surjectif} \;\Leftrightarrow\; S_i \text{ n'est pas facteur direct de } X.$$

Preuve. (i) Le module projectif $P_i = (kQ)e_i$ est l'idéal à gauche de kQ linéairement engendré par tous les chemins issus du sommet i (voir le cours de F. Chapoton). Il n'y a ici qu'un seul tel chemin, à savoir le chemin paresseux. Par conséquent, $S_i = P_i$ est projectif.

(ii) Supposons d'abord que g_X ne soit pas surjectif. Soit $H \subset X_i$ un hyperplan contenant l'image de g_X. Alors la donnée $(\widetilde{X}, H, g_X)$ définit un sous-kQ-module Y de X, et le quotient X/Y est isomorphe à S_i. Il existe alors un homomorphisme non-nul de X sur S_i.

Supposons maintenant que S_i soit facteur direct de X, c'est-à-dire qu'on puisse écrire $X = Y \oplus S_i$. Alors $\widetilde{X} = \widetilde{Y} \oplus 0$ et g_X s'écrit par blocs $\left(\begin{smallmatrix} g_Y \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Ainsi g_X ne peut pas être surjective.

Supposons enfin $\operatorname{Hom}_{kQ}(X, S_i) \neq 0$. Alors il existe une suite exacte courte de la forme $0 \to Y \to X \to S_i \to 0$. Comme S_i est projectif, cette suite est scindée, et donc S_i est un facteur direct de X. $\square$

Définition. Un sommet $i \in Q_0$ est appelé source s'il n'y a pas d'arête arrivant à i : pour chaque $a \in Q_1$, on a $t(a) \neq i$.

Soit i une source de Q. Notons Q^* le carquois Q privé du sommet i et des flèches incidentes à i. Un kQ-module est la donnée d'une représentation de Q^* sur un k-espace vectoriel $X^* = \bigoplus_{j \in Q_0 \setminus \{i\}} X_j$, d'un k-espace vectoriel X_i, et d'une application k-linéaire $f_X : X_i \to \widetilde{X}$, où $\widetilde{X} = \bigoplus_{\substack{a \in Q_1 \\ s(a)=i}} X_{t(a)}$.

4.6.2 Proposition. *On suppose que i est une source de Q.*

(i) Le kQ-module simple S_i est injectif.

(ii) Soit X un kQ-module, représenté selon les conventions ci-dessus. Alors

$$\mathrm{Hom}_{kQ}(S_i, X) = 0 \;\Leftrightarrow\; f_X \textit{ est injectif} \;\Leftrightarrow\; S_i \textit{ n'est pas facteur direct de } X.$$

La preuve est laissée en exercice.

Notre objectif à présent est de relier, dans le cas où i est un puits, l'étude des représentations de Q à celle des représentations du carquois $\sigma_i Q$ obtenu en renversant dans Q l'orientation des flèches arrivant en i. Bien évidemment, i est une source de $\sigma_i Q$.

Supposons donc que i est un puits de Q. À une représentation Y de Q donnée par (Y^*, Y_i, g_Y), on associe une représentation X de $\sigma_i Q$ donnée par (X^*, X_i, f_X) où $X^* = Y^*$ (et par conséquent $\widetilde{X} = \widetilde{Y}$), $X_i = \ker g_Y$, et $f_X : X_i \to \widetilde{X}$ est l'inclusion $\ker g_Y \hookrightarrow \widetilde{Y}$. Inversement, à une représentation X de $\sigma_i Q$ donnée par (X^*, X_i, f_X), on associe une représentation Y de Q donnée par $(\widetilde{Y}, Y_i, g_Y)$ où $Y^* = X^*$ (et par conséquent $\widetilde{Y} = \widetilde{X}$), $Y_i = \operatorname{coker} f_X$, et $g_Y : \widetilde{Y} \to Y_i$ est la surjection $\widetilde{X} \twoheadrightarrow \operatorname{coker} f_X$.

4.6.3 Théorème. *On adopte les notations de l'alinéa précédent.*

(i) La correspondance $Y \rightsquigarrow X$ définit un foncteur $\Sigma_i : kQ$-mod $\to k(\sigma_i Q)$-mod.
La correspondance $X \rightsquigarrow Y$ définit un foncteur $\Sigma_i^* : k(\sigma_i Q)$-mod $\to kQ$-mod.

(ii) (Σ_i^*, Σ_i) est un paire de foncteurs adjoints.

(iii) Ces foncteurs définissent une équivalence de catégories

$$\left\{\begin{array}{c} kQ\textit{-modules } Y \textit{ tels} \\ \textit{que } \mathrm{Hom}_{kQ}(Y, S_i) = 0 \end{array}\right\} \underset{\Sigma_i^*}{\overset{\Sigma_i}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{c} k(\sigma_i Q)\textit{-modules } X \textit{ tels} \\ \textit{que } \mathrm{Hom}_{k(\sigma_i Q)}(S_i, X) = 0 \end{array}\right\}.$$

Cette équivalence de catégories préserve les suites exactes courtes.

(iv) Si $\mathrm{Hom}_{kQ}(Y, S_i) = 0$, alors $\underline{\dim}\, \Sigma_i Y = s_i(\underline{\dim}\, Y)$, où s_i est la réflexion orthogonale définie dans la section 4.1.

Preuve. (i) Un homomorphisme $Y \to Y'$ est la donnée d'un homomorphisme $Y^* \to Y'^*$ de kQ^*-modules et d'une application linéaire $Y_i \to Y'_i$ faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Y} \arrow[r, "g_Y"] \arrow[d] & Y_i \arrow[d] \\ \widetilde{Y'} \arrow[r, "g_{Y'}"'] & Y'_i \end{tikzcd}$$

Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \ker g_Y \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Y} \arrow[d] \\ \ker g_{Y'} \arrow[r] & \widetilde{Y'} \end{tikzcd}$$

définit alors un homomorphisme $\Sigma_i Y \to \Sigma_i Y'$. Un raisonnement analogue montre la fonctorialité de Σ_i^*.

(ii) En utilisant les propriétés universelles du noyau et du conoyau, on constate que si X est un $k(\sigma_i)$-module et Y un kQ-module, alors

$$\mathrm{Hom}_{kQ}(\Sigma_i^* X, Y) = \{u^* \in \mathrm{Hom}_{kQ^*}(X^*, Y^*) \mid g_Y\, \widetilde{u}\, f_X = 0\} = \mathrm{Hom}_{k(\sigma_i Q)}(X, \Sigma_i Y),$$

où $\widetilde{u} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ est l'application linéaire déduite de $u^* : X^* \to Y^*$.

(iii) Cet énoncé à première vue spectaculaire est en fait une simple vérification. Par exemple, si l'on part d'un Y tel que $\mathrm{Hom}_{kQ}(Y, S_i) = 0$, alors g_Y est surjectif, donc coïncide avec son image, qui est le conoyau de son noyau : ainsi $Y \cong \Sigma_i^* \Sigma_i Y$. On vérifie l'autre sens de façon analogue. La préservation des suites exactes courtes se prouve soit à la main, soit en utiisant le lemme du serpent.

(iv) L'égalité est une conséquence directe du théorème du rang. $\square$

La construction des foncteurs Σ_i et Σ_i^* est due à Bernstein, Gelfand et Ponomoraev.

Définition. Soit A une algèbre sur un corps k. Un A-module X tel que $\mathrm{End}_A(X) = k$ est appelé brique. Un A-module X est dit rigide si $\mathrm{Ext}^1_A(X, X) = 0$.

On remarque qu'une brique est indécomposable, car son anneau d'endomorphismes ne contient pas d'idempotent non-trivial.

4.6.4 Proposition. *On suppose que i est un puits de Q. Alors les foncteurs de réflexion réalisent des bijections*

$$\left\{\begin{matrix}\textit{classes d'isomorph. de } kQ\textit{-modules} \\ \textit{indécomposables autres que } S_i\end{matrix}\right\} \underset{\Sigma_i^*}{\overset{\Sigma_i}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\textit{classes d'isomorph. de } k(\sigma_i Q)\textit{-modules} \\ \textit{indécomposables autres que } S_i\end{matrix}\right\}.$$

Ils préservent les briques et les modules rigides.

4.7 Le théorème de Gabriel

4.7.1 Théorème (Gabriel). *Soit Q un carquois obtenu en orientant un graphe de Dynkin. Alors Q admet un nombre fini de représentations indécomposables à isomorphisme près. Les vecteurs-dimensions des représentations indécomposables sont les racines réelles positives, et pour chaque racine réelle positive β, il y a une seule représentation indécomposable ayant β pour vecteur-dimension. Enfin, les représentations indécomposables sont des briques rigides.*

Preuve. On énumère les sommets de Q par l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ de façon que $t(a) > s(a)$ pour toute flèche $a \in Q_1$. (Cela est possible car le carquois ne contient pas de cycle orienté.) Alors n est un puits de Q, $n-1$ est un puits de $\sigma_n Q$, $n-2$ est un puits de $\sigma_{n-1}\sigma_n Q$, etc., et bien sûr $Q = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n Q$ (chaque flèche a été retournée deux fois, donc le carquois est revenu à l'orientation initiale). À une représentation X de Q, on peut ainsi légitimement appliquer le foncteur Σ_n, puis le foncteur Σ_{n-1}, puis Σ_{n-2}, etc., jusqu'à Σ_1, puis à nouveau Σ_n, Σ_{n-1}, Σ_{n-2}, etc.

Partant d'une représentation indécomposable X, ce petit jeu se poursuit, en donnant à chaque étape une représentation indécomposable, tant qu'on ne cherche pas à appliquer Σ_i à S_i. Mais d'un autre côté, ce petit jeu doit s'arrêter, car à chaque cycle complet $\Sigma_1 \cdots \Sigma_n$, le vecteur-dimension subit la transformation de Coxeter, et la proposition 4.1.4 lui interdit de rester éternellement positif. Bref, à un moment, on est tombé sur S_i, et donc X s'obtient en appliquant à S_i la suite des foncteurs Σ_j^* dans l'ordre inverse. Cela donne toutes les informations voulues sur X, étant observé que S_i est une brique rigide.

Pour conclure la preuve, il faut encore montrer l'existence d'un module indécomposable de vecteur-dimension β pour chaque racine réelle positive β. Le raisonnement est analogue : on applique les réflexions s_n, s_{n-1}, ..., s_1, s_n, s_{n-1}, ... jusqu'à ne plus être positif. À ce point, on a appliqué S_i à une racine α avec $\alpha \geq 0$ mais $s_i(\alpha) \leq 0$. Comme s_i ne change que la i-ème coordonnée, cela n'est possible que si α est proportionnelle à $\mathbf{e}_i$, et donc $\alpha = \mathbf{e}_i$. On peut alors remonter et conclure comme précédemment que le kQ-module indécomposable cherché est l'image de S_i par un produit $\Sigma_n^* \Sigma_{n-1}^* \cdots \Sigma_{i+1}^*$ de foncteurs de réflexion. □

Remarques.

(1) Le théorème de Gabriel a été généralisé par Kac (la preuve complète a été rédigée par Kraft et Riedtmann) au cas des carquois acycliques. Dans ce cadre, il y a encore un unique module indécomposable de vecteur-dimension β pour chaque racine réelle positive β, et ce module est une brique rigide. Mais il y a d'autres kQ-modules indécomposables en d'autres vecteurs-dimensions, appelés racines imaginaires. Les modules en question ne sont plus uniquement déterminés par leurs vecteurs-dimensions et ne sont plus rigides. Kac donne une description de l'ensemble des racines imaginaires, en termes de l'action du groupe W sur un « domaine fondamental ». Ces racines imaginaires se retrouvent dans les algèbres de Kac–Moody, qui sont des généralisations en dimension infinie des algèbres de Lie semi-simples complexes.

La preuve du théorème de Kac repose encore sur les foncteurs de réflexion, mais il faut de plus être capable de retourner l'orientation des arêtes indépendamment de l'utilisation de ces foncteurs. Cela se fait à l'aide d'une transformation de Fourier. En outre, on utilise des arguments de comptage qui nécessitent d'étudier la situation sur les corps finis $\mathbb{F}_q$ et leurs clôtures algébriques.

(2) Le cas Dynkin est connu avec bien plus de détail que le seul énoncé du théorème de Gabriel laisse croire. Les foncteurs de réflexion permettent de construire les représentations indécomposables les unes à la suite des autres, de sorte qu'on peut les énumérer : M_1, M_2, ..., M_n. On a alors :

$$\mathrm{Hom}_{kQ}(M_i, M_j) \neq 0 \Rightarrow i \leq j \quad \text{et} \quad \mathrm{Ext}^1_{kQ}(M_i, M_j) \neq 0 \Rightarrow i > j.$$

5 Théorie d'Auslander–Reiten

5.1 Radical de la catégorie des modules

Le théorème de Krull–Schmidt ramène l'étude des modules de longueur finie à celle des modules indécomposables. La théorie d'Auslander–Reiten montre que l'ensemble des ces derniers possède une structure ; il peut en fait être vu comme l'ensemble des sommets d'un carquois valué muni d'une translation. Un outil pour comprendre cela est la notion de radical de la catégorie des modules. Dans cette section, A est un anneau quelconque.

5.1.1 Lemme. *Soient M et N deux A-modules et $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$. Les deux énoncés suivants sont équivalents :*

(a) Pour tout $g \in \mathrm{Hom}_A(N,M)$, l'endomorphisme $\mathrm{id}_M - g \circ f$ de M est inversible.

(b) Pour tout $g \in \mathrm{Hom}_A(N,M)$, l'endomorphisme $\mathrm{id}_N - f \circ g$ de N est inversible.

Preuve. Supposons que f vérifie (a). Soit $g \in \mathrm{Hom}_A(N,M)$. Comme $\mathrm{id}_M - g \circ f$ est inversible, il existe $k \in \mathrm{End}_A(M)$ tel que

$$k \circ (\mathrm{id}_M - g \circ f) = (\mathrm{id}_M - g \circ f) \circ k = \mathrm{id}_M.$$

Alors

$$(\mathrm{id}_N + f \circ k \circ g) \circ (\mathrm{id}_N - f \circ g) = \mathrm{id}_N - f \circ (\mathrm{id}_M - k + k \circ g \circ f) \circ g = \mathrm{id}_N$$

et de même $(\mathrm{id}_N - f \circ g) \circ (\mathrm{id}_N + f \circ k \circ g) = \mathrm{id}_N$, ce qui prouve que $\mathrm{id}_N - f \circ g$ est inversible. Ainsi f vérifie (b). On démontre de façon semblable l'implication réciproque. □

Notation. Pour M et N deux A-modules, on désigne par $R(M,N)$ le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ formé des homomorphismes f vérifiant les deux énoncés du lemme.

5.1.2 Proposition. *Soit L, M, N des A-modules.*

(i) $R(M,N)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$.

(ii) Pour tout $f \in R(M,N)$ et tout $g \in \mathrm{Hom}_A(L,M)$, $f \circ g \in R(L,N)$.

(iii) Pour tout $f \in R(M,N)$ et tout $g \in \mathrm{Hom}_A(N,L)$, $g \circ f \in R(M,L)$.

Preuve. Soit $f \in R(M,N)$ et $g \in \mathrm{Hom}_A(L,M)$. Pour $h \in \mathrm{Hom}_A(N,L)$, on peut considérer $g \circ h \in \mathrm{Hom}_A(N,M)$, et alors $\mathrm{id}_N - f \circ (g \circ h)$ est inversible dans $\mathrm{End}_A(N)$ par l'énoncé (b) du lemme. Après reparenthésage $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, nous obtenons la définition de $f \circ g \in R(L,N)$. Ainsi (ii) est vrai. On prouve (iii) de façon analogue.

Soit maintenant f et g dans $R(M,N)$. Prenons $h \in \mathrm{Hom}_A(N,M)$: alors $\mathrm{id}_M - h \circ f$ est inversible, d'où $k \in \mathrm{End}_A(M)$ tel que

$$k \circ (\mathrm{id}_M - h \circ f) = (\mathrm{id}_M - h \circ f) \circ k = \mathrm{id}_M.$$

Également, $\mathrm{id}_M - (k \circ h) \circ g$ est inversible, d'où $l \in \mathrm{End}_A(M)$ tel que

$$l \circ (\mathrm{id}_M - k \circ h \circ g) = (\mathrm{id}_M - k \circ h \circ g) \circ l = \mathrm{id}_M.$$

On calcule alors

$$(l \circ k) \circ (\mathrm{id}_M - h \circ (f+g)) = l \circ (\mathrm{id}_M - k \circ h \circ g) = \mathrm{id}_M$$

et

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_M - h \circ (f+g)) \circ (l \circ k) &= (\mathrm{id}_M - h \circ f) \circ (\mathrm{id}_M - k \circ h \circ g) \circ (l \circ k) \\ &= (\mathrm{id}_M - h \circ f) \circ k \\ &= \mathrm{id}_M\end{aligned}$$

et on constate que $\mathrm{id}_M - h \circ (f+g)$ est inversible. Ceci étant vrai pour tout $h \in \mathrm{Hom}_A(N, M)$, nous obtenons $f + g \in R(M, N)$. Ainsi $R(M, N)$ est stable par somme. De plus, il possède 0 et est stable par passage à l'opposé (composition par $-\mathrm{id}_M$). C'est donc bien un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_A(M, N)$. □

5.1.3 Corollaire. *Soient $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ et $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$ deux A-modules, décomposés en somme directe de sous-modules. Soit $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$. On peut voir f comme une matrice par blocs (f_{rs}) où $f_{rs} \in \mathrm{Hom}_A(M_s, N_r)$ pour $1 \leq r \leq n$ et $1 \leq s \leq m$. Alors f appartient à $R(M, N)$ si et seulement si chaque f_{rs} appartient à $R(M_s, N_r)$.*

Preuve. Pour chaque $s \in \{1, \ldots, m\}$, on note $i_s : M_s \to M$ l'inclusion et $p_s : M \to M_s$ la projection définissant la somme directe $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$. De même, pour chaque $r \in \{1, \ldots, n\}$, on note $j_r : N_r \to N$ l'inclusion et $q_r : N \to N_r$ la projection définissant la somme directe $N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$. On a alors les relations $f_{rs} = q_r \circ f \circ i_s$ et

$$f = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} j_r \circ f_{rs} \circ p_s.$$

L'équivalence désirée découle alors de la proposition 5.1.2. □

Définition. Les trois propriétés de la proposition 5.1.2 sont résumées en disant que $R(-,-)$ est un **idéal** de la catégorie A-mod. Nous pouvons alors définir la **catégorie quotient** A-mod$/R$: on conserve les mêmes objets que la catégorie A-mod mais on remplace les groupes d'homomorphismes habituels $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ par les quotients $\mathrm{Hom}_A(M, N)/R(M, N)$.

Les exemples suivants clarifient la suite de l'exposé. En particulier, si M et N sont de longueur finie, (4) et le corollaire 5.1.3 fournissent une description concrète de $R(M, N)$ une fois choisies des décompositions de Krull–Schmidt de M et N.

Exemples.

(1) Pour tout A-module M, on a $R(M,M) = J(\mathrm{End}_A(M))$.

(2) Si M est indécomposable de longueur finie et N quelconque, alors $R(M,N)$ est l'ensemble des homomorphismes qui ne sont pas des monomorphismes scindés.

(3) Si N est indécomposable de longueur finie et M quelconque, alors $R(M,N)$ est l'ensemble des homomorphismes qui ne sont pas des épimorphismes scindés.

(4) Si M et N sont tous deux indécomposables de longueur finie, alors $R(M,N)$ est l'ensemble des homomorphismes $M \to N$ qui ne sont pas des isomorphismes ; en particulier $R(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$ si M et N ne sont pas isomorphes.

Preuve. (1) s'obtient en rapprochant la définition de $R(M,M)$ de la proposition 2.1.2.

Justifions (2). Supposons que $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ soit un monomorphisme scindé. Alors il existe $g \in \mathrm{Hom}_A(N,M)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_M$, et $\mathrm{id}_M - g \circ f$ ne peut pas être inversible. Réciproquement, supposons que $f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$ ne soit pas un monomorphisme scindé. Alors pour tout $g \in \mathrm{Hom}_A(N,M)$, l'endomorphisme $g \circ f$ n'est pas un automorphisme de M, donc est dans le radical de l'anneau local $\mathrm{End}_A(M)$, et donc $1 - g \circ f$ est inversible. Ainsi $f \in R(M,N)$.

La preuve de (3) est analogue à la preuve de (2). Enfin, (4) peut se voir comme un cas particulier de (2) ou de (3). □

L'avantage de considérer la catégorie quotient A-mod$/R$ est qu'elle isole les indécomposables de longueur finie : on a $\mathrm{Hom}_A(X,Y)/R(X,Y) = 0$ si X et Y sont indécomposables non-isomorphes et $\mathrm{End}_A(X)/R(X,X)$ est un anneau à division si X est indécomposable (puisque $R(X,X)$ est le radical de Jacobson de l'anneau local $\mathrm{End}_A(X)$). On retrouve ainsi une situation analogue à celle décrite par le lemme de Schur pour les A-modules simples.

Plus précisément, soit M un A-module et X un A-module indécomposable, tous deux de longueur finie. Notons T_X l'anneau à division $\mathrm{End}_A(X)/R(X,X)$. Alors $\mathrm{Hom}_A(M,X)/R(M,X)$ est un T_X-espace vectoriel à gauche, $\mathrm{Hom}_A(X,M)/R(X,M)$ est un T_X-espace vectoriel à droite, et ces deux espaces vectoriels sont de dimension égale à la multiplicité avec laquelle X apparaît dans les décompositions de Krull–Schmidt de M.

Concluons cette section par une définition.

Définition. Le **carré de l'idéal** R est défini de la façon suivante : pour deux A-modules M et N, on note $R^2(M,N)$ le sous-groupe de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ formé des homomorphismes ayant une factorisation de la forme $g \circ f$ avec $f \in R(M,Q)$, $g \in R(Q,N)$, et Q un A-module.

Remarque. L'ensemble des éléments de la forme indiquée est bien un sous-groupe. Pour montrer par exemple la stabilité sous l'opération d'addition, on prend deux éléments de la forme proposée, disons $g_1 \circ f_1$ et $g_2 \circ f_2$, avec $f_i \in R(M,Q_i)$ et $g_i \in R(Q_i,N)$, on pose $Q = Q_1 \oplus Q_2$, on définit $f \in \mathrm{Hom}_A(M,Q)$ et $g \in \mathrm{Hom}_A(Q,N)$ par les matrices par blocs

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix},$$

on constate que $g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_2 = g \circ f$, et on utilise le corollaire 5.1.3 pour justifier que $f \in R(M, Q)$ et $g \in R(Q, N)$.

Exercice. Soit M un A-module indécomposable. Alors $R(M, M) = R^2(M, M)$. (Un endomorphisme $f : M \to M$ qui n'est pas un automorphisme se factorise en un produit $h \circ g$ avec $g \in R(M, \operatorname{im} f)$ et $h \in R(\operatorname{im} f, M)$.)

5.2 Exemples

À partir de maintenant, A sera une algèbre de dimension finie sur un corps k.

Observons l'analogie entre le passage de A-mod à A-mod$/R$ et le passage de A à $A/J(A)$. Dans les deux situations, on parvient à une situation plus simple (les $A/J(A)$-modules sont les A-modules complètement réductibles), mais au prix d'une perte d'information. L'étude de la section 3 montre qu'on peut retrouver l'algèbre A à partir des A-modules simples et d'autres informations encodées dans le carquois de Gabriel [5]. Précisément, les flèches du carquois de Gabriel décrivent les extensions entre les simples, et cette donnée est encodée dans le $A/J(A)$-bimodule $J(A)/J(A)^2$. On veut adapter cette technique aux modules indécomposables. L'idée apparemment un peu folle consiste donc à définir un carquois, appelé **carquois d'Auslander–Reiten**, qui a pour sommets les (classes d'isomorphisme de) A-modules indécomposables et dont les flèches indiquent les dimensions des espaces $R(X, Y)/R^2(X, Y)$ [6].

Notations.

(1) Si X est un A-module indécomposable, on note $T_X = \operatorname{End}_A(X)/R(X, X)$ le quotient de l'algèbre locale $\operatorname{End}_A(X)$ par son radical de Jacobson ; c'est un anneau à division.

(2) Pour deux A-modules indécomposables X, Y, on note $\operatorname{Irr}(X, Y) = R(X, Y)/R^2(X, Y)$. Cet espace est appelé l'espace des morphismes irréductibles de X dans Y ; c'est un T_Y-T_X-bimodule.

Examinons deux exemples.

5.2.1 Le carquois de Richard [7]

Ici A est l'algèbre des chemins du carquois $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[r, bend left, "b"] & 3 \arrow[l, bend left, "c"] \end{tikzcd}$ avec la relation $cb = 0$. On note que $I = (cb)$ est un idéal admissible de l'algèbre du carquois sans relation ; en particulier A est de dimension finie et son radical de Jacobson est engendré par les flèches ; il y a donc trois A-modules simples S_1, S_2, S_3, chaque S_i étant de dimension 1 concentré sur le sommet i.

5. Les hypothèses précises adoptées dans la section 3 étaient que A soit basique et k algébriquement clos, mais il est possible d'étendre le raisonnement à d'autres situations.

6. La convention est de décorer chaque flèche du carquois du couple (a, b), où a la dimension de $\operatorname{Irr}(X, Y)$ en tant que T_X-espace vectoriel à droite et b est la dimension de ce même espace en tant que T_Y-espace vectoriel à gauche. Si k est algébriquement clos, $T_X = T_Y = k$ et donc $a = b$.

7. Richard a suivi ce cours et a proposé cet exemple instructif lors d'une séance d'exercices.

Les couvertures projectives peuvent être représentées par les dessins suivants, où chaque chiffre désigne un vecteur de base dans l'espace d'indice correspondant :

$$P_1 \ : \ 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3, \qquad P_2 \ : \ 2 \xrightarrow{b} 3, \qquad P_3 \ : \ \begin{tikzcd} & 3 \arrow[dl, "c"'] \\ 2 \arrow[dr, "b"'] & \\ & 3 \end{tikzcd}$$

Les enveloppes injectives peuvent quant à elles être représentées ainsi :

$$I_1 = S_1, \qquad I_2 \ : \ 1 \xrightarrow{a} 2 \xleftarrow{c} 3, \qquad I_3 \ : \ \begin{tikzcd} & & 3 \arrow[dl, "c"'] \\ 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[dr, "b"'] & \\ & & 3 \end{tikzcd}$$

Il y a trois autres modules indécomposables :

$$M \ : \ 1 \xrightarrow{a} 2, \qquad N \ : \ 2 \xleftarrow{c} 3, \qquad Q \ : \ \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "a"] \arrow[dd, "a"'] & & 3 \arrow[dl, "c"'] \\ & 2 \arrow[dr, "b"] & \\ 2 & & 3 \end{tikzcd}$$

(Dans Q, la flèche a envoie le vecteur de base de l'espace 1 sur la somme des deux vecteurs de base de l'espace 2 indiqués sur la figure, qui engendrent l'un l'image de c, l'autre le noyau de b.)

Pour $X \in \{P_3, I_3, Q\}$, l'algèbre locale $\mathrm{End}_A(X)$ est de dimension 2 sur k. En revanche, toutes les algèbres à division $T_X = \mathrm{End}_A(X)/J(\mathrm{End}_A(X))$ de cet exemple sont réduites à k.

On calcule ensuite à la main, pour chaque paire (X, Y) de A-modules indécomposables, les dimensions des espaces $\mathrm{Irr}(X, Y)$.

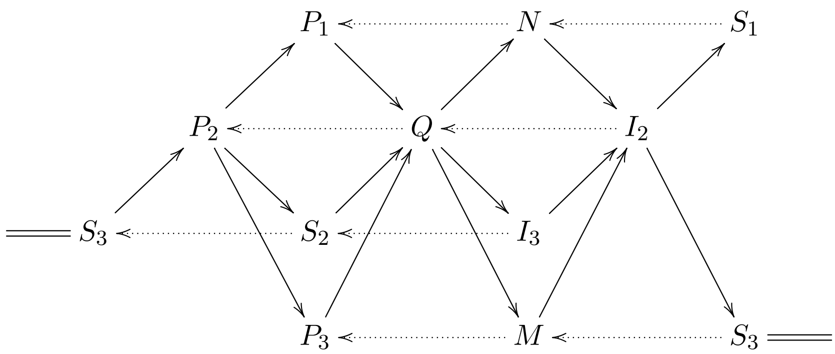
Détaillons un exemple. Comme P_2 et Q ne sont pas isomorphes, on a $R(P_2, Q) = \mathrm{Hom}_A(P_2, Q)$. D'après la proposition 1.8.4, cet espace est de dimension 2. Une base est donnée par les deux morphismes f et g définis ainsi : f envoie la tête de P_2 sur le 2 de Q apparaissant comme l'image de c, et envoie le 3 du P_2 sur le 3 dans le socle de Q ; au contraire g envoie le 2 du P_2 sur le 2 dans le socle de Q et envoie le 3 du P_2 sur zéro.

On voit alors que f se factorise à travers P_3, tandis que g se factorise à travers S_2. Ainsi f et g appartiennent tous les deux à $R^2(P_2, Q)$. Le quotient $\mathrm{Irr}(P_2, Q) = R(P_2, Q)/R^2(P_2, Q)$ est donc nul.

Tous calculs faits, on obtient la table suivante

$\dim \operatorname{Irr}(X,Y)$	S_1	S_2	S_3	M	P_1	P_2	N	I_2	P_3	I_3	Q
S_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
S_3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
P_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
P_2	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
I_2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
P_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
I_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Q	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0

qui permet de dessiner le carquois d'Auslander–Reiten.



On se rappellera ici que $I_1 = S_1$. Les troisième et quatrième lignes n'en font en fait qu'une, car elles doivent être recollées au niveau de S_3.

La présentation graphique adoptée révèle une structure étonnante : il existe une bijection τ (indiquée ici en pointillés) de l'ensemble des indécomposables non-projectifs sur l'ensemble des indécomposables non-injectifs telle que

$$\dim \operatorname{Irr}(\tau X, Y) = \dim \operatorname{Irr}(Y, X)$$

pour chaque paire d'indécomposables (X, Y) telle que X soit non-projectif. Chaque ligne du carquois d'AR correspond à une orbite selon τ ; elle part d'un sommet injectif et arrive à un sommet projectif.

5.2.2 Un deuxième exemple

Ici on examine le cas de l'algèbre A du carquois $\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[rr, bend right, "c"'] & 2 \arrow[r, bend left, "b"] & 3 \end{tikzcd}$ avec la relation $ba = 0$. Il y a neuf indécomposables : les trois simples S_1, S_2, S_3, leurs couvertures projectives et enveloppes injectives

$$P_1 \ : \ \begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dd, "c"'] \arrow[dr, "a"] & \\ & 2 \\ 3 & \end{tikzcd}, \qquad P_2 \ : \ 2 \xrightarrow{b} 3, \qquad P_3 = S_3, \qquad I_1 = S_1, \qquad I_2 \ : \ 1 \xrightarrow{a} 2, \qquad I_3 \ : \ \begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dd, "c"'] & \\ & 2 \arrow[dl, "b"] \\ 3 & \end{tikzcd}$$

ainsi que

$$M \ : \ 1 \xrightarrow{c} 3 \qquad \text{et} \qquad N \ : \ \begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dd, "c"'] \arrow[dr, "a"] & & \\ & 2 & 2 \arrow[dll, bend left, "b"] \\ 3 & & \end{tikzcd}$$

A nouveau on calcule les dimensions des espaces $\mathrm{Irr}(X, Y)$

$\dim \mathrm{Irr}(X,Y)$	S_1	S_2	S_3	P_1	P_2	I_2	I_3	M	N
S_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_2	0	0	0	1	0	0	0	0	0
S_3	0	0	0	1	1	0	0	0	0
P_1	0	0	0	0	0	0	0	1	1
P_2	0	0	0	0	0	0	0	0	1
I_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
I_3	1	1	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	1	0	0
N	0	0	0	0	0	1	1	0	0

pour pouvoir dessiner le carquois d'Auslander–Reiten.

$$\begin{tikzcd}
 & & P_2 \arrow[dr] & & I_2 \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & & \\
 & S_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & N \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_1 \arrow[ll, dotted] & \\
 & & P_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & I_3 \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
  \arrow[r, equal] & S_2 \arrow[ur] & & M \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & S_2 \arrow[ll, dotted] \arrow[r, equal] &
\end{tikzcd}$$

À nouveau, la bijection τ apparaît. Mais, en plus des lignes partant d'un sommet injectif et arrivant à un sommet projectif (pour rappel, $I_1 = S_1$ et $P_3 = S_3$), il existe ici une τ-orbite périodique ne contenant ni injectif ni projectif.

Nous pourrions traiter d'autres exemples, y compris pour des algèbres ayant un nombre infini de classes d'isomorphisme de modules indécomposables. On observerait alors qu'il peut également y avoir des τ-orbites semi-infinies à gauche (partant d'un indécomposable injectif), semi-infinies à droite (arrivant à un indécomposable projectif), ou infinies dans les deux directions (et ne contenant ni injectif ni projectif).

5.3 Formalisation

Nous tentons maintenant de formaliser l'observation effectuée dans la section précédente.

Définition.

(1) Soit Y un A-module indécomposable. Un homomorphisme $g : E \to Y$ est dit **presque scindé à droite** si $g \in R(E,Y)$ et si pour tout A-module M, l'application induite $\mathrm{Hom}_A(M,g) : \mathrm{Hom}_A(M,E) \to R(M,Y)$ est surjective.

(2) Soit X un A-module indécomposable. Un homomorphisme $f : X \to E$ est dit **presque scindé à gauche** si $f \in R(X,E)$ et si pour tout A-module M, l'application induite $\mathrm{Hom}_A(f,M) : \mathrm{Hom}_A(E,M) \to R(X,M)$ est surjective.

Ces conditions demandent, sur les figures ci-dessous, que pour n'importe quel choix de flèche h dans $R(M,Y)$ ou $R(X,M)$, il existe $\tilde{h}$ dans $\mathrm{Hom}_A(M,E)$ ou $\mathrm{Hom}_A(E,M)$ faisant commuter le diagramme.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "\tilde{h}"'] \arrow[d, "h"] \\ E \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & E \arrow[dl, dashed, "\tilde{h}"] \\ M & \end{tikzcd}$$

Pour présenter ces notions, on parle généralement de morphisme qui n'est pas un épimorphisme scindé ou pas un monomorphisme scindé ; les exemples (2) et (3) de la section 5.1 nous assurent que notre définition est bien la définition classique.

Si $g : E \to Y$ est presque scindé à droite, alors $\mathrm{Hom}_A(M,g)$ induit par passage au quotient une application surjective $\mathrm{Hom}_A(M,E)/R(M,E) \to \mathrm{Irr}(M,Y)$. Étudions dans quel cas cette application est bijective.

5.3.1 Proposition. *Soit $g : E \to Y$ un morphisme presque scindé à droite. Les énoncés suivants sont équivalents.*

(i) Pour tout A-module M, l'application $\mathrm{Hom}_A(M,E)/R(M,E) \to \mathrm{Irr}(M,Y)$ *induite par* $\mathrm{Hom}_A(M,g)$ *est bijective.*

(ii) Tout endomorphisme $h \in \mathrm{End}_A(E)$ tel que $g = g \circ h$ est un automorphisme.

(iii) Si un homomorphisme $h : F \to Y$ est presque scindé à droite, alors il existe un épimorphisme scindé $\tilde{h} : F \to E$ tel que $h = g \circ \tilde{h}$.

(iv) E est de dimension minimale parmi les modules tels qu'il existe un morphisme presque scindé à droite $g : E \to Y$.

(v) $\ker g$ *ne contient pas de facteur direct non-nul de E.*

Preuve. Supposons (i). Soit $h \in \mathrm{End}_A(E)$ telle que $g = g \circ h$. Alors $g \circ (\mathrm{id}_E - h) = 0$. En prenant $M = E$ dans (i), on obtient $\mathrm{id}_E - h \in R(E,E)$, c'est-à-dire $\mathrm{id}_E - h \in J(\mathrm{End}_A(E))$. Ceci entraîne que h est inversible dans $\mathrm{End}_A(E)$. (ii) est donc vrai.

Réciproquement, supposons (ii) et montrons que (i) est vrai. Soit $h : M \to E$ tel que l'image de $g \circ h$ dans $\mathrm{Irr}(M,Y)$ soit nulle ; nous voulons établir que $h \in R(M,E)$. Par hypothèse donc, $g \circ h \in R^2(M, Y)$: il existe un A-module N et des morphismes $l \in R(M, N)$ et $m \in R(N, Y)$ tels que $g \circ h = m \circ l$. On peut alors factoriser $m = g \circ \widetilde{m}$ où $\widetilde{m} \in \operatorname{Hom}_A(N, E)$, ce qui donne $g \circ (h - \widetilde{m} \circ l) = 0$. Pour tout homomorphisme $n \in \operatorname{Hom}_A(E, M)$, on a alors $g = g \circ (\mathrm{id}_E - (h - \widetilde{m} \circ l) \circ n)$, et grâce à (ii), on obtient que l'endomorphisme $\mathrm{id}_E - (h - \widetilde{m} \circ l) \circ n$ est inversible. C'est là la définition de $h - \widetilde{m} \circ l \in R(M, E)$. Comme $l \in R(M, N)$, ceci entraîne que $h \in R(M, E)$, comme désiré.

Démontrons à présent (ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons (ii) et considérons un morphisme presque scindé à droite $h : F \to Y$. Comme g est presque scindé à droite, il existe $\tilde{h} : F \to E$ tel que $h = g \circ \tilde{h}$. Comme h est presque scindé à droite, il existe $\tilde{g} : E \to F$ tel que $g = h \circ \tilde{g}$. Ainsi $g = g \circ (\tilde{h} \circ \tilde{g})$, et (ii) entraîne que $\tilde{h} \circ \tilde{g}$ est un automorphisme de E. En particulier, $\tilde{h}$ est un épimorphisme scindé. (iii) est vrai.

Les implications (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) sont banales.

Supposons enfin (v) et considérons la situation de (ii). Écrivons la décomposition de Fitting de E par rapport à h : $E = (\operatorname{im} h^\infty) \oplus (\ker h^\infty) = E_1 \oplus E_0$. Alors la restriction de h à E_1 est un automorphisme de E_1 et la restriction de h à E_0 est nilpotente : il existe $n \geq 0$ tel que $E_0 \subset \ker h^n$. L'égalité $g = g \circ h^n$ implique ici que $E_0 \subset \ker g$, et (v) requiert alors $E_0 = 0$. Ainsi $E_1 = E$ et h est un automorphisme de E. (ii) est vrai. $\square$

Définition. Étant donné un A-module indécomposable Y, un **morphisme puits** $g : E \to Y$ est un morphisme presque scindé à droite vérifiant les énoncés de la proposition 5.3.1.

L'énoncé de la proposition 5.3.1 et sa preuve ressemblent beaucoup à ceux de la proposition 1.8.1 donnant des caractérisations de la notion de couverture projective. Il est en fait possible de placer l'une et l'autre situation dans un même cadre conceptuel, lequel fournit une forme d'unicité.

5.3.2 Théorème. *Si $g : E \to Y$ et $h : F \to Y$ sont deux morphismes puits, alors il existe un isomorphisme $\tilde{h} : F \to E$ tel que $h = g \circ \tilde{h}$.*

La preuve est identique à celle de la clause d'unicité dans le théorème 1.8.2.

Les énoncés précédents admettent des versions duales, basés sur la notion de morphisme source définie ainsi.

Définition. Pour X un A-module indécomposable, un **morphisme source** $f : X \to E$ est un morphisme presque scindé à gauche tel que pour tout A-module M, l'application $\operatorname{Hom}_A(E, M)/R(E, M) \to \operatorname{Irr}(X, M)$ induite par $\operatorname{Hom}_A(f, M)$ est bijective.

Prenons le cas d'un morphisme source $f : X \to E$ et prenons un A-module indécomposable Z. L'application bijective $\operatorname{Hom}_A(E, Z)/R(E, Z) \to \operatorname{Irr}(X, Z)$ est alors un isomorphisme de T_Z-espaces vectoriels à gauche. (En effet, des deux côtés de l'isomorphisme, l'action de T_Z provient de la composition à gauche par les éléments de $\operatorname{End}_A(Z)$.) De cette constation, on déduit que la dimension de $\operatorname{Irr}(X, Z)$ en tant que T_Z-espace vectoriel est égale à celle de $\operatorname{Hom}_A(E, Z)/R(E, Z)$, c'est-à-dire à la multiplicité de Z dans une décomposition de Krull–Schmidt de E.

De même, si $g : E \to Y$ est un morphisme puits et Z un A-module indécomposable, alors la multiplicité de Z dans une décomposition de Krull–Schmidt de E est égale à la dimension de $\mathrm{Irr}(Z, Y)$ en tant que T_Z-espace vectoriel à droite.

Nous terminons cette section par deux exemples.

Exemples.

(1) Soit P un A-module indécomposable. On sait (voir l'exemple (3) de la section 5.1) que pour tout A-module M, un homomorphisme $f : M \to P$ appartient à $R(M, P)$ si et seulement s'il n'est pas un épimorphisme scindé. Si maintenant P est projectif, alors il n'est plus utile de préciser « scindé » dans la phrase précédente. De plus, $\operatorname{rad} P$ est l'unique sous-module maximal de P (proposition 1.8.3 (ii)) : dire que f n'est pas surjectif, c'est dire que $\operatorname{im} f \subset \operatorname{rad} P$. Bref, $f \in R(M, P)$ si et seulement si f se factorise à travers l'homomorphisme d'inclusion $\operatorname{rad} P \to P$. Cet homomorphisme d'inclusion $\operatorname{rad} P \to P$ est donc le morphisme puits arrivant en P.

(2) De façon duale, si I est un A-module injectif indécomposable, le morphisme quotient $I \to I/\operatorname{soc} I$ est le morphisme source partant de I.

L'existence de morphismes source partant d'un indécomposable non-injectif ou de morphismes puits arrivant à un indécomposable non-projectif n'est en revanche pas chose évidente [8]. Fait plus remarquable encore, ces morphismes sources et puits se combinent pour former des suites exactes courtes, révélant l'existence de la bijection τ. Mais pour prouver ces faits, il nous faut prendre l'histoire par un autre bout et construire τ par un procédé complètement différent.

5.4 Catégories stables

Si M et N sont deux A-modules, on note $P(M, N)$ l'ensemble des morphismes $M \to N$ qui se factorisent à travers un projectif : $f \in P(M, N)$ s'il existe un A-module projectif P et des homomorphismes $g \in \mathrm{Hom}_A(M, P)$ et $h \in \mathrm{Hom}_A(P, N)$ tels que $f = h \circ g$.

Exercice. Soit X un A-module indécomposable non-projectif. Alors $P(X, X) \subset R(X, X) = J(\mathrm{End}_A(X))$. (Soit P un A-module projectif. Comme les facteurs directs de P sont projectifs, il ne peut pas exister d'épimorphisme scindé $P \to X$. Par conséquent, un automorphisme de X ne peut pas se factoriser à travers P.)

Il est évident que $P(-, -)$ est un idéal de la catégorie A-mod, au sens où $P(-, -)$ satisfait les propriétés énoncées pour $R(-, -)$ dans la proposition 5.1.2.

Définition. Pour M et N deux A-modules, on pose $\underline{\mathrm{Hom}}(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)/P(M, N)$. On note A-$\underline{\mathrm{mod}}$ la catégorie quotient A-mod$/P$ et on l'appelle **catégorie stable**. Les objets de A-$\underline{\mathrm{mod}}$ sont ceux de A-mod mais les espaces de morphismes sont les $\underline{\mathrm{Hom}}(M, N)$.

8. La difficulté est d'établir l'existence de morphismes presque scindés à gauche ou à droite sans sortir de la catégorie des A-modules de longueur finie. La condition de minimalité dictée par le (iv) de la proposition 5.3.1 est ensuite facile à imposer.

Dans la catégorie stable, les A-modules projectifs deviennent tous isomorphes à l'objet 0, l'objet initial et final de la catégorie : $\underline{\mathrm{Hom}}(0, M) = \underline{\mathrm{Hom}}(M, 0) = \{0\}$ pour tout objet M. Par ailleurs, l'image dans la catégorie stable d'un A-module indécomposable non-projectif X est encore indécomposable, au sens où son anneau d'endomorphismes $\underline{\mathrm{End}}(X)$ est local (utiliser l'exercice ci-dessus).

Exercice. Deux A-modules M et N ont des images isomorphes dans la catégorie stable si et seulement s'il existe des A-modules projectifs P et Q tels que $M \oplus P \cong N \oplus Q$. (Supposons qu'il existe des homomorphismes $f : M \to N$ et $g : N \to M$ tels que $g \circ f - \mathrm{id}_M \in P(M, M)$ et $f \circ g - \mathrm{id}_N \in P(N, N)$. Il existe alors un A-module projectif $\widetilde{Q}$ et des homomorphismes $\tilde{f} : M \to \widetilde{Q}$ et $\tilde{g} : \widetilde{Q} \to M$ tels que la composée

$$M \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} f \\ \tilde{f} \end{smallmatrix}\right)} N \oplus \widetilde{Q} \xrightarrow{(g\ \tilde{g})} M$$

soit l'identité de M ; ainsi M est un facteur direct de $N \oplus \widetilde{Q}$. De même, il existe un A-module projectif $\widetilde{P}$ tel que N soit un facteur direct de $M \oplus \widetilde{P}$. On conclut à l'aide du théorème de Krull–Schmidt.)

De façon similaire, pour deux A-modules M et N, on note $I(M, N)$ l'ensemble des homomorphismes $M \to N$ qui se factorisent à travers un injectif. Alors $I(-, -)$ est un idéal de la catégorie A-mod. On pose $\overline{\mathrm{Hom}}(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)/I(M, N)$ et on note A-$\overline{\mathrm{mod}}$ la catégorie quotient A-mod$/I$; les espaces de morphismes de A-$\overline{\mathrm{mod}}$ sont les $\overline{\mathrm{Hom}}(M, N)$. Dans A-mod$/I$, ce sont les A-modules injectifs qui deviennent tous isomorphes à l'objet 0.

Exercice. Soit M et N deux A-modules et $g : M \to I$ un monomorphisme avec I injectif.

(i) Prouver pour tout homomorphisme $f : M \to N$ l'équivalence entre les énoncés suivants.
   (a) f se factorise à travers un injectif.
   (b) Pour chaque monomorphisme $h : M \to L$, il existe un homomorphisme $t : L \to N$ tel que $f = t \circ h$.
   (c) Il existe un homomorphisme $t : I \to N$ tel que $f = t \circ g$.

(ii) En déduire que $\overline{\mathrm{Hom}}(M, N)$ est le conoyau de l'application linéaire

$$\mathrm{Hom}(g, N) : \mathrm{Hom}_A(I, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N).$$

La remarque suivante nous sera utile dans la prochaine section ; elle découle du fait que $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) = 0$ si M est projectif ou N est injectif.

Observation. $\mathrm{Ext}^1_A(-, -)$ descend en un bifoncteur de $(A\text{-}\underline{\mathrm{mod}})^{\mathrm{op}} \times A\text{-}\overline{\mathrm{mod}}$ vers la catégorie des groupes abéliens (en fait ici des k-espaces vectoriels).

5.5 Transposition d'Auslander–Bridger et translation d'Auslander–Reiten

Reprenant la notation de la section 3.3, nous noterons $\operatorname{add}{}_AA$ la sous-catégorie pleine de A-mod formée des A-modules à gauche projectifs de type fini. De même, nous noterons $\operatorname{add} A_A$ la sous-catégorie pleine de A^{op}-mod formée des A-modules à droite projectifs de type fini.

On appelle **dualité** entre deux catégories $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ une équivalence de catégorie de $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ sur $\mathscr{B}$, c'est-à-dire un foncteur *contravariant*, fidèle, plein et essentiellement surjectif.

5.5.1 Proposition. *Le foncteur* $\operatorname{Hom}_A(-,A)$ *est une dualité entre les catégories* $\operatorname{add}{}_AA$ *et* $\operatorname{add} A_A$*. (La structure de A-module à droite sur* $\operatorname{Hom}_A(P,A)$ *pour* $P \in \operatorname{add}{}_AA$ *vient de l'action à droite de A sur l'espace d'arrivée : si $f \in \operatorname{Hom}_A(P,A)$ et $a \in A$, alors $f \cdot a$ est l'homomorphisme $x \mapsto f(x)a$.)*

Preuve. La preuve est complètement analogue à celle de la proposition 3.3.2 ; la seule différence est que l'on a ici affaire à un foncteur contravariant. □

Suivant la coutume, nous noterons cette dualité $(-)^*$. Cherchons à présent à l'étendre à la catégorie $\operatorname{fp}{}_AA$ des modules admettant une présentation par des modules projectifs de type fini[9]. On ne peut pas adapter la preuve du théorème 3.3.3 au cas d'un foncteur contravariant, mais on obtient un résultat intéressant en passant aux catégories stables.

5.5.2 Théorème. $(-)^*$ *induit une dualité* Tr *entre les catégories* A-$\underline{\mathrm{mod}}$ *et* A^{op}-$\underline{\mathrm{mod}}$.

Preuve. Soit M un A-module et prenons une présentation projective $M = \operatorname{coker}(p : P_1 \to P_0)$. Le conoyau de $p^* : P_0^* \to P_1^*$ dépend du choix de la présentation choisie de M. Cependant, si l'on prend une autre présentation projective, disons $M = \operatorname{coker}(q : Q_1 \to Q_0)$, alors il existe *dans la catégorie stable* un isomorphisme préféré $\operatorname{coker} q^* \cong \operatorname{coker} p^*$. (Nous justifierons cette affirmation plus bas.) Ainsi l'objet $\operatorname{coker} p^*$ est canonique (c'est-à-dire unique à unique isomorphisme près) dans la catégorie stable A^{op}-$\underline{\mathrm{mod}}$. Il est alors légitime[10] de reconnaître son existence en lui dédiant une notation, $\operatorname{Tr} M$.

De plus, cette construction est fonctorielle : à un morphisme $f : M \to N$ et à des présentations projectives $M = \operatorname{coker}(p : P_1 \to P_0)$ et $N = \operatorname{coker}(r : R_1 \to R_0)$, il est possible d'associer un morphisme préféré $\operatorname{coker} r^* \to \operatorname{coker} p^*$ dans la catégorie stable, par une construction compatible avec la composition des morphismes. C'est cette construction qui, dans le cas $M = N$ et $f = \mathrm{id}_M$, fournit l'isomorphisme préféré auquel il a été fait référence plus haut : l'unicité et la compatibilité avec la composition garantissent que les composées $\operatorname{coker} q^* \to \operatorname{coker} p^* \to \operatorname{coker} q^*$ et $\operatorname{coker} p^* \to \operatorname{coker} q^* \to \operatorname{coker} p^*$ sont respectivement les identités de $\operatorname{coker} q^*$ et $\operatorname{coker} p^*$ dans la catégorie stable. Revenant au cas de $f : M \to N$, nous obtenons alors un homomorphisme $\operatorname{Tr} f : \operatorname{Tr} N \to \operatorname{Tr} M$ et concluons que Tr est un foncteur contravariant de la catégorie des A-modules vers la catégorie stable des A^{op}-modules. Il est clair que si P est projectif, alors $\operatorname{Tr} P = 0$, de sorte que Tr descend en un foncteur de A-$\underline{\mathrm{mod}}$ vers A^{op}-$\underline{\mathrm{mod}}$.

9. Vu notre cadre de travail, avec A algèbre de dimension finie sur un corps, $\operatorname{fp}{}_AA$ coïncide avec la catégorie A-mod de tous les modules de longueur finie.

10. Le statut de cet objet est analogue à celui des objets définis par une propriétés universelle ou à celui des objets obtenus en appliquant un foncteur dérivé.

La dernière étape de la démonstration est de justifier que Tr est fidèle, plein et essentiellement surjectif : ce fait s'obtient en construisant le foncteur inverse, qui n'est autre que Tr pour l'anneau A^{op}.

Il nous reste cependant à construire le morphisme préféré $\operatorname{coker} r^* \to \operatorname{coker} p^*$ annoncé plus haut lorsque l'on s'est donné un morphisme $f : M \to N$ et des présentations projectives $M = \operatorname{coker}(p : P_1 \to P_0)$ et $N = \operatorname{coker}(r : R_1 \to R_0)$. En utilisant la projectivité de P_0 et P_1, on peut trouver des homomorphismes $f_0 : P_0 \to R_0$ et $f_1 : P_1 \to R_1$ formant le diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
R_1 \arrow[r, "r"] & R_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Après dualisation on obtient

$$\begin{tikzcd}
R_0^* \arrow[r, "r^*"] \arrow[d, "f_0^*"'] & R_1^* \arrow[r] \arrow[d, "f_1^*"] & \operatorname{coker} r^* \arrow[r] \arrow[d, dashed, "F"] & 0 \\
P_0^* \arrow[r, "p^*"] & P_1^* \arrow[r] & \operatorname{coker} p^* \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et alors f_1^* induit un homomorphisme $F : \operatorname{coker} r^* \to \operatorname{coker} p^*$. Nous voulons maintenant nous assurer que F est indépendant du choix de f_0 et f_1. Considérons donc deux choix (f_0', f_1') et (f_0'', f_1''), donnant deux homomorphismes F' et F''. Soustrayons : $f_0 = f_0' - f_0''$, $f_1 = f_1' - f_1''$. Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_1"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] \arrow[dl, dashed, "s"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
R_1 \arrow[r, "r"] & R_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

f_0 est à valeurs dans $\operatorname{im} r$. Par projectivité de P_0, on peut factoriser $f_0 = rs$ comme indiqué dans le diagramme. On calcule alors $r(f_1 - sp) = (f_0 - rs)p = 0$, d'où $(f_1^* - p^*s^*)r^* = 0$. Par conséquent $f_1^* - p^*s^* : R_1^* \to P_1^*$ se factorise à travers $\operatorname{coker} r^*$ pour donner un morphisme $\operatorname{coker} r^* \to P_1^*$. Lorsqu'on compose par la surjection $P_1^* \to \operatorname{coker} p^*$, le terme p^*s^* disparaît, et l'on obtient le morphisme $\operatorname{coker} r^* \to \operatorname{coker} p^*$ induit par f_1^*, c'est-à-dire $F' - F''$. On voit de cette facon que $F' - F''$ se factorise à travers le projectif P_1^*, autrement dit que $F' = F''$ dans la catégorie stable A^{op}-$\underline{\mathrm{mod}}$. □

Durant la preuve du théorème, nous avons vu que $\mathrm{Tr} \circ \mathrm{Tr}$ est le foncteur identité de A-$\underline{\mathrm{mod}}$.

5.5.3 Corollaire. Tr *induit une bijection de l'ensemble des A-modules indécomposables non-projectifs sur l'ensemble des A^{op}-modules indécomposables non-projectifs.*

Définition. On note D la dualité $\operatorname{Hom}_k(M, k)$ de la catégorie des A-modules à gauche sur la catégorie des A-modules à droite (et réciproquement).

Concrètement, si M est un A-module à gauche et $a \in A$, alors l'action à droite de A sur $DM = \mathrm{Hom}_k(M,k)$ est donnée par $f \cdot a = (x \mapsto f(ax)$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}_k(M,k)$. On notera que D est involutive : $D \circ D$ est simplement la bidualité des espaces vectoriels en dimension finie.

Il est banal que D échange les A-modules projectifs avec les A^{op}-modules injectifs et vice-versa. Par conséquent D induit deux dualités

$$A\text{-}\underline{\mathrm{mod}} \cong A^{\mathrm{op}}\text{-}\overline{\mathrm{mod}} \quad \text{et} \quad A\text{-}\overline{\mathrm{mod}} \cong A^{\mathrm{op}}\text{-}\underline{\mathrm{mod}}.$$

Définition. On appelle **translation d'Auslander–Reiten** et on note τ la composée $D\,\mathrm{Tr} : A\text{-}\underline{\mathrm{mod}} \to A\text{-}\overline{\mathrm{mod}}$.

En tant que composée de deux dualités, τ est une équivalence de catégories. L'équivalence de catégories inverse est notée τ^- et est la composée $\mathrm{Tr}\,D$.

5.5.4 Proposition. *τ induit une bijection de l'ensemble des A-modules indécomposables non-projectifs sur l'ensemble des A^{op}-modules indécomposables non-injectifs.*

Remarque. Pour déterminer l'image par τ d'un module M, on part d'une présentation projective $M = \mathrm{coker}(p : P_1 \to P_0)$; alors

$$\tau M = D\,\mathrm{Tr}\,M = D\,\mathrm{coker}(p^* : P_0^* \to P_1^*) = \ker(D(p^*) : D(P_1^*) \to D(P_0^*))$$

autrement dit τM est défini par la suite exacte

$$0 \to \tau M \to D(P_1^*) \xrightarrow{D(p^*)} D(P_0^*).$$

Le fait suivant peut alors s'avérer utile dans les calculs concrets : si P est la couverture projective d'un module simple S, alors $D(P^*)$ est l'enveloppe injective de S. Ce résultat est relativement facile à justifier lorsque A est l'algèbre des chemins d'un carquois acyclique, mais demande (un peu) plus de travail dans le cas général. Je renvoie au livre d'Auslander, Reiten et Smalø, proposition II.4.6.

La propriété-clé de la translation d'Auslander–Reiten est le résultat suivant.

5.5.5 Théorème (formules d'Auslander–Reiten). *Il existe des isomorphismes*

$$\mathrm{Ext}^1_A(N,M) \cong D\,\underline{\mathrm{Hom}}(\tau^- M, N) \cong D\,\overline{\mathrm{Hom}}(M, \tau N)$$

naturel en $(N,M) \in (A\text{-}\underline{\mathrm{mod}})^{\mathrm{op}} \times A\text{-}\overline{\mathrm{mod}}$.

Le second isomorphisme de la formule est donné par l'équivalence de catégorie τ.

La preuve ci-dessous s'inspire de l'article de H. Krause, *A short proof for Auslander's defect formula*, Linear Algebra Appl. **365** (2003), 267–270.

Preuve. On note d'abord qu'il existe un isomorphisme

$$P^* \otimes_A M \cong \operatorname{Hom}_A(P, M)$$

naturel en $(P, M) \in (\operatorname{add}{}_A A)^{\mathrm{op}} \times A\text{-mod}$. Pour le construire, on observe que cette formule est correcte quand P est le A-module régulier et on utilise l'additivité pour l'étendre à tous les A-modules P projectifs de type fini.

On considère ensuite une présentation projective $N = \operatorname{coker}(p : P_1 \to P_0)$; alors τN est l'image dans la catégorie stable de $D(\operatorname{coker} p^*)$. Le diagramme à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
P_0^* \otimes_A M \arrow[r, "p^* \otimes_A M"] \arrow[d, "\simeq"'] & P_1^* \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & (\operatorname{coker} p^*) \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
\operatorname{Hom}_A(P_0, M) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_A(p,M)"'] & \operatorname{Hom}_A(P_1, M) \arrow[r] & \operatorname{coker} \operatorname{Hom}_A(p, M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

combiné à l'homomorphisme d'adjonction

$$D\big((\operatorname{coker} p^*) \otimes_A M\big) = \operatorname{Hom}_k\big((\operatorname{coker} p^*) \otimes_A M, k\big) \cong \\ \operatorname{Hom}_A\big(M, \operatorname{Hom}_k(\operatorname{coker} p^*, k)\big) = \operatorname{Hom}_A\big(M, D(\operatorname{coker} p^*)\big)$$

fournit une bijection

$$D \operatorname{Hom}_A(M, D(\operatorname{coker} p^*)) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{coker} \operatorname{Hom}_A(p, M). \tag{†}$$

On note que $\operatorname{Ext}^1_A(N, M)$ est un sous-espace de $\operatorname{coker} \operatorname{Hom}_A(p, M)$ [11] et que $D\,\overline{\operatorname{Hom}}(M, \tau N)$ est un sous-espace de $D \operatorname{Hom}_A(M, D(\operatorname{coker} p^*))$. Il ne nous reste plus qu'à justifier que ces deux sous-espaces se correspondent sous la bijection (†).

Pour cela, on choisit un monomorphisme $g : M \to I$ avec I injectif. Le deuxième exercice de la section 5.4 montre que $D\,\overline{\operatorname{Hom}}(M, \tau N)$ est le noyau de $D \operatorname{Hom}_A(g, D(\operatorname{coker} p^*))$. Ceci nous donne un diagramme à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D\,\overline{\operatorname{Hom}}(M, \tau N) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & D \operatorname{Hom}_A(M, D(\operatorname{coker} p^*)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & D \operatorname{Hom}_A(I, D(\operatorname{coker} p^*)) \arrow[d, "\simeq"'] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_A(N, M) \arrow[r] & \operatorname{coker} \operatorname{Hom}_A(p, M) \arrow[r] & \operatorname{coker} \operatorname{Hom}_A(p, I)
\end{tikzcd}$$

et on conclut en utilisant que le carré de droite dans ce diagramme commute, conséquence de la naturalité de la bijection (†).

---

11. Poussons un cran de plus la résolution de N en introduisant un épimorphisme $q : P_2 \to \ker p$ avec P_2 projectif. Par définition, $\operatorname{Ext}^1_A(N, M)$ est le quotient $\ker \operatorname{Hom}_A(q, M) / \operatorname{im} \operatorname{Hom}_A(p, M)$, donc est un sous-espace de $\operatorname{coker} \operatorname{Hom}_A(p, M)$. Le diagramme ci-dessous fait apparaître le module injectif I ; la seconde ligne est exacte.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_A(P_0, M) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_A(p,M)"] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_A(P_1, M) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_A(q,M)"] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_A(P_2, M) \arrow[d, hook] \\
\operatorname{Hom}_A(P_0, I) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_A(p,I)"] & \operatorname{Hom}_A(P_1, I) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_A(q,I)"] & \operatorname{Hom}_A(P_2, I)
\end{tikzcd}$$

Cette preuve présente une construction naturelle en M de la bijection désirée. S'assurer de la naturalité en $(N, M) \in (A\text{-}\underline{\mathrm{mod}})^{\mathrm{op}} \times A\text{-}\overline{\mathrm{mod}}$ nécessite un travail similaire du côté dual. □

5.6 Suites d'Auslander–Reiten

5.6.1 Théorème. *Soient X et Y des A-modules indécomposables, avec X non-injectif et Y non-projectif, reliés par $X = \tau Y$.*

(i) L'espace $\mathrm{Ext}^1_A(Y, X)$ a un socle simple quand on le regarde comme $\mathrm{End}_A(X)$-module à gauche ou comme $\mathrm{End}_A(Y)$-module à droite ; de plus les deux socles coïncident.

(ii) Regardons un élément non-nul de ce socle commun comme la classe d'une extension

$$0 \to X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y \to 0.$$

Alors f est un morphisme source et g est un morphisme puits.

Ce théorème donne plusieurs choses à la fois :
- — la construction du morphisme source partant d'un indécomposable non-injectif, et le fait que ce morphisme soit injectif et de conoyau indécomposable ;
- — la construction du morphisme puits arrivant à un indécomposable non-projectif, et le fait que ce morphisme soit surjectif et de noyau indécomposable ;
- — la formation d'une suite exacte courte en assemblant le morphisme source partant d'un indécomposable non-injectif X et le morphisme puits arrivant à l'indécomposable non-projectif $Y = \tau^- X$;
- — l'égalité entre les dimensions de $\mathrm{Irr}(X, Z)$ et $\mathrm{Irr}(Z, Y)$ pour X, Y, Z modules indécomposables tels que $X = \tau Y$.

(L'égalité mentionnée dans le dernier point vient de ce que $\mathrm{Irr}(X, Z)$ et $\mathrm{Irr}(Z, Y)$, vus comme espaces vectoriels sur T_Z, ont tous deux comme dimension la multiplicité avec laquelle Z apparaît dans une décomposition de Krull–Schmidt de E, ainsi qu'expliqué à la fin de la section 5.3.)

Preuve du théorème. (i) On utilise la formule d'Auslander–Reiten (théorème 5.5.5) :

$$D\,\overline{\mathrm{End}}(X) \cong \mathrm{Ext}^1_A(Y, X) \cong D\,\underline{\mathrm{End}}(Y).$$

La naturalité énoncée dans le théorème implique que le premier isomorphisme est un isomorphisme de $\mathrm{End}_A(X)$-modules à gauche et le second un isomorphisme de $\mathrm{End}_A(Y)$-modules à droite. Par conséquent, le socle de $\mathrm{Ext}^1_A(Y, X)$ comme $\mathrm{End}_A(X)$-module est le k-dual de la tête du $\mathrm{End}_A(X)$-module à droite $\overline{\mathrm{End}}(X)$. Ce dernier étant un anneau local, la tête de son module régulier est simple.

De même, le socle de $\mathrm{Ext}^1_A(Y, X)$ comme $\mathrm{End}_A(Y)$-module à droite est le k-dual de la tête du $\mathrm{End}_A(Y)$-module à gauche $\underline{\mathrm{End}}(Y)$, et cette tête est simple. Cette description prouve également l'égalité des socles annoncée dans le théorème, vu que l'équivalence de catégories τ définit un isomorphisme d'anneaux

$$\overline{\mathrm{End}}(X) \cong \underline{\mathrm{End}}(Y)$$

qui nécessairement préserve les radicaux de Jacobson, i.e. les radicaux des modules réguliers.

(ii) Nous commençons par prouver que le morphisme g est presque scindé à droite. Soit M un A-module et $h \in R(M, Y)$. La composition à gauche par h définit un homomorphisme de $\mathrm{End}_A(Y)$-modules à droite $\mathrm{Hom}(Y, h) : \mathrm{Hom}_A(Y, M) \to \mathrm{End}_A(Y)$. Comme h n'est pas un épimorphisme scindé, $\mathrm{Hom}(Y, h)$ n'est pas surjectif, et donc son image est incluse dans le radical de $\mathrm{End}_A(Y)$. Passant dans la catégorie stable, nous obtenons un homomorphisme de $\mathrm{End}_A(Y)$-modules $h_* : \underline{\mathrm{Hom}}(Y, M) \to \underline{\mathrm{End}}(Y)$ d'image incluse dans le radical de $\underline{\mathrm{End}}(Y)$. Après dualisation sur k, ceci nous donne un homomorphisme de $\mathrm{End}_A(Y)$-modules $h^* : D\,\underline{\mathrm{End}}(Y) \to D\,\underline{\mathrm{Hom}}(Y, M)$ dont le noyau contient le socle de $D\,\underline{\mathrm{End}}(Y)$.

Appelons ξ la suite exacte courte de l'énoncé et tirons-la en arrière par h :

$$\begin{tikzcd}
h^*\xi : & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & F \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
\xi : & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & E \arrow[r, "g"] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

D'après la clause de naturalité dans le théorème 5.5.5, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
D\,\underline{\mathrm{End}}(Y) \arrow[r, "h^*"] \arrow[d, "\simeq"'] & D\,\underline{\mathrm{Hom}}(Y, M) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Ext}^1_A(Y, X) \arrow[r, "h^*"] & \mathrm{Ext}^1_A(M, X)
\end{tikzcd}$$

commute (la première ligne est formée de $\underline{\mathrm{End}}(Y)$-modules, la seconde de $\overline{\mathrm{End}}(X)$-modules, les deux structures étant reliées par l'isomorphisme $\overline{\mathrm{End}}(X) \cong \underline{\mathrm{End}}(Y)$). L'alinéa précédent implique que le morphisme h^* de la seconde ligne annule le socle du $\mathrm{End}_A(X)$-module $\mathrm{Ext}^1_A(Y, X)$. Comme la classe de ξ appartient à ce socle, on obtient que la classe de $h^*\xi$ dans $\mathrm{Ext}^1_A(M, X)$ est nulle. Autrement dit, $\mathrm{Ext}^1_A(h, X)[\xi] = 0$, ce qui signifie, d'après l'exercice 1 de la feuille 6, que h se factorise à travers g : il existe $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}_A(M, E)$ tel que $h = g \circ \tilde{h}$.

Ce qui précède prouve que g est bien un morphisme presque scindé à droite. De plus, son noyau est indécomposable et n'est pas un facteur direct de E (sinon la suite serait scindée). Par conséquent, g vérifie la condition (v) de la proposition 5.3.1 : c'est donc un morphisme puits.

On démontre de façon duale que f est un morphisme source. □