

Examen — 4 mai 2020 à 9h

- **Accusez réception du sujet** par mail à chapoton@math.unistra.fr et p.baumann@unistra.fr.
- Les copies seront photographiées ou scannées et envoyées par mail aux deux adresses indiquées ci-dessus **au plus tard le 4 mai 2020 à 19h**. Veillez à utiliser un format de fichier standard (JPEG, PDF, ...) Si le fichier est trop volumineux pour passer par mail, utilisez un service de partage de fichiers tel wetransfer.com. Nous accuserons réception de votre envoi.
- Vous pouvez vous coordonner pour la recherche de la solution des exercices. En revanche, **nous vous demandons un travail de rédaction individuel**. La rédaction, et ce qu'elle révélera de votre compréhension du cours, sera notre principale base d'évaluation.
- Le sujet est prévu pour être un examen d'environ six heures. Vous disposez de davantage de temps car les contraintes actuelles peuvent occasionner des situations gênant la concentration.
- Vous pouvez utiliser librement les théorèmes du cours, mais les résultats obtenus en travaux dirigés doivent être redémontrés.
- L'énoncé de l'exercice 6 est long, ce qui peut être source de difficultés lorsque l'on travaille sur écran. Le cas échéant, utilisez les fonctionnalités de votre logiciel PDF pour surligner les points importants.

Exercice 1. Soit k un corps algébriquement clos. Pour chacun des quatre énoncés suivants, sélectionner (en justifiant votre choix) la meilleure borne possible parmi les cinq options suivantes :

\sqrt{n} , n , n^2 , $(n^2 + 1)^n$, il n'existe pas de borne dépendant seulement de n .

- (a) Pour toute k -algèbre A de dimension n , le nombre de classes d'isomorphisme de A -modules simples est majoré par ...
- (b) Pour toute k -algèbre A de dimension n , la dimension sur k des A -modules simples est majorée par ...
- (c) Pour toute k -algèbre A de dimension n , le nombre de classes d'isomorphisme de A -modules indécomposables est majoré par ...
- (d) Pour toute k -algèbre A de dimension n , la dimension sur k des A -modules indécomposables est majorée par ...

Exercice 2. Soit A un anneau, soit M et N deux A -modules. Prouver que

$$\text{soc}(M \oplus N) = \text{soc } M \oplus \text{soc } N \quad \text{et} \quad \text{rad}(M \oplus N) = \text{rad } M \oplus \text{rad } N.$$

Note : aucune hypothèse n'est faite sur A .

L'exercice suivant est tiré du livre d'Auslander, Reiten et Smalø (chap. III, exerc. 6).

Exercice 3. Soit

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}.$$

On vérifie sans difficulté que A est une sous-algèbre de l'algèbre des matrices 4×4 à coefficients complexes.

- Trouver le radical de Jacobson \mathfrak{r} de A .
- Prouver que A est basique.
- Trouver une famille d'éléments de \mathfrak{r} dont l'image dans $\mathfrak{r}/\mathfrak{r}^2$ est une base de ce dernier espace.
- Écrire explicitement A comme quotient $\mathbb{C}Q/I$ de l'algèbre des chemins d'un carquois Q par un idéal admissible I .

Exercice 4. On considère l'ordre partiel Q_5 défini par la figure 1 ci-dessous, où l'élément 5 est le minimum et les éléments 1 et 2 sont les maxima.

On rappelle que l'algèbre d'incidence d'un ordre partiel peut être identifiée avec l'algèbre du carquois formé par le diagramme de Hasse modulo les relations d'égalité entre toute paire de chemins de A vers B pour tous sommets A et B .

Utiliser l'algorithme du tricot pour construire le carquois d'Auslander-Reiten et les vecteurs de dimension de tous les modules indécomposables sur l'algèbre d'incidence de l'ordre partiel Q_5 .

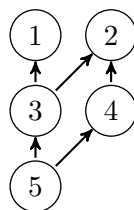


FIGURE 1 – Le diagramme de Hasse de l'ordre partiel Q_5 .

Exercice 5. Soit k un corps algébriquement clos et A une k -algèbre basique de dimension finie. Soit S_1, \dots, S_n des représentants des différentes classes d'isomorphisme de A -modules simples.

Soit Q le carquois de Gabriel de A : l'ensemble des sommets de Q est $\{1, \dots, n\}$ et le nombre de flèches dans Q allant du sommet i au sommet j est égal à la dimension du k -espace vectoriel $\text{Ext}_A^1(S_i, S_j)$.

Démontrer que l'ensemble des blocs de A est en bijection avec l'ensemble des composantes connexes de Q . Les questions ci-dessous indiquent une voie de démonstration possible, mais toute variante sera acceptée.

- (a) Prouver l'existence d'un module indécomposable de tête S_i et de socle S_j lorsque le carquois contient (au moins) une flèche $i \rightarrow j$.
- (b) Dédire de (a) que si deux sommets i et j appartiennent à la même composante connexe de Q , alors les deux modules simples S_i et S_j appartiennent au même bloc de A .
- (c) Justifier l'existence d'une décomposition $1 = e_1 + \dots + e_n$ de l'unité en somme d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux telle que pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, le module S_i soit isomorphe à la tête du module projectif indécomposable Ae_i .

À chaque composante connexe C de Q , on associe la somme ε_C des e_i pour i dans C . La somme des ε_C est certainement égale à 1, puisqu'on a simplement regroupé les termes de la somme $1 = e_1 + \dots + e_n$ par paquets selon les composantes connexes de Q .

- (d) Prouver que les ε_C sont des idempotents deux à deux orthogonaux et que chaque ε_C appartient au centre de A . (Indication : utiliser le théorème de Gabriel.)
- (e) Prouver que chaque idéal $A\varepsilon_C$ est somme de blocs de A .
- (f) Prouver que si les sommets i et j n'appartiennent pas à la même composante connexe de Q , alors les modules Ae_i et Ae_j appartiennent à des blocs différents de A .
- (g) Démontrer la réciproque de (b) : si deux modules simples S_i et S_j appartiennent au même bloc de A , alors les deux sommets i et j appartiennent à la même composante connexe de Q .

Exercice 6. Soit k un corps. Dans cet exercice, toutes les algèbres et tous les modules sont supposés de dimension finie, même lorsque cela n'est pas explicitement indiqué.

I. Algèbres héréditaires

Soit k un corps. Une k -algèbre A est dite héréditaire (à gauche¹) si chaque sous-module de chaque A -module à gauche projectif est projectif.

Dans toute cette partie, on se donne une k -algèbre A héréditaire.

- (a) Soit M un A -module indécomposable, P un A -module projectif, et $f : M \rightarrow P$ un homomorphisme non-nul. Prouver que f est injectif et que M est projectif.

1. Une k -algèbre de dimension finie est héréditaire à gauche si et seulement si elle l'est à droite; cela se prouve en utilisant la dualité D . La précision « à gauche » est donc inutile.

On note $K_0(A)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des A -modules de longueur finie²; la classe dans $K_0(A)$ d'un A -module M est désignée par le symbole $[M]$. On introduit également le foncteur de dualité $D = \text{Hom}_k(-, k)$, le foncteur de Nakayama $\nu = D \text{Hom}_A(-, A)$ et la translation d'Auslander-Reiten $\tau = D \text{Tr}$.

Pour chaque A -module à gauche M , l'espace $\text{Hom}_A(M, A)$ possède une structure de A -module à droite : si $f \in \text{Hom}_A(M, A)$ et $a \in A$, alors $f \cdot a$ est donné $(f \cdot a)(x) = f(x)a$ pour tout $x \in M$. On peut alors munir l'espace dual $D \text{Hom}_A(M, A)$ d'une structure de A -module à gauche en posant $a \cdot \xi = (f \mapsto \xi(f \cdot a))$ pour $\xi \in D \text{Hom}_A(M, A)$ et $a \in A$. En dérivant par rapport à la variable M , l'espace $D \text{Ext}_A^1(M, A)$ se trouve lui aussi muni d'une structure de A -module à gauche³.

- (b) Prouver que $\text{Ext}_A^2(M, A) = 0$ pour tout A -module M .
- (c) Dédire de la question (b) l'existence d'un endomorphisme de groupe $c : K_0(A) \rightarrow K_0(A)$ tel que $c([M]) = [D \text{Ext}_A^1(M, A)] - [D \text{Hom}_A(M, A)]$ pour tout A -module M .
- (d) Prouver que si M est un A -module, alors $\tau(M) \cong D \text{Ext}_A^1(M, A)$ ⁴.

Nous pouvons ainsi réécrire la définition de c sous la forme

$$c([M]) = [\tau(M)] - [\nu(M)]$$

pour tout A -module M .

- (e) Soit M un A -module indécomposable. Établir que :
 - si M est projectif, alors $\tau(M) = 0$ et $\nu(M) \neq 0$;
 - si M n'est pas projectif, alors $\tau(M) \neq 0$ et $\nu(M) = 0$.
 (Remarque : le comportement de τ est un résultat du cours; il est rappelé ici pour mémoire et ne nécessite pas de justification.)

II. Une version faible d'un théorème de Brenner et Butler

Dans cette partie, on se donne un graphe Γ sans boucle ni arête multiple⁵, dont les sommets sont numérotés de 1 à n . On munit le réseau \mathbb{Z}^n de sa base canonique $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, de la forme bilinéaire $(,)$ définie par

$$(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont reliés par une arête,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et des involutions $s_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ définies par $s_i(x) = x - (x, \varepsilon_i) \varepsilon_i$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

2. En cours, la notation $G_0(A)$ avait été utilisée.

3. Nous n'attendons pas de vous une compréhension de ces définitions, qui n'ont pas été vues en cours. Vous pourrez donc omettre les vérifications relatives à ces structures dans les questions (c) et (d).

4. Plus précisément, le A -module $D \text{Ext}_A^1(M, A)$ est sans facteur direct injectif et l'isomorphisme annoncé a lieu dans la catégorie stable $A\text{-mod}$ et est naturel en M . Nous n'attendons cependant pas que vous rentriez dans ces détails, d'autant que le cas particulier des algèbres héréditaires présente une subtilité additionnelle concernant les morphismes dans $A\text{-mod}$.

5. Cette hypothèse n'est pas indispensable, mais elle simplifie les notations.

Soit k un corps et Q un carquois obtenu en orientant les arêtes de Γ . La k -algèbre kQ des chemins de Q est héréditaire. On suppose que Q est acyclique.

- (a) Démontrer qu'il est possible de numérotter les sommets de Γ de sorte que $i > j$ chaque fois qu'il y a dans Q une arête de i vers j .

Pour la suite de l'exercice, on adopte une telle numérotation des sommets.

On définit par récurrence une suite $Q^{(0)}, Q^{(1)}, \dots, Q^{(n)}$ de carquois de la façon suivante : $Q^{(0)} = Q$, et pour chaque $p \in \{1, \dots, n\}$, le carquois $Q^{(p)}$ est obtenu en renversant l'orientation dans $Q^{(p-1)}$ de toutes les arêtes incidentes au sommet p . Tous ces carquois partagent le même graphe sous-jacent, à savoir Γ , et ne diffèrent que par l'orientation. De plus, dans le processus qui fait passer de $Q^{(0)}$ à $Q^{(n)}$, chaque arête a été retournée deux fois, donc est revenue à son orientation initiale ; par conséquent $Q^{(n)} = Q^{(0)}$.

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$ et chaque $p \in \{0, \dots, n\}$, on note $S_i^{(p)}$ le $kQ^{(p)}$ -module simple de dimension 1, concentré sur le sommet i . On note $P_i^{(p)}$ la couverture projective de ce module et $I_i^{(p)}$ son enveloppe injective.

Il n'est pas difficile de vérifier que pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, le sommet p est un puits de $Q^{(p-1)}$ et une source de $Q^{(p)}$. Il s'ensuit que $P_p^{(p-1)} = S_p^{(p-1)}$ et $I_p^{(p)} = S_p^{(p)}$.

On a introduit en cours les foncteurs de réflexion

$$\Sigma_p : kQ^{(p-1)\text{-mod}} \rightarrow kQ^{(p)\text{-mod}} \quad \text{et} \quad \Sigma_p^* : kQ^{(p)\text{-mod}} \rightarrow kQ^{(p-1)\text{-mod}}$$

qui réalisent des équivalences de catégories

$$\left\{ \begin{array}{l} Y \in kQ^{(p-1)\text{-mod}} \text{ tel que} \\ \text{Hom}_{kQ^{(p-1)}}(Y, S_p^{(p-1)}) = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\Sigma_p} \left\{ \begin{array}{l} X \in kQ^{(p)\text{-mod}} \text{ tel que} \\ \text{Hom}_{kQ^{(p)}}(X, S_p^{(p)}) = 0 \end{array} \right\}.$$

On note $C : kQ\text{-mod} \rightarrow kQ\text{-mod}$ le foncteur composé $\Sigma_n \circ \dots \circ \Sigma_2 \circ \Sigma_1$.

- (b) Vérifier que pour $i > p$, on a $\Sigma_p(P_i^{(p-1)}) = P_i^{(p)}$.
(c) Justifier que si Z est un kQ -module indécomposable, alors $C(Z)$ est le kQ -module nul si Z est projectif, et est un kQ -module indécomposable sinon.

L'analogie pour les enveloppes injectives de la relation établie dans la question (b) est que pour $i < p$, on a $\Sigma_p^*(I_i^{(p)}) = I_i^{(p-1)}$.

On désigne le vecteur-dimension d'un kQ -module M par $\underline{\dim} M$. L'application vecteur-dimension se factorise à travers le groupe de Grothendieck $K_0(kQ)$ et induit un isomorphisme $[M] \mapsto \underline{\dim} M$ de ce groupe sur \mathbb{Z}^n .

- (d) On simplifie les notations $P_i^{(0)}$ et $I_i^{(0)}$ en P_i et I_i . Établir l'égalité

$$(s_n \cdots s_2 s_1)(\underline{\dim} P_i) = -\underline{\dim} I_i$$

pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$.

- (e) Soit c l'endomorphisme de $K_0(kQ)$ défini dans la question I (c). Prouver que pour tout kQ -module Z indécomposable non-projectif, on a

$$[C(Z)] = c([Z]) \quad \text{et} \quad \underline{\dim} \tau(Z) = (s_n \cdots s_2 s_1)(\underline{\dim} Z).$$

(Indication : utiliser une résolution projective.)

III. Une propriété des carquois de type Dynkin

Nous continuons avec les notations de la question précédente. En particulier, k est un corps, Q est un carquois dont les sommets sont numérotés de 1 à n de sorte que $i > j$ chaque fois qu'il y a dans Q une arête de i vers j , et pour $i \in \{1, \dots, n\}$, la couverture projective du kQ -module simple concentré sur le sommet i est notée P_i .

- (a) Prouver que si $\text{Hom}_A(P_i, P_j) \neq 0$, alors $i \leq j$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que le graphe Γ sous-jacent au carquois Q est un graphe de Dynkin. Le théorème de Gabriel affirme qu'à isomorphisme près, il y a un nombre fini de kQ -modules indécomposables de dimension finie.

Pour chaque entier $p \geq 1$, on note \bar{p} l'unique $j \in \{1, \dots, n\}$ congru à p modulo n . La preuve de Bernstein, Gelfand et Ponomarev du théorème de Gabriel repose sur l'observation que pour chaque kQ -module indécomposable Z , il existe un entier $a \geq 1$ tel que

$$\underbrace{(\Sigma_{\bar{a}} \circ \cdots \circ \Sigma_{\bar{2}} \circ \Sigma_{\bar{1}})}_{a \text{ facteurs}}(Z) = 0.$$

On note $a(Z)$ le plus petit entier $a \geq 1$ vérifiant cette propriété. La preuve de Bernstein et al. établit également que deux kQ -modules indécomposables Z' et Z'' sont isomorphes si et seulement si $a(Z') = a(Z'')$.

On peut reformuler le résultat établi dans la question II (c) ainsi : un kQ -module indécomposable Z est projectif si et seulement si $a(Z) \leq n$. Plus précisément $a(P_i) = i$, et pour chaque kQ -module indécomposable non-projectif Z , on a l'égalité $a(C(Z)) = a(Z) - n$, où comme précédemment $C = \Sigma_n \circ \cdots \circ \Sigma_1$.

Par ailleurs, le fait que les foncteurs de réflexion établissent des équivalences partielles de catégories entraîne que si X et Y sont deux kQ -modules indécomposables non-projectifs, alors

$$\text{Hom}_{kQ}(X, Y) \cong \text{Hom}_{kQ}(C(X), C(Y)).$$

- (b) Prouver que si X et Y sont deux kQ -modules indécomposables tels que $a(X) > a(Y)$, alors $\text{Hom}_{kQ}(X, Y) = 0$. (Indication : utiliser les questions I (a) et III (a).)

Considérons deux décompositions en somme directe de sous-modules indécomposables d'un kQ -module M :

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r = N_1 \oplus \cdots \oplus N_r.$$

On suppose les termes de ces sommes rangés de sorte que

$$a(M_1) \geq a(M_2) \cdots \geq a(M_r) \quad \text{et} \quad a(N_1) \geq a(N_2) \cdots \geq a(N_r).$$

Cette condition garantit que les modules d'une même classe d'isomorphisme apparaissent consécutivement dans la suite (M_1, M_2, \dots, M_r) . On note S l'ensemble des $s \in \{1, \dots, r-1\}$ tels que M_s n'est pas isomorphe à M_{s+1} .

(c) Démontrer que pour chaque $s \in S$, on a

$$M_1 + M_2 + \dots + M_s = N_1 + N_2 + \dots + N_s$$

(égalité entre deux sous-modules de M).

(d) Prouver que si X et Y sont deux kQ -modules indécomposables tels que $a(X) \leq a(Y)$, alors $\text{Ext}_{kQ}^1(X, Y) = 0$.