Master de sciences, mention mathématiques
Introduction à la théorie des représentations
Responsable : Pierre Baumann

Université Louis Pasteur, Strasbourg
Année 2008–2009

Examen

Documents autorisés. Gadgets électroniques de communication interdits. Durée : 3 heures.

Exercice 1. Soit G un groupe fini. Pour $g \in G$, on note $\varphi(g)$ le nombre de couples $(x, y) \in G^2$ tels que $g = xyx^{-1}y^{-1}$. On note $\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}(G)$ l'ensemble des caractères complexes irréductibles de G. Le but de l'exercice est de démontrer la formule suivante, due à Frobenius :

$$\varphi(g) = |G| \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}(G)} \frac{\zeta(g)}{\zeta(1)}. \tag{$*$}$$

On énumère les classes de conjugaison dans G : $\mathfrak{C}_1$, ..., $\mathfrak{C}_s$. On sait que pour chaque $i \in \{1, \ldots, s\}$ existe un unique $i^* \in \{1, \ldots, s\}$ tel que $\mathfrak{C}_{i^*} = \{g^{-1} \mid g \in \mathfrak{C}_i\}$. Enfin, on note h_i le cardinal de $\mathfrak{C}_i$ et on introduit les éléments $C_i = \sum_{g \in \mathfrak{C}_i} g$ de l'algèbre de groupe $\mathbf{C}G$.

(a) Montrer que les égalités suivantes ont lieu dans l'algèbre du groupe :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) g = \frac{1}{|G|} \sum_{(x,y) \in G^2} xyx^{-1}y^{-1} = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{h_i} C_i C_{i^*}.$$

(b) Soit ζ un caractère complexe irréductible du groupe G. Montrer que

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta(g) \varphi(g) = \frac{|G|}{\zeta(1)}.$$

(Indication : ne pas oublier qu'une représentation irréductible possède un caractère central.)

(c) Observer que φ est une fonction centrale (fonction de classe) sur G et prouver la formule $(*)$.

Exercice 2. Soient k un corps et A une k-algèbre de dimension finie. Pour $a \in A$, on note $\mathrm{tr}_{A/k}(a)$ la trace de la multiplication à gauche $x \mapsto ax$ de A dans lui-même. Ainsi $\mathrm{tr}_{A/k}$ est une forme linéaire sur le k-espace vectoriel A.

(a) Montrer que la forme bilinéaire $T : (a, b) \mapsto \mathrm{tr}_{A/k}(ab)$ sur A est symétrique.

(b) Montrer que le radical de Jacobson de A est contenu dans le noyau de $\mathrm{tr}_{A/k}$.

(c) Montrer que si T est non-dégénérée, alors A est une k-algèbre semi-simple.

Exercice 3. Soient k un corps et A une k-algèbre. On se donne une suite exacte

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0 \tag{$**$}$$

entre trois A-modules. On sait que si $(**)$ est scindée, alors $M \cong L \oplus N$. On se propose d'obtenir une réciproque partielle à ce fait.

À cette fin, on fait les hypothèses supplémentaires suivantes : A est de dimension finie sur k, les trois A-modules L, M et N sont de type fini, et $M \cong L \oplus N$.

(a) Justifier que les trois k-espaces vectoriels $\operatorname{Hom}_A(N, L)$, $\operatorname{Hom}_A(N, M)$ et $\operatorname{Hom}_A(N, N)$ sont de dimension finie et montrer l'égalité

$$\dim \operatorname{Hom}_A(N, M) = \dim \operatorname{Hom}_A(N, L) + \dim \operatorname{Hom}_A(N, N).$$

(b) Montrer que la suite de k-espaces vectoriels

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(N, L) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(N,f)} \operatorname{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(N,g)} \operatorname{Hom}_A(N, N) \to 0$$

est exacte.

(c) Montrer que la suite exacte $(**)$ est scindée.

Exercice 4. Soient G un groupe et k un corps. On considère une suite exacte

$$0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n \to 0$$

de kG-modules, chacun d'eux étant de dimension finie sur k. On note χ_{M_i} le caractère de M_i. Montrer que dans l'espace $\mathrm{cf}_k(G)$ des fonctions centrales (fonctions de classe) sur G à valeurs dans k, on a

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \chi_{M_i} = 0.$$

Exercice 5. Soient A un anneau et M et N deux A-modules. Montrer que le socle de $M \oplus N$ est la somme directe du socle de M et du socle de N : $\operatorname{soc}(M \oplus N) = (\operatorname{soc} M) \oplus (\operatorname{soc} N)$.

Exercice 6. Soient p un nombre premier et n un entier strictement positif. Soient k un corps de caractéristique p et G un groupe cyclique d'ordre p^n. On note kG la k-algèbre du groupe G. On pose $q = p^n$. On rappelle que l'égalité $X^q - 1 = (X - 1)^q$ a lieu dans $k[X]$.

(a) Trouver deux représentations inéquivalentes de degré 2 de G sur k et montrer qu'elles ont même caractère.

(b) Donner la liste des kG-modules simples et des kG-modules indécomposables de type fini. (Indication : on pourra observer que $kG \cong k[X]/(X^q - 1)$.)

(c) Décrire les kG-modules indécomposables projectifs de type fini.

Master of Sciences, Mathematics
Introduction to representation theory
Person in charge: Pierre Baumann

Université Louis Pasteur, Strasbourg
Year 2008–2009

Exam

Documents allowed. Electronic communication devices prohibited. Duration: 3 hours.

Exercice 1. Let G be a finite group. For $g \in G$, one denotes by $\varphi(g)$ the number of pairs $(x, y) \in G^2$ such that $g = xyx^{-1}y^{-1}$. One denotes the set of all complex irreducible characters of G by $\mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}(G)$. The aim of the exercise is to prove the following formula, due to Frobenius:

$$\varphi(g) = |G| \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}(G)} \frac{\zeta(g)}{\zeta(1)}. \tag{$*$}$$

One enumerates the conjugacy classes in G: $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_s$. It is known that for each $i \in \{1, \ldots, s\}$, there exists a unique $i^* \in \{1, \ldots, s\}$ such that $\mathfrak{C}_{i^*} = \{g^{-1} \mid g \in \mathfrak{C}_i\}$. One denotes the cardinality of $\mathfrak{C}_i$ by h_i and one sets $C_i = \sum_{g \in \mathfrak{C}_i} g$, an element of the group algebra $\mathbf{C}G$.

(a) Show the following equalities in the group algebra:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) g = \frac{1}{|G|} \sum_{(x,y) \in G^2} xyx^{-1}y^{-1} = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{h_i} C_i C_{i^*}.$$

(b) Let ζ be an irreducible complex character of the group G. Show that

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta(g)\varphi(g) = \frac{|G|}{\zeta(1)}.$$

(Hint: do not forget that an irreducible representation has a central character.)

(c) Observe that φ is a class function and show the formula $(*)$.

Exercice 2. Let k be a field and A be a finite-dimensional k-algebra. For $a \in A$, one denotes by $\mathrm{tr}_{A/k}(a)$ the trace of the left multiplication $x \mapsto ax$ of A into itself. Thus $\mathrm{tr}_{A/k}$ is a linear form on the k-vector space A.

(a) Show that the bilinear form $T : (a, b) \mapsto \mathrm{tr}_{A/k}(ab)$ on A is symmetric.

(b) Show that the Jacobson radical of A is contained in the kernel of $\mathrm{tr}_{A/k}$.

(c) Show that if T is non-degenerate, then A is a semi-simple k-algebra.

Exercice 3. Let k be a field and A be a k-algebra· One considers an exact sequence

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0 \tag{$**$}$$

between three A-modules. We know that if $(**)$ is split, then $M \cong L \oplus N$. We are looking for a partial converse to this fact.

To this end, one makes the following supplementary assumptions: A is finite-dimensional over k, the three A-modules L, M et N are finitely generated, and $M \cong L \oplus N$.

(a) Justify that the three k-vector spaces $\mathrm{Hom}_A(N, L)$, $\mathrm{Hom}_A(N, M)$ et $\mathrm{Hom}_A(N, N)$ are finite-dimensional and show the equality

$$\dim \mathrm{Hom}_A(N, M) = \dim \mathrm{Hom}_A(N, L) + \dim \mathrm{Hom}_A(N, N).$$

(b) Show that the sequence of k-vector spaces

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(N, L) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(N,f)} \mathrm{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(N,g)} \mathrm{Hom}_A(N, N) \to 0$$

is exact.

(c) Show that the exact sequence $(**)$ is split.

Exercice 4. Let G be a group and k be a field. One considers an exact sequence

$$0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n \to 0$$

of kG-modules, each one being finite-dimensional over k. One denotes the character of M_i by χ_{M_i}. Show that in the space $\mathrm{cf}_k(G)$ of k-valued class functions on G, one has

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \chi_{M_i} = 0.$$

Exercice 5. Let A be a ring, and let M and N be two A-modules. Show that the socle of $M \oplus N$ is the direct sum of the socle of M and the socle of N: $\mathrm{soc}(M \oplus N) = (\mathrm{soc}\, M) \oplus (\mathrm{soc}\, N)$.

Exercice 6. Let p be a prime number and n be a positive integer. Let k be a field of characteristic p and G be a cyclic group of order p^n. One denotes the k-algebra of the group G by kG. One sets $q = p^n$. One recalls that the equality $X^q - 1 = (X - 1)^q$ holds in $k[X]$.

(a) Find two inequivalent representations of degree 2 of G over k and show that they have the same character.

(b) Give the list of all simple kG-modules and the list of all finitely generated indecomposable kG-modules. (Hint: note that $kG \cong k[X]/(X^q - 1)$.)

(c) Describe the finitely generated indecomposable projective kG-modules.

Corrigé

Exercice 1.

(a) La première des deux égalités demandées est évidente. Soit $y \in \mathfrak{C}_i$. L'application $x \mapsto xyx^{-1}$ de G dans G a pour image $\mathfrak{C}_i$, chaque élément de cette image ayant exactement $|C_G(y)|$ antécédents. Dans l'algèbre du groupe, on a donc

$$\sum_{x \in G} xyx^{-1} = |C_G(y)|\ C_i = \frac{|G|}{h_i}\ C_i,$$

d'où

$$\frac{1}{|G|} \sum_{(x,y) \in G^2} xyx^{-1}y^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{s} \sum_{y \in \mathfrak{C}_i} \left(\sum_{x \in G} xyx^{-1} \right) y^{-1} = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{h_i} C_i \sum_{y \in \mathfrak{C}_i} y^{-1} = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{h_i} C_i C_{i^*}.$$

(b) Soit $n = \zeta(1)$ le degré du caractère et soit $X : G \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$ une représentation matricielle dont ζ est le caractère. Par linéarité, prolongeons X en un homomorphisme d'algèbres de $\mathbf{C}G$ dans $\mathbf{Mat}_n(\mathbf{C})$ et appelons ω le caractère central de X. Appliquant X à l'égalité du (a), nous obtenons

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) X(g) = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{h_i} \omega(C_i) \omega(C_{i^*}) I,$$

où I est la matrice identité de taille n. Prenant les traces, nous obtenons

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \zeta(g) = \sum_{i=1}^{s} \frac{n}{h_i} \omega(C_i) \omega(C_{i^*}).$$

Par ailleurs, prenant la trace de l'égalité $X(C_i) = \omega(C_i) I$, on obtient $h_i \zeta_i = n\omega(C_i)$, où ζ_i est la valeur de ζ sur $\mathfrak{C}_i$. De même, $h_i \zeta_{i^*} = n\omega(C_{i^*})$, puisque $h_i = h_{i^*}$. Les relations d'orthogonalité entre les caractères donnent alors

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{n}{h_i} \omega(C_i) \omega(C_{i^*}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{s} h_i \zeta_i \zeta_{i^*} = \frac{|G|}{n} = \frac{|G|}{\zeta(1)}.$$

(c) Soit α un automorphisme de G et soit $g \in G$. Alors $(x, y) \mapsto (\alpha(x), \alpha(y))$ envoie bijectivement $\{(x, y) \in G^2 \mid xyx^{-1}y^{-1} = g\}$ sur $\{(x', y') \in G^2 \mid x'y'x'^{-1}y'^{-1} = \alpha(g)\}$. On en déduit $\varphi(g) = \varphi(\alpha(g))$. Le cas particulier de cette égalité pour α un automorphisme intérieur de G signifie que φ est une fonction de classe.

Introduisons le produit scalaire hermitien $(?, ?)_G$ sur l'algèbre $\mathrm{cf}_{\mathbf{C}}(G)$ des fonctions de classe sur G. Les caractères irréductibles de G formant une base orthonormée, nous pouvons écrire le développement

$$\varphi = \sum_{\zeta \in \mathrm{Irr}_{\mathbf{C}}(G)} (\zeta, \varphi)_G\ \zeta.$$

Comme φ est à valeurs réelles, nous avons

$$(\zeta, \varphi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\zeta(g)} \varphi(g) = \overline{\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \zeta(g) \varphi(g)} = \frac{|G|}{\zeta(1)},$$

d'après la question précédente. Regroupant tout cela, nous obtenons $(*)$.

Exercice 2.

(a) Pour $a \in A$, appelons $L_a : A \to A$ la multiplication à gauche par a. Alors $L_a \circ L_b = L_{ab}$ et $L_b \circ L_a = L_{ba}$ ont même trace. Cela signifie que $T(ab) = T(ba)$.

(b) L'algèbre A étant de dimension finie sur k, c'est un anneau artinien. Son radical est donc nilpotent. Soit a un élément du radical de Jacobson de A. Alors a est nilpotent, donc L_a est nilpotent, donc L_a est de trace nulle. (On peut justifier la dernière étape en disant que les valeurs propres de L_a sur la clôture algébrique de k sont toutes nulles, ou que dans une base convenable, la matrice de L_a est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale.) Ainsi $\operatorname{tr}_{A/k}(a) = \operatorname{tr} L_a = 0$.

Autre possibilité : soit $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{\ell-1} \subsetneq M_\ell = A$ une série de composition du A-module régulier ${}_AA$. Le radical de Jacobson de A annule chaque A-module simple, donc annule tous les sous-quotients M_i/M_{i-1}. Prenons une base $(e_1, \ldots, e_n)$ du k-espace vectoriel A telle que $(e_1, \ldots, e_{\dim M_i})$ soit une base de M_i pour chaque $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. Dans cette base, la matrice de L_a est triangulaire supérieure par blocs, le i-ième bloc diagonal de cette matrice décrivant l'action de a sur le sous-quotient M_i/M_{i-1}. Si a appartient au radical de Jacobson de A, alors tous ces blocs diagonaux sont nuls, et donc la matrice est de trace nulle, c'est-à-dire $\operatorname{tr}_{A/k}(a) = \operatorname{tr} L_a = 0$.

(c) Supposons que T soit non-dégénérée. Soit a un élément du radical de Jacobson. Pour tout $b \in A$, le produit ab appartient au radical de Jacobson, donc $T(a, b) = \operatorname{tr}_{A/k}(ab) = 0$. L'hypothèse de non-dégénérescence implique alors $a = 0$. Ainsi $J(A) = \{0\}$. Joint au fait que A est un anneau artinien, cela entraîne que A est semi-simple.

Exercice 3.

(a) Chaque puissance A^n du A-module régulier est de dimension finie sur k. Les A-modules L, M et N étant de type fini, ce sont des quotients d'un A^n, et ils sont donc de dimension finie sur k. On en déduit que les k-espaces vectoriels $\operatorname{Hom}_k(N, L)$, $\operatorname{Hom}_k(N, M)$ et $\operatorname{Hom}_k(N, N)$ sont de dimension finie. Il en est donc de même de leurs sous-espaces vectoriels $\operatorname{Hom}_A(N, L)$, $\operatorname{Hom}_A(N, M)$ et $\operatorname{Hom}_A(N, N)$.

Supposons que $M \cong L \oplus N$. Alors

$$\operatorname{Hom}_A(N, M) \cong \operatorname{Hom}_A(N, L) \oplus \operatorname{Hom}_A(N, N),$$

par additivité du foncteur $\operatorname{Hom}_A(N, ?)$. Prenant les dimensions sur k, on obtient

$$\dim \operatorname{Hom}_A(N, M) = \dim \operatorname{Hom}_A(N, L) + \dim \operatorname{Hom}_A(N, N).$$

(b) En appliquant à (**) le foncteur exact à gauche $\operatorname{Hom}_A(N, ?)$, on obtient la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(N, L) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(N,f)} \operatorname{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(N,g)} \operatorname{Hom}_A(N, N).$$

La dimension de l'image de $\operatorname{Hom}_A(N, g)$ est

$$\begin{aligned}
\dim \operatorname{im} \operatorname{Hom}_A(N, g) &= \dim \operatorname{Hom}_A(N, M) - \dim \ker \operatorname{Hom}_A(N, g) \\
&= \dim \operatorname{Hom}_A(N, M) - \dim \operatorname{im} \operatorname{Hom}_A(N, f) \\
&= \dim \operatorname{Hom}_A(N, M) - \dim \operatorname{Hom}_A(N, L) \\
&= \dim \operatorname{Hom}_A(N, N).
\end{aligned}$$

Cela prouve la surjectivité de $\operatorname{Hom}_A(N, g)$.

(c) En particulier, il existe $u \in \operatorname{Hom}_A(N, M)$ tel que $\mathrm{id}_N = \operatorname{Hom}_A(N, g)(u) = g \circ u$. C'est la définition de $(**)$ est scindée.

Exercice 4. Donnons des noms aux homomorphismes de notre suite exacte

$$0 \to M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} M_n \to 0$$

et cassons cette dernière en suites exactes courtes en introduisant les images $N_i = \operatorname{im} f_i$. On dispose alors de suites exactes courtes

$$0 \to N_i \to M_i \to N_{i+1} \to 0$$

pour chaque $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, puisque $N_i \subseteq M_i$ et que

$$M_i/N_i = M_i/\operatorname{im} f_i = M_i/\ker f_{i+1} \cong \operatorname{im} f_{i+1} = N_{i+1}.$$

On sait que l'existence de ces suites exactes courtes entraîne l'égalité des caractères $\chi_{M_i} = \chi_{N_i} + \chi_{N_{i+1}}$ (théorème 4.1.5.3 (ii) du cours). Il vient ainsi $\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i \chi_{M_i} = (-1)^{n-1}\chi_{N_n} - \chi_{N_1}$. Par ailleurs, f_1 induit un isomorphisme entre M_0 et N_1, d'où $\chi_{M_0} = \chi_{N_1}$. De plus, f_n est surjectif, d'où $M_n = N_n$ et $\chi_{M_n} = \chi_{N_n}$. Au total, on a bien $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \chi_{M_i} = 0$.

Exercice 5. On regarde M et N comme des sous-modules de $M \oplus N$. Certainement $\operatorname{soc} M$ est un sous-module complètement réductible de M, donc de $M \oplus N$; cela entraîne que $\operatorname{soc} M \subseteq \operatorname{soc}(M \oplus N)$. De même, $\operatorname{soc} N \subseteq \operatorname{soc}(M \oplus N)$, et donc $(\operatorname{soc} M) \oplus (\operatorname{soc} N) \subseteq \operatorname{soc}(M \oplus N)$.

Pour l'autre sens, on considère un sous-module simple S de $M \oplus N$. Appelons p et q les projections de $M \oplus N$ sur M et N, respectivement. Alors $p(S)$ est soit nul, soit un sous-module simple de M. Dans les deux cas, $p(S)$ est inclus dans $\operatorname{soc} M$. De même, $q(S)$ est inclus dans $\operatorname{soc} N$. Maintenant, tout élément $x \in M \oplus N$ s'écrit $x = p(x) + q(x)$, ce qui montre que S est inclus dans $p(S) \oplus q(S)$. On voit ainsi que $S \subseteq p(S) \oplus q(S) \subseteq (\operatorname{soc} M) \oplus (\operatorname{soc} N)$. On en déduit $\operatorname{soc}(M \oplus N) \subseteq (\operatorname{soc} M) \oplus (\operatorname{soc} N)$, puisque par définition, $\operatorname{soc}(M \oplus N)$ est la somme des sous-modules simples de $M \oplus N$.

Autre rédaction possible pour la réciproque : appelons p et q les projections de $M \oplus N$ sur M et N, respectivement ; appelons i et j les injections de M et N dans $M \oplus N$, respectivement. Le module $X = \operatorname{soc}(M \oplus N)$ est complètement réductible. Les modules $p(X)$ et $q(X)$, qui sont des quotients de X, sont donc complètement réductibles (proposition 1.3.1.4 ou exemple 1.3.3.3 du cours), d'où $p(X) \subseteq \operatorname{soc} M$ et $q(X) \subseteq \operatorname{soc} N$. La relation $\mathrm{id}_{M \oplus N} = i \circ p + j \circ q$ entraîne alors

$$X \subseteq i(p(X)) + j(q(X)) \subseteq i(\operatorname{soc} M) + j(\operatorname{soc} N) = (\operatorname{soc} M) \oplus (\operatorname{soc} N).$$

Exercice 6. Soit g un générateur de G.

(a) Une représentation de G de degré 2 est un homomorphisme de groupes $\pi : G \to \mathbf{GL}_2(k)$. Un tel homomorphisme est déterminé par la donnée de la matrice $M = \pi(g)$, laquelle doit être d'ordre divisant q. Mais l'équation $M^q = I$ s'écrit aussi $(M - I)^q = 0$. On voit ainsi que M

ne possède que 1 pour valeur propre. Ainsi M est semblable sur k à une matrice triangulaire avec des 1 sur la diagonale. À changement de base près, il y a deux possibilités :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

on obtient ainsi deux représentations inéquivalentes π_1 et π_2. Pour chaque $n \in \mathbf{Z}$, on a alors

$$\pi_1(g^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \pi_2(g^n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les caractères de ces représentations sont donc tous deux égaux à la fonction constante $g^n \mapsto 2$.

(b) La question (a) suggère de ramener la question (b) à un problème de réduction d'endomorphisme. Procédons de façon abstraite. Le générateur g du groupe G engendre également l'algèbre kG. L'unique homomorphisme d'algèbres $\varphi : k[X] \to kG$ qui envoie X sur g est donc surjectif. Le polynôme $X^q - 1$ est dans le noyau de φ, car $g^q = 1$. L'idéal de $k[X]$ engendré par ce polynôme $X^q - 1$ est de codimension q, égale à la dimension de l'algèbre kG. L'application $\overline{\varphi} : k[X]/(X^q - 1) \to kG$ obtenue en factorisant φ est ainsi un homomorphisme surjectif entre deux espaces vectoriels de même dimension : c'est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels, et donc un isomorphisme d'algèbres. Un kG-module est donc un $k[X]/(X^q - 1)$-module, c'est-à-dire un $k[X]$-module dont l'annulateur contient $(X^q - 1)$. Un tel module est nécessairement de torsion.

Puisque k est de caractéristique p, $X^q - 1 = (X - 1)^q$ dans $k[X]$. Il s'agit donc de classifier les $k[X]$-modules simples et indécomposables de type fini dont l'annulateur contient $(X - 1)^q$. La réponse est donnée dans le cours, exemple 1.2.4.1 (2) et théorème 1.2.3.5 : les modules cherchés sont les $k[X]/\mathfrak{p}$ et $k[X]/\mathfrak{p}^n$, avec $\mathfrak{p}$ idéal premier non-nul et $n \geq 1$. La condition sur l'annulateur signifie que $(X - 1)^q \in \mathfrak{p}^n$; elle impose que $\mathfrak{p}$ soit l'idéal engendré par le polynôme $X - 1$ et que $1 \leq n \leq q$.

Revenons au groupe. Nous connaissons a priori une représentation simple de G, celle donnée par le caractère trivial $g \mapsto 1$. Cette représentation correspond à l'homomorphisme d'algèbres

$$\varepsilon : \sum_{h \in G} a_h h \mapsto \sum_{h \in G} a_h$$

de kG dans k. L'annulateur de ce module est bien évidemment $\ker \varepsilon$; c'est un hyperlan de kG (appelé idéal d'augmentation). L'isomorphisme $\overline{\varphi}$ envoie l'idéal d'augmentation $\ker \varepsilon$ sur l'annulateur $(X - 1)$ du $k[X]/(X^q - 1)$-module simple.

Les $k[X]/(X^q - 1)$-modules indécomposables de type fini sont les $k[X]/(X - 1)^n$, avec $1 \leq n \leq q$. Revenant à l'algèbre du groupe, nous voyons que ce sont les $kG/(\ker \varepsilon)^n$, avec $1 \leq n \leq q$.

(c) La question (b) affirme notamment que le kG-module régulier à gauche est indécomposable. Pour simplifier, posons $A = kG$. Soit P un A-module projectif indécomposable de type fini. Alors P est facteur direct d'une puissance A^n du A-module régulier. Écrivant $A^n = P \oplus Q$ et appliquant le théorème de Krull-Schmidt, nous voyons que $P \cong A$. (L'utilisation du théorème de Krull-Schmidt est ici licite, car tous les modules concernés sont noethériens et artiniens, puisque de dimension finie sur k.) Bref il y a un seul kG-module projectif indécomposable de type fini, à savoir le kG-module régulier.

Une autre méthode pour aborder cette question (c) consiste à faire appel à la proposition 2.3.1.2 du cours. Par ailleurs, l'hypothèse « de type fini » est en fait inutile, voir la remarque après la proposition 2.3.1.2 ou le §2.3.4 des notes de cours.