

Université Strasbourg I — Louis Pasteur
U.F.R. de mathématique et d'informatique

Année 1998

Numéro

THÈSE

Pour obtenir le grade de docteur de l'Université Louis Pasteur

Discipline : Mathématiques

Présentée et soutenue publiquement le 11 février 1998 par

Pierre BAUMANN

Quelques applications des R -matrices à la
structure des algèbres enveloppantes quantifiées

Devant le jury : M. Peter LITTELMANN : rapporteur interne
M. Patrick POLO
M. Nikolai RESHETIKHIN : rapporteur externe
M. Marc ROSSO : directeur de thèse
M. Wolfgang SOERGEL : rapporteur externe

Copyright partiels © Academic Press (1997), © Springer-Verlag (1997).
Les droits de reproduction pour le chapitre 1 appartiennent à Academic Press.
Les droits de reproduction pour le chapitre 2 appartiennent à Springer-Verlag.

*A ma mère,
à la mémoire de mon père.*

Remerciements

J'ai étudié des livres, des thèses, et aussi des articles. Dix versions, cent façons de remercier ceux à qui nous, futurs docteurs, Iznogoud sans le vouloir, devons notre titre. La version américaine : des remerciements sont dûs à untel, et à ma source de financement¹. La version japonaise : ce travail n'aurait jamais vu le jour sans les inestimables conseils de...

La version italienne : je remercie mon directeur de thèse pour sa patience et son aide quotidienne...

La version française : je voudrais remercier mon directeur de thèse pour sa patience, sa gentillesse et sa disponibilité.

Je pourrais dire tout cela à Marc, et bien plus. Tellement plus...

J'ai crié à qui voulait l'entendre la joie que m'a donnée la constitution de mon jury de thèse. Je suis fier d'être examiné par P. Littellmann, P. Polo, N. Yu. Reshetikhin et W. Soergel, et remercie les rapporteurs de leur gentillesse et du sérieux de leurs jugements.

J'ai eu d'excellents professeurs, qui ne m'ont dégoûté d'aucune discipline en particulier ni des mathématiques en général. Je voudrais saluer chaleureusement ceux qui ont marqué ma jeunesse : Mmes Abellan et Créhange, et J. Yebbou.

Je voudrais remercier les personnes qui m'ont encadré à Strasbourg, le personnel scientifique et le personnel administratif. Au risque d'être pris pour un haricot, je manifesterai mes préférences pour (outre les deux barbus déjà cités) M. Audin, L. Blasco et C. Kassel, pour leurs conseils et leurs timidités.

J'ai une grosse pensée pour les amis qui, malgré l'éloignement et mon manque de soins, n'ont cessé de m'accorder leur confiance et leur sympathie : Emmanuel et Stéphane, Marc et Solange, Bertrand et Nicolas, Létitia et Mélinda, Yves et Renaud, Elisabeth et Olivier, Jérôme² et Georges, Gilles et Louise, Pascal et Jean-Marc, Hélène et Laurent.

Merci enfin à Maman, Julie et Mimi.

Voilà, j'espère n'avoir oublié personne³. Coucou à mes camarades de thèse strasbourgeois, matheux ou non, et aux post-docs du labo, italiens ou non.

1. Ministère de l'Éducation Nationale et à suffixe variable.

2. Qui m'a donné le conseil de la décennie : « sisi, il faut absolument que tu fasses ta thèse avec Marc. »

3. Ah si. A. Joseph m'a envoyé de longs commentaires sur une version antérieure du chapitre 2, lesquels m'ont montré la nécessité du chapitre zéro.

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	9
0 Notations et conventions	15
0.1 Corps de base	15
0.2 Algèbres de Hopf co-quasi-triangulaires	15
0.2.1 Algèbres de Hopf	15
0.2.2 Catégories tensorielles tressées	16
0.2.3 Algèbres de Hopf co-quasi-triangulaires	17
0.2.4 Constructions de Reshetikhin et Semenov-Tian-Shansky	18
0.2.5 Algèbres co-quasi-triangulaires factorisables	19
0.3 Algèbres enveloppantes quantifiées	23
0.3.1 Définition de $U_q(\mathfrak{g})$	23
0.3.2 Résultats standard	24
0.3.3 R -matrice de $U_q(\mathfrak{g})$	24
0.3.4 Structures co-quasi-triangulaires sur $\mathcal{A}_q(G)$	25
0.3.5 Considérations galoisiennes	26
0.4 Présentations F.R.T.	26
0.5 Conclusion	30
1 On the center of quantized enveloping algebras	31
Introduction	31
1.1 Ribbons and central constructions	32
1.1.1 Ribbon Hopf algebras	32
1.1.2 Drinfeld's construction of central elements	32
1.1.3 Reshetikhin's construction of central elements	35
1.2 The center of $U_q(\mathfrak{g})$	37
1.2.1 Joseph and Letzter's construction	37
1.2.2 The Harish-Chandra map	37
1.2.3 Expression of the $z_M^{(1)}$	38
1.2.4 Expression of the $z_M^{(p)}$	39
1.3 An application to a theorem of Faddeev, Reshetikhin and Takhtadzhyan	41

2	Classification of bicovariant differential calculi on quantum groups	45
	Introduction	45
2.1	Co-quasi-triangular Hopf algebras	46
2.1.1	Some definitions	46
2.1.2	Definition of a co-quasi-triangular Hopf algebra	47
2.1.3	The maps I and J	48
2.1.4	A related construction	49
2.2	The case of the quantum coordinate algebra	50
2.2.1	Notations	50
2.2.2	Factorizability of $\mathcal{A}_q(G)$	51
2.2.3	A technical result on the representation ring	54
2.2.4	Classification of some ideals of $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$	56
2.2.5	Classification of some right ideals of $\mathcal{A}_q(G)$	58
2.3	Differential calculi on quantum groups	59
2.3.1	Woronowicz's definition	59
2.3.2	A construction of bicovariant differential calculi	60
2.3.3	The link with the classification theorem	61
3	Dualité de Schur–Weyl et R-matrices trigonométriques pour $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$	63
	Introduction	63
3.1	La dualité de Schur–Weyl pour $U_q(\mathfrak{gl}_n)$	64
3.1.1	$U_q(\mathfrak{gl}_n)$	64
3.1.2	$\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$	67
3.1.3	Dualité de Schur–Weyl	67
3.1.4	$U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modules polynomiaux et foncteurs de troncation	68
3.2	Modules sur l'algèbre $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$	69
3.2.1	Algèbres enveloppantes affines quantifiées	69
3.2.2	Classification de Chari et Pressley	70
3.3	Modules sur l'algèbre de Hecke affine de type A	73
3.3.1	$\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$, modules de la série principale, et opérateurs d'entrelacement	73
3.3.2	Classification des modules sur l'algèbre de Hecke affine	74
3.3.3	Filtration de Rogawski	78
3.3.4	L'anneau $\widehat{\mathcal{R}}$ de Zelevinsky	80
3.4	Le foncteur de Schur–Weyl pour $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$	81
3.4.1	La représentation polynomiale tensorielle et le foncteur de Schur–Weyl	81
3.4.2	Représentations d'évaluation	84
3.4.3	Modules standard et opérateurs d'entrelacement	89
3.4.4	Correspondance pour les modules irréductibles	91
3.4.5	Procédure de fusion et R -matrices trigonométriques	95
3.5	Représentations polynomiales de $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$	97
3.5.1	$U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$	98
3.5.2	Morphismes d'évaluation	103

3.5.3	Le foncteur de Schur–Weyl pour $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$	106
3.A	Annexe	111
3.A.1	Présentation des résultats	112
3.A.2	Présentation des programmes	115
4	Extension d’un résultat de Lusztig et de Levendorskii et Soibelman	143
4.1	Action du q -groupe de Weyl	143
4.1.1	q -Groupe de Weyl	143
4.1.2	Enoncé du résultat	144
4.2	Construction de la dualité de Howe	145
4.2.1	La puissance symétrique	146
4.2.2	Comparaison avec la dualité de Schur–Weyl	153
	Bibliographie	155

Introduction

Ce rapport présente une synthèse des travaux que j'ai effectués dans le cadre de mon doctorat.

Sur le centre des algèbres enveloppantes quantifiées

Soient G un groupe algébrique complexe simple, connexe, simplement connexe et \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Drinfeld et Jimbo ont construit une algèbre de Hopf $U_q(\mathfrak{g})$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}(v)$, appelée algèbre enveloppante quantifiée de \mathfrak{g} (avec $q = v^2$). Il existe dans (une complétion de) le produit tensoriel $U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})$ un élément R_{12} , appelé R -matrice universelle de $U_q(\mathfrak{g})$, dont les propriétés dictent des contraintes sur la structure d'algèbre de $U_q(\mathfrak{g})$. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_q(G)$ du dual de $U_q(\mathfrak{g})$, engendré par les coefficients des représentations de dimensions finies et de type 1 de $U_q(\mathfrak{g})$, est l'analogie quantique de l'algèbre des fonctions régulières sur G : en tant que cogèbres, les deux espaces sont isomorphes. La R -matrice de $U_q(\mathfrak{g})$ est alors vue comme la forme bilinéaire sur $\mathcal{A}_q(G)$ définie par $(a, b) \mapsto \langle a \otimes b, R_{12} \rangle$.

Les propriétés de la R -matrice se traduisent alors en disant que $\mathcal{A}_q(G)$, munie de cette forme bilinéaire, est une \mathbb{K} -algèbre de Hopf co-quasi-triangulaire. Quelques unes des constructions présentées dans cette thèse restent valables dans ce cadre. Pour simplifier, je me restreindrai dans cette introduction au cas des algèbres enveloppantes quantifiées, et considérerai la version de $U_q(\mathfrak{g})$ dans laquelle la partie toroïdale est l'algèbre du groupe des poids entiers.

Définition 1 : On appelle I l'application $(\mathcal{A}_q(G) \rightarrow U_q(\mathfrak{g}), a \mapsto \langle a \otimes \text{id}, R_{21}R_{12} \rangle)$.

Cette application I a été introduite par Reshetikhin et Semenov-Tian-Shansky.

Théorème 1 :

- a) $\mathcal{A}_q(G)$ étant muni de la structure de $U_q(\mathfrak{g})$ -module à gauche donnée par : $x \cdot a = \langle x, S(a_{(1)})a_{(3)} \rangle a_{(2)}$, et $U_q(\mathfrak{g})$ étant muni de la structure de $U_q(\mathfrak{g})$ -module adjoint à gauche, I est un morphisme de $U_q(\mathfrak{g})$ -modules.
- b) I est injectif et son image est la sous-algèbre $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ des éléments ad-finis de $U_q(\mathfrak{g})$.
- c) Si $x \in F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ et $y \in U_q(\mathfrak{g})$, la forme bilinéaire ad-invariante de Rosso est donnée sur (x, y) par $\langle I^{-1}(x), S^{-1}(y) \rangle$.

Ce théorème permet de relier la forme de Rosso à la R -matrice. Il permet également de montrer l'identité entre trois constructions du centre de $U_q(\mathfrak{g})$: celle de Drinfeld, celle de Rosso, et celle de Joseph et Letzter. (Cette correspondance était précédemment démontrée à l'aide du morphisme de Harish-Chandra.) La preuve du théorème repose essentiellement sur les résultats de Joseph et Letzter.

Dans l'algèbre de convolution $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}_q(G), U_q(\mathfrak{g}))$, l'application I est inversible. Pour $p \in \mathbb{Z}$, I^{*p} est donnée par $(\mathcal{A}_q(G) \rightarrow U_q(\mathfrak{g}), a \mapsto \langle a \otimes \text{id}, (R_{21}R_{12})^p \rangle)$, et est également un morphisme de $U_q(\mathfrak{g})$ -modules. La trace quantique dans le $U_q(\mathfrak{g})$ -module simple de dimension finie de plus haut poids λ est un élément invariant du $U_q(\mathfrak{g})$ -module $\mathcal{A}_q(G)$: son image par I^{*p} est donc un élément du centre de $U_q(\mathfrak{g})$, que je note $\mathcal{Z}_{\lambda+\rho}^{(p)}$. Ici, ρ est la demi-somme des racines positives de \mathfrak{g} , de sorte que $\lambda + \rho$ est un poids dominant régulier. Appelons W le groupe de Weyl, w_0 l'élément de plus grande longueur, $\varepsilon : W \rightarrow \{\pm 1\}$ la fonction signature, et $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire W -invariant sur le réseau des poids de \mathfrak{g} (utilisé pour construire $U_q(\mathfrak{g})$). On prolonge la fonction ($\lambda \mapsto \mathcal{Z}_{\lambda}^{(p)}$) à tout le réseau des poids de \mathfrak{g} de manière W -antiinvariante.

Théorème 2: Pour tout poids λ et tout entier p , on a :

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w) v^{2p(\lambda|w\rho)} \mathcal{Z}_{\lambda+w\rho}^{(p)} = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) v^{2(\lambda|w\rho)} \mathcal{Z}_{p\lambda+w\rho}^{(1)}.$$

Ces relations caractérisent les éléments $\mathcal{Z}_{\lambda}^{(p)}$.

Ce théorème permet de montrer un théorème de Reshetikhin, Faddeev et Takhtadzhyan :

Théorème 3: Si \mathfrak{g} est de type classique et de rang ℓ , et si ϖ_1 est le plus haut poids du \mathfrak{g} -module naturel, alors la sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les éléments $\mathcal{Z}_{\varpi_1}^{(1)}, \dots, \mathcal{Z}_{\varpi_1}^{(\ell)}$ est de codimension 1, 2, ou 4 dans le centre de $U_q(\mathfrak{g})$, selon que \mathfrak{g} est de type A ou C, B, ou D.

La construction des éléments $\mathcal{Z}_{\lambda+\rho}^{(p)}$ est due à Reshetikhin. C'est un cas particulier d'une généralisation des invariants de nœuds.

Classification des calculs différentiels bicovariants sur un groupe quantique

$G, \mathfrak{g}, U_q(\mathfrak{g}), F_{\ell}(U_q(\mathfrak{g})), \mathcal{A}_q(G)$ et I désignent les mêmes objets que dans la première partie, et $\ker \varepsilon$ désigne l'idéal d'augmentation de $\mathcal{A}_q(G)$.

Contrairement à l'algèbre des fonctions régulières sur G , $\mathcal{A}_q(G)$ n'est pas une algèbre commutative. Pour étudier l'espace de géométrie non-commutative défini par $\mathcal{A}_q(G)$, on cherche à utiliser des techniques homologiques. Le premier pas dans la construction d'un analogue du complexe de De Rham est la définition d'une différentielle sur $\mathcal{A}_q(G)$. En exigeant des propriétés d'invariance sous l'action de G , on se ramène (suivant Woronowicz) à chercher les ensembles $\mathcal{R} \subseteq \ker \varepsilon \subseteq \mathcal{A}_q(G)$ des fonctions nulles et plates au point unité de G .

Définition 2: Un calcul différentiel bicovariant sur $\mathcal{A}_q(G)$ est la donnée d'un idéal à droite \mathcal{R} de $\mathcal{A}_q(G)$, de codimension finie, inclus dans $\ker \varepsilon$, stable par l'action adjointe de $U_q(\mathfrak{g})$. (L'action adjointe de $U_q(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{A}_q(G)$ est définie au théorème 1 a) de cette introduction.)

La définition de l'espace tangent en géométrie algébrique conduit, dans le cas classique, à prendre $\mathcal{R} = (\ker \varepsilon)^2$. Dans le cas quantique, ce choix n'est pas viable, car $(\ker \varepsilon)^2$ n'est pas stable par l'action adjointe de $U_q(\mathfrak{g})$. La classification de l'ensemble des idéaux \mathcal{R} répondant à la définition de Woronowicz est conséquence des deux résultats suivants :

Proposition 1: I induit une bijection entre :

- l'ensemble des idéaux \mathcal{R} répondant à la définition ci-dessus ;
- l'ensemble des idéaux bilatères de $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$, stables par l'action adjointe de $U_q(\mathfrak{g})$, de codimensions finies, inclus dans l'idéal d'augmentation de $U_q(\mathfrak{g})$.

Théorème 4: Les idéaux bilatères de $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$, stables par l'action adjointe de $U_q(\mathfrak{g})$, et de codimensions finies, sont exactement les annulateurs (de la restriction à $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$) des $U_q(\mathfrak{g})$ -modules de dimensions finies.

La proposition est conséquence du théorème 1 et de ce que $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ est une sous-algèbre assez grosse de $U_q(\mathfrak{g})$. Le théorème 4 est une conséquence des travaux de Joseph et Letzter sur les annulateurs des modules de Verma pour $U_q(\mathfrak{g})$. La preuve que j'en donne évite le recours à cette technologie: elle repose sur l'étude du centre de $U_q(\mathfrak{g})$ et de la restriction de la forme de Rosso à ce centre, associée à un lemme d'indépendance algébrique.

La classification des calculs différentiels bicovariants sur $\mathcal{A}_q(G)$ se ramène donc à l'étude (de la restriction à $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$) des représentations de $U_q(\mathfrak{g})$: celles-ci sont classifiées par un plus haut poids λ et un caractère χ du groupe P/Q (P étant le réseau des poids de \mathfrak{g} et Q le réseau des poids radiciels). Je décris le calcul différentiel obtenu dans le cas où soit λ , soit χ est trivial.

Dualité de Schur–Weyl et R -matrices trigonométriques associées aux représentations de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$

(Dans cette partie, le paramètre v est un nombre complexe non nul qui n'est pas racine de l'unité.)

Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie complexe simple de dimension finie, et si V est un $U_q(\mathfrak{g})$ -module de dimension finie et de type 1, l'image de la R -matrice de $U_q(\mathfrak{g})$ dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(V) \otimes \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ donne lieu à un isomorphisme $U_q(\mathfrak{g})$ -linéaire $\widehat{R}^{VV} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$, qui satisfait à l'équation des tresses. Ces opérateurs ne dépendent que du paramètre q , alors qu'il est important, dans certains problèmes de physique, de disposer de solutions $\widehat{R}^{VV}(z)$ dépendant d'un paramètre supplémentaire $z \in \mathbb{C}^\times$ (dit « spectral »).

Drinfeld a montré que l'utilisation de l'algèbre enveloppante quantifiée de l'algèbre affine non-tordue $\widetilde{\mathfrak{g}}$ associée à \mathfrak{g} permet de trouver des solutions de l'équation de Yang–Baxter à paramètre spectral dans toute représentation V de $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$. Malheureusement, les résultats

publiés ne traitent que les cas où V est relativement simple : les calculs des opérateurs $\widehat{R}^{\text{VV}}(z)$ sont difficiles, malgré l'existence d'une formule explicite (due à Damiani) pour la R -matrice universelle de $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$.

La source des difficultés du problème est la complexité de la théorie des représentations de dimensions finies de $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$. Par exemple, Chari et Pressley ont montré que le produit tensoriel de deux $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ -modules simples de dimensions finies et de type 1 n'est pas nécessairement complètement réductible. Le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ est toutefois plus accessible que les autres, car trois méthodes sont disponibles pour construire des $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules de dimensions finies.

La procédure de « fusion », introduite par Kulish, Reshetikhin et Sklyanin, m'a ainsi permis de calculer la R -matrice à paramètre spectral dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ et où V est (l'extension à $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_3)$ de) le q -analogue du \mathfrak{sl}_3 -module adjoint : je retrouve les formules que Hou, Hou, Ma et Yin avaient obtenues en utilisant les q -coefficients de Clebsch–Gordan. Ce résultat montre que les opérateurs $\widehat{R}^{\text{VV}}(z)$ n'engendrent pas le commutant dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(V \otimes V)$ de l'image de $U_q(\mathfrak{sl}_3)$, et apporte une réponse à une question de Jones liée à la théorie des invariants. Les calculs restent cependant très lourds et nécessitent des moyens informatiques.

Une deuxième construction de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules utilise les morphismes d'évaluation $\text{ev}_z : U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n) \rightarrow U_q(\mathfrak{gl}_n)$ (pour $z \in \mathbb{C}^\times$), introduits par Jimbo. Le calcul de la R -matrice à paramètre spectral se ramène alors au calcul de l'image de la R -matrice universelle de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ par $\text{ev}_z \otimes \text{ev}_1$. Je montre à cet égard que ces applications d'évaluation envoient les vecteurs de la base de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ construite par Faddeev, Reshetikhin et Takhtadzhyan sur les vecteurs de la base de Poincaré–Birkhoff–Witt de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$. Le changement nécessaire pour passer de cette base-là à celle utilisée pour écrire la R -matrice universelle a été décrit par Ding et Frenkel, et conduit malheureusement à des calculs très compliqués.

La troisième méthode consiste à utiliser la dualité de Schur–Weyl. Dans le cas qui nous occupe, elle prend la forme d'un foncteur de la catégorie des modules de dimensions finies sur une algèbre de Hecke affine de type A vers la catégorie des $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules de dimensions finies et de type 1. Ce foncteur a été introduit et étudié par Chari et Pressley. Notre principal résultat dans cette partie raffine leurs énoncés, et utilise la description (due à Rogawski) des modules sur l'algèbre de Hecke affine. Pour l'énoncer, je noterai $\widehat{\mathcal{H}}_d$ l'algèbre de Hecke affine de type A_{d-1} et V le $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module naturel.

Théorème 5 :

- a) Le foncteur de Schur–Weyl envoie un $\widehat{\mathcal{H}}_d$ -module irréductible sur le $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module zéro ou sur un $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module simple ; en faisant varier d , on obtient ainsi tous les $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules simples de dimensions finies et de type 1.
- b) Pour tout $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module M simple (de type 1 et) de dimension finie, il existe un entier $d \geq 1$, des nombres complexes $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{C}^\times$ et une application $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -linéaire $\psi : \text{ev}_{x_1}^* V \otimes \dots \otimes \text{ev}_{x_d}^* V \rightarrow \text{ev}_{x_d}^* V \otimes \dots \otimes \text{ev}_{x_1}^* V$ tels que M soit isomorphe à l'image de ψ .

Le résultat réellement obtenu est un peu plus précis et permet de montrer que :

- l’anneau de Grothendieck de la catégorie des représentations de dimensions finies (de type 1) de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ est un anneau commutatif de polynômes (en une infinité de variables) ;
- la procédure de fusion permet de construire tous les $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules simples de dimensions finies (et de type 1), ainsi que les R -matrices trigonométriques associées.

Ces résultats sont « bien connus » des physiciens théoriciens, mais n’étaient pas prouvés dans cette généralité.

Extension d’un résultat de Lusztig et de Levendorskii et Soibelman

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe. Lusztig, Levendorskii et Soibelman ont construit un homomorphisme du groupe des tresses associé au groupe de Weyl de \mathfrak{g} dans le groupe des automorphismes de $U_q(\mathfrak{g})$. Cette action du groupe des tresses peut aussi se voir dans tout $U_q(\mathfrak{g})$ -module M de dimension finie, et cela en définit une représentation sur le sous-espace de poids zéro de M .

Lusztig, Levendorskii et Soibelman ont remarqué le fait suivant. Si \mathfrak{g} est de type ADE et si M est le $U_q(\mathfrak{g})$ -module qui est le q -déformé de la représentation adjointe de \mathfrak{g} , alors les images dans cette représentation des générateurs T_i correspondant aux réflexions simples vérifient des relations quadratiques. Plus précisément, la représentation du q -groupe de Weyl sur le sous-espace de poids zéro de M se factorise à travers l’algèbre de Hecke de même type que \mathfrak{g} .

Théorème 6 : Dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$, le même résultat est vrai pour tous les modules M associés à un diagramme de Young à n boîtes.

La preuve de ce théorème est très simple et permet de relier ce résultat à la dualité de Schur–Weyl quantique, rappelée dans la troisième partie. Elle repose sur la quantification de la théorie des paires duales de Howe dans le cas le plus simple (dualité (GL_m, GL_n)).

Le plan de la thèse suit celui de la présentation ci-dessus. Les chapitres 1 à 4 sont indépendants, les notations générales étant rassemblées dans les paragraphes 0.1, 0.2.1, 0.3.1 et 0.3.2. Les chapitres 1 et 2 sont tirés des articles (en anglais) [Ba] et [BS] ; ils n’ont pas été traduits. Il importe à ce sujet de préciser que les résultats du chapitre 2 ont été obtenus en collaboration avec F. Schmitt.

Je ne rappelle pas dans cette thèse les motivations qui ont conduit à la notion d’algèbre de Hopf (co-) quasi-triangulaire. J’invite le lecteur intéressé par une introduction au sujet à consulter par exemple le livre [Ks]. J’ai toutefois ajouté un chapitre « zéro » au texte : j’y développe quelques constructions auxiliaires sur les algèbres de Hopf co-quasi-triangulaires, et y détaille des calculs absents du chapitre 2. Dans ce chapitre « zéro » enfin, je présente deux exemples d’algèbres de Hopf co-quasi-triangulaires. Le premier exemple est donné par les q -déformations des algèbres des fonctions régulières sur les groupes algébriques

simples connexes simplement connexes ; il constitue le principal objet d'étude de ce mémoire. Le second exemple est donné par les « constructions F.R.T. ». Ce chapitre « zéro » est certainement assez difficile à suivre, et je déconseille au lecteur de s'y aventurer sans motivation.

Chapitre 0

Notations et conventions

Les paragraphes 0.1, 0.2.1, 0.3.1 et 0.3.2 résument les notations communes aux quatre chapitres de ce mémoire. Les autres paragraphes essaient d’apporter un certain nombre de clarifications. Dans les paragraphes 0.2.2 à 0.2.5, j’explicité quelques calculs et quelques constructions concernant les algèbres de Hopf co-quasi-triangulaires : ces paragraphes doivent être lus en parallèle avec la partie 2.1, où se trouvent les définitions nécessaires. La partie 0.3 veut justifier quelques uns des choix faits dans les chapitres 1 et 2. Enfin, la partie 0.4 montre en quoi les « constructions F.R.T. » sont des exemples universels d’algèbres co-quasi-triangulaires.

0.1 Corps de base

Quand il sera question d’algèbres de Hopf (co-) quasi-triangulaires sans autre précision, le corps de base sera noté \mathbb{K} . Les algèbres enveloppantes quantifiées dépendent dans leur définition d’un paramètre v : dans ce cas, le corps de base sera le corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(v)$. Dans le chapitre 3, on étudie des algèbres enveloppantes affines quantifiées : l’étude de leurs représentations de dimensions finies nécessitent de prendre un corps de base algébriquement clos, et pour simplifier ce sera \mathbb{C} , v désignant alors un nombre complexe non nul qui n’est pas une racine de l’unité. On posera $q = v^2$. (Ces notations ne sont pas cohérentes avec celles du chapitre 1, car la lettre v est la notation traditionnelle pour un autre objet. C’est alors q qui prendra la place de v .)

0.2 Algèbres de Hopf co-quasi-triangulaires

0.2.1 Algèbres de Hopf

Soit \mathbb{K} un corps et H une \mathbb{K} -algèbre de Hopf. On notera H^* l’algèbre duale de H et $H^{*\text{res}}$ le dual restreint de H . L’algèbre H^* est augmentée, $H^{*\text{res}}$ est le sous-espace vectoriel de H^* engendré par les coefficients des représentations linéaires de dimensions finies de H , et $H^{*\text{res}}$ est une \mathbb{K} -algèbre de Hopf (voir [Sw]).

Je noterai systématiquement Δ , ε , S le coproduit, l'augmentation et l'antipode d'une algèbre de Hopf, et utiliserai librement la notation de Sweedler pour le coproduit : $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$. Un morphisme d'algèbres sera toujours unitaire, un morphisme de cogèbres sera toujours coïunitaire.

Si H est une algèbre de Hopf, on peut parler de H -modules à gauche : on dispose alors du H -module trivial (défini par l'augmentation de H), du produit tensoriel de H -modules (grâce au coproduit de H) et du dual d'un H -module (via l'antipode de H). De manière duale, on peut définir les notions de H -comodule à gauche, de comodule trivial, de produit tensoriel de comodules et de comodule dual. Il y a les notions correspondantes à droite. Pour tout ceci, voir par exemple [Sw].

Un H -module particulièrement intéressant est le H -module à gauche (respectivement à droite) adjoint : la loi est donnée par $a \cdot b = a_{(1)} b S(a_{(2)})$ (resp. $b \cdot a = S(a_{(1)}) b a_{(2)}$). Les invariants de ces deux modules constituent le centre de H .

0.2.2 Catégories tensorielles tressées

Dans ce paragraphe, je décris des constructions qui font partie du folklore des algèbres (co-) quasi-triangulaires, des catégories tensorielles tressées, etc. Ces résultats ne sont pas nécessaires pour comprendre les chapitres 1 à 4, mais donnent une idée de ce qu'on peut faire avec une R -matrice. Les idées exposées ici sont tirées de [Dr4], [Re2], [RS] et [Ye], ou m'ont été transmises oralement par C. Kassel ou M. Rosso. Dans ce paragraphe, j'adopte les notations et les définitions du chapitre 2 et de la partie 2.1.

Soit H une \mathbb{K} -algèbre de Hopf. Le paragraphe 2.1.1 définit la notion de H -module croisé à droite et en donne deux exemples. Un troisième exemple de tel module est donné par la structure de H -module trivial et de H -comodule trivial sur \mathbb{K} . On peut faire des variations sur cet exemple en utilisant des éléments groupoïdaux centraux de H ou de $H^{*\text{res}}$. Un grand intérêt de la catégorie des H -modules croisés est que c'est une catégorie tensorielle tressée. Cela signifie que si M et N sont deux objets de la catégorie, il existe des produits tensoriels $M \otimes N$ et $N \otimes M$ (définis au paragraphe 2.1.1) et un morphisme naturel $\sigma_{MN} : M \otimes N \rightarrow N \otimes M$, tels que si M, N et P sont trois modules croisés, on ait l'équation des tresses $(\sigma_{NP} \otimes \text{id}_M)(\text{id}_N \otimes \sigma_{MP})(\sigma_{MN} \otimes \text{id}_P) = (\text{id}_P \otimes \sigma_{MN})(\sigma_{MP} \otimes \text{id}_N)(\text{id}_M \otimes \sigma_{NP})$ dans $\text{Hom}(M \otimes N \otimes P, P \otimes N \otimes M)$. Dans notre cas, le tressage s'écrit $\sigma_{MN} : (m \otimes n \mapsto n_{(0)} \otimes (m \cdot n_{(1)}))$. Ces faits ont été remarqués par Woronowicz [Wo].

La proposition suivante sera utilisée au paragraphe 0.2.4 :

Proposition 0.1 *Soient A une bigèbre, B une algèbre de Hopf, et $\delta : A \rightarrow B^{*\text{res}}$ un morphisme de cogèbres antihomomorphisme d'algèbres. On munit la cogèbre produit tensoriel $A \otimes B$ de la multiplication : $(a \otimes b)(a' \otimes b') = \langle \delta(a'_{(3)}), b_{(3)} \rangle \langle \delta(a'_{(1)}), S(b_{(1)}) \rangle (aa'_{(2)} \otimes b_{(2)}b')$. On obtient alors une bigèbre, notée $A \tilde{\otimes}_{\delta} B$. On dispose de morphismes de bigèbres ($A \rightarrow A \tilde{\otimes}_{\delta} B, a \mapsto a \otimes 1$) et ($B \rightarrow A \tilde{\otimes}_{\delta} B, b \mapsto 1 \otimes b$). Si A est une algèbre de Hopf, $A \tilde{\otimes}_{\delta} B$ en est une.*

Si H est une algèbre de Hopf et si l'on choisit de prendre, dans la proposition 0.1,

$B = H$, A la bigèbre $H^{*\text{res}}$ munie de la multiplication opposée, et $\delta = \text{id}$, alors la bigèbre $A \tilde{\otimes}_{\delta} B$ obtenue est le double de Drinfeld $\mathcal{D}(H)$ de H .

0.2.3 Algèbres de Hopf co-quasi-triangulaires

La notion d'algèbre de Hopf co-quasi-triangulaire est définie au paragraphe 2.1.2. Je détaille ici quelques calculs laissés au lecteur du chapitre 2. Si (\mathcal{A}, γ) est une algèbre de Hopf co-quasi-triangulaire, on définit $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ par l'équation $\langle \delta(a), b \rangle = \langle \gamma(b), S(a) \rangle$. Le fait que δ soit à valeurs dans $\mathcal{A}^{*\text{res}}$ et soit un homomorphisme de cogèbres vient de ce que γ est un antihomomorphisme d'algèbres :

$$\begin{aligned} \langle \delta(a), bc \rangle &= \langle \gamma(bc), S(a) \rangle \\ &= \langle \gamma(c)\gamma(b), S(a) \rangle \\ &= \langle \gamma(c), S(a_{(2)}) \rangle \langle \gamma(b), S(a_{(1)}) \rangle \\ &= \langle \delta(a_{(1)}) \otimes \delta(a_{(2)}), b \otimes c \rangle. \end{aligned}$$

Un calcul analogue prouve que δ est un antihomomorphisme d'algèbres. L'application γ vérifie la relation de commutation de Baxter :

$$a_{(1)}b_{(1)}\langle \gamma a_{(2)}, b_{(2)} \rangle = \langle \gamma a_{(1)}, b_{(1)} \rangle b_{(2)}a_{(2)}.$$

Soient $a, c \in \mathcal{A}$. Ecrivons le coproduit itéré de c sous la forme $c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$, substituons $S(c_{(2)})$ à b dans la relation de commutation de Baxter pour γ , et multiplions le résultat obtenu par $c_{(1)}$ à gauche et $c_{(3)}$ à droite :

$$c_{(1)}a_{(1)}\langle \gamma a_{(2)}, S(c_{(2)}) \rangle = \langle \gamma a_{(1)}, S(c_{(1)}) \rangle a_{(2)}c_{(2)}.$$

On montre ainsi que δ vérifie aussi la relation de commutation de Baxter. La définition des algèbres c.q.t. adoptée est équivalente à celle de Larson et Towber [LT] : elle revient à se donner une forme bilinéaire sur \mathcal{A} qui possède certaines propriétés. La version « fonctionnelle » remonte au moins à Drinfeld [Dr2], qui note γ et δ sous la forme l^+ et l^- . On la retrouve également chez d'autres auteurs (voir [LT] pour des références bibliographiques complémentaires).

Exemple. Soient Q un groupe abélien libre et $(\cdot | \cdot) : Q \otimes Q \rightarrow \mathbb{Z}$ une forme \mathbb{Z} -bilinéaire symétrique. On suppose cette dualité non-dégénérée : elle donne alors une injection du groupe Q dans le groupe $P = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(Q, \mathbb{Z})$. On note \mathcal{A} la $\mathbb{C}(v)$ -algèbre du groupe Q , et pour $\alpha \in Q$, on note K_{α} l'élément de \mathcal{A} correspondant. Tout élément $\varpi \in P$ définit un caractère $v^{(\varpi| -)} : (\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}(v), K_{\alpha} \mapsto v^{(\varpi|\alpha)})$. On définit les applications $\gamma : (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*, K_{\alpha} \mapsto v^{(\alpha| -)})$ et $\delta : (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*, K_{\alpha} \mapsto v^{-(\alpha| -)})$. Alors (\mathcal{A}, γ) est une algèbre de Hopf c.q.t. et δ en est l'application associée. Cet exemple est dû à Rosso.

Si U est une algèbre de Hopf quasi-triangulaire (voir [Dr2]), sa R -matrice universelle $R_{12} = \sum_j \alpha_j \otimes \beta_j$ appartient à une complétion de $U \otimes U$. Si $\mathcal{A} \subseteq U^{*\text{res}}$ est une sous-algèbre

de Hopf convenable, R_{12} induit une forme bilinéaire sur \mathcal{A} , et \mathcal{A} devient une algèbre de Hopf c.q.t. Dans un tel contexte, si M et N sont deux U -modules à gauche de dimensions finies, et si les coefficients des représentations linéaires de U qu'ils définissent sont dans \mathcal{A} , alors on peut voir M et N comme des \mathcal{A} -comodules à droite, et donc (proposition 2.2) comme des \mathcal{A} -modules croisés à droite. Le tressage de Woronowicz qu'on déduit de cette structure est celui donné par la R -matrice: $\sigma_{MN}(m \otimes n) = \sum_j \beta_j n \otimes \alpha_j m$.

Les calculs menant à la proposition suivante s'obtiennent en transposant mot pour mot ceux de Drinfeld [Dr4] et de Reshetikhin [Re2]:

Proposition 0.2 *Soit (\mathcal{A}, γ) une algèbre de Hopf c.q.t. On définit deux formes linéaires sur \mathcal{A} par: $u : a \mapsto \langle \gamma S(a_{(1)}), a_{(2)} \rangle$ et $S(u) = u \circ S : a \mapsto \langle \gamma S(a_{(2)}), a_{(1)} \rangle$. Alors:*

- a) *Pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a: $S^2(a_{(1)})u(a_{(2)}) = u(a_{(1)})a_{(2)}$ dans l'algèbre \mathcal{A} . Pour tout $f \in \mathcal{A}^*$, on a: ${}^t S^2(f)u = uf$ dans l'algèbre \mathcal{A}^* .*
- b) *L'élément u est inversible dans \mathcal{A}^* , d'inverse $(\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}, a \mapsto \langle \delta S(a_{(2)}), a_{(1)} \rangle)$.*
- c) *Si $a, b \in \mathcal{A}$, on a:*

$$u(a)u(b) = u(a_{(1)}b_{(1)})\langle \gamma a_{(2)}, b_{(2)} \rangle \langle \gamma b_{(3)}, a_{(3)} \rangle = u(a_{(3)}b_{(3)})\langle \gamma a_{(1)}, b_{(1)} \rangle \langle \gamma b_{(2)}, a_{(2)} \rangle.$$

- d) *L'élément $uS(u) = S(u)u$ est central dans \mathcal{A}^* .*
- e) *L'élément $c_3 : (\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}, a \mapsto \langle \gamma a_{(1)}, a_{(5)} \rangle \langle \gamma a_{(6)}, a_{(2)} \rangle \langle \gamma a_{(3)}, a_{(7)} \rangle u(a_{(4)}))$ appartient au centre de \mathcal{A}^* .*

Dans les notations avec la R -matrice, les éléments u , u^{-1} et c_3 s'écrivent: $u = \sum_j S(\beta_j)\alpha_j$, $u^{-1} = \sum_j \beta_j S^2(\alpha_j)$ et $c_3 = \sum_{j,k,\ell} \beta_j \alpha_k \beta_\ell u \alpha_j \beta_k \alpha_\ell$. La formule du point c) de la proposition s'écrit $u \otimes u = (\Delta(u))(R_{21}R_{12}) = (R_{21}R_{12})(\Delta(u))$. On déduit de cette proposition le fait que l'antipode d'une algèbre de Hopf c.q.t. est toujours inversible (car le carré de sa transposée est une application bijective de \mathcal{A}^* dans lui-même).

0.2.4 Constructions de Reshetikhin et Semenov-Tian-Shansky

Soit (\mathcal{A}, γ) une algèbre de Hopf c.q.t. En utilisant l'application $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}}$ et la proposition 0.1, on peut construire une algèbre de Hopf $\mathcal{A} \tilde{\otimes}_\delta \mathcal{A}$. Reshetikhin et Semenov-Tian-Shansky [RS] ont remarqué que les quatre applications:

$$\begin{array}{ll} (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \tilde{\otimes}_\delta \mathcal{A}, a \mapsto a \otimes 1) & (\mathcal{A} \tilde{\otimes}_\delta \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, a \otimes b \mapsto ab) \\ (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \tilde{\otimes}_\delta \mathcal{A}, b \mapsto 1 \otimes b) & (\mathcal{A} \tilde{\otimes}_\delta \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A}), a \otimes b \mapsto \delta(a) \otimes b) \end{array}$$

sont des morphismes d'algèbres de Hopf, et que les deux applications:

$$\begin{array}{l} (\mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{A} \tilde{\otimes}_\delta \mathcal{A})^{*\text{res}}, f \otimes a \mapsto \langle \gamma(a_{(1)})f_{(1)} \otimes \delta(a_{(2)})f_{(2)}, - \rangle) \\ (\mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}}, f \otimes a \mapsto \gamma(a)f) \end{array}$$

sont des morphismes de cogèbres et des antihomomorphismes d'algèbres. Par composition, on en déduit que l'application $(\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}}, a \otimes b \mapsto \gamma(b)\delta(a))$ est un homomorphisme de cogèbres et un antihomomorphisme d'algèbres (dû à Radford, [Ra]).

Dans [RS], on trouvera également une version de l'assertion suivante. L'algèbre de Hopf $\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta} \mathcal{A}$ est c.q.t. pour les applications $\Gamma, \Delta : \mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}} \otimes \mathcal{A}^{*\text{res}} \subseteq (\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta} \mathcal{A})^*$ définies par :

$$\Gamma : (a \otimes b \mapsto \gamma(b_{(1)})\delta(a_{(1)}) \otimes \delta(b_{(2)})\delta(a_{(2)})) \quad \text{et} \quad \Delta : (a \otimes b \mapsto \gamma(b_{(1)})\gamma(a_{(1)}) \otimes \gamma(b_{(2)})\delta(a_{(2)}))$$

ou par :

$$\Gamma : (a \otimes b \mapsto \gamma(b_{(1)})\delta(a_{(1)}) \otimes \gamma(b_{(2)})\delta(a_{(2)})) \quad \text{et} \quad \Delta : (a \otimes b \mapsto \gamma(b_{(1)})\gamma(a_{(1)}) \otimes \delta(b_{(2)})\delta(a_{(2)})).$$

La preuve est une longue suite de calculs basés sur l'équation de commutation de Baxter (voir la définition 2.1).

On peut construire de manière semblable des algèbres de Hopf $\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta} \cdots \tilde{\otimes}_\delta \mathcal{A}$, telles que la multiplication $\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta n} \rightarrow \mathcal{A}$ soit un morphisme d'algèbres de Hopf. Si, par récurrence, l'algèbre $\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta(n-1)}$ est construite, on dispose des applications $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}}$ et du coproduit itéré $\mathcal{A}^{*\text{res}} \rightarrow (\mathcal{A}^{*\text{res}})^{\otimes(n-1)} \subseteq (\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta(n-1)})^*$, d'où par composition un homomorphisme de cogèbres et antihomomorphisme d'algèbres $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta(n-1)})^{*\text{res}}, a \mapsto \langle \delta a_{(1)} \otimes \cdots \otimes \delta a_{(n-1)}, - \rangle)$. La proposition 0.1 permet alors de construire l'algèbre de Hopf $\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta n}$. On peut montrer que c'est une algèbre de Hopf c.q.t.. On a des morphismes d'algèbres de Hopf :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta n}, a \mapsto 1 \otimes \cdots \otimes a \otimes \cdots \otimes 1) \\ (\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta n} \rightarrow \mathcal{A}, a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto a_1 \cdots a_n) \end{aligned}$$

Soient à présent deux entiers $m, n \geq 0$. La composition de l'application de multiplication $(\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta m} \rightarrow \mathcal{A})$, de δ , et du coproduit itéré $(\mathcal{A}^{*\text{res}} \rightarrow (\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta n})^{*\text{res}})$ est un morphisme de cogèbres et un antihomomorphisme d'algèbres. L'algèbre $(\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta m}) \tilde{\otimes} (\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta n})$ que l'on construit en appliquant la proposition 0.1 est naturellement isomorphe à l'algèbre $\mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta(m+n)}$, comme on le vérifie sur les formules explicites pour la multiplication et le coproduit. Notons $m_n : \mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta n} \rightarrow \mathcal{A}$ l'application de multiplication, avec $m_1 = \text{id}_\mathcal{A}$ et $m_0 : \mathbb{K} \rightarrow \mathcal{A}$ l'unité. Si n_1, \dots, n_k sont des entiers positifs, $m_{n_1} \otimes \cdots \otimes m_{n_k} : \mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta(n_1+\cdots+n_k)} \rightarrow \mathcal{A}^{\tilde{\otimes}_\delta k}$ est un morphisme d'algèbres de Hopf. Je ne connais pas le lien précis entre cette construction (qui répète celle de [RS]) et la procédure de « câblage » pour fabriquer des invariants de nœuds ou des R -matrices à partir de blocs plus petits (voir [Re1]).

0.2.5 Algèbres co-quasi-triangulaires factorisables

Soit (\mathcal{A}, γ) une algèbre de Hopf c.q.t., et soit $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}}$ l'application associée. Soit U la sous-algèbre de Hopf $(\text{im } \gamma)(\text{im } \delta)$ de $\mathcal{A}^{*\text{res}}$. On a défini au paragraphe 2.1.3 les applications I et $J : \mathcal{A} \rightarrow U$, ainsi que la notion d'algèbre de Hopf c.q.t. factorisable. (Ces notions sont dues à Reshetikhin et Semenov-Tian-Shansky [RS], qui appellent l'application

I « courant total ».) La proposition suivante complète la description des paragraphes 2.1.3 et 2.1.4. Comme \mathcal{A} est une cogèbre et U est une algèbre, l'espace vectoriel $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, U)$ est une algèbre pour le produit de convolution $*$ (voir le début du paragraphe 1.1.3).

Proposition 0.3 *Soient (\mathcal{A}, γ) une algèbre de Hopf c.q.t., I et J ses courants totaux.*

- a) *Les courants I et J sont inversibles dans l'algèbre de convolution $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, U)$, et leurs inverses I^{*-1} et J^{*-1} sont les courants de l'algèbre c.q.t. (\mathcal{A}, δ) .*
- b) *Les courants I et I^{*-1} ont même noyau dans \mathcal{A} et même image dans U . De même pour les courants J et J^{*-1} .*
- c) *Les algèbres c.q.t. (\mathcal{A}, γ) et (\mathcal{A}, δ) sont simultanément factorisables ou non.*
- d) *L'image de I est une sous-algèbre et un coïdéal à gauche de U ; c'en est un sous- U -module pour la structure de module adjoint à gauche (définie à la proposition 2.4). L'image de J est une sous-algèbre et un coïdéal à droite de U ; c'en est un sous- U -module pour la structure de module adjoint à droite (définie à la section 1.1.2).*

Preuve a) Soit I' le courant $(\mathcal{A} \rightarrow U, a \mapsto \delta(a_{(1)})S\gamma(a_{(2)}))$ de l'algèbre c.q.t. (\mathcal{A}, δ) . On a alors, pour tout $a \in \mathcal{A}$:

$$(I * I')(a) = I(a_{(1)})I'(a_{(2)}) = \gamma(a_{(1)})S\delta(a_{(2)})\delta(a_{(3)})S\gamma(a_{(4)}) = \gamma(a_{(1)})S\gamma(a_{(2)}) = \varepsilon(a).$$

De même, on a $(I' * I)(a) = \varepsilon(a)$, donc I et I' sont inverses l'un de l'autre dans l'algèbre de convolution $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, U)$. On procède de manière semblable pour J .

b) Soit $u \in \mathcal{A}^*$ l'élément de Drinfeld (voir la proposition 0.2). Alors pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \delta a_{(5)}, a_{(1)} \rangle \langle \delta S(a_{(3)}), a_{(2)} \rangle J(Sa_{(4)}) &= \langle \delta a_{(6)}, a_{(1)} \rangle \langle \delta S(a_{(3)}), a_{(2)} \rangle S\delta(Sa_{(5)})\gamma(Sa_{(4)}) \\ &= \langle \delta a_{(5)}, a_{(1)} \rangle \langle u^{-1}, a_{(2)} \rangle \delta(a_{(4)})\gamma(Sa_{(3)}) \\ &= \langle \delta a_{(5)}, a_{(1)} \rangle \langle u^{-1}, a_{(3)} \rangle \delta(a_{(4)})\gamma(S^{-1}a_{(2)}) \\ &= \langle \delta a_{(6)}, a_{(1)} \rangle \langle \delta S(a_{(4)}), a_{(3)} \rangle \delta(a_{(5)})S\gamma(a_{(2)}). \end{aligned}$$

En évaluant sur $b \in \mathcal{A}$ cet élément de U , on trouve :

$$\begin{aligned} \langle \delta a_{(5)}, a_{(1)} \rangle \langle \delta S(a_{(3)}), a_{(2)} \rangle \langle J(Sa_{(4)}), b \rangle &= \langle \delta a_{(6)}, a_{(1)} \rangle \langle \delta S(a_{(4)}), a_{(3)} \rangle \langle \delta(a_{(5)}), b_{(1)} \rangle \langle S\gamma(a_{(2)}), b_{(2)} \rangle \\ &= \langle \delta a_{(5)}, b_{(1)}a_{(1)} \rangle \langle \delta b_{(2)}, a_{(2)} \rangle \langle \delta S(a_{(4)}), a_{(3)} \rangle \\ &= \langle \delta a_{(5)}, a_{(2)}b_{(2)} \rangle \langle \delta b_{(1)}, a_{(1)} \rangle \langle \delta S(a_{(4)}), a_{(3)} \rangle \\ &= \langle \delta a_{(5)}, a_{(2)} \rangle \langle \delta a_{(6)}, b_{(2)} \rangle \langle \delta b_{(1)}, a_{(1)} \rangle \langle \delta S(a_{(4)}), a_{(3)} \rangle \\ &= \langle \delta(S(a_{(3)})a_{(4)}), a_{(2)} \rangle \langle \delta a_{(5)}, b_{(2)} \rangle \langle S\gamma(a_{(1)}), b_{(1)} \rangle \\ &= \langle S\gamma(a_{(1)})\delta a_{(2)}, b \rangle \\ &= \langle J^{*-1}(a), b \rangle. \end{aligned}$$

On a donc $J^{*-1}(a) = \langle \delta a_{(5)}, a_{(1)} \rangle \langle \delta S(a_{(3)}), a_{(2)} \rangle J(Sa_{(4)})$, d'où $\text{im}(J^{*-1}) \subseteq \text{im} J$. Par symétrie, $\text{im}(J^{*-1}) = \text{im} J$, puis par adjonction $\ker I = \ker(I^{*-1})$. L'égalité $\text{im}(I^{*-1}) = \text{im} I$ vient des formules $I = S \circ J \circ S$, $I^{*-1} = S \circ J^{*-1} \circ S$.

c) Le c) découle du b).

d) La proposition 2.4 montre que $(\text{im} I)$ est un sous-module de U . En utilisant cette même proposition, on calcule, pour tous $a, b \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} I(\langle \gamma S(b_{(1)}), S(a_{(1)})a_{(3)} \rangle a_{(2)}b_{(2)}) &= \langle \gamma S(b_{(1)}), S(a_{(1)})a_{(4)} \rangle \gamma(a_{(2)}b_{(2)}) S\delta(a_{(3)}b_{(3)}) \\ &= \langle \gamma S(b_{(1)}), S(a_{(1)})a_{(4)} \rangle \gamma(b_{(2)}) \gamma(a_{(2)}) S\delta(a_{(3)}) S\delta(b_{(3)}) \\ &= \gamma(b_{(2)}) I(\langle \gamma S(b_{(1)}), S(a_{(1)})a_{(3)} \rangle a_{(2)}) S\delta(b_{(3)}) \\ &= \gamma(b_{(3)}) \gamma S(b_{(2)}) I(a) S(\gamma S(b_{(1)})) S\delta(b_{(4)}) \\ &= I(a) \gamma(b_{(1)}) S\delta(b_{(2)}) = I(a) I(b), \end{aligned}$$

ce qui montre que $(\text{im} I)$ est une sous-algèbre de U . La formule facile $\Delta(I(a)) = \gamma(a_{(1)}) S\delta(a_{(3)}) \otimes I(a_{(2)})$ prouve que $(\text{im} I)$ est un coïdéal à gauche de U . On procède de manière analogue pour $\text{im} J$.

□

Le point d) de la proposition ci-dessus montre que la multiplication $(\text{im} I) \otimes (\text{im} I) \rightarrow (\text{im} I)$ est un morphisme bien défini de U -modules à gauche. On peut alors faire le produit semi-direct d'algèbres $(\text{im} I) \otimes U$. Désignant l'algèbre produit tensoriel ordinaire par $U \otimes U$, on dispose alors d'un morphisme injectif d'algèbres $((\text{im} I) \otimes U \rightarrow U \otimes U, a \otimes b \mapsto ab_{(1)} \otimes b_{(2)})$. L'image de ce morphisme est égale à celle de l'application Π du §2.1.3. Toutes les constructions du §2.1.4 peuvent être faites dans ce cadre, sans introduire $F_\ell(U)$.

Nous pouvons alors montrer un des résultats importants de [RS]:

Proposition 0.4 *Soient (\mathcal{A}, γ) une algèbre de Hopf co-quasi-triangulaire, et $I : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}}$ son courant total. L'application $\Pi : (\mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{A} \tilde{\otimes}_\delta \mathcal{A})^{*\text{res}}, f \otimes a \mapsto \gamma(a_{(1)}) f_{(1)} \otimes \delta(a_{(2)}) f_{(2)})$ est un homomorphisme de cogèbres et un antihomomorphisme d'algèbres. Si (\mathcal{A}, γ) est factorisable, cette application est injective. Si l'image de I est toute l'algèbre $\mathcal{A}^{*\text{res}}$, l'image de Π est toute l'algèbre $\mathcal{A}^{*\text{res}} \otimes \mathcal{A}^{*\text{res}} \subseteq (\mathcal{A} \tilde{\otimes}_\delta \mathcal{A})^*$.*

Preuve On déduit d'abord de la relation de commutation de Baxter que pour $a \in \mathcal{A}$ et $f \in \mathcal{A}^*$, on a:

$$\begin{aligned} \gamma a_{(1)} f_{(1)} \langle f_{(2)}, a_{(2)} \rangle &= \langle f_{(1)}, a_{(1)} \rangle f_{(2)} \gamma a_{(2)} \\ \delta a_{(1)} f_{(1)} \langle f_{(2)}, a_{(2)} \rangle &= \langle f_{(1)}, a_{(1)} \rangle f_{(2)} \delta a_{(2)} \end{aligned}$$

dans \mathcal{A}^* . Puis on calcule, dans $(\mathcal{A} \tilde{\otimes}_\delta \mathcal{A})^{*\text{res}}$, pour tous $a, b \in \mathcal{A}$ et $f, g \in \mathcal{A}^{*\text{res}}$:

$$\begin{aligned}
\Pi((f \otimes a)(g \otimes b)) &= \langle g_{(3)}, a_{(3)} \rangle \langle g_{(1)}, \mathbf{S}a_{(1)} \rangle \Pi(g_{(2)}f \otimes a_{(2)}b) \\
&= \langle g_{(4)}, a_{(4)} \rangle \langle g_{(1)}, \mathbf{S}a_{(1)} \rangle \gamma(b_{(1)})\gamma(a_{(2)})g_{(2)}f_{(1)} \otimes \delta(b_{(2)})\delta(a_{(3)})g_{(3)}f_{(2)} \\
&= \langle g_{(3)}, a_{(3)} \rangle \langle g_{(1)}, \mathbf{S}a_{(1)} \rangle \gamma(b_{(1)})\gamma(a_{(2)})g_{(2)}f_{(1)} \otimes \delta(b_{(2)})g_{(4)}\delta(a_{(4)})f_{(2)} \\
&= \langle g_{(2)}, a_{(2)} \rangle \langle g_{(1)}, \mathbf{S}a_{(1)} \rangle \gamma(b_{(1)})g_{(3)}\gamma(a_{(3)})f_{(1)} \otimes \delta(b_{(2)})g_{(4)}\delta(a_{(4)})f_{(2)} \\
&= \gamma(b_{(1)})g_{(1)}\gamma(a_{(1)})f_{(1)} \otimes \delta(b_{(2)})g_{(2)}\delta(a_{(2)})f_{(2)} \\
&= \Pi(g \otimes b)\Pi(f \otimes a).
\end{aligned}$$

Pour calculer le coproduit de $\Pi(f \otimes a)$, on l'évalue sur le produit de deux éléments de $\mathcal{A} \tilde{\otimes}_\delta \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\langle \Pi(f \otimes a), (t \otimes u)(v \otimes w) \rangle &= \langle \gamma u_{(1)}, v_{(1)} \rangle \langle \delta v_{(3)}, u_{(3)} \rangle \langle \gamma(a_{(1)})f_{(1)} \otimes \delta(a_{(2)})f_{(2)}, tv_{(2)} \otimes u_{(2)}w \rangle \\
&= \langle \gamma u_{(1)}, v_{(1)} \rangle \langle \delta v_{(4)}, u_{(4)} \rangle \langle \gamma(a_{(1)})f_{(1)}, t \rangle \langle \gamma(a_{(2)}), v_{(2)} \rangle \langle \delta a_{(3)}, u_{(3)} \rangle \langle f_{(2)}, v_{(3)}u_{(3)} \rangle \langle \delta(a_{(4)})f_{(3)}, w \rangle \\
&= \langle \gamma(a_{(1)})f_{(1)}, t \rangle \langle \gamma a_{(2)}, v_{(2)} \rangle \langle \delta a_{(3)}, u_{(3)} \rangle \langle \gamma u_{(1)}, v_{(1)} \rangle \langle \delta v_{(3)}, u_{(3)} \rangle \langle f_{(2)}, u_{(4)}v_{(4)} \rangle \langle \delta(a_{(4)})f_{(3)}, w \rangle \\
&= \langle \gamma(a_{(1)})f_{(1)}, t \rangle \langle \gamma a_{(2)}, v_{(2)} \rangle \langle \delta(v_{(3)}a_{(3)}), u_{(2)} \rangle \langle \gamma u_{(1)}, v_{(1)} \rangle \langle f_{(2)}, u_{(3)}v_{(4)} \rangle \langle \delta(a_{(4)})f_{(3)}, w \rangle \\
&= \langle \gamma(a_{(1)})f_{(1)}, t \rangle \langle \gamma a_{(3)}, v_{(3)} \rangle \langle \delta(a_{(2)}v_{(2)}), u_{(2)} \rangle \langle \gamma u_{(1)}, v_{(1)} \rangle \langle f_{(2)}, u_{(3)}v_{(4)} \rangle \langle \delta(a_{(4)})f_{(3)}, w \rangle \\
&= \langle \gamma(a_{(1)})f_{(1)}, t \rangle \langle \gamma a_{(3)}, v_{(3)} \rangle \langle \delta a_{(2)}, u_{(3)} \rangle \langle \mathbf{S}(\gamma u_{(2)}), v_{(2)} \rangle \langle \gamma u_{(1)}, v_{(1)} \rangle \langle f_{(2)}, u_{(4)}v_{(4)} \rangle \langle \delta(a_{(4)})f_{(3)}, w \rangle \\
&= \langle \gamma(a_{(1)})f_{(1)}, t \rangle \langle \delta(a_{(2)})f_{(2)}, u \rangle \langle \gamma(a_{(3)})f_{(3)}, v \rangle \langle \delta(a_{(4)})f_{(4)}, w \rangle \\
&= \langle \gamma(a_{(1)})f_{(1)} \otimes \delta(a_{(2)})f_{(2)}, t \otimes u \rangle \langle \gamma(a_{(3)})f_{(3)} \otimes \delta(a_{(4)})f_{(4)}, v \otimes w \rangle,
\end{aligned}$$

d'où $\Delta(\Pi(f \otimes a)) = \Pi(f_{(1)} \otimes a_{(1)}) \otimes \Pi(f_{(2)} \otimes a_{(2)})$.

L'assertion sur le noyau et l'image de Π vient de l'écriture de Π comme composée :

$$\begin{aligned}
((\text{im } \mathbf{I}) \otimes \mathcal{A}^{*\text{res}} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}} \otimes \mathcal{A}^{*\text{res}}, f \otimes g \mapsto fg_{(1)} \otimes g_{(2)}) \\
\circ (\mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow (\text{im } \mathbf{I}) \otimes \mathcal{A}^{*\text{res}}, f \otimes a \mapsto \mathbf{I}(a_{(1)}) \otimes \delta(a_{(2)})f).
\end{aligned}$$

□

Ce résultat est énoncé par Reshetikhin et Semenov-Tian-Shansky sous la forme suivante: si le courant total \mathbf{I} définit un isomorphisme d'espace vectoriel entre \mathcal{A} et $\mathcal{A}^{*\text{res}}$, alors les algèbres de Hopf $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A} \tilde{\otimes}_\delta \mathcal{A}$ sont duales l'une de l'autre. Dans le cas où (\mathcal{A}, γ) est « l'algèbre des fonctions régulières sur un groupe quantique », la proposition 2.7 décrit plus précisément la situation.

Enfin, Reshetikhin et Semenov-Tian-Shansky [RS] énoncent un dernier théorème :

Proposition 0.5 *Si \mathbf{H} est une algèbre de Hopf de dimension finie, alors le dual restreint $\mathcal{D}(\mathbf{H})^{*\text{res}}$ de son double de Drinfeld est une algèbre de Hopf co-quasi-triangulaire factorisable, et $\text{im } \mathbf{I} = \mathcal{D}(\mathbf{H})$.*

Preuve Il suffit de vérifier que le courant $I : \mathcal{D}(H)^{\text{res}} \rightarrow \mathcal{D}(H)$ est injectif, ou, ce qui revient au même compte tenu de la relation $I = S \circ J \circ S$, que J est injectif. Soit (e_i) une base de H , et (e_i^*) la base duale de H^* . Si on identifie l'espace vectoriel $\mathcal{D}(H)^{\text{res}}$ à $H \otimes H^*$, le coproduit de $\mathcal{D}(H)^{\text{res}}$ se lit : $\Delta(a \otimes f) = \sum_i \langle f_{(1)}, e_{i(2)} \rangle (a_{(2)} \otimes e_i^*) \otimes (S(e_{i(1)}) a_{(1)} e_{i(3)} \otimes f_{(2)})$. En utilisant la structure c.q.t. sur $\mathcal{D}(H)^{\text{res}}$ donnée au paragraphe 2.1.2, il est facile de calculer $J(a \otimes f) = (\varepsilon \otimes a)(f \otimes 1)$, le produit étant calculé dans $\mathcal{D}(H)$. On a donc $S \circ J(a \otimes f) = S^{-1}(f) \otimes S(a)$, ce qui montre la bijectivité de J . \square

0.3 Algèbres enveloppantes quantifiées

Les paragraphes 0.3.1 et 0.3.2 rappellent sans originalité la définition usuelle et les résultats de base sur les algèbres enveloppantes quantifiées. Les paragraphes suivants ont pour but de décrire avec précision certaines structures co-quasi-triangulaires que l'on peut fabriquer avec ces algèbres.

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie et de rang ℓ , \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan, $Q \subseteq P \subseteq \mathfrak{h}^*$ les réseaux des poids radiciels et entiers, $R \subseteq \mathfrak{h}^*$ l'ensemble des racines, et W le groupe de Weyl. On choisit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ un système de racines simples et $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire W -invariant sur la forme réelle de \mathfrak{h}^* . On note $Q_+ = \sum_i \mathbb{N}\alpha_i$, $(\varpi_1, \dots, \varpi_\ell)$ les poids fondamentaux associés aux racines simples $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$, $P_{++} = \sum_i \mathbb{N}\varpi_i$ l'ensemble des poids dominants, et $\rho = \sum_{i=1}^\ell \varpi_i$ la demi-somme des racines positives. On pose $d_i = \frac{1}{2}(\alpha_i | \alpha_i)$; le produit scalaire permet d'identifier \mathfrak{h}^* et \mathfrak{h} , $\frac{1}{d_i}\alpha_i$ étant alors identifié à la racine inverse α_i^\vee de α_i . Le produit scalaire est normalisé de sorte que $(P | Q) \subseteq \mathbb{Z}$. La matrice de Cartan (a_{ij}) est définie par $a_{ij} = \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle$. (Par rapport au livre [Bo], il s'agit de la transposée de la matrice de Cartan de R .)

0.3.1 Définition de $U_q(\mathfrak{g})$

On se place sur le corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(v)$, et on pose $q = v^2$, $v_i = v^{d_i}$. Les q -factorielles seront notées $[n]_i! = \prod_{m=0}^n \frac{v_i^m - v_i^{-m}}{v_i - v_i^{-1}}$, les q -coefficients binômiaux seront notés $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_i = \frac{[n]_i!}{[m]_i! [n-m]_i!}$.

Définition 0.6 *L'algèbre enveloppante quantifiée associée à \mathfrak{g} est la $\mathbb{C}(v)$ -algèbre présentée par les générateurs (K_λ) ($\lambda \in Q$), (E_i) ($1 \leq i \leq \ell$) et (F_i) ($1 \leq i \leq \ell$), soumis aux relations :*

$$\begin{aligned}
K_\lambda K_\mu &= K_{\lambda+\mu} && (\text{pour } \lambda, \mu \in Q), \\
K_\lambda E_i &= v^{(\lambda|\alpha_i)} E_i K_\lambda \quad \text{et} \quad K_\lambda F_i = v^{-(\lambda|\alpha_i)} F_i K_\lambda && (\text{pour } \lambda \in Q \text{ et } 1 \leq i \leq \ell), \\
\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_i E_i^r E_j E_i^{1-a_{ij}-r} &= 0 && (\text{pour } 1 \leq i \neq j \leq \ell), \\
\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_i F_i^r F_j F_i^{1-a_{ij}-r} &= 0 && (\text{pour } 1 \leq i \neq j \leq \ell), \\
[E_i, F_j] &= \delta_{ij} \frac{K_{\alpha_i} - K_{-\alpha_i}}{v^{d_i} - v^{-d_i}} && (\text{pour } 1 \leq i, j \leq \ell).
\end{aligned}$$

C'est une bigèbre (et même une algèbre de Hopf) quand on la munit du coproduit et de l'augmentation donnés par :

$$\begin{aligned}\Delta(K_\lambda) &= K_\lambda \otimes K_\lambda, & \varepsilon(K_\lambda) &= 1 & (\text{pour } \lambda \in \mathbb{Q}), \\ \Delta(E_i) &= E_i \otimes 1 + K_{\alpha_i} \otimes E_i, & \varepsilon(E_i) &= 0 & (\text{pour } 1 \leq i \leq \ell), \\ \Delta(F_i) &= F_i \otimes K_{-\alpha_i} + 1 \otimes F_i, & \varepsilon(F_i) &= 0 & (\text{pour } 1 \leq i \leq \ell).\end{aligned}$$

On la note $U_q(\mathfrak{g})$. On note U^+ , U^0 et U^- les sous-algèbres engendrées respectivement par les $(E_i)_{1 \leq i \leq \ell}$, les $(K_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{Q}}$ et les $(F_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ respectivement.

Il est connu que la multiplication dans $U_q(\mathfrak{g})$ permet d'avoir un isomorphisme d'espaces vectoriels : $U^- \otimes U^0 \otimes U^+ \xrightarrow{\sim} U_q(\mathfrak{g})$.

0.3.2 Résultats standard

(Pour les résultats énoncés dans ce paragraphe, voir par exemple [Ro3].) Dans le cas d'une algèbre de Lie simple \mathfrak{g} de dimension finie, la structure de $U_q(\mathfrak{g})$ est très bien connue. Ainsi, son centre est décrit de plusieurs manières (voir le chapitre 1).

La théorie des représentations de dimensions finies de $U_q(\mathfrak{g})$ est semblable à celle de \mathfrak{g} . Tous les $U_q(\mathfrak{g})$ -modules de dimensions finies sont complètement réductibles, et les $U_q(\mathfrak{g})$ -modules simples sont absolument simples. Notons $(\mathbb{Q}/2\mathbb{Q})^\wedge$ l'ensemble des caractères du groupe abélien fini $\mathbb{Q}/2\mathbb{Q}$. Dans un $U_q(\mathfrak{g})$ -module M , on appelle vecteur de plus haut poids un vecteur $m \in M$ sur lequel l'algèbre U^+ agit par son augmentation et l'algèbre U^0 agit par un caractère $U^0 \rightarrow \mathbb{C}(v)^\times$. Dans ce cas, si M est de dimension finie, alors ce caractère s'écrit $(K_\lambda \mapsto \chi(\lambda \bmod 2\mathbb{Q})v^{(\lambda|\mu)})$ pour un certain $\chi \in (\mathbb{Q}/2\mathbb{Q})^\wedge$ et un certain $\mu \in P_{++}$. Un module de dimension finie est simple si et seulement si il est engendré par un vecteur de plus haut poids (qui est alors unique à scalaire près). Cette construction définit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de $U_q(\mathfrak{g})$ -modules simples de dimensions finies et l'ensemble des couples $(\chi, \mu) \in (\mathbb{Q}/2\mathbb{Q})^\wedge \times P_{++}$. Le $U_q(\mathfrak{g})$ -module simple de dimension finie engendré par un vecteur de plus haut poids déterminé par un couple (χ, μ) sera noté $L_\chi(\mu)$. Quand χ est le caractère trivial, on le notera plutôt $L(\mu)$. Les modules $L_\chi(0)$ sont de dimension 1, et le module $L_\chi(\mu)$ est isomorphe au module $L(\mu) \otimes L_\chi(0)$.

On dira enfin qu'un $U_q(\mathfrak{g})$ -module M est de type 1 s'il est somme directe des sous-espaces $M_\mu = \{m \in M \mid \forall \lambda \in \mathbb{Q}, K_\lambda \cdot m = v^{(\lambda|\mu)}m\}$ pour $\mu \in P$. Ce sous-espace M_μ est appelé sous-espace de poids μ de M . Un $U_q(\mathfrak{g})$ -module de dimension finie est de type 1 si et seulement si il est somme directe de modules simples de la forme $L(\mu)$.

0.3.3 R -matrice de $U_q(\mathfrak{g})$

Une chose importante pour nous est que $U_q(\mathfrak{g})$ possède une R -matrice universelle [Dr2], que l'on peut écrire sous la forme $R_{12} = \sum (\text{partie diagonale})(\text{monôme en les } F_i) \otimes (\text{monôme en les } E_i)$. La somme est infinie, et il peut être préférable, pour des raisons esthétiques, de voir $(U_q(\mathfrak{g}), R_{12})$ comme le dual d'une algèbre de Hopf co-quasi-triangulaire. Soit $\mathcal{A}_q(G)$

le sous-espace vectoriel de $U_q(\mathfrak{g})^{*\text{res}}$ engendré par les coefficients des représentations $L(\mu)$ (sans χ) (voir [Jo, ch. 9]). $\mathcal{A}_q(G)$ est une sous-algèbre de Hopf de $U_q(\mathfrak{g})^{*\text{res}}$, et le morphisme canonique de $U_q(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{A}_q(G)^{*\text{res}}$ est injectif. La R -matrice de $U_q(\mathfrak{g})$ définit heuristique-ment des applications $\gamma, \delta : \mathcal{A}_q(G) \rightarrow \mathcal{A}_q(G)^{*\text{res}}$. A cause de la partie diagonale de R_{12} , γ et δ ne sont pas à valeurs dans $U_q(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{A}_q(G)^{*\text{res}}$, et ne sont même pas bien définies dans notre cadre.

Un remède à cela est de choisir un entier N tel que $N(P \mid P) \subseteq \mathbb{Z}$, d'étendre les scalaires de $\mathbb{C}(v)$ à $\mathbb{C}(v^{1/N})$, et de considérer $U_q(\mathfrak{g})$ engendrée non pas par les $(K_\lambda)_{\lambda \in Q}$, $(E_i, F_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ mais par des $(K_\lambda)_{\lambda \in P}$, $(E_i, F_i)_{1 \leq i \leq \ell}$. La nouvelle algèbre $\bar{U}_q(\mathfrak{g})$ obtenue ainsi a été considérée par Joseph et Letzter [JL2], et par De Concini, Kac et Procesi [DKP], qui ont montré qu'elle avait une structure plus simple que $U_q(\mathfrak{g})$. C'est en fait $\bar{U}_q(\mathfrak{g})$ que nous avons considérée aux chapitres 1 et 2, en lieu et place de l'algèbre $U_q(\mathfrak{g})$. Après extension des scalaires et de $U_q(\mathfrak{g})$, les applications γ et δ sont bien définies et à valeurs dans $\bar{U}_q(\mathfrak{g})$: $\gamma, \delta : \mathcal{A}_q(G) \rightarrow \bar{U}_q(\mathfrak{g}) \subseteq \mathcal{A}_q(G)^{*\text{res}}$. (Ces résultats peuvent être extraits de [Jo, §9.4].)

La théorie des représentations de dimensions finies de $\bar{U}_q(\mathfrak{g})$ sur $\mathbb{C}(v^{1/N})$ est semblable en tout point à celle de $U_q(\mathfrak{g})$. (Les mêmes preuves sont valables.) Appelons \bar{U}^0 la sous-algèbre de $\bar{U}_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les $(K_\lambda)_{\lambda \in P}$. Les représentations de dimensions finies sont complètement réductibles, et les $\bar{U}_q(\mathfrak{g})$ -modules simples de dimensions finies sont classifiés par leurs plus hauts poids. Ces plus hauts poids sont des caractères de \bar{U}^0 , et ils sont de la forme $(K_\lambda \mapsto \chi(\lambda \bmod 2Q)(v^{1/N})^{N(\lambda|\mu)})$ pour des $\mu \in P_{++}$ et des caractères χ du groupe $P/2Q$. On peut dans ce cadre transposer la notion de représentation de type 1.

0.3.4 Structures co-quasi-triangulaires sur $\mathcal{A}_q(G)$

L'étude de l'existence et de l'unicité de la R -matrice dans la version h -adique des algèbres enveloppantes quantifiée est due à Drinfeld [Dr2]. Dans le cas qui nous occupe, l'étude est due à Gaitsgory [Ga]. Il nous faut pour cela décrire $\mathcal{A}_q(G)^{*\text{res}}$. Pour $\mu \in P_{++}$, $m \in L(\mu)$ et $m^* \in L(\mu)^*$, je noterai (comme au chapitre 2) $\theta_{L(\mu)}(m, m^*)$ le coefficient $(\bar{U}_q(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}(v^{1/N}), x \mapsto \langle m^*, x_{L(\mu)} \cdot m \rangle)$ de la représentation, de sorte que les $\theta_{L(\mu)}(m, m^*)$ forment une famille génératrice de l'espace vectoriel $\mathcal{A}_q(G)$.

Tout caractère $\zeta : P/Q \rightarrow \mathbb{C}^\times$ du groupe P/Q définit une représentation $\bar{\zeta}$ de dimension 1 de $\mathcal{A}_q(G)$, par $\bar{\zeta}(\theta_{L(\mu)}(m, m^*)) = \zeta(\mu \bmod Q) \langle m^*, m \rangle$. Cela donne un homomorphisme du groupe $(P/Q)^\wedge$ des caractères de P/Q dans $\mathcal{A}_q(G)^{*\text{res}}$, qui se prolonge en un homomorphisme injectif d'algèbres de Hopf : $\mathbb{K}[(P/Q)^\wedge] \rightarrow \mathcal{A}_q(G)^{*\text{res}}$. (L'injectivité vient du lemme d'indépendance linéaire des éléments groupoïdaux dans une cogèbre.) L'image de cet homomorphisme est incluse dans le centre de $\mathcal{A}_q(G)^{*\text{res}}$. Cette construction est un cas particulier de la description de $\mathcal{A}_q(G)^{*\text{res}}$ donnée par Joseph [Jo, §9.4].

Appelons bicaractère du groupe P/Q tout homomorphisme du groupe P/Q dans le groupe $(P/Q)^\wedge$, et soient $\gamma, \delta : \mathcal{A}_q(G) \rightarrow \bar{U}_q(\mathfrak{g})$ les applications définies au paragraphe précédent par les R -matrices de Drinfeld R_{12} et R_{21}^{-1} (comme à la preuve de la proposition 2.7).

Proposition 0.7 [Ga]: Si $\Gamma : \mathcal{A}_q(G) \rightarrow \mathcal{A}_q(G)^{\text{res}}$ est une application telle que $(\mathcal{A}_q(G), \Gamma)$ est une algèbre co-quasi-triangulaire, alors il existe un bicaractère $\Psi : \mathbb{P}/\mathbb{Q} \rightarrow (\mathbb{P}/\mathbb{Q})^\wedge$ tel que Γ soit l'une des deux applications :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_q(G) \rightarrow \mathcal{A}_q(G)^{\text{res}}, \theta_{L(\mu)}(m, m^*) &\mapsto \overline{\Psi(\mu \bmod \mathbb{Q})} \gamma(\theta_{L(\mu)}(m, m^*)), \\ (\mathcal{A}_q(G) \rightarrow \mathcal{A}_q(G)^{\text{res}}, \theta_{L(\mu)}(m, m^*) &\mapsto \overline{\Psi(\mu \bmod \mathbb{Q})} \delta(\theta_{L(\mu)}(m, m^*)), \end{aligned}$$

ces deux possibilités s'excluant mutuellement.

0.3.5 Considérations galoisiennes

Le paragraphe précédent impose d'étendre les scalaires à $\mathbb{C}(v^{1/N})$: sur $\mathbb{C}(v)$, les $\overline{U}_q(\mathfrak{g})$ -modules simples ne sont plus absolument simples. Les algèbres $\overline{U}_q(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{A}_q(G)$ sont néanmoins définies sur $\mathbb{C}(v)$. Posant $\hat{v} = v^{1/N}$, l'extension de corps $\mathbb{C}(\hat{v})/\mathbb{C}(v)$ est galoisienne, de groupe de Galois $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Chaque choix de \hat{v} dans son orbite sous le groupe de Galois définit une manière d'étendre les $U_q(\mathfrak{g})$ -modules de type 1 en des $\overline{U}_q(\mathfrak{g})$ -modules, et définit donc une injection de $\overline{U}_q(\mathfrak{g})$ dans $\text{Hom}_{\mathbb{C}(v)}(\mathcal{A}_q(G), \mathbb{C}(\hat{v}))$.

La R -matrice de Drinfeld ne définit pas une structure c.q.t. sur la $\mathbb{C}(v)$ -algèbre $\mathcal{A}_q(G)$: les applications γ et δ vont de $\mathcal{A}_q(G)$ dans $\text{Hom}_{\mathbb{C}(v)}(\mathcal{A}_q(G), \mathbb{C}(\hat{v}))$. Pour simplifier la discussion, je vais dire que γ et δ définissent des structures $\mathbb{C}(\hat{v})$ -c.q.t. sur $\mathcal{A}_q(G)$. On peut faire agir le groupe de Galois de $\mathbb{C}(\hat{v})/\mathbb{C}(v)$ dans l'ensemble des structures $\mathbb{C}(\hat{v})$ -c.q.t. sur $\mathcal{A}_q(G)$.

Soit ξ une racine N -ième de l'unité dans \mathbb{C} ; ξ définit le bicaractère $\Psi : (\mathbb{P}/\mathbb{Q} \rightarrow (\mathbb{P}/\mathbb{Q})^\wedge, \mu \bmod \mathbb{Q} \mapsto \xi^{N(\mu|-)} = (\lambda \bmod \mathbb{Q} \mapsto \xi^{N(\lambda|\mu)})$. Si une application $\Gamma : \mathcal{A}_q(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}(v)}(\mathcal{A}_q(G), \mathbb{C}(\hat{v}))$ définit une structure $\mathbb{C}(\hat{v})$ -c.q.t. sur $\mathcal{A}_q(G)$, alors l'image de Γ par l'élément du groupe de Galois défini par la substitution $\hat{v} \mapsto \xi\hat{v}$ est l'application :

$$(\mathcal{A}_q(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}(v)}(\mathcal{A}_q(G), \mathbb{C}(\hat{v})), \theta_{L(\mu)}(m, m^*) \mapsto \overline{\xi^{N(\mu|-)}} \Gamma(\theta_{L(\mu)}(m, m^*)))$$

ou :

$$(\mathcal{A}_q(G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}(v)}(\mathcal{A}_q(G), \mathbb{C}(\hat{v})), \theta_{L(\mu)}(m, m^*) \mapsto \overline{\xi^{-N(\mu|-)}} \Gamma(\theta_{L(\mu)}(m, m^*))).$$

Preuve Compte-tenu de la proposition 0.7, il suffit de le voir pour les éléments γ et δ venant des R -matrices de Drinfeld. Examinons le cas de γ . Le terme responsable de l'apparition de \hat{v} dans un couplage $\langle \theta_{L(\nu)}(n, n^*) \otimes \theta_{L(\mu)}(m, m^*), R_{12} \rangle$ vient de la partie toroïdale de R_{12} . Si m est de poids π_m et n est de poids $\pi_n \in \mathbb{P}$, ce terme est en $\hat{v}^{N(\pi_m|\pi_n)}$, et la substitution de \hat{v} en $\xi\hat{v}$ donne bien l'action décrite. L'autre possibilité correspond au cas de δ . \square

0.4 Présentations F.R.T.

Un dernier exemple d'algèbres de Hopf co-quasi-triangulaires est donné par les constructions de Faddeev, Reshetikhin et Takhtadzhyan [FRT1][FRT2]. Soit V un espace vectoriel

de dimension finie et $\widehat{R}^{\vee\vee} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ une application linéaire. On note $\widehat{R}_{12}^{\vee\vee}$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $V^{\otimes 3}$ défini par $\widehat{R} \otimes \text{id}_V$, et de même $\widehat{R}_{23}^{\vee\vee} = \text{id}_V \otimes \widehat{R}$. On suppose que $\widehat{R}^{\vee\vee}$ est inversible et vérifie l'équation des tresses : $\widehat{R}_{12}^{\vee\vee} \circ \widehat{R}_{23}^{\vee\vee} \circ \widehat{R}_{12}^{\vee\vee} = \widehat{R}_{23}^{\vee\vee} \circ \widehat{R}_{12}^{\vee\vee} \circ \widehat{R}_{23}^{\vee\vee}$. C'est par exemple le cas de l'opérateur de permutation $P^{\vee\vee} : (V \otimes V \rightarrow V \otimes V, m \otimes n \mapsto n \otimes m)$. Le choix d'une base (e_1, \dots, e_n) de V permet d'écrire $\widehat{R}^{\vee\vee}$ et $P^{\vee\vee}$ comme des matrices \widehat{R} et $P \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})^{\otimes 2}$.

J'utiliserai les notations abrégées usuelles : I est la matrice unité dans $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$, et si $T \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée d'ordre n , T_1 désigne la matrice $T \otimes I$ dans $\text{Mat}_n(\mathbb{K})^{\otimes 2}$. De même, si T et L sont deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans des espaces vectoriels en dualité, $\langle T_1, L_2 \rangle$ désignera la matrice de $\text{Mat}_n(\mathbb{K})^{\otimes 2}$ obtenue en prenant les crochets de dualité des éléments de T et de L . Soit enfin R la matrice $P\widehat{R}$.

Définition 0.8 [FRT1] :

a) $\mathcal{A}(R)$ est la \mathbb{K} -algèbre présentée par les générateurs $(t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ soumis aux relations obtenues en identifiant, coefficient matriciel par coefficient matriciel, les matrices $\widehat{R}T_1T_2 = T_1T_2\widehat{R}$, où T est la matrice des (t_{ij}) . $\mathcal{A}(R)$ est une bigèbre quand on la munit du coproduit $\Delta(t_{ij}) = \sum_k t_{ik} \otimes t_{kj}$ et de l'augmentation $\varepsilon(t_{ij}) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker).

b) $U(R)$ est la \mathbb{K} -algèbre présentée par les générateurs $(l_{ij}^+)_{1 \leq i, j \leq n}$ et $(l_{ij}^-)_{1 \leq i, j \leq n}$, soumis aux relations :

$$\widehat{R}L_2^+L_1^+ = L_2^+L_1^+\widehat{R}, \quad \widehat{R}L_2^-L_1^- = L_2^-L_1^-\widehat{R}, \quad \text{et} : \widehat{R}L_2^+L_1^- = L_2^-L_1^+\widehat{R}.$$

$U(R)$ est une bigèbre quand on la munit du coproduit $\Delta(l_{ij}^\pm) = \sum_k l_{ik}^\pm \otimes l_{kj}^\pm$ et de la coïunité $\varepsilon(l_{ij}^\pm) = \delta_{ij}$.

On peut alors définir des homomorphismes de cogèbres antihomomorphismes d'algèbres par : $\gamma_R(t_{ij}) = l_{ij}^+$ et $\delta_R(t_{ij}) = l_{ij}^-$. De plus, il existe une dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ entre les bigèbres $\mathcal{A}(R)$ et $U(R)$ telle que :

$$\langle T_1, L_2^+ \rangle_R = P\widehat{R} \quad \text{et} \quad \langle T_1, L_2^- \rangle_R = P\widehat{R}^{-1}.$$

Preuve L'existence et l'unicité de γ_R et δ_R sont claires. Soient $\widetilde{\mathcal{A}}(R)$ et $\widetilde{U}(R)$ les \mathbb{K} -algèbres libres sur les générateurs $(\tilde{t}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $(\tilde{l}_{ij}^\pm)_{1 \leq i, j \leq n}$ respectivement. On les munit de structures de bigèbres de manière analogue à la définition 0.8. On peut alors définir une dualité de bigèbres entre $\widetilde{\mathcal{A}}(R)$ et $\widetilde{U}(R)$ par les formules $\langle T_1, L_2^+ \rangle = P\widehat{R}$ et $\langle T_1, L_2^- \rangle = P\widehat{R}^{-1}$. Il suffit de montrer que cette dualité descend aux bigèbres $\mathcal{A}(R)$ et $U(R)$.

La relation des tresses $\widehat{R}_{12}\widehat{R}_{23}\widehat{R}_{12}^{-1} = \widehat{R}_{23}^{-1}\widehat{R}_{12}\widehat{R}_{23}$ conduit à $\widehat{R}_{23}P_{13}\widehat{R}_{13}P_{12}\widehat{R}_{12}^{-1} = P_{13}\widehat{R}_{13}^{-1}P_{12}\widehat{R}_{12}\widehat{R}_{23}$, qui traduit la relation $\langle \widetilde{T}_1, \widehat{R}_{23}\widetilde{L}_3^+\widetilde{L}_2^- \rangle = \langle \widetilde{T}_1, \widetilde{L}_3^-\widetilde{L}_2^+\widehat{R}_{23} \rangle$, c'est-à-dire que $\widehat{R}_{23}\widetilde{L}_3^+\widetilde{L}_2^- - \widetilde{L}_3^-\widetilde{L}_2^+\widehat{R}_{23}$ est dans le noyau à droite de la dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On procède de même pour montrer que les autres relations définissent aussi des éléments dans les noyaux de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. \square

L'existence de cette dualité vient du fait que $\widehat{R}^{\vee\vee}$ obéit à l'équation des tresses; elle signifie que V et ses puissances tensorielles sont des représentations de $U(R)$, l'image des t_{ij} dans $U(R)^*$ étant les coefficients matriciels de la représentation de $U(R)$ dans V . Cela est expliqué en détail dans l'article de Larson et Towber [LT].

Quand $\mathcal{A}(R)$ est une algèbre de Hopf, ces applications γ_R et δ_R et la dualité $U(R) \rightarrow \mathcal{A}(R)^*$ confèrent à $\mathcal{A}(R)$ une structure d'algèbre co-quasi-triangulaire. Ce n'est en général pas le cas. Reshetikhin a montré [Re2, §3] que l'on pouvait contourner cet obstacle en élargissant $\mathcal{A}(R)$.

Théorème 0.9 *Partons des données précédentes, avec $R \in \text{Mat}_n(\mathbb{K}) \otimes \text{Mat}_n(\mathbb{K})$. Si la matrice obtenue en transposant R dans le deuxième facteur du produit tensoriel est inversible, alors il existe une algèbre c.q.t. $(\mathcal{A}_{\natural}, \gamma_{\natural})$ et des morphismes de bigèbres $f : \mathcal{A}(R) \rightarrow \mathcal{A}_{\natural}$ et $g : U(R) \rightarrow \mathcal{A}_{\natural}^{*\text{res}}$ tels que, si l'on désigne par δ_{\natural} l'application $\mathcal{A}_{\natural} \rightarrow \mathcal{A}_{\natural}^{*\text{res}}$ associée à la structure c.q.t. de $(\mathcal{A}_{\natural}, \gamma_{\natural})$, on ait :*

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathcal{A}(R), \forall x \in U(R), \quad \langle a, x \rangle_R &= \langle f(a), g(x) \rangle_{\natural}, \\ g \circ \gamma_R &= \gamma_{\natural} \circ f, \\ g \circ \delta_R &= \delta_{\natural} \circ f. \end{aligned}$$

Exemples. 1) La matrice $R = I \otimes I$, $\widehat{R} = P$, donne la bigèbre $\mathcal{A}(R)$ des fonctions régulières sur $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$. Soit \mathcal{A}_{\natural} l'algèbre de Hopf des fonctions régulières sur $\text{GL}_n(\mathbb{K})$. On dispose alors d'un homomorphisme injectif de bigèbres: $f : \mathcal{A}(R) \rightarrow \mathcal{A}_{\natural}$. L'algèbre \mathcal{A}_{\natural} étant commutative, elle est co-quasi-triangulaire pour les applications $\gamma_{\natural} = \delta_{\natural} : (\mathcal{A}_{\natural} \rightarrow \mathcal{A}_{\natural}^{*\text{res}}, a \mapsto \varepsilon(a)\varepsilon)$. Enfin, on dispose de l'homomorphisme de bigèbres trivial $g : (U(R) \rightarrow \mathcal{A}_{\natural}^{*\text{res}}, x \mapsto \varepsilon(x)\varepsilon)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathcal{A}(R), \forall x \in U(R), \quad \langle a, x \rangle_R &= \langle f(a), g(x) \rangle_{\natural}, \\ g \circ \gamma_R &= \gamma_{\natural} \circ f, \\ g \circ \delta_R &= \delta_{\natural} \circ f. \end{aligned}$$

2) Le cas de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ est présenté au paragraphe 3.1.1. Il correspond au choix $\mathbb{K} = \mathbb{C}(v)$,

$$\widehat{R} = v \sum_{1 \leq i \leq n} E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} E_{ij} \otimes E_{ji} + (v - v^{-1}) \sum_{1 \leq i < j \leq n} E_{ii} \otimes E_{jj},$$

où la notation E_{ij} désigne les matrices formant la base usuelle de $\text{Mat}_n(\mathbb{K})$. Adoptons les notations de la fin du §3.1.1. L'algèbre $\mathcal{A}_q(\text{GL}_n)$ possède des éléments t_{ij} , ce qui permet de définir un homomorphisme $f : \mathcal{A}(R) \rightarrow \mathcal{A}_q(\text{GL}_n)$. On a défini dans $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ des éléments l_{ij}^{\pm} , ce qui permet de définir un homomorphisme $g : U(R) \rightarrow U_q(\mathfrak{gl}_n)$. De plus l'algèbre $\mathcal{A}_q(\text{GL}_n)$ est co-quasi-triangulaire.

Théorème 0.10 [FRT1][DF] : *f est un homomorphisme injectif de bigèbres; g est un homomorphisme surjectif de bigèbres, dont le noyau est l'idéal engendré par les éléments $(l_{ij}^+)_{1 \leq j < i \leq n}$, $(l_{ij}^-)_{1 \leq i < j \leq n}$ et $(l_{ii}^+ \cdot l_{ii}^- - 1)_{1 \leq i \leq n}$. L'algèbre $\mathcal{A}_q(\text{GL}_n)$ est la localisée*

de l'algèbre $\mathcal{A}(R)$ par rapport au sous-monoïde multiplicatif engendré par l'élément groupoïdal central \det_q . La dualité entre $\mathcal{A}(R)$ et $U(R)$ et les applications γ_R et δ_R sont transportées par f et g sur les notions correspondantes pour le couple $\mathcal{A}_q(\mathfrak{gl}_n)$ et $U_q(\mathfrak{gl}_n)$.

- 3) La matrice \widehat{R} de l'exemple 2) vérifie la relation de Hecke: $\widehat{R} - \widehat{R}^{-1} = v - v^{-1}$. Pour $z \in \mathbb{C}^\times$, posons $\widehat{R}(z) = \widehat{R} - z\widehat{R}^{-1}$. On a alors l'équation des tresses à paramètre spectral: $\widehat{R}_{12}(z)\widehat{R}_{23}(zw)\widehat{R}_{12}(w) = \widehat{R}_{23}(w)\widehat{R}_{12}(zw)\widehat{R}_{23}(z)$ (conséquence de l'équation de Hecke). Il est tentant de chercher une construction F.R.T. « à paramètre spectral ». Il est montré dans [FRT2] et [DF] que l'on obtient une variante de l'algèbre $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$, comme il est expliqué dans la partie 3.5. On notera néanmoins que la construction, pour présenter un aspect générique, se fait « à la manière des algèbres de boucles » : l'espace vectoriel V dont on part est remplacé par $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t, t^{-1}]$. Il n'est plus de dimension finie sur \mathbb{K} . Il n'y a pas moyen de définir une structure de cogèbre sur $\mathcal{A}(R(z))$, qui ne peut plus être considérée que comme une sous-algèbre de $(U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n))^*$.

Réciproquement, donnons-nous une algèbre de Hopf c.q.t. (\mathcal{A}, γ) , et soit δ l'application associée. L'application γ vérifie la relation de Baxter :

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, \quad a_{(1)}b_{(1)}\langle \gamma a_{(2)}, b_{(2)} \rangle = \langle \gamma a_{(1)}, b_{(1)} \rangle b_{(2)}a_{(2)}.$$

Soient $b, c, d \in \mathcal{A}$. Ecrivons le coproduit itéré de c sous la forme $c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$, substituons $c_{(2)}$ à a dans la relation ci-dessus, et multiplions le résultat obtenu par $S(c_{(1)})$ à gauche et $S(c_{(3)})$ à droite :

$$b_{(1)}S(c_{(2)})\langle \gamma c_{(1)}, b_{(2)} \rangle = \langle \gamma c_{(2)}, b_{(1)} \rangle S(c_{(1)})b_{(2)}.$$

En évaluant sur $\delta(d) \in \mathcal{A}^{*\text{res}}$, nous obtenons :

$$\langle \delta(d_{(1)}), b_{(1)} \rangle \langle \delta(d_{(2)}), S(c_{(2)}) \rangle \langle \gamma c_{(1)}, b_{(2)} \rangle = \langle \gamma c_{(2)}, b_{(1)} \rangle \langle \delta(d_{(1)}), S(c_{(1)}) \rangle \langle \delta(d_{(2)}), b_{(2)} \rangle,$$

donc :

$$\langle \gamma(c_{(2)}), d_{(2)} \rangle \langle \delta(d_{(1)})\gamma(c_{(1)}), b \rangle = \langle \gamma(c_{(1)}), d_{(1)} \rangle \langle \gamma(c_{(2)})\delta(d_{(2)}), b \rangle.$$

Cela montre la relation :

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, \quad \langle \gamma a_{(1)}, b_{(1)} \rangle \gamma(a_{(2)})\delta(b_{(2)}) = \delta(b_{(1)})\gamma(a_{(1)})\langle \gamma a_{(2)}, b_{(2)} \rangle.$$

En prenant les images de la relation de Baxter par les applications γ et δ , nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad \langle \gamma a_{(1)}, b_{(1)} \rangle \gamma(a_{(2)})\gamma(b_{(2)}) &= \gamma(b_{(1)})\gamma(a_{(1)})\langle \gamma a_{(2)}, b_{(2)} \rangle, \\ \forall a, b \in \mathcal{A}, \quad \langle \gamma a_{(1)}, b_{(1)} \rangle \delta(a_{(2)})\delta(b_{(2)}) &= \delta(b_{(1)})\delta(a_{(1)})\langle \gamma a_{(2)}, b_{(2)} \rangle. \end{aligned}$$

Ces trois relations sont les analogues, dans le cadre des algèbres c.q.t., des relations F.R.T. :

$$\widehat{R}L_2^+L_1^+ = L_2^+L_1^+\widehat{R}, \quad \widehat{R}L_2^-L_1^- = L_2^-L_1^-\widehat{R}, \quad \text{et : } \widehat{R}L_2^+L_1^- = L_2^-L_1^+\widehat{R}.$$

Elles en constituent la version universelle, présentée dans [FRT1, §3].

0.5 Conclusion

J'espère avoir montré, dans ce chapitre zéro, que les algèbres co-quasi-triangulaires donnent un cadre de travail adapté aux algèbres enveloppantes quantifiées d'une algèbre de Lie simple de dimension finie. Plus généralement, elles sont l'abstraction algébrique naturelle de la méthode de diffusion quantique inverse : la relation de commutation de Baxter de la définition 2.1 est le synonyme de la relation $\widehat{R}T_1T_2 = T_1T_2\widehat{R}$ de F.R.T. (tout au moins dans la version universelle de [FRT1, §3]).

Cependant les algèbres c.q.t. masquent tout l'aspect géométrique issu de la théorie de la quantification des groupes de Lie–Poisson. De plus, la notion d'algèbre de Hopf c.q.t. n'est pas appropriée à l'étude des algèbres enveloppantes quantifiées de type non fini. La structure de la R -matrice universelle dans ce cas (voir [Dr2]) fait qu'elle n'agit naturellement que dans les modules de la catégorie \mathcal{O} de Bernstein–Gelfand–Gelfand (voir aussi [Lu4, ch. 4]). Cela se voit de plusieurs manières : la plus simple est de constater qu'un $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ -module de dimension finie n'est pas isomorphe à son bidual [CP1, §4.5].

Chapitre 1

On the center of quantized enveloping algebras

Let U be a quasitriangular Hopf algebra. One may use the R -matrix of U in order to construct scalar invariants of knots. Analogously, Reshetikhin wrote tangle invariants which take their values in the center of U . Reshetikhin's expressions thus define central elements in U . We prove here an identity characterizing some of these elements, when U is a quantized enveloping algebra. As an application, we give a proof for a statement of Faddeev, Reshetikhin and Takhtadzhyan concerning the center of a quantized enveloping algebra.

Introduction

Let \mathfrak{g} be a finite dimensional simple Lie algebra, and $U_q(\mathfrak{g})$ be the associated quantized enveloping algebra, at a generic value q of the parameter. There are at least three descriptions of the center $Z(U_q(\mathfrak{g}))$ of $U_q(\mathfrak{g})$. Rosso [Ro2] defined a quantum analogue of the Harish-Chandra map in order to get an isomorphism between $Z(U_q(\mathfrak{g}))$ and the algebra of exponential invariants. Joseph and Letzter [JL2] described all the finite dimensional submodules of the adjoint module $U_q(\mathfrak{g})$: the center appears here as the isotypical component of the trivial type. Finally, Drinfeld [Dr4] used the universal R -matrix of $U_q(\mathfrak{g})$ in order to get a morphism from the representation ring of \mathfrak{g} to $Z(U_q(\mathfrak{g}))$. Each of these constructions has its own advantage, and the links between them are known.

The construction of Drinfeld uses only the universal R -matrix of $U_q(\mathfrak{g})$ and the quantum traces in $U_q(\mathfrak{g})$ -modules: it is thus valid for the so-called "ribbon Hopf algebras". For these algebras, Reshetikhin [Re2] explained how invariants of certain tangles give rise to central elements. In this article, we give a formula connecting, in the case of $U_q(\mathfrak{g})$, some of these elements to the previous descriptions.

Let us go back to general results about the center of $U_q(\mathfrak{g})$. Faddeev, Reshetikhin and Takhtadzhyan [FRT1] have exhibited a system of generators for $Z(U_q(\mathfrak{g}))$, but did not publish the proof of their theorem. Our result enables us to provide a proof for it, and even to give a more precise statement.

We will spend the first six sections to recall known constructions and results. New results appear in sections 1.2.4 and 1.3.

1.1 Ribbons and central constructions

1.1.1 Ribbon Hopf algebras

Let U be a Hopf algebra over a field \mathbb{K} . The coproduct of an element $x \in U$ will be written using Sweedler's notation: $\Delta_U(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$, the sum sign being generally omitted. We shall denote by ε_U and S_U the augmentation and the antipode of U . The context will make clear what Hopf algebra U is considered, so we will simply write Δ , ε and S .

We suppose now that U is quasitriangular for an R -matrix $R_{12} = \sum \alpha_i \otimes \beta_i \in U \otimes U$ (see [Dr4] for the definition), and we put $R_{21} = \sum \beta_i \otimes \alpha_i \in U \otimes U$, $u = \sum S(\beta_i)\alpha_i$. It is known that $(S \otimes S)(R_{12}) = R_{12}$, that u is invertible in U , that $(U \rightarrow U, x \mapsto uxu^{-1})$ is the square of the antipode in U , and that $\Delta(u) = (R_{21}R_{12})^{-1}(u \otimes u)$.

A ribbon Hopf algebra (cf. [Re2]) is a quasitriangular Hopf algebra (U, R_{12}) given with a central element $v \in U$ such that $v^2 = uS(u)$, $v = S(v)$, and uv^{-1} is group-like, so that:

$$\Delta(v) = (R_{21}R_{12})^{-1}(v \otimes v). \quad (1.1)$$

When U is infinite dimensional and R_{12} is an infinite sum, all these constructions are still valid in the framework of co-quasitriangular algebras (see [Mo, §10.2]). Let \mathcal{A} be the restricted (Hopf) dual of U : then R_{12} may be viewed as a pairing $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$, and u and v may be viewed as linear forms on \mathcal{A} . The fact that R_{12} intertwines the coproduct with its opposite is then written:

$$\forall f, g \in \mathcal{A}, \quad \langle f_{(1)} \otimes g_{(1)}, R_{12} \rangle f_{(2)}g_{(2)} = g_{(1)}f_{(1)} \langle f_{(2)} \otimes g_{(2)}, R_{12} \rangle.$$

It is not necessary for \mathcal{A} to be the whole dual of U , but we will require that the canonical duality $\langle \cdot, \cdot \rangle$ between U and \mathcal{A} is non-degenerate. In the following, we will use this set-up and these notations in order to deal with ribbon Hopf algebras.

1.1.2 Drinfeld's construction of central elements

Let $(U, \mathcal{A}, R_{12}, v)$ be a ribbon Hopf algebra. We endow U with the structure of a right U -module by the adjoint action: $x \cdot y = S(y_{(1)})xy_{(2)}$. We endow \mathcal{A} with the structure of a right U -module by the coadjoint action: $\varphi \cdot y = \langle y, \varphi_{(1)}S(\varphi_{(3)}) \rangle \varphi_{(2)} = (x \mapsto \varphi(y_{(1)}xS(y_{(2)}))$). We define the following pairing: $(\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}, (\varphi, \psi) \mapsto \langle\langle \varphi, \psi \rangle\rangle = \langle \varphi \otimes \psi, R_{21}R_{12} \rangle)$, and we will write $\langle\langle \varphi, \psi \rangle\rangle = \langle J(\psi), \varphi \rangle$, using the map $J : (\mathcal{A} \rightarrow U, \psi \mapsto \langle \text{id} \otimes \psi, R_{21}R_{12} \rangle)$.

The following assertion is (in spirit) contained in [RS]:

Proposition 1.1 *J is a morphism of right U-modules.*

Proof Let $\psi \in \mathcal{A}$ and $y \in U$. We have:

$$\begin{aligned}
J(\psi \cdot y) &= \langle \text{id} \otimes (\psi \cdot y), R_{21}R_{12} \rangle \\
&= \langle \text{id} \otimes \psi, (1 \otimes y_{(1)})R_{21}R_{12}(1 \otimes S(y_{(2)})) \rangle \\
&= \langle \text{id} \otimes \psi, (S(y_{(1)}) \otimes 1)(y_{(2)} \otimes y_{(3)})R_{21}R_{12}(1 \otimes S(y_{(4)})) \rangle \\
&= \langle \text{id} \otimes \psi, (S(y_{(1)}) \otimes 1)R_{21}R_{12}(y_{(2)} \otimes y_{(3)})(1 \otimes S(y_{(4)})) \rangle \\
&= \langle \text{id} \otimes \psi, (S(y_{(1)}) \otimes 1)R_{21}R_{12}(y_{(2)} \otimes 1) \rangle \\
&= S(y_{(1)})J(\psi)y_{(2)} \\
&= J(\psi) \cdot y.
\end{aligned}$$

□

Let $Z(U)$ be the center of U : this is the set of invariant elements of the (adjoint) U -module U . Images under J of invariant elements of the U -module \mathcal{A} thus give elements of $Z(U)$. One can do better. A trace on U is a linear form $t \in \mathcal{A}$ such that $\forall x, y \in U, t(xy) = t(yx)$; this can be written $\Delta(t) = t_{(1)} \otimes t_{(2)} = t_{(2)} \otimes t_{(1)}$.

Lemma 1.2 *Let $t \in \mathcal{A}$ be a trace on U . Then $\langle uv^{-1}, t_{(1)} \rangle t_{(2)}$ is an invariant element of the U -module \mathcal{A} , and $\langle uv^{-1}, t_{(1)} \rangle J(t_{(2)})$ is an element of U which commutes with any element of $\mathcal{A}^* \supseteq U$.*

Proof Consider first the element $\langle uv^{-1}, t_{(1)} \rangle t_{(2)}$ of \mathcal{A} . The action of $x \in U$ on this element is given by:

$$\begin{aligned}
t(uv^{-1} _) \cdot x &= t(uv^{-1}x_{(1)} _ S(x_{(2)})) \\
&= t(S(x_{(2)})uv^{-1}x_{(1)} _) \\
&= t(S(x_{(2)})S^2(x_{(1)})uv^{-1} _) \\
&= \varepsilon(x)t(uv^{-1} _).
\end{aligned}$$

So it is an invariant element of the U -module \mathcal{A} .

Let now $\varphi \in \mathcal{A}^*$ and $f \in \mathcal{A}$. One has:

$$\begin{aligned}
\langle uv^{-1}, t_{(1)} \rangle \langle J(t_{(2)})\varphi, f \rangle &= \langle uv^{-1}, t_{(1)} \rangle \langle f_{(1)} \otimes t_{(2)}, R_{21}R_{12} \rangle \langle \varphi, f_{(2)} \rangle \\
&= \langle uv^{-1}, t_{(1)} \rangle \langle f_{(1)} \otimes t_{(2)}, R_{21} \rangle \langle f_{(2)} \otimes t_{(3)}, R_{12} \rangle \langle \varphi, f_{(3)}t_{(4)}S(t_{(5)}) \rangle \\
&= \langle uv^{-1}, t_{(1)} \rangle \langle f_{(1)} \otimes t_{(2)}, R_{21} \rangle \langle f_{(3)} \otimes t_{(4)}, R_{12} \rangle \langle \varphi, t_{(3)}f_{(2)}S(t_{(5)}) \rangle \\
&= \langle uv^{-1}, t_{(1)} \rangle \langle f_{(2)} \otimes t_{(3)}, R_{21} \rangle \langle f_{(3)} \otimes t_{(4)}, R_{12} \rangle \langle \varphi, f_{(1)}t_{(2)}S(t_{(5)}) \rangle \\
&= \langle uv^{-1}, t_{(1)} \rangle \langle f_{(2)} \otimes t_{(3)}, R_{21}R_{12} \rangle \langle \varphi, f_{(1)}t_{(2)}S(t_{(4)}) \rangle \\
&= \langle uv^{-1}\varphi(f_{(1)} _ S(t_{(3)})), t_{(1)} \rangle \langle f_{(2)} \otimes t_{(2)}, R_{21}R_{12} \rangle \\
&= \langle \varphi(f_{(1)}S^2(_)S(t_{(3)}))uv^{-1}, t_{(1)} \rangle \langle f_{(2)} \otimes t_{(2)}, R_{21}R_{12} \rangle \\
&= \langle \varphi, f_{(1)}S^2(t_{(1)})S(t_{(4)}) \rangle \langle uv^{-1}, t_{(2)} \rangle \langle f_{(2)} \otimes t_{(3)}, R_{21}R_{12} \rangle \\
&= \langle \varphi, f_{(1)}S^2(t_{(2)})S(t_{(1)}) \rangle \langle uv^{-1}, t_{(3)} \rangle \langle f_{(2)} \otimes t_{(4)}, R_{21}R_{12} \rangle \\
&= \langle \varphi, f_{(1)} \rangle \langle uv^{-1}, t_{(1)} \rangle \langle f_{(2)} \otimes t_{(2)}, R_{21}R_{12} \rangle \\
&= \langle uv^{-1}, t_{(1)} \rangle \langle \varphi J(t_{(2)}), f \rangle.
\end{aligned}$$

Thus $\langle uv^{-1}, t_{(1)} \rangle J(t_{(2)})\varphi = \langle uv^{-1}, t_{(1)} \rangle \varphi J(t_{(2)})$ in \mathcal{A}^* (for all $\varphi \in \mathcal{A}^*$). \square

An example of such a trace t is given by the trace $\text{Tr}_M : (U \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \text{Tr}(x_M))$ in a f.d. U -module M . The corresponding element $\langle uv^{-1}, (\text{Tr}_M)_{(1)} \rangle (\text{Tr}_M)_{(2)}$ is named quantum trace and will be denoted by $\text{Tr}_{q,M}$. We put $z_M = J(\text{Tr}_{q,M})$. Let $\mathcal{R}(U)$ be the representation ring of U . If M is a f.d. U -module, Tr_M and z_M only depend of the class $[M]$ of M in $\mathcal{R}(U)$.

Proposition 1.3 [Dr4]: *The map $(\mathcal{R}(U) \rightarrow Z(U), [M] \mapsto z_M)$ is a well-defined ring morphism.*

The map $(\mathcal{R}(U) \rightarrow \mathcal{R}(U), [M] \mapsto [M^*])$ is well-defined and involutive, because the element u gives an U -isomorphism between a module M and its bidual M^{**} (cf. [Dr4, §2, remark 1]). The map $(Z(U) \rightarrow Z(U), z \mapsto S(z))$ is an involutive algebra morphism (at least when we restrict it to the centralizer of \mathcal{A}^* in U), because S^2 is the inner automorphism of \mathcal{A}^* given by u . We will show that $z_{M^*} = S(z_M)$.

We recall that the number $\text{Tr}_M(uv^{-1}) = \text{Tr}_{q,M}(1)$ is called the quantum dimension of M and is denoted by $\dim_q M$. We also define the pairing $(\mathcal{R}(U) \times \mathcal{R}(U) \rightarrow \mathbb{K}, ([M], [N]) \mapsto \langle [M], [N] \rangle_1 = \langle \langle \text{Tr}_{q,M}, \text{Tr}_{q,N} \rangle \rangle)$. (This pairing gives the S -matrix considered for instance in [RT, §3.1].)

Proposition 1.4 a) *For all U -module M , $\dim_q M = \dim_q M^*$.*

b) *The pairing $\langle -, - \rangle_1$ on $\mathcal{R}(U)$ is symmetric.*

c) *For all $M \in \mathcal{R}(U)$, $S(z_M) = z_{M^*}$.*

Proof a) This statement appears in [RT, §5.2]. The figure 1 presents a pictorial proof of this result. We give also an algebraic proof:

$$\begin{aligned} \dim_q M &= \langle \text{Tr}_M, uv^{-1} \rangle \\ &= \sum \langle \text{Tr}_M, S(\beta_k) \alpha_k v^{-1} \rangle \\ &= \sum \langle \text{Tr}_M, \alpha_k S(\beta_k) v^{-1} \rangle \\ &= \sum \langle \text{Tr}_M, S(S(\beta_k) \alpha_k v^{-1}) \rangle \\ &= \langle \text{Tr}_M, S(uv^{-1}) \rangle = \langle \text{Tr}_{M^*}, uv^{-1} \rangle = \dim_q M^*. \end{aligned}$$

We have used the fact that $(S \otimes S)(R_{12}) = R_{12}$ and the cyclicity of the trace.

b) Let M and N be two f.d. U -modules, and let Tr_M, Tr_N be the traces. We have:

$$\begin{aligned} \langle [M], [N] \rangle_1 &= \langle \text{Tr}_M \otimes \text{Tr}_N, (uv^{-1} \otimes uv^{-1})(R_{21}R_{12}) \rangle \\ &= \sum \langle \text{Tr}_M \otimes \text{Tr}_N, uv^{-1} \beta_i \alpha_j \otimes uv^{-1} \alpha_i \beta_j \rangle \\ &= \sum \langle \text{Tr}_M \otimes \text{Tr}_N, S^2(\beta_i) uv^{-1} \alpha_j \otimes S^2(\alpha_i) uv^{-1} \beta_j \rangle \\ &= \sum \langle \text{Tr}_M \otimes \text{Tr}_N, \beta_i uv^{-1} \alpha_j \otimes \alpha_i uv^{-1} \beta_j \rangle \\ &= \sum \langle \text{Tr}_M \otimes \text{Tr}_N, uv^{-1} \alpha_j \beta_i \otimes uv^{-1} \beta_j \alpha_i \rangle \\ &= \langle \text{Tr}_M \otimes \text{Tr}_N, (uv^{-1} \otimes uv^{-1})(R_{12}R_{21}) \rangle \\ &= \langle [N], [M] \rangle_1. \end{aligned}$$

c) Let M be a f.d. U -modules. We compute:

$$\begin{aligned}
z_{M^*} &= \langle \text{id} \otimes \text{Tr}_{M^*}, (1 \otimes uv^{-1})(R_{21}R_{12}) \rangle \\
&= \sum \langle \text{Tr}_M \circ S, \alpha_i \beta_j S(\beta_k) \alpha_k v^{-1} \rangle \beta_i \alpha_j \\
&= \sum \langle \text{Tr}_M, \alpha_k S(\beta_k) \beta_j \alpha_i v^{-1} \rangle S^{-1}(\beta_i) S^{-1}(\alpha_j) \\
&= \sum \langle \text{Tr}_M, \alpha_i \alpha_k S(\beta_k) \beta_j v^{-1} \rangle S^{-1}(\alpha_j \beta_i) \\
&= \sum \langle \text{Tr}_M, \alpha_k \alpha_i \beta_j S(\beta_k) v^{-1} \rangle S^{-1}(\beta_i \alpha_j) \\
&= \sum \langle \text{Tr}_M, \alpha_i \beta_j S(\beta_k) \alpha_k v^{-1} \rangle S^{-1}(\beta_i \alpha_j) \\
&= S^{-1}(\langle \text{id} \otimes \text{Tr}_M, (R_{21}R_{12})(1 \otimes uv^{-1}) \rangle) \\
&= S^{-1}(z_M) = S(z_M).
\end{aligned}$$

Here, we have used the Yang–Baxter identity, in the form: $(S^{-1} \otimes \text{id} \otimes \text{id})(R_{13}R_{23}R_{12}^{-1}) = (S^{-1} \otimes \text{id} \otimes \text{id})(R_{12}^{-1}R_{23}R_{13})$, writing: $\sum \alpha_i \alpha_k \otimes \alpha_j \beta_i \otimes S(\beta_k) \beta_j = \sum \alpha_k \alpha_i \otimes \beta_i \alpha_j \otimes \beta_j S(\beta_k)$.

□

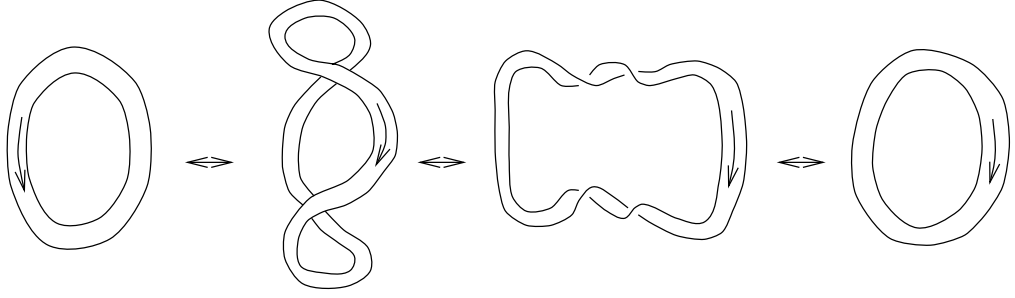


Figure 1

1.1.3 Reshetikhin's construction of central elements

We can reinterpret Reshetikhin's scheme as a generalization of the preceding construction. We still consider a ribbon Hopf algebra $(U, \mathcal{A}, R_{12}, v)$.

We first recall that, given a coalgebra C and an algebra D , the vector space $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(C, D)$ is an algebra for the convolution product: if $f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(C, D)$, one puts $f * g : (C \rightarrow D, x \mapsto f(x_{(1)})g(x_{(2)}))$. In our case, since the coproduct $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ and the product $U \otimes U \rightarrow U$ are morphisms of U -modules, we can see that the space of morphisms of U -modules is a subring of the convolution algebra $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, U)$.

We consider the maps $J^{*p} = J * \dots * J$ (p times), for any non-negative integer p . It is easy to verify that J^{*p} is given by $(\mathcal{A} \rightarrow U, \psi \mapsto \langle \text{id} \otimes \psi, (R_{21}R_{12})^p \rangle)$. The map $(\mathcal{A} \rightarrow U, \psi \mapsto \langle \text{id} \otimes \psi, (R_{21}R_{12})^{-1} \rangle)$ is an inverse for J in $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{A}, U)$, therefore we may consider the maps J^{*p} for $p \in \mathbb{Z}$. These are morphisms of U -modules. If M is a f.d. U -module, we can thus define the central elements $z_M^{(p)} = J^{*p}(\text{Tr}_{q,M})$; the $z_M^{(p)}$ centralize \mathcal{A}^* , and the $z_M^{(1)}$ are just our previous z_M .

Proposition 1.5 a) $z_M^{(0)} = \dim_q M$.

$$b) z_M^{(-1)} = S(z_M^{(1)}).$$

$$c) \text{ For all } M \in \mathfrak{R}(U), S(z_M^{(p)}) = z_{M^*}^{(p)}.$$

Proof The proofs are analogous to those of the proposition 1.4. Let us show for instance the third assertion for $p \geq 1$. Let $m_{23} : U \otimes U \otimes U \rightarrow U \otimes U$ be the multiplication of the two last factors. Using the Yang–Baxter equations: $R_{21}R_{23}R_{13} = R_{13}R_{23}R_{21}$ and $R_{23}R_{21}R_{31} = R_{31}R_{21}R_{23}$, we compute first:

$$\begin{aligned} (R_{21}R_{12})^p(1 \otimes uv^{-1}) &= \sum R_{21}(1 \otimes \alpha_i S(u) \beta_i) R_{12} (R_{21}R_{12})^{p-1}(1 \otimes uv^{-1}) \\ &= m_{23}(R_{21}R_{23}(S(u))_2 R_{13} (R_{31}R_{13})^{p-1}(uv^{-1})_3) \\ &= m_{23}(R_{13}(R_{31}R_{13})^{p-1} R_{23} R_{21}(S(u))_2 (uv^{-1})_3) \\ &= \sum (1 \otimes \alpha_i \alpha_j S(u)) R_{12} (R_{21}R_{12})^{p-1} (\beta_j \otimes \beta_i uv^{-1}). \end{aligned}$$

Then for any f.d. U -module M :

$$\begin{aligned} S(z_M^{(p)}) = S^{-1}(z_M^{(p)}) &= \langle S^{-1} \otimes \text{Tr}_M, (R_{21}R_{12})^p(1 \otimes uv^{-1}) \rangle \\ &= \sum \langle S^{-1} \otimes \text{Tr}_M, (1 \otimes \alpha_i \alpha_j S(u)) R_{12} (R_{21}R_{12})^{p-1} (\beta_j \otimes \beta_i uv^{-1}) \rangle \\ &= \sum \langle S^{-1} \otimes \text{Tr}_M, R_{12} (R_{21}R_{12})^{p-1} (\beta_j \otimes \beta_i u \alpha_i \alpha_j S(u) v^{-1}) \rangle \\ &= \sum \langle S^{-1} \otimes \text{Tr}_M, R_{12} (R_{21}R_{12})^{p-1} (\beta_j \otimes \alpha_j S(u) v^{-1}) \rangle \\ &= \langle S^{-1} \otimes \text{Tr}_M, (R_{12}R_{21})^p(1 \otimes S(u)v^{-1}) \rangle \\ &= \langle \text{id} \otimes \text{Tr}_{M^*}, (S^{-1} \otimes S^{-1})((R_{12}R_{21})^p(1 \otimes S(u)v^{-1})) \rangle \\ &= \langle \text{id} \otimes \text{Tr}_{M^*}, (1 \otimes uv^{-1})(R_{21}R_{12})^p \rangle \\ &= z_{M^*}^{(p)}. \end{aligned}$$

□

We will study in more details these elements $z_M^{(p)}$ in the case of a quantized enveloping algebra. Let us just point out that Reshetikhin [Re2] discovered them in a graphical way. In his language, $z_M^{(2)}$ is the tangle invariant corresponding to the colored (ribbon) tangle pictured in figure 2, and $\text{Tr}_{q,N}(z_M^{(-1)})$ is (for any f.d. U -module N) the invariant of the (ribbon) tangle shown in the figure 3.

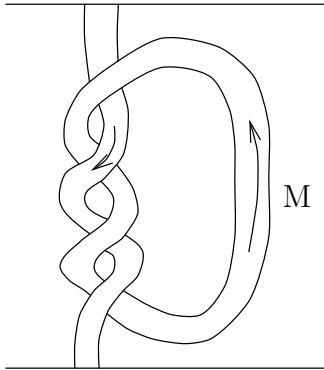


Figure 2

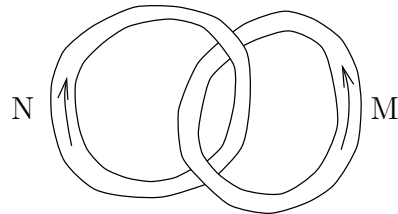


Figure 3

1.2 The center of $U_q(\mathfrak{g})$

1.2.1 Joseph and Letzter's construction

Let \mathfrak{g} be a finite-dimensional complex simple Lie algebra, \mathfrak{h} a Cartan subalgebra, $Q \subseteq P \subseteq \mathfrak{h}^*$ the root and the weight lattices, W the Weyl group, $(\cdot|\cdot) : P \times P \rightarrow \mathbb{Z}$ a \mathbb{Z} -valued W -invariant non-degenerate bilinear form. We choose a set $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ of simple roots and put $d_i = \frac{\|\alpha_i\|^2}{2}$. Let P_{++} be the set of dominant weights, R_+ be the set of positive roots, $\rho \in P_{++}$ be half the sum of the positive roots, w_0 be the longest element of W , and $\varepsilon : W \rightarrow \{\pm 1\}$ be the signature function.

Let q be an indeterminate. $U_q(\mathfrak{g})$ is defined to be the $\mathbb{C}(q)$ -algebra generated by elements K_λ ($\lambda \in P$), E_i and F_i ($i \in \{1, \dots, \ell\}$) with some well-known relations, among which: $K_\lambda E_i = q^{(\lambda|\alpha_i)} E_i K_\lambda$, $K_\lambda F_i = q^{-(\lambda|\alpha_i)} F_i K_\lambda$, $E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_{\alpha_i} - K_{-\alpha_i}}{q^{d_i} - q^{-d_i}}$. $U_q(\mathfrak{g})$ is a Hopf algebra, the coproduct being given by $\Delta(K_\lambda) = K_\lambda \otimes K_\lambda$, $\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_{\alpha_i} \otimes E_i$, $\Delta(F_i) = F_i \otimes K_{-\alpha_i} + 1 \otimes F_i$. Let $Z(U_q(\mathfrak{g}))$ be the center of $U_q(\mathfrak{g})$.

Joseph and Letzter have studied the adjoint module $U_q(\mathfrak{g})$. We state a consequence of their results for the right adjoint action introduced in section 1.1.2. The set of all ad-finite elements in $U_q(\mathfrak{g})$ is a subalgebra $F_r(U_q(\mathfrak{g}))$ of $U_q(\mathfrak{g})$. There is a natural decomposition in blocks: $F_r(U_q(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{\lambda \in P_{++}} (K_{2\lambda}) \cdot U_q(\mathfrak{g})$, and each block $(K_{2\lambda}) \cdot U_q(\mathfrak{g})$ contains a unique line defining the trivial $U_q(\mathfrak{g})$ -module (see [JL2, §4.13]). We denote by $\mathcal{Z}_{\lambda+\rho}$ the corresponding central element of $U_q(\mathfrak{g})$. Hence the center of $U_q(\mathfrak{g})$ has the family $(\mathcal{Z}_{\lambda+\rho})_{\lambda \in P_{++}}$ for $\mathbb{C}(q)$ -basis.

1.2.2 The Harish-Chandra map

Let U^+ , U^0 and U^- be the subalgebras of $U_q(\mathfrak{g})$ generated by the $(E_i)_{1 \leq i \leq \ell}$, $(K_\lambda)_{\lambda \in P}$ and $(F_i)_{1 \leq i \leq \ell}$ respectively. The multiplication induces an isomorphism of vector spaces $U_q(\mathfrak{g}) \simeq U^+ \otimes U^0 \otimes U^-$. Let $\Psi : (U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow U^0)$ be the Harish-Chandra map given by $(E K_\lambda F \mapsto q^{(\lambda|\rho)} \varepsilon(E) \varepsilon(F) K_{w_0 \lambda})$ in this triangular decomposition of $U_q(\mathfrak{g})$. There is a natural isomorphism from the algebra of the weight group onto a subalgebra of U^0 , given by $\tau : (\mathbb{C}(q)[P] \rightarrow U^0, e^\lambda \mapsto K_{2\lambda})$; there is thus a natural action of W on $(\text{im } \tau)$. Rosso [Ro2] (see also [Ro3, §2.8]) has shown that Ψ defines an isomorphism from the center of $U_q(\mathfrak{g})$ to the set of W -invariant elements in $(\text{im } \tau)$, and thus that $\tau^{-1} \circ \Psi$ defines an isomorphism from $Z(U_q(\mathfrak{g}))$ to the set of exponential invariants $(\mathbb{C}(q)[P])^W$.

We will consider only $U_q(\mathfrak{g})$ -modules which are f.d. and of type 1 (following the terminology of Chari and Pressley [CP2, p. 314]), that is, modules M such that $M = \bigoplus_{\lambda \in P} \{x \in M \mid \forall \mu \in P, K_\mu \cdot x = q^{(\lambda|\mu)} x\}$. The f.d. modules of type 1 are completely reducible and the simple ones are classified by their highest weight $\lambda \in P_{++}$. These will be denoted by $L(\lambda)$. The dual of $L(\lambda)$ will be identified with $L(\lambda^*)$, where $\lambda^* = -w_0(\lambda)$. The Grothendieck ring \mathcal{R} of the category of f.d. type 1 modules is naturally isomorphic to the representation ring of \mathfrak{g} , and the formal character ch gives an isomorphism from \mathcal{R} to the algebra of exponential invariants $\mathbb{Z}[P]^W$. Finally each module $L(\lambda)$ is absolutely simple, so has a central

character $\chi_{\lambda+\rho}$. If ev_λ denotes the algebra morphism ($U^0 \rightarrow \mathbb{C}(q), K_\mu \mapsto q^{(\lambda|\mu)}$), one has $\chi_\lambda(z) = \text{ev}_\lambda \circ \Psi(z)$ for all $z \in Z(U_q(\mathfrak{g}))$.

1.2.3 Expression of the $z_M^{(1)}$

The most important thing for us is that $U_q(\mathfrak{g})$ is a quasitriangular Hopf algebra [Dr2]. There exist two possible R -matrices [Ga]: we choose the one with the structure $R_{12} = \sum(\text{diagonal part})(\text{monomial in } F) \otimes (\text{monomial in } E)$, and the other one is R_{21}^{-1} . The element u is such that $u S(u)^{-1} = K_{-4\rho}$; there is a natural square root of this group-like element, and we define the ribbon element v by the equation $uv^{-1} = K_{-2\rho}$. Finally, R_{12} acts only in f.d. type 1 $U_q(\mathfrak{g})$ -modules, and we define consequently $\mathcal{A}_q(G)$ as the $\mathbb{C}(q)$ -linear span of the matrix coefficients of these representations. Then $\mathcal{A}_q(G)$ separates the points of $U_q(\mathfrak{g})$, and one gets a ribbon Hopf algebra $(U_q(\mathfrak{g}), \mathcal{A}_q(G), R_{12}, v)$. The constructions in section 1.1.3 allow us to consider the central elements $z_M^{(p)}$ for any type 1 f.d. $U_q(\mathfrak{g})$ -module M .

Proposition 1.6 [JL2, §6.10][Et]: *Up to a scalar, one has $\mathcal{Z}_{\lambda+\rho} = z_{L(\lambda)}^{(1)}$. And one has $\Psi(z_{L(\lambda)}^{(1)}) = \tau(\text{ch } L(\lambda))$.*

Proof A simple calculation based on the Weyl character formula shows that, for any $\mu \in P_{++}$, one has:

$$\begin{aligned} \dim_q L(\mu) &= \text{Tr}_{L(\mu)}(K_{-2\rho}) = \dim_q L(\mu^*) = \text{Tr}_{L(\mu)}(K_{2\rho}) \\ &= \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\mu+\rho|w\rho)}}{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\rho|w\rho)}} = \prod_{\alpha \in R_+} \frac{q^{(\alpha|\mu+\rho)} - q^{-(\alpha|\mu+\rho)}}{q^{(\alpha|\rho)} - q^{-(\alpha|\rho)}} \neq 0. \end{aligned}$$

Let $\lambda \in P_{++}$; we can write $\mathcal{Z}_{\lambda+\rho} = S(x_{(1)})K_{2\lambda}x_{(2)}$ for some $x \in U_q(\mathfrak{g})$, by the definition of $\mathcal{Z}_{\lambda+\rho}$. We then compute, for any $\mu \in P_{++}$:

$$\begin{aligned} \dim_q L(\mu) \chi_{\mu+\rho}(\mathcal{Z}_{\lambda+\rho}) &= \text{Tr}_{L(\mu)}(K_{2\rho} \mathcal{Z}_{\lambda+\rho}) \\ &= \text{Tr}_{L(\mu)}(K_{2\rho} S(x_{(1)}) K_{2\lambda} x_{(2)}) \\ &= \text{Tr}_{L(\mu)}(x_{(2)} S^{-1}(x_{(1)}) K_{2\rho} K_{2\lambda}) \\ &= \varepsilon(x) \text{Tr}_{L(\mu)}(K_{2(\lambda+\rho)}). \end{aligned}$$

Using the weight decomposition of $L(\mu)$ and the Weyl character formula, we find that:

$$\begin{aligned} \dim_q L(\mu) \chi_{\mu+\rho}(\mathcal{Z}_{\lambda+\rho}) &= \varepsilon(x) \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\lambda+\rho|w(\mu+\rho))}}{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\lambda+\rho|w\rho)}} \\ &= \frac{\varepsilon(x)}{\dim_q L(\lambda)} \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\lambda+\rho|w(\mu+\rho))}}{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\rho|w\rho)}}. \end{aligned}$$

According to [TW, lemma 3.5.1], we thus have:

$$\dim_q L(\mu) \chi_{\mu+\rho}(\mathcal{Z}_{\lambda+\rho}) = \frac{\varepsilon(x)}{\dim_q L(\lambda)} \langle\langle \mathrm{Tr}_{q, L(\mu)}, \mathrm{Tr}_{q, L(\lambda)} \rangle\rangle = \frac{\varepsilon(x)}{\dim_q L(\lambda)} \langle \mathrm{Tr}_{q, L(\mu)}, z_{L(\lambda)}^{(1)} \rangle.$$

$\mathcal{Z}_{\lambda+\rho}$ and $\frac{\varepsilon(x)}{\dim_q L(\lambda)} z_{L(\lambda)}^{(1)}$ act therefore by the same scalar in any simple f.d. type 1 $U_q(\mathfrak{g})$ -module, thus are equal.

On the other hand:

$$\begin{aligned} \chi_{\mu+\rho}(z_{L(\lambda)}^{(1)}) &= \frac{1}{\dim_q L(\mu)} \langle \mathrm{Tr}_{q, L(\mu)}, z_{L(\lambda)}^{(1)} \rangle \\ &= \frac{1}{\dim_q L(\mu)} \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\lambda+\rho|w(\mu+\rho))}}{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\rho|w\rho)}} \\ &= \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\lambda+\rho|w(\mu+\rho))}}{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\mu+\rho|w\rho)}} = \mathrm{ev}_{\mu+\rho}(\tau(\mathrm{ch} L(\lambda))), \end{aligned} \tag{1.2}$$

so that $\Psi(z_{L(\lambda)}^{(1)}) = \tau(\mathrm{ch} L(\lambda))$. \square

1.2.4 Expression of the $z_M^{(p)}$

Now, we can prove the main result of this article. Because of the preceding description, it is natural to put $\mathcal{Z}_{\lambda+\rho}^{(p)} = z_{L(\lambda)}^{(p)}$, where the $z_M^{(p)}$ were defined (in section 1.1.3) as $\langle \mathrm{id} \otimes \mathrm{Tr}_{q, M}, (R_{21} R_{12})^p \rangle$. This defines $\mathcal{Z}_{\lambda+\rho}^{(p)}$ if $\lambda + \rho$ is a regular dominant weight; we define $\mathcal{Z}_\mu^{(p)}$ for any weight μ by the requirement $\mathcal{Z}_{w\mu}^{(p)} = \varepsilon(w) \mathcal{Z}_\mu^{(p)}$ for any $w \in W$; in particular, $\mathcal{Z}_\mu^{(p)} = 0$ if μ belongs to a wall, and $\mathcal{Z}_0^{(p)} = 0$, $\mathcal{Z}_\rho^{(p)} = 1$.

Theorem 1.7 *For any $\lambda \in P$, $\sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2p(\lambda|w\rho)} \mathcal{Z}_{\lambda+w\rho}^{(p)} = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\lambda|w\rho)} \mathcal{Z}_{p\lambda+w\rho}^{(1)}$. These relations characterize the elements $\mathcal{Z}_\lambda^{(p)}$.*

Proof We will check that any central character $\chi_{\mu+\rho}$ takes the same value on both sides of this equation. For $\lambda \in \rho + P_{++}$ and $w \in W$, we set (in the Grothendieck ring \mathcal{R}): $L(w\lambda - \rho) = \varepsilon(w) L(\lambda - \rho)$; it is just a convenient convention allowing to write the formula for the tensor product multiplicities in \mathcal{R} :

$$L(\lambda) \otimes L(\mu) = \sum_{\nu \in P_{++}} \left(\sum_{w \in W} \varepsilon(w) \dim L(\lambda)_{w(\nu+\rho)-\mu-\rho} \right) L(\nu)$$

(where $L(\lambda)_\tau$ is the subspace of $L(\lambda)$ of weight τ) in the following simple form:

$$L(\lambda) \otimes L(\mu) = \sum_{\nu \in P} (\dim L(\lambda)_{\nu-\mu}) L(\nu) = \sum_{\nu \in P} (\dim L(\lambda)_\nu) L(\mu + \nu).$$

We similarly set $\mathrm{Tr}_{q, L(w\lambda-\rho)} = \varepsilon(w) \mathrm{Tr}_{q, L(\lambda-\rho)}$, so that $(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}_q(G), L(\lambda) \mapsto \mathrm{Tr}_{q, L(\lambda)})$ is a well-defined ring homomorphism. We also need the ribbon element $v = uK_{2\rho}$. It acts in the module $L(\lambda)$ as the scalar $q^{-(\lambda|2\rho)}$ [Dr4]. The formula (1.1) (in the section 1.1.1)

shows that $(R_{21}R_{12})$ acts as the scalar $q^{(\nu|\nu+2\rho)-(\lambda|\lambda+2\rho)-(\mu|\mu+2\rho)}$ in the isotypical component of type $L(\nu)$ of the tensor product $L(\lambda) \otimes L(\mu)$.

Then we compute:

$$\begin{aligned}
& \dim_q L(\mu) \chi_{\mu+\rho} (\text{l.h.s.}) \\
&= \text{Tr}_{q, L(\mu)} (\text{l.h.s.}) \\
&= \sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2p(\lambda|w\rho)} \langle \text{Tr}_{q, L(\mu)} \otimes \text{Tr}_{q, L(\lambda+w\rho-\rho)}, (R_{21}R_{12})^p \rangle \\
&= \sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2p(\lambda|w\rho)} \left(\sum_{\nu \in P} \dim L(\lambda + w\rho - \rho)_\nu \right. \\
&\quad \left. \langle \text{Tr}_{q, L(\mu+\nu)}, q^{p((\mu+\nu|\mu+\nu+2\rho)-(\lambda+w\rho-\rho|\lambda+w\rho+\rho)-(\mu|\mu+2\rho))} \rangle \right) \\
&= \sum_{\nu \in P} \left(\sum_{w \in W} \varepsilon(w) \dim L(\lambda + w\rho - \rho)_\nu \right) \dim_q L(\mu + \nu) q^{p((\nu|\nu+2\mu+2\rho)-\|\lambda\|^2)} \\
&= \sum_{w' \in W} \dim_q L(w'\lambda + \mu) q^{2p(w'\lambda|\mu+\rho)},
\end{aligned}$$

since $\sum_{w \in W} \varepsilon(w) \text{ch } L(\lambda + w\rho - \rho) = \sum_{w' \in W} e^{w'\lambda}$, a consequence of the Weyl character formula.

Setting $D = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\rho|w\rho)}$, we compute, using formula (1.2):

$$\begin{aligned}
\dim_q L(\mu) \chi_{\mu+\rho} (\text{r.h.s.}) &= \sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\lambda|w\rho)} \dim_q L(\mu) \chi_{\mu+\rho} (\mathcal{Z}_{p\lambda+w\rho}^{(1)}) \\
&= \frac{1}{D} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\lambda|w\rho)} \left(\sum_{w' \in W} \varepsilon(w') q^{2(\mu+\rho|w'(p\lambda+w\rho))} \right) \\
&= \frac{1}{D} \sum_{w, w' \in W} \varepsilon(w) q^{2(\mu+\rho|w'\rho)} q^{2(w'\lambda+\mu+\rho|w\rho)} \\
&= \sum_{w' \in W} q^{2p(w'\lambda|\mu+\rho)} \dim_q L(w'\lambda + \mu).
\end{aligned}$$

Hence our formula holds. The remainder of this section will prove that it fully characterizes the elements $\mathcal{Z}_\lambda^{(p)}$. \square

To conclude the proof of the theorem, we use the following proposition, formulated in an abstract setting. Let V be a \mathbb{Q} -vector space. The set of functions $P \rightarrow V$ is in bijection with $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[P], V)$. By the action of W on $\mathbb{Z}[P]$, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[P], V)$ becomes a W -module, and we note H_1 and H_ε the isotypical components corresponding to the characters 1 and ε of W .

Proposition 1.8 *If $r \in \text{Aut}_{\mathbb{Q}}(V)$, then the map $(H_\varepsilon \rightarrow H_1, f \mapsto (\lambda \mapsto \sum_{w \in W} \varepsilon(w) r^{(\lambda|w\rho)} f(\lambda + w\rho)))$ is injective.*

Proof Let $f \in H_\varepsilon$ belonging to the kernel of the map, and suppose that f is non-zero. Since $f \in H_\varepsilon$, $f(0) = 0$. Let $\lambda \in P_{++}$ be a dominant weight such that $f(\lambda + \rho) \neq 0$ with $\|\lambda + \rho\|$ minimal for this property. By hypothesis, $\sum_{w \in W} \varepsilon(w) r^{(\lambda|w\rho)} f(\lambda + w\rho) = 0$. We rewrite this sum as $\sum_{w \in W} r^{(w\lambda|\rho)} f(w\lambda + \rho) = |W_\lambda| \sum_{w \in W/W_\lambda} r^{(w\lambda|\rho)} f(w\lambda + \rho)$ where W_λ is the stabilizer of λ in W . Thus $\sum_{w \in W/W_\lambda} r^{(w\lambda|\rho)} f(w\lambda + \rho) = 0$. The weights occurring in this sum verify $\|w\lambda + \rho\| < \|\lambda + \rho\|$ if $w \neq W_\lambda$. (To see this, write a reduced decomposition of the shortest representative of w : $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$, with $s_{i_k}(\lambda) \neq \lambda$. Then $\{\beta \in R_+ \mid$

$w(\beta) \in -R_+ \} = \{\alpha_{i_k}, s_{i_k}(\alpha_{i_{k-1}}), \dots, s_{i_k} s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_2}(\alpha_{i_1})\}$, so $\rho - w^{-1}(\rho) \in \alpha_{i_k} + Q_+$, where Q_+ is the \mathbb{Z}_+ -span of R_+ . So $(\lambda \mid \rho) > (\lambda \mid w^{-1}\rho)$, hence $\|w\lambda + \rho\| < \|\lambda + \rho\|$. This contradicts the choice of λ . \square

An application of this proposition proves the last assertion in our theorem 1.7.

Remarks. a) Drinfeld's result (proposition 1.3) implies that the $\mathcal{Z}_{\mu+\rho}^{(1)}$ ($\mu \in P_{++}$) span a \mathbb{Z} -form in $Z(U_q(\mathfrak{g}))$. We then have that the $\mathcal{Z}_{\lambda}^{(p)}$ belong to $\sum_{\mu \in P_{++}} \mathbb{Z}[q, q^{-1}] \mathcal{Z}_{\mu+\rho}^{(1)}$. We take now the image of our formula in $\mathbb{Z}[q, q^{-1}][P]^W$ by the map $\tau^{-1} \circ \Psi$, and we compose by the evaluation at $q = 1$: $\mathbb{Z}[q, q^{-1}][P] \rightarrow \mathbb{Z}[P]$. We know that $\mathcal{Z}_{\lambda+\rho}^{(1)}$ is sent to $\text{ch } L(\lambda)$, and the Weyl character formula then tells that $\mathcal{Z}_{\lambda+\rho}^{(p)}$ is sent to $\psi^p(\text{ch } L(\lambda))$ [Su]. Here ψ^p is the Adams operator in the algebra $\mathbb{Z}[P]$: it is the algebra morphism $e^\lambda \mapsto e^{p\lambda}$; it may be viewed as the convolution product $\text{id} * \cdots * \text{id}$ (p times), $\mathbb{Z}[P]$ being a Hopf algebra (over \mathbb{Z}).

b) The scalar products on \mathcal{R} given by $\langle L(\lambda), L(\mu) \rangle_p = \langle \text{Tr}_{q, L(\lambda)}, z_{L(\mu)}^{(p)} \rangle$ satisfy $\langle L(\lambda), L(\mu) \rangle_p = \langle L(\mu), L(\lambda) \rangle_p = \langle L(\lambda^*), L(\mu^*) \rangle_p$. They are similar to Macdonald's scalar products (cf. [Ma]), but the combinatorics is considerably much easier in our case.

1.3 An application to a theorem of Faddeev, Reshetikhin and Takhtadzhyan

Besides being funny for itself, our formula (theorem 1.7) has two consequences. First, it gives relations between invariants of knots that one constructs with the quantum groups. It can also be applied to prove a theorem stated in [FRT1].

Let us suppose that \mathfrak{g} is of classical type A, B, C or D and of rank ℓ . We adopt Bourbaki's conventions for the root systems [Bo]. For instance, $L(\varpi_1)$ is the natural representation of \mathfrak{g} . We will keep track of the normalization of the invariant bilinear form on \mathfrak{h}^* by letting d be half of the square of the length of a short root.

We now recall the formalism of [FRT1]. We choose a basis (v_i) of $L(\varpi_1)$, consisting of vectors of weights (λ_i) , we let (v_i^*) be the dual basis, and we consider the matrix $T = (t_{ij})$ of the coefficients of this representation: for $x \in U_q(\mathfrak{g})$, $\langle t_{ij}, x \rangle = \langle v_i^*, x \cdot v_j \rangle$. Faddeev, Reshetikhin and Takhtadzhyan define the matrices with coefficients in $U_q(\mathfrak{g})$: $L^\pm = (l_{ij}^\pm)$, with $l_{ij}^+ = \langle \text{id} \otimes t_{ij}, R_{12} \rangle \in U^0 U^-$ and $S(l_{ij}^-) = \langle t_{ij} \otimes \text{id}, R_{12} \rangle \in U^+ U^0$. They consider the

elements of $U_q(\mathfrak{g})$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(q^{2\rho}(L^+S(L^-))^k) &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k}} q^{(2\rho|\lambda_{i_1})} l_{i_1 j_1}^+ S(l_{j_1 i_2}^-) \cdots l_{i_k j_k}^+ S(l_{j_k i_1}^-) \\
&= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \\ j_1, \dots, j_k}} q^{(2\rho|\lambda_{i_1})} \langle \mathrm{id} \otimes t_{i_1 j_1}, R_{12} \rangle \langle t_{j_1 i_2} \otimes \mathrm{id}, R_{12} \rangle \cdots \\
&\quad \langle \mathrm{id} \otimes t_{i_k j_k}, R_{12} \rangle \langle t_{j_k i_1} \otimes \mathrm{id}, R_{12} \rangle \\
&= \sum_{i_1} q^{(2\rho|\lambda_{i_1})} \langle t_{i_1 i_1} \otimes \mathrm{id}, (R_{21} R_{12})^k \rangle \\
&= \langle \mathrm{Tr}_{L(\varpi_1)} \otimes \mathrm{id}, (R_{21} R_{12})^k (K_{2\rho} \otimes 1) \rangle \\
&= \langle \mathrm{Tr}_{L(\varpi_1)^*} \otimes S, (S^{-1} \otimes S^{-1})((R_{21} R_{12})^k (K_{2\rho} \otimes 1)) \rangle \\
&= \langle S \otimes \mathrm{Tr}_{L(\varpi_1)^*}, (1 \otimes K_{-2\rho})(R_{21} R_{12})^k \rangle \\
&= S(\mathbf{J}^{*k}(\mathrm{Tr}_{q, L(\varpi_1)^*})) \\
&= S(z_{L(\varpi_1)^*}^{(k)}) \\
&= z_{L(\varpi_1)}^{(k)}.
\end{aligned}$$

They state ([FRT1, theorem 14]) that these elements belong to and generate the center of $U_q(\mathfrak{g})$. We will indeed prove a more precise theorem:

Theorem 1.9 *Let Y be the subalgebra of $Z(U_q(\mathfrak{g}))$ generated by the elements $z_{L(\varpi_1)}^{(1)}, \dots, z_{L(\varpi_1)}^{(\ell)}$. Then:*

- in case A_ℓ or C_ℓ , Y is the whole algebra $Z(U_q(\mathfrak{g}))$.
- in case B_ℓ , we use the Harish-Chandra map $\tau^{-1} \circ \Psi : Z(U_q(\mathfrak{g})) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}(q)[P])^W$ to describe $Z(U_q(\mathfrak{g}))$. Y corresponds to the subalgebra spanned by the characters $\mathrm{ch} M \in \mathbb{Z}[P]^W$ of vectorial representations of \mathfrak{g} . It is the subalgebra of $(\mathbb{C}(q)[P])^W$ fixed by the involution $s : (\mathrm{ch} L(\varpi_i) \mapsto \mathrm{ch} L(\varpi_i) \ (i \leq \ell - 1), \mathrm{ch} L(\varpi_\ell) \mapsto -\mathrm{ch} L(\varpi_\ell))$.
- in case D_ℓ , Y corresponds to the subalgebra of $(\mathbb{C}(q)[P])^W$ fixed by the involutions $s : (\mathrm{ch} L(\varpi_i) \mapsto \mathrm{ch} L(\varpi_i) \ (i \leq \ell - 2), \mathrm{ch} L(\varpi_{\ell-1}) \leftrightarrow \mathrm{ch} L(\varpi_\ell))$ and $t : (\mathrm{ch} L(\varpi_i) \mapsto \mathrm{ch} L(\varpi_i) \ (i \leq \ell - 2), \mathrm{ch} L(\varpi_{\ell-1}) \leftrightarrow -\mathrm{ch} L(\varpi_\ell))$.

Proof We rewrite our formula in the form:

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2p(\lambda|w^{-1}\rho)} z_{\lambda+w^{-1}\rho}^{(p)} = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) q^{2(\lambda|w^{-1}\rho)} z_{p\lambda+w^{-1}\rho}^{(1)},$$

in which we can replace the sums over W by sums over W/W_λ . We will only consider the cases A_ℓ and B_ℓ (the cases C_ℓ and D_ℓ being similar).

- Case A_ℓ : the shortest representatives of elements in W/W_{ϖ_1} are given by $\{1, s_1, s_2 s_1, \dots, s_\ell \cdots s_1\}$. Let $1 \leq p \leq \ell$. For $1 \leq k \leq \ell + 1$ and $w = s_{k-1} \cdots s_1$, one has:

$$- \varpi_1 + w^{-1}\rho \text{ belongs to a wall iff } k > 1, \text{ and it is } \varpi_1 + \rho \text{ otherwise;}$$

- $p\varpi_1 + w^{-1}\rho$ belongs to a wall iff $k > p$, and it is $(p-k)\varpi_1 + \varpi_k + \rho$ if $k \leq p$;
- $(\varpi_1 | w^{-1}\rho) = d(\frac{\ell}{2} - k + 1)$ ($d = 1$ in Bourbaki's normalization).

Then our formula implies that :

$$q^{d \cdot 2p \frac{\ell}{2}} \mathcal{Z}_{\varpi_1 + \rho}^{(p)} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} q^{d \cdot 2(\frac{\ell}{2} - k + 1)} \mathcal{Z}_{(p-k)\varpi_1 + \varpi_k + \rho}^{(1)}.$$

The rule for tensor product multiplicities [Li] and the proposition 1.3 show that, for $1 \leq n \leq \ell - 1$ and $1 \leq m$:

$$\mathcal{Z}_{m\varpi_1 + \rho}^{(1)} \cdot \mathcal{Z}_{\varpi_n + \rho}^{(1)} = \mathcal{Z}_{m\varpi_1 + \varpi_n + \rho}^{(1)} + \mathcal{Z}_{(m-1)\varpi_1 + \varpi_{n+1} + \rho}^{(1)}.$$

Let $Y_p \subseteq Z(U_q(\mathfrak{g}))$ be the $\mathbb{C}(q)$ -subalgebra generated by the $(\mathcal{Z}_{\varpi_1 + \rho}^{(s)})_{1 \leq s \leq p}$. By induction on p , we show that for $1 \leq p \leq \ell$, one has $\mathcal{Z}_{\varpi_1 + \rho}^{(1)}, \dots, \mathcal{Z}_{\varpi_p + \rho}^{(1)} \in Y_p$ and $\mathcal{Z}_{\varpi_1 + \rho}^{(1)}, \dots, \mathcal{Z}_{p\varpi_1 + \rho}^{(1)} \in Y_p$. It is clear for $p = 1$. If it is true for $p - 1$, then Y_p contains the following sums:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{(p-1)\varpi_1 + \rho}^{(1)} \cdot \mathcal{Z}_{\varpi_1 + \rho}^{(1)} &= \mathcal{Z}_{p\varpi_1 + \rho}^{(1)} + \mathcal{Z}_{(p-2)\varpi_1 + \varpi_2 + \rho}^{(1)} \\ \mathcal{Z}_{(p-2)\varpi_1 + \rho}^{(1)} \cdot \mathcal{Z}_{\varpi_2 + \rho}^{(1)} &= \mathcal{Z}_{(p-2)\varpi_1 + \varpi_2 + \rho}^{(1)} + \mathcal{Z}_{(p-3)\varpi_1 + \varpi_3 + \rho}^{(1)} \\ \mathcal{Z}_{\varpi_1 + \rho}^{(1)} \cdot \mathcal{Z}_{\varpi_{p-1} + \rho}^{(1)} &= \mathcal{Z}_{\varpi_1 + \varpi_{p-1} + \rho}^{(1)} + \mathcal{Z}_{\varpi_p + \rho}^{(1)} \\ q^{d \cdot 2p \frac{\ell}{2}} \mathcal{Z}_{\varpi_1 + \rho}^{(p)} &= \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} q^{d \cdot 2(\frac{\ell}{2} - k + 1)} \mathcal{Z}_{(p-k)\varpi_1 + \varpi_k + \rho}^{(1)}. \end{aligned}$$

The elements $\mathcal{Z}_{p\varpi_1 + \rho}^{(1)}, \mathcal{Z}_{(p-2)\varpi_1 + \varpi_2 + \rho}^{(1)}, \dots, \mathcal{Z}_{\varpi_p + \rho}^{(1)}$ are combinations of these, because the determinant of the system is $q^{d \cdot (\ell - p + 1)} \frac{q^{d \cdot p} - q^{-d \cdot p}}{q^d - q^{-d}} \neq 0$.

- Case B_ℓ ($\ell \geq 2$): the shortest representatives of elements in W/W_{ϖ_1} are given by $\{1, s_1, s_2 s_1, \dots, s_\ell \cdots s_1, s_{\ell-1} s_\ell s_{\ell-1} \cdots s_1, s_{\ell-2} s_{\ell-1} s_\ell s_{\ell-1} \cdots s_1, \dots, s_1 \cdots s_\ell \cdots s_1\}$. Let $1 \leq p \leq \ell$. For $1 \leq k \leq \ell$ and $w = s_{k-1} \cdots s_1$, one has:

- $p\varpi_1 + w^{-1}\rho$ belongs to a wall iff $k > p$, it is $(p-k)\varpi_1 + \varpi_k + \rho$ if $k \leq p$ and $k \leq \ell - 1$, and $2\varpi_\ell + \rho$ if $k = p = \ell$;
- $(\varpi_1 | w^{-1}\rho) = d(2\ell - 2k + 1)$ ($d = \frac{1}{2}$ in Bourbaki's normalization).

For $1 \leq k \leq \ell - 1$ and $w = s_k s_{k+1} \cdots s_\ell s_{\ell-1} \cdots s_1$, or $k = \ell$ and $w = s_\ell s_{\ell-1} \cdots s_1$, one has:

- $p\varpi_1 + w^{-1}\rho$ belongs to a wall except if p is odd and $k = \frac{2\ell - p + 1}{2}$, in which case $p\varpi_1 + w^{-1}\rho = (s_{k-1} s_{k-2} \cdots s_1)^{-1} \rho$;
- $(\varpi_1 | w^{-1}\rho) = d(2k - 2\ell - 1)$.

We thus have for $1 \leq p \leq \ell - 1$, p odd:

$$q^{d \cdot 2p(2\ell-1)} \mathcal{Z}_{\varpi_1+\rho}^{(p)} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} q^{d \cdot 2(2\ell-2k+1)} \mathcal{Z}_{(p-k)\varpi_1+\varpi_k+\rho}^{(1)}$$

and for $1 \leq p \leq \ell - 1$, p even:

$$q^{d \cdot 2p(2\ell-1)} \mathcal{Z}_{\varpi_1+\rho}^{(p)} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} q^{d \cdot 2(2\ell-2k+1)} \mathcal{Z}_{(p-k)\varpi_1+\varpi_k+\rho}^{(1)} + q^{-d \cdot 2p} \mathcal{Z}_{\rho}^{(1)}$$

and similar relations for $p = \ell$, but with the term $(-1)^{\ell+1} q^{d \cdot 2} \mathcal{Z}_{2\varpi_\ell+\rho}^{(1)}$ in the sum for $k = \ell$. An induction similar to the case A_ℓ shows that Y is the $\mathbb{C}(q)$ -subalgebra generated by the $\mathcal{Z}_{\varpi_1+\rho}^{(1)}, \mathcal{Z}_{\varpi_2+\rho}^{(1)}, \dots, \mathcal{Z}_{2\varpi_\ell+\rho}^{(1)}$. One has to use the tensor product decomposition rules:

- $L(m\varpi_1) \otimes L(\varpi_n) = L(m\varpi_1 + \varpi_n) \oplus L((m-1)\varpi_1 + \varpi_{n+1}) \oplus Z$ (for $1 \leq n \leq \ell - 2$, $1 \leq m$), where the summands in Z are some $L(j\varpi_1 + \varpi_k)$ with $k \leq n$, $j + k \leq m + n - 2$;
- $L(m\varpi_1) \otimes L(\varpi_{\ell-1}) = L(m\varpi_1 + \varpi_{\ell-1}) \oplus L((m-1)\varpi_1 + 2\varpi_\ell) \oplus Z$ (for $1 \leq m$), where the summands in Z are some $L(j\varpi_1 + \varpi_k)$ with $k \leq \ell - 1$, $j + k \leq m + \ell - 3$;
- $L(\varpi_\ell)^{\otimes 2}$ belongs to the subring generated in \mathcal{R} by $L(\varpi_1), \dots, L(\varpi_{\ell-1}), L(2\varpi_\ell)$.

□

Remark. The theorems 1.7 and 1.9 are also valid for the algebras $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ (see §3.1.1). Let ϖ_i denote the dominant integral weight $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$ and $2\rho = (n-1)\varepsilon_1 + (n-3)\varepsilon_2 + \dots + (1-n)\varepsilon_n$. Then the quantum trace in the $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module $L(\varpi_n)$ is the quantum determinant $\det_q \in \mathcal{A}_q(\mathrm{GL}_n)$, and $J(\det_q) = \mathcal{Z}_{\varpi_n+\rho}^{(1)} = K_{2\varpi_n}$. The center of $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ is the algebra:

$$\mathbb{C}(q)[\mathcal{Z}_{\varpi_1+\rho}^{(1)}, \dots, \mathcal{Z}_{\varpi_{n-1}+\rho}^{(1)}, (\mathcal{Z}_{\varpi_n+\rho}^{(1)})^{\pm 1}],$$

with:

$$\mathbb{C}(q)[\mathcal{Z}_{\varpi_1+\rho}^{(1)}, \dots, \mathcal{Z}_{\varpi_n+\rho}^{(1)}] = \mathbb{C}(q)[\mathcal{Z}_{\varpi_1+\rho}^{(1)}, \dots, \mathcal{Z}_{\varpi_1+\rho}^{(n)}].$$

Chapitre 2

Classification of bicovariant differential calculi on quantum groups

The restricted dual of a quantized enveloping algebra can be viewed as the algebra of functions on a quantum group. According to Woronowicz, there is a general notion of bicovariant differential calculus on such an algebra. We give a classification theorem of these calculi. The proof uses the notion (due to Reshetikhin and Semenov-Tian-Shansky) of factorizable quasi-triangular Hopf algebra and relies on results of Joseph and Letzter. On the way, we also give a new formula for Rosso's bilinear form.

Introduction

Let G be a semi-simple connected simply-connected complex Lie group, \mathfrak{g} its Lie algebra, $U_q(\mathfrak{g})$ the quantized enveloping algebra of \mathfrak{g} . $U_q(\mathfrak{g})$ is a Hopf algebra. The associated quantum group is an object of non-commutative geometry. According to a point of view due to Woronowicz and developed by Faddeev, Reshetikhin and Takhtadzhyan [FRT1], one may view the restricted (Hopf) dual $(U_q(\mathfrak{g}))^{*\text{res}}$ as the function algebra $\mathcal{A}_q(G)$ on this quantum group. In this way, the Peter–Weyl theorem becomes a definition: the rational representations of the quantum group are the finite dimensional representations of $U_q(\mathfrak{g})$.

In order to study the differential geometry of quantum groups, Woronowicz [Wo] defined the notion of bicovariant differential calculus. As in the classical case, one needs only to define the differential of functions at the unity point of the quantum group. If $\varepsilon : \mathcal{A}_q(G) \rightarrow \mathbb{C}(q^{1/2})$ is the augmentation map, this amounts to take the residual class of functions belonging to $\ker \varepsilon$ modulo a right ideal $\mathcal{R} \subseteq \ker \varepsilon$. In the classical case, one takes $\mathcal{R} = (\ker \varepsilon)^2$. As for quantum groups, it is more important to preserve the group structure than the infinitesimal structure, and one is led to select ideals \mathcal{R} as above by the requirement of a certain invariance condition. In this article, we solve the classification problem for these ideals \mathcal{R} , and we give a picture of what they look like.

We now compare our results with previous ones. Rosso [Ro4] showed how to use the quasi-triangular structure of $U_q(\mathfrak{g})$ in order to construct left covariant differential calculi on the quantum group. Modifying this construction, Jurčo [Ju] used the R -matrix in

the natural representation of $U_q(\mathfrak{g})$ (and in the dual of it) so as to construct bicovariant differential calculi: he obtained particular cases (when M is the natural \mathfrak{g} -module or its dual) of our theorem 2.15. (In this spirit, see also [FP].) As regards classification results, Schmüdgen and Schüler have classified the ideals \mathcal{R} as above, but only when \mathfrak{g} is of classical type, and under restrictive assumptions on \mathcal{R} . Most of the results in [SS1] and [SS2] are particular cases of our theorem 2.13. For instance, the classification given in the theorem 2.1 of [SS1] corresponds (in the wording of our theorem) to the ideals \mathcal{R} constructed (up to a twisting character $\chi : 2X/2Q \rightarrow \mathbb{C}^\times$, as explained in the section 2.3.3) from the natural $U_q(\mathfrak{g})$ -module or its dual.

Let us explain our proof and the contents of our article. Our proof relies on the quasi-triangular structure of $U_q(\mathfrak{g})$. Since the formalism of R -matrices may be justified only for finite dimensional Hopf algebras, we will employ the dual notion of co-quasi-triangular (c.q.t.) Hopf algebra (see [LT]): the algebra $\mathcal{A}_q(G)$ is c.q.t.. We use then a bilinear form on $\mathcal{A}_q(G)$, introduced by Reshetikhin and Semenov-Tian-Shansky. As $U_q(\mathfrak{g})$ is a factorizable quasi-triangular Hopf algebra (in the terminology of [RS]), this pairing is non-degenerate and gives a linear injection $\mathcal{A}_q(G) \hookrightarrow U_q(\mathfrak{g}) \subseteq (\mathcal{A}_q(G))^*$. The image of \mathcal{R} under this map is nearly the annihilator of a $U_q(\mathfrak{g})$ -module. It is then easier to discuss what \mathcal{R} may be. The definitions and the proofs of these assertions are given in sections 2.1 and 2.2. In section 2.3, we present a construction of bicovariant differential calculi valid for any factorizable c.q.t. Hopf algebra. Finally, in the case of $\mathcal{A}_q(G)$, we link these constructions with our classification result.

Notations

- Let A be a \mathbb{K} -algebra. If M is an A -module, its annihilator is noted $\text{ann}_A M$. If $m \in M$ and $m^* \in M^*$ (the \mathbb{K} -dual of M), we denote by $\theta_M(m, m^*)$ the matrix coefficient ($A \rightarrow \mathbb{K}, a \mapsto \langle m^*, a \cdot m \rangle$).
- For a Hopf algebra H , we will use Sweedler's notation for coproduct ($\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$) and for coaction on comodules. The sum sign will generally be omitted. We will denote the augmentation and the antipode of H by ε and S respectively.
- Let H be a Hopf algebra, and $H^{*\text{res}}$ be the restricted (Hopf) dual of H . A finite dimensional left H -module M (with a basis (m_i) and the dual basis (m_i^*) of M^*) can be viewed as a right $H^{*\text{res}}$ -comodule with structure map $\delta_R : (M \rightarrow M \otimes H^{*\text{res}}, m \mapsto \sum m_i \otimes \theta_M(m, m_i^*))$.

2.1 Co-quasi-triangular Hopf algebras

2.1.1 Some definitions

Let H be a Hopf algebra over a field \mathbb{K} . A right crossed bimodule over H (in the sense of Yetter [Ye]) is a \mathbb{K} -vector space M , which is also a right H -module, a right H -comodule

(with structure map $\delta_R : (M \rightarrow M \otimes H, m \mapsto \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)})$), both structures being compatible: $\delta_R(m \cdot a) = \sum m_{(0)} \cdot a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})m_{(1)}a_{(3)}$ (for $m \in M, a \in H$). When M and N are right crossed bimodules over H , $M \otimes N$ becomes a right crossed bimodule for the action $(m \otimes n) \cdot a = m \cdot a_{(1)} \otimes n \cdot a_{(2)}$ and the coaction $\delta_R(m \otimes n) = (m_{(0)} \otimes n_{(0)}) \otimes m_{(1)}n_{(1)}$.

There are two easy examples: we can endow H with the structures: $a \cdot b = ab$ and $\delta_R : (H \rightarrow H \otimes H, a \mapsto a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})a_{(3)})$. Alternatively, we can put on H the structures $a \cdot b = S(b_{(1)})ab_{(2)}$ (right adjoint action) and $\delta_R : (H \rightarrow H \otimes H, a \mapsto a_{(1)} \otimes a_{(2)})$.

When Γ is a bicovariant bimodule (see [Wo]), the space Γ^L of left coinvariants is a right crossed bimodule over H . Conversely, any right crossed bimodule over H is the space of left coinvariants of a bicovariant bimodule.

Finally (H still being a Hopf algebra), we endow the tensor product coalgebra $H^{*\text{res}} \otimes H$ with the product $(f \otimes a)(g \otimes b) = \langle g_{(3)}, a_{(3)} \rangle \langle g_{(1)}, S(a_{(1)}) \rangle (g_{(2)}f \otimes a_{(2)}b)$. We obtain a bialgebra, called Drinfeld's double of H and denoted by $\mathcal{D}(H)$. (Here $H^{*\text{res}}$ is the standard dual of H , the coproduct is not brought into its opposite.) When M is a right crossed bimodule over H , it is a right $\mathcal{D}(H)$ -module for the actions: $m \cdot (f \otimes 1) = \langle f, m_{(1)} \rangle m_{(0)}$, $m \cdot (1 \otimes a) = m \cdot a$.

2.1.2 Definition of a co-quasi-triangular Hopf algebra

We give the definition of c.q.t. Hopf algebras, by now usual (see [LT] for historical notes):

Definition 2.1 *A co-quasi-triangular Hopf algebra is a pair (\mathcal{A}, γ) where \mathcal{A} is a Hopf algebra and $\gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}}$ is a coalgebra morphism and an algebra antimorphism such that we have the Yang-Baxter equation (or rather the Baxter commutation relations):*

$$\forall a, b \in \mathcal{A}, \quad a_{(1)}b_{(1)}\langle \gamma a_{(2)}, b_{(2)} \rangle = \langle \gamma a_{(1)}, b_{(1)} \rangle b_{(2)}a_{(2)}.$$

That γ is a coalgebra morphism and an algebra antimorphism gives us that for all $a, b \in \mathcal{A}$, $\langle \gamma a, b \rangle = \langle \gamma Sa, Sb \rangle$. We call $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^*$ the map such that $\langle \delta a, b \rangle = \langle \gamma b, Sa \rangle$, for all $a, b \in \mathcal{A}$. Hence we have $\langle \gamma a, b \rangle = \langle \delta b, Sa \rangle$. We verify easily that δ takes its values in $\mathcal{A}^{*\text{res}}$ and (\mathcal{A}, δ) is a c.q.t. Hopf algebra.

If U is a Hopf algebra quasi-triangular for an R -matrix R_{12} , then $U^{*\text{res}}$ becomes a c.q.t. Hopf algebra for the map γ given by: for $a, b \in U^{*\text{res}}$, $\langle \gamma(a), b \rangle = \langle b \otimes a, R_{12} \rangle$, and then $\langle \delta(a), b \rangle = \langle b \otimes a, R_{21}^{-1} \rangle$. This follows from Drinfeld's classical axioms. For instance, let H be a finite dimensional Hopf algebra, and $U = \mathcal{D}(H)$: the dual vector space $H \otimes H^*$ of U is the underlying space of the restricted dual of U . If (e_i) is a basis for H , the canonical R -matrix is $\sum (e_i^* \otimes 1) \otimes (1 \otimes e_i) \in U \otimes U$. It corresponds to the maps $\gamma : (H \otimes H^* \rightarrow U, a \otimes f \mapsto \varepsilon(a)f \otimes 1)$ and $\delta : (H \otimes H^* \rightarrow U, b \otimes g \mapsto g(1)\varepsilon \otimes S^{-1}(b))$ (the antipode of a finite dimensional Hopf algebra being invertible).

The category of left modules over a quasi-triangular Hopf algebra is braided. The translation in the present formalism is the:

Proposition 2.2 *Let (\mathcal{A}, γ) be a c.q.t. Hopf algebra. If M is a right \mathcal{A} -comodule, it becomes a right crossed bimodule over \mathcal{A} when endowed with the right module structure*

given by: for $m \in M$ and $a \in \mathcal{A}$, $m \cdot a = \langle \gamma a, m_{(1)} \rangle m_{(0)}$. This extra structure is compatible with tensor products of comodules and crossed bimodules.

Proof Let $\delta_R : (M \rightarrow M \otimes \mathcal{A}, m \mapsto m_{(0)} \otimes m_{(1)})$ the structure map for M . Then we have:

$$\begin{aligned} m_{(0)} \cdot a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})m_{(1)}a_{(3)} &= m_{(0)} \otimes \langle \gamma a_{(2)}, m_{(1)} \rangle S(a_{(1)})m_{(2)}a_{(3)} \\ &= m_{(0)} \otimes S(a_{(1)})a_{(2)}m_{(1)} \langle \gamma a_{(3)}, m_{(2)} \rangle \\ &= m_{(0)} \otimes m_{(1)} \langle \gamma a, m_{(2)} \rangle \\ &= \delta_R(m \cdot a). \end{aligned}$$

The compatibility with tensor products is a consequence of γ being a coalgebra homomorphism. \square

We also note that the antipode of a c.q.t. Hopf algebra is always invertible, the square of its transpose being an inner automorphism of the algebra \mathcal{A}^* (see [Dr4]).

Finally, when (\mathcal{A}, γ) is a c.q.t. Hopf algebra, we have the maps γ and δ , and Radford [Ra] has shown that $(\text{im } \gamma)(\text{im } \delta) = (\text{im } \delta)(\text{im } \gamma)$ is a sub-Hopf-algebra of $\mathcal{A}^{*\text{res}}$. This was shown in the early [RS]: there is a Hopf algebra structure (with invertible antipode) on the tensor product coalgebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ such that the map $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}}, a \otimes b \mapsto \gamma b \cdot \delta a)$ is a coalgebra morphism and an algebra antimorphism.

Example. In the F.R.T. construction [FRT1], one considers matrices L^+ and L^- , whose elements lie in $\text{im } \gamma$ and $\text{im } \delta$ respectively. Then Faddeev, Reshetikhin and Takhtadzhyan defined $U_q(\mathfrak{g})$ to be the algebra $(\text{im } \gamma)(\text{im } \delta)$.

2.1.3 The maps I and J

We fix in this subsection a c.q.t. Hopf algebra (\mathcal{A}, γ) over the field \mathbb{K} , and note δ the associated map. We define two maps $I : (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}}, a \mapsto \gamma(a_{(1)}) S\delta(a_{(2)}))$ and $J : (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}}, a \mapsto S\delta(a_{(1)}) \gamma(a_{(2)}))$. Equivalently, we may consider the pairing of two elements $a, b \in \mathcal{A}$: $\langle I(a), b \rangle = \langle J(b), a \rangle$. (When \mathcal{A} is the dual of a quasi-triangular Hopf algebra, this pairing is $\langle a \otimes b, R_{21}R_{12} \rangle$.) We have $I = S \circ J \circ S$ and $J = S \circ I \circ S$.

We will now state an important property of the map I . $\mathcal{A}^{*\text{res}}$ is a left $\mathcal{A}^{*\text{res}} \otimes \mathcal{A}^{*\text{res}}$ -module for the law $(x \otimes y) \cdot z = xz S(y)$. \mathcal{A} is a right crossed bimodule over \mathcal{A} for the structures: $a \cdot b = ab$ and $\delta_R : (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, a \mapsto a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})a_{(3)})$, so \mathcal{A} is a right $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ -module. Let $\Pi : (\mathcal{D}(\mathcal{A}) \equiv \mathcal{A}^{*\text{res}} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}} \otimes \mathcal{A}^{*\text{res}}, x \otimes b \mapsto \gamma(b_{(1)})x_{(1)} \otimes \delta(b_{(2)})x_{(2)})$.

Proposition 2.3 *In the set-up above, Π is an algebra antimorphism. If $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ and $a \in \mathcal{A}$, then $I(a \cdot \xi) = \Pi(\xi) \cdot I(a)$.*

Proof That Π is an antimorphism is already in [RS]. Then, as a consequence of the Yang–Baxter equation, we may write, for $x \in \mathcal{A}^{*\text{res}}$ and $a \in \mathcal{A}$, that $S\gamma(a_{(1)}) \langle x, a_{(2)} \rangle =$

$\langle x_{(2)}, a_{(1)} \rangle x_{(1)} S\gamma(a_{(2)}) S(x_{(3)})$. Then we compute, for $\xi = x \otimes b \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$:

$$\begin{aligned}
I(a \cdot \xi) &= \langle x, S(a_{(1)})a_{(3)} \rangle I(a_{(2)}b) \\
&= \gamma(b_{(1)}) \langle x, S(a_{(1)})a_{(4)} \rangle \gamma(a_{(2)}) S\delta(a_{(3)}) S\delta(b_{(2)}) \\
&= \gamma(b_{(1)}) \langle x_{(1)}, S(a_{(1)}) \rangle S\gamma S(a_{(2)}) \langle x_{(2)}, a_{(4)} \rangle S\delta(a_{(3)}) S\delta(b_{(2)}) \\
&= \gamma(b_{(1)}) \langle x_{(2)}, S(a_{(2)}) \rangle x_{(1)} S\gamma S(a_{(1)}) S(x_{(3)}) \langle x_{(5)}, a_{(3)} \rangle x_{(4)} S\delta(a_{(4)}) S(x_{(6)}) S\delta(b_{(2)}) \\
&= \gamma(b_{(1)}) \langle x_{(2)}, S(a_{(2)}) \rangle x_{(1)} S\gamma S(a_{(1)}) \langle x_{(3)}, a_{(3)} \rangle S\delta(a_{(4)}) S(x_{(4)}) S\delta(b_{(2)}) \\
&= \gamma(b_{(1)}) x_{(1)} \gamma(a_{(1)}) S\delta(a_{(2)}) S(x_{(2)}) S\delta(b_{(2)}) \\
&= \Pi(\xi) \cdot I(a).
\end{aligned}$$

□

We single out the particular case $b = 1$:

Proposition 2.4 *We consider \mathcal{A} and $\mathcal{A}^{*\text{res}}$ as left $\mathcal{A}^{*\text{res}}$ -modules for the adjoint action: if $x, y \in \mathcal{A}^{*\text{res}}$ and $a \in \mathcal{A}$, $x \cdot a = \langle x, S(a_{(1)})a_{(3)} \rangle a_{(2)}$ and $x \cdot y = x_{(1)}y S(x_{(2)})$. Then $I : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}}$ is a morphism of $\mathcal{A}^{*\text{res}}$ -modules.*

Finally, we give the definition, originally due to Reshetikhin and Semenov-Tian-Shansky [RS]:

Definition 2.5 *One says that (\mathcal{A}, γ) is factorizable if the pairing $(\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}, (a, b) \mapsto \langle I(a), b \rangle)$ is non-degenerate.*

Thus (\mathcal{A}, γ) is factorizable iff the maps I and J are injective. It is possible to show that (\mathcal{A}, γ) is factorizable iff (\mathcal{A}, δ) is so.

2.1.4 A related construction

First, let U be a Hopf algebra. It is a left U -module for the adjoint action: $x \cdot y = x_{(1)}y S(x_{(2)})$. We let $F_\ell(U)$ be the sum of all finite dimensional U -submodules of U . It is known [JL1] that $F_\ell(U)$ is a subalgebra of U , a left coideal in U , and a U -submodule for the left adjoint action. The multiplication in U defines a morphism of left U -modules $F_\ell(U) \otimes F_\ell(U) \rightarrow F_\ell(U)$. We can then do the semi-direct product $F_\ell(U) \otimes U$: we obtain an algebra. $U \otimes U$ denoting the ordinary tensor product algebra, there is an algebra morphism $(F_\ell(U) \otimes U \rightarrow U \otimes U, x \otimes y \mapsto xy_{(1)} \otimes y_{(2)})$. We can make the same constructions on the right: we obtain an algebra $F_r(U)$. If the antipode of U is invertible, the algebra morphism $(U \otimes F_r(U) \rightarrow U \otimes U, x \otimes y \mapsto x_{(1)} \otimes x_{(2)}y)$ has the same image as the previous one. Hence this image contains $F_\ell(U) \otimes F_r(U) \subseteq U \otimes U$.

We take now a c.q.t. Hopf algebra (\mathcal{A}, γ) , with δ, I and J as in the preceding subsection. Let $U = (\text{im } \gamma)(\text{im } \delta)$ be the minimal sub-Hopf-algebra of $\mathcal{A}^{*\text{res}}$ in which γ and δ take their values. We consider on \mathcal{A} and $\mathcal{A}^{*\text{res}}$ the $\mathcal{A}^{*\text{res}}$ -module structures of proposition 2.4. By restriction, \mathcal{A} and $\mathcal{A}^{*\text{res}}$ are U -modules, and $I : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}}$ is a morphism of U -modules.

We can see that I takes its values in U , which is a U -submodule of $\mathcal{A}^{*\text{res}}$. Further, \mathcal{A} is the sum of its finite dimensional U -submodules, hence $\text{im } I \subseteq F_\ell(U)$.

Proposition 2.6 *Let (\mathcal{A}, γ) be a c.q.t. factorizable Hopf algebra, and I be the associated map. Let U be the sub-Hopf-algebra $(\text{im } \gamma)(\text{im } \delta) \subseteq \mathcal{A}^{*\text{res}}$. We suppose that $\text{im } I = F_\ell(U)$. Then I induces a bijection between:*

- *the set of right ideals \mathcal{R} of \mathcal{A} , which are subcomodules for the right coaction $\delta_R : (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, a \mapsto a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})a_{(3)})$.*
- *the set of two-sided ideals \mathcal{I} of $F_\ell(U)$, which are U -submodules for the adjoint action.*

This bijection preserves dimensions, codimensions, and the inclusion ordering in both sets.

Proof By assumption, $I : \mathcal{A} \rightarrow F_\ell(U)$ is a U -module isomorphism. We adopt the notations of the proposition 2.3. \mathcal{A} is a $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ -module, and $U \otimes \mathcal{A}$ is (the underlying space of) a sub-Hopf-algebra of $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, so we will view \mathcal{A} as a right $U \otimes \mathcal{A}$ -module: $1 \otimes \mathcal{A}$ acts on \mathcal{A} by right multiplication, $U^{\text{op}} \otimes 1$ acts on \mathcal{A} by the left adjoint action. The injectivity of I implies that $\text{im } J \subseteq U$ separates the points of \mathcal{A} : hence the sub- $U \otimes \mathcal{A}$ -modules of \mathcal{A} are the right ideals which are subcomodules for the right coaction δ_R .

On the other hand, we let E be the image of the morphism $(F_\ell(U) \otimes U \rightarrow U \otimes U, x \otimes y \mapsto xy_{(1)} \otimes y_{(2)})$. U is a $U \otimes U$ -module, so is an E -module, and $F_\ell(U)$ is a sub- E -module of U . E contains $F_\ell(U) \otimes F_r(U)$, with $S(F_r(U)) = F_\ell(U)$. Therefore, the sub- E -modules of $F_\ell(U)$ are the two-sided ideals \mathcal{I} which are U -submodules for the adjoint action.

Now the proposition is a consequence of the proposition 2.3: writing Π as the composition $(F_\ell(U) \otimes \mathcal{A}^{*\text{res}} \rightarrow \mathcal{A}^{*\text{res}} \otimes \mathcal{A}^{*\text{res}}, x \otimes y \mapsto xy_{(1)} \otimes y_{(2)}) \circ (\mathcal{A}^{*\text{res}} \otimes \mathcal{A} \rightarrow F_\ell(U) \otimes \mathcal{A}^{*\text{res}}, x \otimes a \mapsto I(a_{(1)}) \otimes \delta(a_{(2)})x)$, and using the assumption $\text{im } I = F_\ell(U)$, we can see that E is the image of $U \otimes \mathcal{A}$ through Π . \square

2.2 The case of the quantum coordinate algebra

2.2.1 Notations

In this section, we study the preceding constructions in the case where \mathcal{A} is the algebra $\mathcal{A}_q(G)$ of regular functions on a quantum group.

Let \mathfrak{g} be a finite dimensional semi-simple split Lie algebra, \mathfrak{h} a splitting Cartan subalgebra, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\} \subseteq \mathfrak{h}^*$ a basis for the root system, $\{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_\ell^\vee\} \subseteq \mathfrak{h}$ the inverse roots, $P \subseteq \mathfrak{h}^*$ and $Q \subseteq \mathfrak{h}^*$ the weight and the root lattices. The choice of an invariant (under Weyl group action) scalar product $(\cdot | \cdot)$ allows us to identify \mathfrak{h} and \mathfrak{h}^* , with $\alpha_i = d_i \alpha_i^\vee$, $d_i = \frac{(\alpha_i | \alpha_i)}{2}$. We choose the normalization of $(\cdot | \cdot)$ so that $(\lambda | \mu) \in \mathbb{Z}$ whenever λ and μ belong to P . We denote by ρ half the sum of the positive roots, by P_{++} the set of dominant weights, and by w_0 the longest element in the Weyl group.

We now choose the following version of $U_q(\mathfrak{g})$: this is a $\mathbb{C}(v)$ -algebra (v is generic, with $q = v^2$) generated by E_i, F_i and K_λ ($\lambda \in P$). The relations are the usual ones among which:

$K_\lambda E_i = v^{(\lambda|\alpha_i)} E_i K_\lambda$, $K_\lambda F_i = v^{-(\lambda|\alpha_i)} F_i K_\lambda$, $E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{K_{\alpha_i} - K_{-\alpha_i}}{v^{d_i} - v^{-d_i}}$. The coproduct is given by: $\Delta K_\lambda = K_\lambda \otimes K_\lambda$, $\Delta E_i = E_i \otimes 1 + K_{\alpha_i} \otimes E_i$, $\Delta F_i = 1 \otimes F_i + F_i \otimes K_{-\alpha_i}$. We note S the antipode of $U_q(\mathfrak{g})$. If one chooses a dominant weight λ and a character $\chi : \mathbb{P}/2\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, one knows how to construct a simple finite dimensional $U_q(\mathfrak{g})$ -module, in which there is a highest weight vector m_λ such that $K_\mu \cdot m_\lambda = \chi(\mu \bmod 2\mathbb{Q}) v^{(\mu|\lambda)} m_\lambda$ for all $\mu \in \mathbb{P}$. We note $L_\chi(\lambda)$ such a $U_q(\mathfrak{g})$ -module; when χ is the trivial character, we simply write $L(\lambda)$, and then $L_\chi(\lambda) = L(\lambda) \otimes L_\chi(0)$.

The matrix coefficients of the representation $L(\lambda)$ span a linear subspace $C(\lambda)$ of the restricted dual of $U_q(\mathfrak{g})$, and we let $\mathcal{A}_q(G) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{P}_{++}} C(\lambda)$. This is a Hopf subalgebra of $(U_q(\mathfrak{g}))^{*\text{res}}$. The elements of $\mathcal{A}_q(G)$ separate the points of $U_q(\mathfrak{g})$ [JL1], so that there is an inclusion of $U_q(\mathfrak{g})$ into the dual of $\mathcal{A}_q(G)$, actually into the restricted dual of $\mathcal{A}_q(G)$. We note S the antipode of $\mathcal{A}_q(G)$, which is the restriction to $\mathcal{A}_q(G)$ of the transpose of the antipode of $U_q(\mathfrak{g})$.

There is an R -matrix for $U_q(\mathfrak{g})$ [Dr2][Ta][Ga]. We choose the R -matrix with the structure $\sum(\text{diagonal part})(\text{monomial in } F) \otimes (\text{monomial in } E)$. If a and b belong to $\mathcal{A}_q(G)$, the number $\langle R_{12}, b \otimes a \rangle \in \mathbb{C}(v)$ is well-defined (thanks to the weight graduation of $U_q(\mathfrak{g})$ and of any finite dimensional $U_q(\mathfrak{g})$ -module), and we can define $\gamma, \delta : \mathcal{A}_q(G) \rightarrow (\mathcal{A}_q(G))^*$ such that $\langle R_{12}, b \otimes a \rangle = \langle \gamma(a), b \rangle = \langle \delta(b), S(a) \rangle$. $(\mathcal{A}_q(G), \gamma)$ and $(\mathcal{A}_q(G), \delta)$ are c.q.t. Hopf algebras, $\text{im}(\gamma)$ and $\text{im}(\delta)$ are the sub-Hopf-algebras $U^- U^0$ and $U^0 U^+$ of $U_q(\mathfrak{g}) \subseteq (\mathcal{A}_q(G))^{*\text{res}}$ respectively, and $U_q(\mathfrak{g})$ is the sub-Hopf-algebra $(\text{im } \gamma)(\text{im } \delta) = (\text{im } \delta)(\text{im } \gamma)$ of $(\mathcal{A}_q(G))^{*\text{res}}$.

2.2.2 Factorizability of $\mathcal{A}_q(G)$

Let $(\mathcal{A}_q(G), \gamma)$ be the c.q.t. algebra presented above, and δ be the associated map. For all the section, we endow $\mathcal{A}_q(G)$ and $U_q(\mathfrak{g})$ with the left adjoint action of $U_q(\mathfrak{g})$, as in the section 2.1.4: in particular, the map $I : \mathcal{A}_q(G) \rightarrow F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ is a morphism of left $U_q(\mathfrak{g})$ -modules. Joseph and Letzter [JL1][JL2] have studied the structure of $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$, and we need the following results:

- If $\lambda \in \mathbb{P}_{++}$, $K_{-2\lambda}$ generates a finite dimensional $U_q(\mathfrak{g})$ -submodule of $U_q(\mathfrak{g})$, and $F_\ell(U_q(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{P}_{++}} (U_q(\mathfrak{g}) \cdot K_{-2\lambda})$.
- Each block $U_q(\mathfrak{g}) \cdot K_{-2\lambda}$ contains a unique one-dimensional $U_q(\mathfrak{g})$ -submodule; it defines a unique (up to scalars) element z_λ of the center of $U_q(\mathfrak{g})$.
- $F_\ell(U_q(\mathfrak{g})) \subseteq (\mathcal{A}_q(G))^*$ separates the points of $\mathcal{A}_q(G)$.

The next assertion has been stated in [RS]:

Proposition 2.7 $(\mathcal{A}_q(G), \gamma)$ is a factorizable c.q.t. Hopf algebra, and $\text{im } I = F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$.

Proof Let $\lambda \in \mathbb{P}_{++}$, $L(\lambda)$ the standard $U_q(\mathfrak{g})$ -module, m_λ a highest weight vector, $m_{w_0\lambda}$ a lowest weight vector, (m_i) a basis for $L(\lambda)$ composed of weight vectors, (m_i^*) the dual basis. We have:

- The matrix element $\theta_{L(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*)$ is the linear form on $U_q(\mathfrak{g})$ given by (in the triangular decomposition $U^+ \otimes U^0 \otimes U^-$ of $U_q(\mathfrak{g})$): $EK_\mu F \mapsto \varepsilon(E)v^{(w_0\lambda|\mu)}\varepsilon(F)$.

- On this element, γ takes the value $K_{w_0\lambda}$ and δ the value $K_{-w_0\lambda}$.
- The image by γ (respectively δ) of the matrix element $\theta_{L(\lambda)}(m_i, m_{w_0\lambda}^*)$ (respectively $\theta_{L(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_i^*)$) is zero if $i \neq w_0\lambda$.

So we have:

$$\begin{aligned}
I(\theta_{L(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*)) &= \gamma((\theta_{L(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*))_{(1)}) S(\delta((\theta_{L(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*))_{(2)})) \\
&= \sum \gamma(\theta_{L(\lambda)}(m_i, m_{w_0\lambda}^*)) S(\delta(\theta_{L(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_i^*))) \\
&= \gamma(\theta_{L(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*)) S(\delta(\theta_{L(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*))) \\
&= K_{2w_0\lambda}.
\end{aligned}$$

Hence $\text{im } I$ is a $U_q(\mathfrak{g})$ -submodule of $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ which contains all the $K_{2w_0\lambda}$ ($\lambda \in P_{++}$), so $\text{im } I = F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$. We now want to show that J is injective. If $b \in \ker J$, then for all $a \in \mathcal{A}_q(G)$, $\langle I(a), b \rangle = \langle J(b), a \rangle = 0$, so b is null when viewed as a linear form on $\text{im } I = F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$. Then $b = 0$, because $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ separates the points of $\mathcal{A}_q(G)$. Finally, owing to the formula $J = S \circ I \circ S$ and to the invertibility of S , I is also injective. This concludes the proof of the proposition. \square

There is another way to present this result. Rosso [Ro2] introduced a bilinear non-degenerate ad-invariant form on $U_q(\mathfrak{g})$, that Caldero [Ca] writes $(U_q(\mathfrak{g}) \times U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}(v^{1/2}), (x, y) \mapsto \langle \zeta(x), S^{-1}(y) \rangle)$, where $\zeta : U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow (U_q(\mathfrak{g}))^*$. Rosso's non-degeneracy result is that ζ is injective; Caldero's theorem states that ζ maps $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ onto $\mathcal{A}_q(G) \subseteq (U_q(\mathfrak{g}))^{*\text{res}}$. The triangular behaviour of Rosso's form gives us that $\zeta(K_{2w_0\lambda}) = \theta_{L(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*)$. The ad-invariance of Rosso's form can be translated for ζ : when we restrict ζ to $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ and $\mathcal{A}_q(G)$, ζ is a morphism of $U_q(\mathfrak{g})$ -modules for the adjoint structures. Now $I \circ \zeta : F_\ell(U_q(\mathfrak{g})) \rightarrow F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ and $\zeta \circ I : \mathcal{A}_q(G) \rightarrow \mathcal{A}_q(G)$ are morphisms of $U_q(\mathfrak{g})$ -modules and fix the respective generators $K_{2w_0\lambda}$ and $\theta_{L(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*)$ of these modules. (The fact that $\theta_{L(\lambda)}(m_{w_0\lambda}, m_{w_0\lambda}^*)$ generates the $U_q(\mathfrak{g})$ -submodule $C(\lambda)$ of $\mathcal{A}_q(G)$ is equivalent to the fact that $m_{w_0\lambda}^* \otimes m_{w_0\lambda}$ generates the $U_q(\mathfrak{g})$ -module $L(\lambda)^* \otimes L(\lambda)$.) So we conclude that ζ and I are mutually inverse isomorphisms, and that I is a bijection between $C(\lambda)$ and $U_q(\mathfrak{g}) \cdot K_{2w_0\lambda}$. The analysis also shows the amusing side-result:

Proposition 2.8 *If $x \in F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$, $y \in U_q(\mathfrak{g})$, then the Rosso form on (x, y) is given by $\langle I^{-1}(x), S^{-1}(y) \rangle$ where $I : (\mathcal{A}_q(G) \rightarrow F_\ell(U_q(\mathfrak{g})), a \mapsto \langle a \otimes \text{id}_{U_q(\mathfrak{g})}, R_{21}R_{12} \rangle)$ is related to the universal R -matrix and S is the antipode of $U_q(\mathfrak{g})$.*

Remarks. a) It is also possible to give an heuristic proof of this result, using the canonical R -matrix for Drinfeld's double and using Rosso's formula for his form [Ro5].

- b) In the preceding discussion, we were lying a bit. Caldero's map ζ does not give exactly Rosso's bilinear form, but our formula connecting I and Rosso's form is correct as stated. In our notations, Caldero's map ζ is the inverse of the map $(\mathcal{A}_q(G) \rightarrow F_\ell(U_q(\mathfrak{g})), a \mapsto \delta(a_{(1)}) S\gamma(a_{(2)}))$.

Later, we will need to know the relations between the central elements z_λ defined above. To this aim, we recall Drinfeld's construction of the center of $U_q(\mathfrak{g})$ [Dr4]. Let $\lambda \in P_{++}$ and $t \in \mathcal{A}_q(G)$ be the quantum trace in $L(\lambda)$: for $x \in U_q(\mathfrak{g})$, $\langle t, x \rangle = \text{Tr}_{L(\lambda)}(K_{2\rho} x)$. t is an invariant element for the adjoint action of $U_q(\mathfrak{g})$ in $\mathcal{A}_q(G)$, so $I(t)$ is central, and belongs to $U_q(\mathfrak{g}) \cdot K_{2w_0\lambda}$. We choose the normalization of $z_{-w_0\lambda}$ by letting $z_{-w_0\lambda} = I(t)$. We then have a Mackey-like theorem (which is implicit in [Dr4] and in the thesis of Caldero, chapter II, 1.2):

Proposition 2.9 *Let $c_{\lambda\mu}^\nu$ be the fusion coefficients for \mathfrak{g} : $L(\lambda) \otimes L(\mu) \simeq \bigoplus_\nu c_{\lambda\mu}^\nu L(\nu)$. Then $z_\lambda z_\mu = \sum_\nu c_{\lambda\mu}^\nu z_\nu$.*

Proof Let $\mu \in P_{++}$. We compute $J(\theta_{L(\mu)}(m_\mu, m_\mu^*)) = K_{2\mu}$ (with the help of the formulas $J = S \circ I \circ S$ and $S(\theta_{L(\mu)}(m_\mu, m_\mu^*)) = \theta_{L(-w_0\mu)}(m_{-\mu}, m_{-\mu}^*)$). Now let $\lambda \in P_{++}$ and let t be the quantum trace in $L(\lambda)$. Let Ψ be the Harish-Chandra morphism from the center of $U_q(\mathfrak{g})$ to U^0 [Ro2]. We want to compute $\Psi(z_{-w_0\lambda})$ on $\mu + \rho$. (Evaluation on $\mu + \rho$ means the algebra homomorphism $(U^0 \rightarrow \mathbb{C}(v), K_\lambda \mapsto v^{(\lambda|\mu+\rho)})$.) The result will be the image of $z_{-w_0\lambda}$ by the central character of $L(\mu)$. So it is $\langle I(t), \theta_{L(\mu)}(m_\mu, m_\mu^*) \rangle = \langle J\theta_{L(\mu)}(m_\mu, m_\mu^*), t \rangle = \langle K_{2\mu}, t \rangle = \text{Tr}_{L(\lambda)}(K_{2\mu} K_{2\rho}) = \text{Tr}_{L(\lambda)}(K_{2(\mu+\rho)})$. Thus $\Psi(z_{-w_0\lambda})$ equals the sum of $K_{2\nu}$ for ν in the set of weights (with multiplicities) of $L(\lambda)$. We then use the fact that Ψ is an injective algebra homomorphism. \square

We note \mathcal{R} the Grothendieck ring of the category of finite dimensional $U_q(\mathfrak{g})$ -modules whose components are modules $L(\lambda)$, without any twisting character $\chi : P/2Q \rightarrow \mathbb{C}(v)^\times$. Let $Z(U_q(\mathfrak{g}))$ the center of $U_q(\mathfrak{g})$, and $\mathbb{Z}[P]$ the group algebra of P (with standard \mathbb{Z} -basis denoted by $(e^\nu)_{\nu \in P}$). The map $(\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}_q(G), [M] \mapsto \text{Tr}_M(K_{2\rho} \text{---}))$ is a ring homomorphism. If $a, b \in \mathcal{A}_q(G)$ are such that $I(a)$ belongs to the center of $U_q(\mathfrak{g})$, then $I(ab) = I(a)I(b)$:

$$\begin{aligned} I(ab) &= \gamma(a_{(1)}b_{(1)}) S\delta(a_{(2)}b_{(2)}) \\ &= \gamma(b_{(1)})\gamma(a_{(1)}) S\delta(a_{(2)}) S\delta(b_{(2)}) \\ &= \gamma(b_{(1)})I(a) S\delta(b_{(2)}) \\ &= I(a)\gamma(b_{(1)}) S\delta(b_{(2)}) \\ &= I(a)I(b). \end{aligned}$$

As a consequence, the map $(\mathcal{R} \rightarrow Z(U_q(\mathfrak{g})), [M] \mapsto I(\text{Tr}_M(K_{2\rho} \text{---})))$ is a ring homomorphism. This shows again the statement in proposition 2.9, and we can paraphrase the above proof by saying that the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{A}_q(G) & \xrightarrow{I} & Z(U_q(\mathfrak{g})) \\ \text{ch} \downarrow & & & & \downarrow \Psi \\ \mathbb{Z}[P] & \longrightarrow & & & U^0 \end{array}$$

Here $\text{ch} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{Z}[P]$ is the ring homomorphism which maps a module to its formal character, and the bottom arrow is the map $(\mathbb{Z}[P] \rightarrow U^0, e^\nu \mapsto K_{2\nu})$.

2.2.3 A technical result on the representation ring

We have just introduced a Grothendieck ring \mathcal{R} : by the classical results of Lusztig and Rosso, \mathcal{R} is naturally isomorphic to the representation ring of \mathfrak{g} . The elements $[L(\lambda)]$ ($\lambda \in P_{++}$) form a \mathbb{Z} -basis of \mathcal{R} and a \mathbb{Q} -basis of $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Proposition 2.10 *Let $\lambda \in P_{++}$. Then the ideal of $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ generated by the elements $[L(\lambda + \varpi)]$ ($\varpi \in P_{++}$) is the whole algebra $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.*

The proof of this proposition can be skipped without any drawbacks. Before we give it, we have to state an elementary lemma:

Lemma 2.11 *Let $(\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(k)}) \in (\mathbb{C}^\ell)^k$ be such that their image in $(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^\ell$ are all different, and let $(P^{(1)}, \dots, P^{(k)}) \in (\mathbb{C}[X_1, \dots, X_\ell])^k$. If for all $(n_1, \dots, n_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$, the equality $\sum_i P^{(i)}(n_1, \dots, n_\ell) \exp(2\pi i \sum_j n_j \mu_j^{(i)}) = 0$ holds, then the polynomials $P^{(1)}, \dots, P^{(k)}$ are all equal to zero.*

For $\ell = 1$, this lemma states linear independence of elementary solutions of a linear difference equation. The general proof is (for instance) by induction on ℓ .

Proof of proposition 2.10 In this proof, we are in a classical context and we do not identify \mathfrak{h} and \mathfrak{h}^* . Let $R \subseteq \mathfrak{h}^*$ and $R^\vee \subseteq \mathfrak{h}$ be the direct and inverse root systems, ($\alpha \mapsto \alpha^\vee$) the canonical bijection between R and R^\vee , $Q(R^\vee) \subseteq \mathfrak{h}$ the root lattice. $P = P(R) \subseteq \mathfrak{h}^*$ is still the weight lattice; we denote by $\{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_\ell^\vee\}$ the set of inverse simple roots, and by $\{\varpi_1, \dots, \varpi_\ell\}$ the set of fundamental weights. R^\vee and R define \mathbb{Q} -structures on \mathfrak{h} and \mathfrak{h}^* , and we can define $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ and $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. The Weyl group W operates on \mathfrak{h} and \mathfrak{h}^* , and the affine Weyl group $W_a = W \ltimes Q(R^\vee)$ operates on \mathfrak{h} . Let $\mathbb{Z}[P]$ be the \mathbb{Z} -algebra of the group P , $\mathbb{Z}[P]^W$ be the set of elements which are invariant under Weyl group action, $\text{ch} : (\mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[P]^W)$ be the ring isomorphism ‘‘formal character’’. Finally, we denote by $\varepsilon(w) = \pm 1$ the determinant of an element w of the Weyl group.

For $\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, let $\text{ev}_\mu : (\mathbb{Z}[P] \rightarrow \mathbb{C})$ be the ring morphism which sends a basic element e^ν ($\nu \in P$) to $\exp(2\pi i \langle \mu, \nu \rangle)$, where \exp is the complex exponential. This extends to an algebra morphism $\text{ev}_\mu : (\mathbb{C}[P] \rightarrow \mathbb{C})$. If $\nu \in P_{++}$, let f_ν be the map $(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}, \mu \mapsto \text{ev}_\mu(\text{ch } L(\nu)))$. We first assert that given any $(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$, there exists $\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ such that for all $i \in \{1, \dots, \ell\}$, $f_{\varpi_i}(\mu) = x_i$. We view $\mathbb{C}[P]$ as the coordinate ring of the affine variety $(\mathbb{C}^\times)^\ell$, and we view an element $\mu = \sum \mu_i \alpha_i^\vee$ ($\mu_i \in \mathbb{C}$) as the point $(e^{2\pi i \mu_1}, \dots, e^{2\pi i \mu_\ell}) \in (\mathbb{C}^\times)^\ell$. By the Nullstellensatz, it is sufficient to prove that the elements $(\text{ch } L(\varpi_i) - x_i e^0)$ ($i = 1, \dots, \ell$) generate a proper ideal in $\mathbb{C}[P]$. This is already true in $\mathbb{C}[P]^W$ by [Bo], ch. VI, §3, Théorème 1. The case of $\mathbb{C}[P]$ is given by a standard trick: let $\mathfrak{h} : (\mathbb{C}[P] \rightarrow \mathbb{C}[P]^W)$ be the projection onto the trivial homogeneous component in $\mathbb{C}[P]$ for the action of W ; \mathfrak{h} is a morphism of $\mathbb{C}[P]^W$ -modules, and thus a relation $\sum Q_i \cdot (\text{ch } L(\varpi_i) - x_i e^0) = 1$ in $\mathbb{C}[P]$ would give a relation $\sum Q_i^\mathfrak{h} \cdot (\text{ch } L(\varpi_i) - x_i e^0) = 1$ in $\mathbb{C}[P]^W$, which is impossible.

We now want to prove a formula for the character $f_\nu(\mu) = \text{ev}_\mu(\text{ch } L(\nu))$. We first remark that f_ν is invariant under the action of the affine Weyl group W_a in $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. If the

real part $\operatorname{Re}(\mu)$ of μ lies in an open alcove of $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, our formula will just be Weyl's character formula:

$$f_{\nu}(\mu) = \frac{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) \exp(2\pi i \langle w\mu, \nu + \rho \rangle)}{\sum_{w \in W} \varepsilon(w) \exp(2\pi i \langle w\mu, \rho \rangle)}.$$

Writing the denominator as a product over the positive roots:

$$\exp(2\pi i \langle \mu, \rho \rangle) \prod_{\alpha \in R, \alpha \geq 0} (1 - \exp(-2\pi i \langle \mu, \alpha \rangle)),$$

we can see that it is a non-zero complex number. In the general case, we let $T = \{\alpha \in R \mid \operatorname{Re}(\langle \mu, \alpha \rangle) \in \mathbb{Z}\}$: this is a closed symmetric subset of R ([Bo], ch. VI, §1, Définition 4), thus T is a root system in the vector space $V_1 \subseteq \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ that it spans ([Bo], ch. VI, §1, Proposition 23). The stabilizer of μ in W_a is generated by the reflections across the affine hyperplanes in which $\operatorname{Re}(\mu)$ lies ([Bo], ch. V, §3, Proposition 2), thus $W_1 := \{w \in W \mid \mu - w\mu \in Q(R^{\vee})\}$ is precisely the subgroup generated by reflections along α^{\vee} ($\alpha \in T$). The Weyl group of T identifies itself naturally with W_1 . Let σ be half the sum of the positive inverse roots of T : $\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in T, \alpha \geq 0} \alpha^{\vee}$. In restriction to V_1 , σ is the sum of the fundamental weights of the root system T^{\vee} of V_1^* . Let h be a small real parameter: $\operatorname{Re}(\mu) + h\sigma$ then lies in an open alcove of $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ and we can compute (with a small piece of abuse):

$$\begin{aligned} f_{\nu}(\mu) &= \lim_{h \rightarrow 0} f_{\nu}(\mu + h\sigma) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{w \in W/W_1} \sum_{w_1 \in W_1} \varepsilon(w w_1) \exp(2\pi i \langle w\mu, \nu + \rho \rangle) \exp(2\pi i h \langle w_1 \sigma, w^{-1}(\nu + \rho) \rangle)}{\sum_{w \in W/W_1} \sum_{w_1 \in W_1} \varepsilon(w w_1) \exp(2\pi i \langle w\mu, \rho \rangle) \exp(2\pi i h \langle w_1 \sigma, w^{-1}\rho \rangle)}. \end{aligned}$$

In the sums, we fix $w \in W/W_1$ and compute the sums on w_1 : in the numerator for instance, we have an alternating sum of $\exp(2\pi i h \langle w_1 \sigma, w^{-1}(\nu + \rho) \rangle)$ where $w^{-1}(\nu + \rho) \in P(R)$ has to be projected on V_1 , as in [Bo], ch. VI, §1, Proposition 28. The formula (valid in the group algebra of the weight lattice of T^{\vee}): $\sum_{w_1 \in W_1} \varepsilon(w_1) e^{w_1 \sigma} = e^{\sigma} \prod_{\alpha \in T, \alpha \geq 0} (1 - e^{-\alpha^{\vee}})$ then gives:

$$f_{\nu}(\mu) = \frac{\sum_{w \in W/W_1} \varepsilon(w) \exp(2\pi i \langle w\mu, \nu + \rho \rangle) \prod_{\alpha \in T, \alpha \geq 0} \langle \alpha^{\vee}, w^{-1}(\nu + \rho) \rangle}{\sum_{w \in W/W_1} \varepsilon(w) \exp(2\pi i \langle w\mu, \rho \rangle) \prod_{\alpha \in T, \alpha \geq 0} \langle \alpha^{\vee}, w^{-1}\rho \rangle}.$$

As $\nu + \rho$ and ρ are regular, neither of the products occurring here can be zero. (We will see soon that the denominator cannot be zero.)

We now prove that the ideal of $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ generated by the elements $[L(\lambda + \varpi)]$ ($\varpi \in P_{++}$) is the whole algebra $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. We consider again [Bo], ch. VI, §3, Théorème 1: this time, the isomorphism $\varphi : \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{\ell}] \rightarrow \mathbb{C}[P]^W$ is given by $\varphi(X_i) = \operatorname{ch} L(\varpi_i)$. Composing with the isomorphism $\operatorname{ch} : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{Z}[P]^W$, we can see that $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ is a polynomial algebra over \mathbb{C} . We suppose by the way of contradiction that the elements $[L(\lambda + \varpi)]$ ($\varpi \in P_{++}$) all belong to some maximal ideal of $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Then, by the Nullstellensatz, there exists a point $(x_1, \dots, x_{\ell}) \in \mathbb{C}^{\ell}$ such that for all $\varpi \in P_{++}$, $\varphi^{-1}(\operatorname{ch} L(\lambda + \varpi))(x_1, \dots, x_{\ell}) = 0$. We

can find $\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ such that $f_{\varpi_i}(\mu) = x_i$ ($i = 1, \dots, \ell$): then $f_{\lambda+\varpi}(\mu) = 0$ for all $\varpi \in P_{++}$. We next use the formula:

$$f_{\lambda+\varpi}(\mu) \text{ (denominator)} = \sum_{w \in W/W_1} \varepsilon(w) \exp(2\pi i \langle w\mu, \lambda + \varpi + \rho \rangle) \prod_{\alpha \in T, \alpha \geq 0} \langle \alpha^\vee, w^{-1}(\lambda + \varpi + \rho) \rangle,$$

and write $\varpi = \sum n_i \varpi_i$, where $(n_i) \in \mathbb{N}^\ell$ are any integers. The $w\mu$ ($w \in W/W_1$) are all distinct modulo $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^\vee)$, and the expressions $\prod_{\alpha \in T, \alpha \geq 0} \langle \alpha^\vee, w^{-1}(\lambda + \varpi + \rho) \rangle$ are non-zero polynomials in (n_1, \dots, n_ℓ) (they never vanish indeed). Then the above lemma states that the right-hand side cannot vanish for all $(n_i) \in \mathbb{N}^\ell$. This proves firstly that the denominator is not null, and secondly that $f_{\lambda+\sum n_i \varpi_i}(\mu)$ cannot vanish for all $(n_i) \in \mathbb{N}^\ell$. We have reached a contradiction.

To go down to the case of $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ is then easy: we have shown that we can express in $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ the unity as a finite sum $1 = \sum x_i [L(\tau_i)] [L(\nu_i)]$, where $\tau_i \in P_{++}$, $\nu_i \in \lambda + P_{++}$ and $x_i \in \mathbb{C}$. As the structure constants of $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ are integer-valued, this system, viewed as linear equations in (x_i) , has a solution in \mathbb{C} , so has a solution in \mathbb{Q} . \square

2.2.4 Classification of some ideals of $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$

In order to achieve our classification of ideals $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}_q(\mathfrak{G})$ in the next section, we must study the ideals $\mathcal{I} \subseteq F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ which are stable by the adjoint action of $U_q(\mathfrak{g})$. The analysis requires the use of the subalgebra V of $U_q(\mathfrak{g})$ generated by $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ and by the elements $K_{2\lambda}$ ($\lambda \in P_{++}$).

Joseph and Letzter [JL1] have shown that V is the subalgebra generated by the elements E_i , $F_i K_{\alpha_i}$ and $K_{2\lambda}$ ($\lambda \in P$). As it is such a “big” subalgebra of $U_q(\mathfrak{g})$, its representation theory is very close to that of $U_q(\mathfrak{g})$. We will describe it in the next subsection, but in the following proof, we need to know that the annihilator of a finite dimensional V -module is homogeneous with respect to the \mathbb{Q} -graduation of V .

Proposition 2.12 *The following two properties for a subspace $\mathcal{I} \subseteq F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ are equivalent:*

- (1) \mathcal{I} is the annihilator in $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ of a finite dimensional V -module;
- (2) \mathcal{I} is a finite codimensional two-sided ideal of $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ and a $U_q(\mathfrak{g})$ -submodule of $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ for the left adjoint action.

Proof We first show that (1) \Rightarrow (2). If M is a finite dimensional V -module, its annihilator in V is a finite codimensional two-sided ideal of V , and is homogeneous w.r.t. the \mathbb{Q} -graduation of V . It is then easy to see that $\text{ann}_V M$ is a $U_q(\mathfrak{g})$ -submodule of V for the left adjoint action. The annihilator $\mathcal{I} = (\text{ann}_V M) \cap F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ of M in $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ thus satisfies the property (2).

Conversely, let $\mathcal{I} \subseteq F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ satisfying the property (2). We consider the left regular $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ -module $M = F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))/\mathcal{I}$. \mathcal{I} is its annihilator, so it is sufficient to show that

M extends to a V -module. We thus want to show that the elements $K_{-2\lambda} \in F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ ($\lambda \in P_{++}$) map to invertible operators in $\text{End}(M)$.

- a) M is a finite dimensional algebra, and is also a left $U_q(\mathfrak{g})$ -module (for the adjoint action). The multiplication in M defines a morphism of left $U_q(\mathfrak{g})$ -modules: $M \otimes M \rightarrow M$. Thus the \mathbb{Q} -graduation of M (defined by the structure of $U_q(\mathfrak{g})$ -module) is an algebra grading.
- b) We fix $\lambda \in P_{++}$. We can write $M = M_0 \oplus M_\infty$ (as $\mathbb{C}(v)$ -vector space) where $K_{-2\lambda}$ acts nilpotently on M_0 and inversibly on M_∞ (Fitting's decomposition). M_0 and M_∞ are stable by the commutant of $K_{-2\lambda}$ in $\text{End}(M)$, so are right ideals of M . If $x \in F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ is homogeneous w.r.t. the \mathbb{Q} -graduation of $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$, x commutes (up to a non-zero scalar) with $K_{-2\lambda}$, so M_0 and M_∞ are stable by left multiplication by x . Thus M_0 and M_∞ are also left ideals of M .
- c) We now show that M_0 and M_∞ are $U_q(\mathfrak{g})$ -submodules of M .
 - (i) Let $\{e_1, \dots, e_k\}$ be the set of central idempotents in M . The elements K_μ ($\mu \in P$) of $U_q(\mathfrak{g})$ act on M (by the adjoint action) as algebra automorphisms, so permute the elements of the set $\{e_1, \dots, e_k\}$. Hence for each μ , there exists an integer $n \geq 1$ such that $K_{n\mu}$ fixes each e_i . Since M is, as a $U_q(\mathfrak{g})$ -module, a direct sum of modules $L(\nu)$ (without any twisting character χ), and since v is generic, we conclude that e_1, \dots, e_k are fixed by the adjoint action of the elements K_μ .
 - (ii) Let e be a central idempotent in M . e is of weight zero. We consider the q -exponential $\exp_q(\text{ad } E_i) = \sum_{n \geq 0} v^{-d_i n(n-1)/2} \frac{\text{ad } E_i^n}{[n]_i!}$ ($i \in \{1, \dots, \ell\}$ fixed). Then $\exp_q(\text{ad } E_i)$ is a well defined operator in M . The formula $\Delta(E_i^n) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_i v^{d_i(n-k)k} E_i^{n-k} K_{\alpha_i}^k \otimes E_i^k$ enables us to see that $\exp_q(\text{ad } E_i)(e)$ is an idempotent which we write $e + x$. Then $2ex + x^2 = x$, $x(1 - 2e) = x^2$, $x = x(1 - 2e)^2 = x^3$. The weights of the \mathbb{Q} -homogeneous components of x belong to $\{n\alpha_i \mid n \geq 1\}$; so the weights of the \mathbb{Q} -homogeneous components of x^3 belong to $\{n\alpha_i \mid n \geq 3\}$, and the homogeneous component of x of weight α_i is null. We obtain that $(\text{ad } E_i)(e) = 0$. Similarly, $(\text{ad } F_i)(e) = 0$ for all $i \in \{1, \dots, \ell\}$.
 - (iii) M_0 and M_∞ are ideals in M generated by central idempotents e_0 and e_∞ respectively. (i) and (ii) show that e_0 and e_∞ define the trivial $U_q(\mathfrak{g})$ -module. Hence for $x \in M_0$ and $u \in U_q(\mathfrak{g})$, $u \cdot x = u \cdot (xe_0) = (u_{(1)} \cdot x)(u_{(2)} \cdot e_0) = (u_{(1)} \cdot x)\varepsilon(u_{(2)})e_0 = (u \cdot x)e_0 \in M_0$. The same holds for M_∞ .
- d) We first consider the case $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. We choose naturally $\lambda = \varpi$ the fundamental weight, and write $M_0 = \mathcal{L}_0/\mathcal{I}$ and $M_\infty = \mathcal{L}_\infty/\mathcal{I}$. The points b) and c) show that \mathcal{L}_0 and \mathcal{L}_∞ are two-sided ideals and left $U_q(\mathfrak{g})$ -submodules of $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$. By definition of the Fitting decomposition, there exists an integer $n \geq 0$ such that $K_{-2n\varpi} \in \mathcal{L}_\infty$.

Hence for all integers $m \geq n$, we have $K_{-2m\varpi} \in \mathcal{L}_\infty$, and thus $z_{m\varpi} \in \mathcal{L}_\infty$. Let $n_0 \geq 0$ be the smallest integer such that for all $m \geq n_0$, $z_{m\varpi} \in \mathcal{L}_\infty$. The proposition 2.9 and the Clebsch–Gordan theorem show that if $n \geq 1$, $z_{(n+1)\varpi} + z_{(n-1)\varpi} = z_\varpi z_{n\varpi}$. Thus n_0 has to be equal to zero. So $1 = z_0 \in \mathcal{L}_\infty$, $M_\infty = M$, and $K_{-2\varpi}$ acts inversibly on M .

- e) The general case is solved in the same way. We consider the decomposition of the point b) and write $M_0 = \mathcal{L}_0/\mathcal{I}$ and $M_\infty = \mathcal{L}_\infty/\mathcal{I}$. \mathcal{L}_0 and \mathcal{L}_∞ are two-sided ideals and left $U_q(\mathfrak{g})$ -submodules of $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$, and there exists an integer $n \geq 0$ such that $K_{-2n\lambda} \in \mathcal{L}_\infty$. If $\varpi \in P_{++}$, then $K_{-2(n\lambda+\varpi)} \in \mathcal{L}_\infty$, and thus $z_{n\lambda+\varpi} \in \mathcal{L}_\infty$. Let φ be the \mathbb{Q} -algebra morphism $(\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow Z(U_q(\mathfrak{g})), [M] \mapsto I(\text{Tr}_M(K_{2\rho} -)))$ considered at the end of section 2.2.2. Then $\varphi^{-1}(\mathcal{L}_\infty)$ is an ideal of $\mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, which contains all the elements $[L(-w_0 n\lambda + \varpi)]$ ($\varpi \in P_{++}$). Thus $\varphi^{-1}(\mathcal{L}_\infty) = \mathcal{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ by the proposition 2.10, and so $1 = \varphi([L(0)]) \in \mathcal{L}_\infty$, $M_\infty = M$, and $K_{-2\lambda}$ acts inversibly on M .

□

Remark. This result is a particular case of the proposition 8.4.13 in [Jo]. Accordingly, its proof is shorter than the one of Joseph’s theorem, and does not require the knowledge of the inclusions between Verma modules, nor the use of Gelfand–Kirillov dimensions.

2.2.5 Classification of some right ideals of $\mathcal{A}_q(G)$

The notations $\mathcal{A}_q(G)$, $U_q(\mathfrak{g})$, V have the same meaning as in sections 2.2.1 and 2.2.4. The map $I : (\mathcal{A}_q(G) \xrightarrow{\sim} F_\ell(U_q(\mathfrak{g})))$ was introduced in section 2.1.3.

We now specify the structure of the finite dimensional V -modules: they are completely reducible; each $U_q(\mathfrak{g})$ -module $L_\chi(\lambda)$ (with $\lambda \in P_{++}$, $\chi : P/2Q \rightarrow \mathbb{C}^\times$) is (by restriction) a simple V -module; the V -modules $L_\chi(\lambda)$ and $L_\varphi(\mu)$ are isomorphic iff $\lambda = \mu$ and the characters χ, φ restrict to the same character $2P/2Q \rightarrow \mathbb{C}^\times$. The simple finite dimensional V -modules will be denoted by $L_\chi(\lambda)$ with $\lambda \in P_{++}$ and $\chi : 2P/2Q \rightarrow \mathbb{C}^\times$ a character. We finally remark (see [JL1]) that a simple finite dimensional V -module is still simple as a $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$ -module. Consequently, if (M_i) is a finite family of non-isomorphic finite dimensional simple V -modules, the natural ring homomorphism $F_\ell(U_q(\mathfrak{g})) \rightarrow \bigoplus \text{End } M_i$ is surjective.

Theorem 2.13 *a) Let \mathcal{R} be a finite codimensional right ideal of $\mathcal{A}_q(G)$, which is a subcomodule of $\mathcal{A}_q(G)$ w.r.t. the right coaction $\delta_R : (\mathcal{A}_q(G) \rightarrow \mathcal{A}_q(G) \otimes \mathcal{A}_q(G), a \mapsto a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})a_{(3)})$. Then there exists a finite dimensional V -module M such that $\mathcal{R} = I^{-1}(\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))} M)$.*

- b) If M is a finite dimensional V -module, then $I^{-1}(\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))} M)$ is a finite codimensional right ideal of $\mathcal{A}_q(G)$, stable by the right coaction δ_R .*

- c) If M and N are finite dimensional V -modules, then $I^{-1}(\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))} M) = I^{-1}(\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))} N)$ iff M and N have the same irreducible components.
- d) $I^{-1}(\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))} M)$ is included in the augmentation ideal of $\mathcal{A}_q(G)$ iff M contains the trivial V -module.

Proof a) and b) are consequences of the propositions 2.6 and 2.12. Let M and N be two finite dimensional V -modules having the same annihilator in $F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))$. Then $\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))} M = \text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))}(M \oplus N)$. Let M_1, \dots, M_k (respectively M_1, \dots, M_n) be the distinct irreducible components of M (respectively $M \oplus N$). Then we have:

$$F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))/\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))}(M) \simeq \bigoplus_{i=1}^k \text{End } M_i$$

and:

$$F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))/\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))}(M \oplus N) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \text{End } M_i,$$

and so $k = n$: all the irreducible components of N appear in M . c) follows. d) can be proved in a similar way, using the fact that the augmentation ideal of $\mathcal{A}_q(G)$ is the inverse image by I of the annihilator of the trivial V -module. \square

2.3 Differential calculi on quantum groups

2.3.1 Woronowicz's definition

A natural interpretation of Hopf algebras is given by the following dictionary:

- A Hopf algebra \mathcal{A} may be viewed as the algebra of functions over an affine (quantum) group G .
- A bicovariant bimodule Γ over \mathcal{A} has to be thought of as the space of global sections of a $G \times G^{\text{op}}$ -equivariant vector bundle E over G .
- The space Γ^L of left coinvariants in Γ corresponds to the space of left G -invariant sections of E ; it gives a definition of the fiber E_1 over the unity point of G . The projection $(\Gamma \rightarrow \Gamma^L, x \mapsto S(x_{(-1)})x_{(0)})$ gives the value of a section x of E at the unity point of G .

In this picture, the isomorphism $\Gamma \simeq \mathcal{A} \otimes \Gamma^L$ (see [Wo]) is natural.

Woronowicz [Wo] has used this picture to study differential geometry on a quantum group:

Definition 2.14 *A bicovariant differential calculus on a Hopf algebra \mathcal{A} is a pair (Γ, d) , where Γ is a bicovariant bimodule over \mathcal{A} and $d : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma$ is a derivation and a morphism of two-sided comodules, such that the image of d generates the left \mathcal{A} -module Γ .*

In the sequel, the dimension of the space Γ^L of left coinvariants will be supposed to be finite. The subspace $\mathcal{R} = \{a \in \mathcal{A} \mid \varepsilon(a) = 0, S(a_{(1)}) \cdot d(a_{(2)}) = 0\}$ is then a finite codimensional right ideal of \mathcal{A} , and a subcomodule for the right coadjoint coaction $\delta_R : (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, a \mapsto a_{(2)} \otimes S(a_{(1)})a_{(3)})$. As shown by Woronowicz, the subspace \mathcal{R} determines (up to isomorphism) the bicovariant differential calculus (Γ, d) : we call it the ideal associated to (Γ, d) . Geometrically, \mathcal{R} is the set of functions whose first order jet (computed accordingly to d) at the unity point of G is zero.

One does not know how to give examples of (finite dimensional) bicovariant differential calculi on a given Hopf algebra \mathcal{A} . The following subsection shows that this task is more easy when \mathcal{A} is co-quasi-triangular: in this case, \mathcal{A} is nearly commutative, thereby resembling more closely the algebra of functions over a group.

2.3.2 A construction of bicovariant differential calculi

Let \mathcal{A} be a c.q.t. Hopf algebra over the field \mathbb{K} , and let γ, δ be the associated maps.

We take a finite dimensional right \mathcal{A} -comodule M . We note (m_i) a basis of M , (m_i^*) the dual basis, and R_{ij} the elements of \mathcal{A} such that $\delta_R(m_i) = \sum m_j \otimes R_{ji}$. Then $\Delta R_{ji} = \sum R_{jk} \otimes R_{ki}$ and $\varepsilon(R_{ji}) = \delta_{ji}$ (Kronecker's symbol). Also, M is a left \mathcal{A}^* -module, and the R_{ji} (viewed as linear forms on \mathcal{A}^*) are the matrix coefficients $\theta_M(m_i, m_j^*)$ of this module.

Since (\mathcal{A}, γ) is c.q.t., M becomes a right crossed bimodule over \mathcal{A} for the action $m_i \cdot a = \sum \langle \gamma(a), R_{ji} \rangle m_j$ (proposition 2.2). M^* is a right comodule over \mathcal{A} too, for the coaction $\delta_R(m_i^*) = \sum m_j^* \otimes S(R_{ij})$. Using the fact that (\mathcal{A}, δ) is a c.q.t. Hopf algebra, we may endow M^* with the structure of a right crossed bimodule over \mathcal{A} for the action $m_i^* \cdot a = \sum \langle \delta(a), S(R_{ij}) \rangle m_j^*$. Then, by making the tensor product, we obtain that $\text{End}(M) \simeq M \otimes M^*$ is a right crossed bimodule.

We denote by Γ the bicovariant bimodule associated to this right crossed bimodule $\text{End}(M)$. As a vector space, Γ is just the tensor product $\mathcal{A} \otimes M \otimes M^*$. On the basic elements, the structure maps are:

$$\begin{aligned} b \cdot (a \otimes m_i \otimes m_j^*) &= ba \otimes m_i \otimes m_j^* \\ (a \otimes m_i \otimes m_j^*) \cdot b &= \sum ab_{(1)} \otimes \langle \gamma(b_{(2)}), R_{ki} \rangle m_k \otimes \langle \delta(b_{(3)}), S(R_{j\ell}) \rangle m_\ell^* \\ \delta_L(a \otimes m_i \otimes m_j^*) &= a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes m_i \otimes m_j^* \\ \delta_R(a \otimes m_i \otimes m_j^*) &= \sum a_{(1)} \otimes m_k \otimes m_\ell^* \otimes a_{(2)} R_{ki} S(R_{j\ell}). \end{aligned}$$

It follows that the canonical element $X = \sum 1 \otimes m_i \otimes m_i^*$ of Γ is left and right coinvariant. The linear map $d : (\mathcal{A} \rightarrow \Gamma, a \mapsto X \cdot a - a \cdot X)$ is then a derivation and a morphism of two-sided comodules.

Theorem 2.15 *a) If (\mathcal{A}, γ) is a factorizable c.q.t. Hopf algebra and if M is a simple finite dimensional non-trivial \mathcal{A} -comodule, then the above construction gives a bicovariant differential calculus $d : (\mathcal{A} \rightarrow \Gamma \equiv \mathcal{A} \otimes \text{End}(M))$.*

b) Its associated ideal \mathcal{R} equals $\Gamma^{-1}(\text{ann}_{\mathcal{A}^}(\mathbb{K} \oplus M))$, where \mathbb{K} is the trivial \mathcal{A}^* -module.*

Proof We first compute for $a \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} d(a) &= \sum a_{(1)} \langle I(a_{(2)}), R_{k\ell} \rangle \otimes m_k \otimes m_\ell^* - a_{(1)} \langle a_{(2)}, \delta_{k\ell} \rangle \otimes m_k \otimes m_\ell^* \\ &= \sum a_{(1)} \langle I(a_{(2)}), R_{k\ell} - \delta_{k\ell} \rangle \otimes m_k \otimes m_\ell^* \end{aligned}$$

and so:

$$\begin{aligned} S(a_{(1)}) \cdot d(a_{(2)}) &= \sum \langle J(R_{k\ell} - \delta_{k\ell}), a \rangle m_k \otimes m_\ell^* \\ &= \sum \langle I(a - \varepsilon(a)), R_{k\ell} \rangle m_k \otimes m_\ell^*. \end{aligned}$$

The R_{ji} are the matrix coefficients $\theta_M(m_i, m_j^*)$ of the \mathcal{A}^* -module M , which is irreducible and non-trivial. Thus, by the Jacobson density theorem, the $(\dim M)^2 + 1$ elements $\{1, R_{ji}\}$ are linearly independent in \mathcal{A} . The $(\dim M)^2$ linear forms $\{J(R_{k\ell} - \delta_{k\ell})\}$ are then linearly independent in \mathcal{A}^* , and our formulas show that the map $(\mathcal{A} \rightarrow \Gamma^L = \text{End}(M), a \mapsto S(a_{(1)}) \cdot d(a_{(2)}))$ is onto. a) is proved. Our formulas also show that the associated ideal \mathcal{R} of this calculus is the set of elements a in the augmentation ideal of \mathcal{A} such that $I(a)$ is orthogonal to all the matrix coefficients $R_{k\ell}$ of the \mathcal{A}^* -module M . Thus $\mathcal{R} = \ker \varepsilon \cap I^{-1}(\text{ann}_{\mathcal{A}^*} M) = I^{-1}(\text{ann}_{\mathcal{A}^*}(\mathbb{K} \oplus M))$. We have shown b). \square

If we consider now a finite family (M_i) of non-trivial non-isomorphic finite dimensional simple right \mathcal{A} -comodules, we can do the direct sum of such constructions. If (\mathcal{A}, γ) is factorizable, then the map $d : (\mathcal{A} \rightarrow \bigoplus (\mathcal{A} \otimes \text{End } M_i))$ is a bicovariant differential calculus. The associated ideal is $I^{-1}(\text{ann}_{\mathcal{A}^*}(\mathbb{K} \oplus \bigoplus M_i))$.

2.3.3 The link with the classification theorem

We are now gathering the pieces of our patchwork. According to the statements in section 2.3.1, the theorem 2.13 yields a complete classification of bicovariant differential calculi on $\mathcal{A}_q(G)$. Morally, they are all given by the construction described in section 2.3.2.

Proposition 2.16 *Let $U_q(\mathfrak{g})$ and $\mathcal{A}_q(G)$ be the objects defined in section 2.2.1. If the root and the weight lattices for \mathfrak{g} are equal, all the bicovariant differential calculi on $\mathcal{A}_q(G)$ can be constructed by the method described in section 2.3.2.*

Proof The results in section 2.2.5 tell us that an ideal \mathcal{R} associated to a bicovariant differential calculus on $\mathcal{A}_q(G)$ is a subspace $I^{-1}(\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))} M)$, where M is a V -module containing the trivial V -module. Let M_1, \dots, M_n be the distinct non-trivial irreducible components of M . The assumption on \mathfrak{g} gives us that the M_i are modules $L(\lambda_i)$ (without any twisting character), and so can be considered as non-trivial non-isomorphic simple right $\mathcal{A}_q(G)$ -comodules. The construction of section 2.3.2 for this family of comodules leads to a bicovariant differential calculus whose associated ideal is the inverse image by I of the annihilator of the $(\mathcal{A}_q(G))^*$ -module $\mathbb{C}(v) \oplus \bigoplus M_i$. It is \mathcal{R} , and the proposition is proved. \square

We will now discuss what happens when the root and the weight lattices differ. Up to the end of this chapter, we consider this case. There exist non-trivial characters $\chi : 2P/2Q \rightarrow \mathbb{C}^\times$, and for any weight λ , we can look at the ideal $\mathcal{R} = I^{-1}(\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))}(\mathbb{C}(v) \oplus L_\chi(\lambda)))$, and at the associated bicovariant differential calculus. It cannot be constructed by the method of the theorem 2.15, since $L_\chi(\lambda)$ is not a right $\mathcal{A}_q(G)$ -comodule. However, one may notice that the main trick in the construction of section 2.3.2 consisted in using two different R -matrices, namely R_{12} and R_{21}^{-1} . R_{12} was used to endow the $\mathcal{A}_q(G)$ -comodule $L(\lambda)$ with the structure of a right crossed bimodule over $\mathcal{A}_q(G)$, and R_{21}^{-1} turned the $\mathcal{A}_q(G)$ -comodule $L(\lambda)^*$ into a right crossed bimodule over $\mathcal{A}_q(G)$. The tensor product of these right crossed bimodules then gave the cotangent space at $1 \in G$ for the bicovariant differential calculus associated to $I^{-1}(\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))}(\mathbb{C}(v) \oplus L(\lambda)))$. When one uses the small freedom allowed in the choice of the R -matrix of $U_q(\mathfrak{g})$ (see [Gal]), one can make similar constructions for the bicovariant differential calculi associated with some of the ideals $I^{-1}(\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))}(\mathbb{C}(v) \oplus L_\chi(\lambda)))$. We will not write all the details, but point out that this is the way followed by Schmüdgen and Schüler for the construction described in [SS1], theorem 2.2.

As an example, we now describe explicitly the bicovariant differential calculus associated with the ideal $I^{-1}(\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))}(\mathbb{C}(v) \oplus L_\chi(0)))$. Let $(P/Q)^\wedge$ be the group of characters $\zeta : P/Q \rightarrow \mathbb{C}^\times$. If ζ is such a character, it extends to a one-dimensional representation $\bar{\zeta}$ of $\mathcal{A}_q(G)$ by letting $\bar{\zeta}(\theta_{L(\lambda)}(m, m^*)) = \zeta(\lambda \bmod Q)\langle m^*, m \rangle$, and this gives an inclusion of the group $(P/Q)^\wedge$ into the center of $(\mathcal{A}_q(G))^{*\text{res}}$. Since $(\bar{\zeta} \otimes \text{id}) \circ \delta_R : \mathcal{A}_q(G) \rightarrow \mathbb{C}(v) \otimes \mathcal{A}_q(G)$ is given by $(x \mapsto \bar{\zeta}(x) \otimes 1)$, we can see that the kernel of $\bar{\zeta}$ is a one-codimensional two-sided ideal of $\mathcal{A}_q(G)$, stable by the right coaction δ_R . If ζ is not trivial, the ideal $\mathcal{R} = \ker \varepsilon \cap \ker \bar{\zeta}$ defines a bicovariant differential calculus on $\mathcal{A}_q(G)$. Putting $\chi : (2P/2Q \rightarrow \mathbb{C}^\times, 2\lambda \bmod 2Q \mapsto \zeta(\lambda \bmod Q))$, we can check that $\mathcal{R} = I^{-1}(\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))}(\mathbb{C}(v) \oplus L_\chi(0)))$. This construction gives all the one-dimensional differential calculi on $\mathcal{A}_q(G)$ (generalizing the result of [SS1], remark 4 after the theorem 2.2).

Finally, let X be an intermediate lattice between P and Q . The matrix coefficients of the irreducible representations of $U_q(\mathfrak{g})$ whose highest weight belongs to X span a subalgebra $\mathcal{A}_q(G)_X \subseteq \mathcal{A}_q(G)$. These algebras $\mathcal{A}_q(G)_X$ are factorizable c.q.t. Hopf algebras. For instance, $\mathcal{A}_q(G)_Q$ is the algebra of functions on the quantum adjoint group, and $\mathcal{A}_q(G) \equiv \mathcal{A}_q(G)_P$ is the algebra of functions on the quantum simply-connected group. Our arguments in the section 2.2.5 show that the indecomposable bicovariant differential calculi on $\mathcal{A}_q(G)_X$ are classified by ideals $\mathcal{R} = \mathcal{A}_q(G)_X \cap I^{-1}(\text{ann}_{F_\ell(U_q(\mathfrak{g}))}(\mathbb{C}(v) \oplus L_\chi(\lambda)))$, where $\chi : 2X/2Q \rightarrow \mathbb{C}^\times$ is a character (extended arbitrarily to a character of the group $2P/2Q$). Thus the “twisted” bicovariant differential calculi are non-local, their appearance depending of the choice of X . The bicovariant differential calculi seem localized at the central elements of G_X , that is to say, at the fixed points of G_X under the adjoint action.

Chapitre 3

Dualité de Schur–Weyl et R -matrices trigonométriques pour $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$

Introduction

Les travaux de Chari et Pressley [CP3] sur les algèbres enveloppantes affines quantifiées donnent en particulier une classification des $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules simples de type 1 et de dimensions finies. Ce résultat (analogue de la classification de Cartan des représentations irréductibles d’une algèbre de Lie semi-simple) est très général, mais ne livre pas beaucoup de détails sur la structure de ces modules. Il ne serait pas facile d’en déduire, par exemple, que le produit tensoriel de deux $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules irréductibles de dimensions finies est génériquement irréductible. De plus, les R -matrices, qui sont à la base de la théorie des groupes quantiques, n’apparaissent pas naturellement dans cette classification.

Pour obtenir davantage d’informations, je vais utiliser la dualité de Schur–Weyl. Dans le cas présent, cette « dualité » (mise au point par Chari et Pressley [CP5] et par Ginzburg, Reshetikhin et Vasserot [GRV]) relie la théorie des représentations des algèbres de Hecke affine de type A à celle de certaines représentations de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$. Mon étude conduit à deux résultats principaux :

- l’anneau de Grothendieck de la catégorie (non semi-simple) des représentations de dimensions finies (de type 1) de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ est un anneau commutatif de polynômes (en une infinité de variables) ;
- la procédure « de fusion » [KRS] permet de construire tous les $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules simples (de type 1) de dimensions finies, ainsi que des opérateurs d’entrelacement entre eux (ce qui répond à une question de Cherednik [Cd]).

On en déduit un théorème d’existence et d’unicité pour les R -matrices trigonométriques associées à deux représentations irréductibles (de type 1) de dimensions finies de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$. Par ailleurs, Drinfeld [Dr3] (voir aussi une remarque dans [KRS] et dans [Cd]) a suggéré que les opérateurs d’entrelacement standard entre les modules de la série principale sur

l'algèbre de Hecke affine devaient correspondre à l'action des R -matrices quantiques : je rends ce lien précis.

La motivation initiale de ce travail était de calculer la R -matrice trigonométrique associée à la (une des) représentations de dimension 8 de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_3)$, afin d'examiner une question de Jones liée à la théorie des invariants. Cette représentation est une extension à $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_3)$ de la q -déformation de la représentation adjointe de \mathfrak{sl}_3 . La présence d'une $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ -composante isotypique de longueur 2 dans le carré tensoriel du module étudié rend difficile le calcul direct. Hou, Hou, Ma et Yin [HHMY] l'ont cependant effectué en utilisant les valeurs des q -coefficients de Clebsch–Gordan. J'ai quant à moi retrouvé ce résultat par la procédure de fusion, et ai aussi calculé la R -matrice trigonométrique pour deux autres représentations (plus compliquées) de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_3)$. Bien que les formules obtenues soient assez opaques, elles permettent d'apporter une réponse partielle au problème posé par Jones.

Les autres résultats présentés ici sont certainement moins essentiels. Je montre d'une part comment étendre à $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ la notion de représentation polynomiale : dans ce cadre, les travaux de Ding et Frenkel [DF] me permettent d'illustrer la classification de Chari et Pressley des $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -modules simples et de dimensions finies. D'autre part, j'explique pourquoi la formule explicite de la R -matrice universelle de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ [Da] ne permet pas de calculer facilement les R -matrices trigonométriques.

Voici l'organisation de ce chapitre. Je commencerai par rappeler les résultats sur la dualité de Schur–Weyl pour $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ (§3.1). Puis je rappellerai au §3.2 les résultats de Chari et Pressley sur la classification des modules simples sur une algèbre enveloppante affine quantifiée. Ensuite, je reprendrai les constructions utilisées par Rogawski [Rg1, Rg2] pour classifier les modules sur l'algèbre de Hecke affine de type A : ma rédaction mettra en évidence le rôle joué par les opérateurs d'entrelacement standard, et précisera deux des résultats de Rogawski (§3.3). Puis je décrirai la construction du foncteur de Schur–Weyl pour $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ (§3.4), et généraliserai quelques uns des résultats obtenus par Chari et Pressley à son sujet. Je pourrai alors énoncer et prouver les résultats annoncés plus haut. Enfin, le §3.5 présentera l'extension à $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ de la théorie exposée (suivant [GRV] et [DF]), et l'annexe 3.A donnera les résultats des calculs des trois R -matrices trigonométriques.

Dans cette partie, le corps de base sera \mathbb{C} , q sera un nombre complexe non nul qui n'est pas racine de l'unité, et v sera une racine carrée de q . (Ces hypothèses seront nécessaires à partir du §3.2.)

3.1 La dualité de Schur–Weyl pour $U_q(\mathfrak{gl}_n)$

3.1.1 $U_q(\mathfrak{gl}_n)$

Dans la dualité de Schur–Weyl classique, il est agréable d'utiliser le groupe linéaire général plutôt que le groupe spécial linéaire. Je modifie de manière correspondante les définitions du paragraphe 0.3.1. La notation $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ désigne les coefficients q -binômiaux au paramètre v .

Soit P le groupe abélien libre de base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, muni de la forme biadditive $(\cdot | \cdot)$:

$P \times P \rightarrow \mathbb{Z}$ donnée par $(\varepsilon_i | \varepsilon_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker), soit $P_{++} = \{\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n\}$ l'ensemble des poids entiers dominants, soient $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ (pour $1 \leq i \leq n-1$) les racines simples usuelles, et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1}$ la matrice de Cartan correspondante: $a_{ij} = (\alpha_i | \alpha_j)$ (cf. [Bo, Planche I]).

Définition 3.1 [Ji1]: On appelle $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ la \mathbb{C} -algèbre présentée par les générateurs K_λ (pour $\lambda \in P$), E_1, \dots, E_{n-1} et F_1, \dots, F_{n-1} , et les relations:

$$\begin{aligned} K_\lambda K_\mu &= K_{\lambda+\mu} && (\text{pour } \lambda, \mu \in P), \\ K_\lambda E_i &= v^{(\lambda|\alpha_i)} E_i K_\lambda \quad \text{et} \quad K_\lambda F_i = v^{-(\lambda|\alpha_i)} F_i K_\lambda && (\text{pour } \lambda \in P \text{ et } 1 \leq i \leq n-1), \\ \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix} E_i^r E_j E_i^{1-a_{ij}-r} &= 0 && (\text{pour } 1 \leq i \neq j \leq n-1), \\ \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix} F_i^r F_j F_i^{1-a_{ij}-r} &= 0 && (\text{pour } 1 \leq i \neq j \leq n-1), \\ [E_i, F_j] &= \delta_{ij} \frac{K_{\alpha_i} - K_{-\alpha_i}}{v - v^{-1}} && (\text{pour } 1 \leq i, j \leq n-1). \end{aligned}$$

C'est une algèbre de Hopf, le coproduit et la coïunité étant donnés par:

$$\begin{aligned} \Delta(K_\lambda) &= K_\lambda \otimes K_\lambda, && \varepsilon(K_\lambda) = 1 && (\text{pour } \lambda \in P), \\ \Delta(E_i) &= E_i \otimes 1 + K_{\alpha_i} \otimes E_i, && \varepsilon(E_i) = 0 && (\text{pour } 1 \leq i \leq n-1), \\ \Delta(F_i) &= F_i \otimes K_{-\alpha_i} + 1 \otimes F_i, && \varepsilon(F_i) = 0 && (\text{pour } 1 \leq i \leq n-1). \end{aligned}$$

La sous-algèbre (de Hopf) de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ engendrée par les E_i , F_i et les K_λ (pour $\lambda \in \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathbb{Z}\alpha_i$) est isomorphe à l'algèbre (de Hopf) $U_q(\mathfrak{sl}_n)$. Comme on le voit, $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ ne diffère de $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ que par la partie toroïdale U^0 : les résultats essentiels du §0.3.1 restent valables. On dispose ainsi d'une décomposition triangulaire $U_q(\mathfrak{gl}_n) \simeq U^- \otimes U^0 \otimes U^+$.

Je dirai qu'un $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module M est de type 1 s'il est somme directe de ses espaces de poids: $M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda$, où $M_\lambda = \{m \in M \mid \forall \mu \in P, K_\mu \cdot m = v^{(\lambda|\mu)} m\}$. Notamment, tous les K_λ agissent de façon semi-simple sur un module de type 1, et il n'y a pas de problème pour étendre aux $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modules de type 1 et de dimensions finies le théorème de complète réductibilité. Les $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modules simples de type 1 et de dimensions finies sont classifiés par leurs plus hauts poids; si $\lambda \in P_{++}$, je noterai $L(\lambda)$ le module simple correspondant.

Il y a deux représentations importantes de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$:

- la représentation naturelle $L(\varepsilon_1)$: elle possède une base (e_1, \dots, e_n) formée de vecteurs de poids $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$; l'action des E_i et des F_i est donnée par: $E_i \cdot e_j = \delta_{i,j-1} e_{j-1}$, $F_i \cdot e_j = \delta_{ij} e_{j+1}$ (en posant $e_0 = e_{n+1} = 0$);
- la représentation déterminant $L(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)$: elle est de dimension 1, et donnée par le caractère $\det_q: (K_\lambda \mapsto v^{(\lambda|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)}, E_i \mapsto 0, F_i \mapsto 0)$ de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$.

Je noterai $t_{ij}: (U_q(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \langle e_i^*, x_{L(\varepsilon_1)} \cdot e_j \rangle)$ les coefficients de la représentation naturelle. Dans le dual restreint de l'algèbre de Hopf $U_q(\mathfrak{gl}_n)$, le sous-espace vectoriel engendré par les coefficients des représentations de dimensions finies et de type 1 sera noté $\mathcal{A}_q(\mathfrak{GL}_n)$.

Le coefficient \det_q est un élément groupoidal central dans $\mathcal{A}_q(\mathrm{GL}_n)$, et est un polynôme en les t_{ij} . L'algèbre $\mathcal{A}_q(\mathrm{GL}_n)$ est engendrée par les t_{ij} et par $(\det_q)^{-1}$ (voir [FRT1] et [PW]).

La dualité entre $\mathcal{A}_q(\mathrm{GL}_n)$ et $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ est non-dégénérée. L'existence d'une R -matrice pour $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ se traduit par l'existence de deux applications $\gamma, \delta : \mathcal{A}_q(\mathrm{GL}_n) \rightarrow U_q(\mathfrak{gl}_n)$ telles que $(\mathcal{A}_q(\mathrm{GL}_n), U_q(\mathfrak{gl}_n), \gamma, \delta)$ soit une algèbre de Hopf co-quasi-triangulaire (voir §2.1.2). Les images $\gamma(t_{ij})$ et $\delta(t_{ij}) \in U_q(\mathfrak{gl}_n)$ sont données dans [FRT1] et [DF]. Pour les écrire, on pose $\{x, y\} = vxy - yx$ (commutateur gauche), et on définit une matrice L^+ triangulaire supérieure à éléments dans U^-U^0 et une matrice L^- triangulaire inférieure à éléments dans U^0U^+ par :

$$\begin{aligned} l_{ii}^+ &= K_{\varepsilon_i}, & l_{ij}^+ &= v^{i-j}(v - v^{-1})\{F_{j-1}, \dots, \{F_{i+1}, F_i\}\}K_{\varepsilon_i} & (\text{pour } j > i), \\ l_{ii}^- &= K_{-\varepsilon_i}, & l_{ij}^- &= (-1)^{i-j}(v - v^{-1})\{E_{i-1}, \dots, \{E_{j+1}, E_j\}\}K_{-\varepsilon_j} & (\text{pour } i > j). \end{aligned}$$

On a alors $\gamma(t_{ij}) = l_{ij}^+$, $\delta(t_{ij}) = l_{ij}^-$.

Ces éléments (l_{ij}^\pm) permettent d'écrire une autre présentation de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$. On introduit les matrices élémentaires $E_{ij} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ avec un 1 à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne et 0 ailleurs, on note $I = \sum_{i=1}^n E_{ii}$ la matrice unité, et on pose :

$$\begin{aligned} \widehat{R} &= v \sum_{1 \leq i \leq n} E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} E_{ij} \otimes E_{ji} + (v - v^{-1}) \sum_{1 \leq i < j \leq n} E_{ii} \otimes E_{jj} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})^{\otimes 2}, \\ P &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} E_{ij} \otimes E_{ji} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})^{\otimes 2}. \end{aligned}$$

Si L est une matrice d'ordre n , on écrit L_1 et L_2 pour les matrices $L \otimes I$ et $I \otimes L$.

Théorème 3.2 [DF, theorem 2.1]: *Les éléments $(l_{ij}^+)_{1 \leq i \leq j \leq n}$ et $(l_{ij}^-)_{1 \leq j \leq i \leq n}$ engendrent $U_q(\mathfrak{gl}_n)$. En les soumettant aux relations :*

$$\widehat{R}L_2^+L_1^+ = L_2^+L_1^+\widehat{R}, \quad \widehat{R}L_2^-L_1^- = L_2^-L_1^-\widehat{R}, \quad \widehat{R}L_2^+L_1^- = L_2^-L_1^+\widehat{R}, \quad l_{ii}^+l_{ii}^- = l_{ii}^-l_{ii}^+ = 1,$$

on obtient une présentation de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$.

Dans cette présentation, le coproduit de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ prend la forme simple ([Ro1]) :

$$\Delta(l_{ij}^+) = \sum_{k=i}^j l_{ik}^+ \otimes l_{kj}^+ \quad (\text{pour } i \leq j), \quad \Delta(l_{ij}^-) = \sum_{k=j}^i l_{ik}^- \otimes l_{kj}^- \quad (\text{pour } i \geq j).$$

Enfin, les crochets de dualité entre les coefficients t_{ij} de la représentation naturelle et les éléments $l_{k\ell}^\pm$ sont codés dans les relations suivantes :

$$\langle T_1, L_2^\pm \rangle = P\widehat{R}^{\pm 1}.$$

Les coefficients de la matrice T sont les coefficients t_{ij} , et la relation ci-dessus signifie que $\langle t_{ij}, l_{k\ell}^\pm \rangle$ est le coefficient de $E_{ij} \otimes E_{k\ell}$ dans la matrice $P\widehat{R}^{\pm 1}$.

3.1.2 $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$

Soit d un entier supérieur ou égal à 1, \mathfrak{S}_d le groupe symétrique sur d lettres, $S = \{s_1, \dots, s_{d-1}\}$ l'ensemble des générateurs usuels de \mathfrak{S}_d , et ℓ la fonction longueur sur \mathfrak{S}_d relative à S (voir [Bo, ch. IV, §1.3, exemple 2]).

Définition 3.3 *L'algèbre de Hecke du système de Coxeter (\mathfrak{S}_d, S) est la \mathbb{C} -algèbre engendrée par les symboles $(T_{s_i})_{1 \leq i \leq d-1}$, soumis aux relations :*

$$\begin{aligned} T_{s_i} T_{s_j} &= T_{s_j} T_{s_i} && (\text{pour } |i - j| \geq 2), \\ T_{s_i} T_{s_{i+1}} T_{s_i} &= T_{s_{i+1}} T_{s_i} T_{s_{i+1}} && (\text{pour } 1 \leq i \leq d - 2), \\ (T_{s_i} - q)(T_{s_i} + 1) &= 0 && (\text{pour } 1 \leq i \leq d - 1). \end{aligned}$$

Je noterai (de manière peu standard) $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ cette algèbre, et renvoie à l'article de revue [Cu] pour sa présentation générale. On sait notamment que c'est une algèbre semi-simple (q n'étant ni nul, ni racine de l'unité), isomorphe à l'algèbre du groupe \mathfrak{S}_d .

Pour $w \in \mathfrak{S}_d$, on peut définir T_w comme étant $T_{s_{i_1}} \cdots T_{s_{i_k}}$, où $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ est une décomposition réduite de w . Les $(T_w)_{w \in \mathfrak{S}_d}$ forment une base de $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$.

Kazhdan et Lusztig [KL] ont défini, pour tout $w \in \mathfrak{S}_d$, des éléments C_w et C'_w de $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$. A l'aide de ces éléments, ils construisent des $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -modules simples, notés $J(w)$, où $w \in \mathfrak{S}_d$. Ils obtiennent alors une classification de tous les $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -modules simples.

Si w_0 est l'élément de plus grande longueur dans \mathfrak{S}_d , les éléments C_{w_0} et C'_{w_0} peuvent être définis par les formules :

$$C_{w_0} = (-v)^{\ell(w_0)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} (-q)^{-\ell(w)} T_w \quad \text{et} \quad C'_{w_0} = v^{-\ell(w_0)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} T_w.$$

Cela résulte par exemple des formules (2.3c) de [KL] et du §1 de [Gy]. Ces éléments sont (à scalaire près) des idempotents centraux primitifs de $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$. Les $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -modules simples qu'ils définissent sont les modules $J(w_0)$ et $J(1)$ respectivement.

3.1.3 Dualité de Schur–Weyl

Soit V la représentation naturelle de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$. La R -matrice de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ définit un automorphisme \widehat{R}^{VV} du $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module $V \otimes V$, dont \widehat{R} est la matrice dans la base $(e_i \otimes e_j)_{1 \leq i, j \leq n}$. En faisant agir $(v \widehat{R}^{VV})$ sur les i -ème et $(i + 1)$ -ème facteurs du $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ module $V^{\otimes d}$, on munit ce dernier d'une action à droite par l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ [Ji1] :

$$(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d}) \cdot T_{s_i} = \begin{cases} q e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} & \text{si } j_i = j_{i+1}, \\ v e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_{i+1}} \otimes e_{j_i} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} & \text{si } j_i > j_{i+1}, \\ v e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_{i+1}} \otimes e_{j_i} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} + (q - 1) e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} & \text{si } j_i < j_{i+1}. \end{cases}$$

$V^{\otimes d}$ est un $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ - $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -bimodule, et l'on peut considérer le foncteur $\mathfrak{S}_d^n = V^{\otimes d} \otimes_{\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)} \text{---}$ de la catégorie des $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -modules vers la catégorie des $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modules de type 1. C'est un foncteur exact, et on l'appelle foncteur de Schur–Weyl.

La dualité de Schur–Weyl est décrite, au niveau des modules irréductibles, par la correspondance suivante. A $w \in \mathfrak{S}_d$, on associe un diagramme de Young D par l’algorithme de Robinson–Schensted–Schützenberger (“bump procedure”, voir [Kn, §5.1.4]). A un diagramme de Young D à $k \leq n$ lignes, avec λ_i boîtes sur la i -ème ligne, on associe le poids dominant $\lambda = \lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_k \varepsilon_k$.

Le théorème suivant est certainement connu, et en tout cas ne fait que préciser un résultat de Chari et Pressley [CP5].

Théorème 3.4 *Si à $w \in \mathfrak{S}_d$ est associé un diagramme de Young D à au plus n lignes, alors \mathcal{S}_d^n envoie le $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -module $J(w)$ sur le $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module simple $L(\lambda)$, où λ est le poids associé à D . Sinon, $\mathcal{S}_d^n(J(w))$ est le $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module nul.*

Preuve L’image de $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ est tout le commutant de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes d})$ [Re1][LR]. On peut donc écrire $V^{\otimes d} = \bigoplus_{\lambda \in P_{++}} L(\lambda) \otimes \mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{gl}_n)}(L(\lambda), V^{\otimes d})$, en utilisant la complète réductibilité. Ceci montre que \mathcal{S}_d^n envoie un $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -module simple sur un $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module simple, et qu’il suffit d’étudier la correspondance entre λ et le $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -module à droite $\mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{gl}_n)}(L(\lambda), V^{\otimes d})$. Ce dernier module est isomorphe au sous- $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -module de $V^{\otimes d}$ formé des vecteurs de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -plus haut poids λ . Compte-tenu de la forme de l’action de $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ sur $V^{\otimes d}$, on en déduit que $\mathrm{Hom}_{U_q(\mathfrak{gl}_n)}(L(\lambda), V^{\otimes d})$ ne dépend pas du choix de n , pourvu qu’il soit supérieur au nombre de lignes du diagramme de Young associé à λ . On peut alors utiliser le résultat de Chari et Pressley [CP5, proposition 7.2], valable a priori seulement dans le cas $d < n$. \square

Par exemple, $\mathcal{S}_d^n(J(w_0))$ est isomorphe au module $L(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_d)$ si $d \leq n$, et $\mathcal{S}_d^n(J(1))$ est isomorphe au module $L(d\varepsilon_1)$.

3.1.4 $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modules polynomiaux et foncteurs de troncation

Je présente maintenant des q -analogues de constructions classiques [Gr, §6.5]. Ce sont des conséquences des résultats énoncés plus haut. On étend les considérations du paragraphe précédent au cas $d = 0$ en posant $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_0) = \mathbb{C}$, et $\mathcal{S}_0^n(\mathbb{C}) = L(0)$.

Proposition 3.5 *Soit n un entier ≥ 1 . Pour tout $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module M , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) M est de type 1, somme de sous-modules de dimensions finies, et les poids de M sont contenus dans $\{\lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0\}$.
- b) M est somme directe de modules $L(\lambda)$, pour des poids dominants $\lambda = \lambda_1 \varepsilon_1 + \cdots + \lambda_n \varepsilon_n$ tels que $\lambda_n \geq 0$.
- c) M est somme directe de modules qui sont des images, par les foncteurs \mathcal{S}_d^n , de $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -modules (pour des $d \in \mathbb{N}$).

Définition 3.6 *Un $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module de type 1 est dit polynomial s'il vérifie les conditions de la proposition 3.5. Un poids $\lambda = \lambda_1\varepsilon_1 + \dots + \lambda_n\varepsilon_n$ est dit polynomial si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous positifs ou nuls.*

Soient $n \leq N$ deux entiers positifs. Le réseau $P_n = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$ est un sous-groupe du réseau $P_N = \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{Z}\varepsilon_i$. L'inclusion $P_n \subseteq P_N$ permet d'identifier l'algèbre $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ à une sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{gl}_N)$.

A chaque espace vectoriel M muni d'une graduation du groupe P_N , on associe le sous-espace vectoriel engendré dans M par les vecteurs de degré appartenant à P_n , que l'on note $\mathcal{T}_N^n(M)$. Cette construction est fonctorielle. Si M est un $U_q(\mathfrak{gl}_N)$ -module, la notion de poids munit M d'une graduation du groupe P_N . Par restriction, M est un $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module et $\mathcal{T}_N^n(M)$ en est un sous- $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module.

Proposition 3.7 *a) Si K est un $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -module, alors les $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modules $\mathcal{T}_N^n(\mathcal{S}_d^N(K))$ et $\mathcal{S}_d^n(K)$ sont naturellement isomorphes.*

b) Si M_1, \dots, M_t sont des $U_q(\mathfrak{gl}_N)$ -modules polynomiaux, alors les $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modules $\bigotimes_{j=1}^t \mathcal{T}_N^n(M_j)$ et $\mathcal{T}_N^n(\bigotimes_{j=1}^t M_j)$ sont naturellement isomorphes.

3.2 Modules sur l'algèbre $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$

Dans ce paragraphe, je rappelle la définition des algèbres affines quantifiées. Ensuite, j'énonce quelques résultats de Chari et Pressley sur la construction et la classification des modules simples de dimensions finies et de type 1 sur une telle algèbre. Cette classification se fait en termes de poids par rapport à une grosse sous-algèbre, qui agit de manière abélienne dans tout module de dimension finie.

3.2.1 Algèbres enveloppantes affines quantifiées

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe, \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan, et $Q \subseteq P \subseteq \mathfrak{h}^*$ les réseaux des poids radiciels et entiers. Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\} \subseteq \mathfrak{h}^*$ un ensemble de racines simples de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, soit $(\varpi_1, \dots, \varpi_\ell)$ la famille des poids fondamentaux correspondants, et soit $\theta \in \mathfrak{h}^*$ la plus haute racine. On normalise le produit scalaire invariant $(\cdot | \cdot)$ sur la forme réelle $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ par $(\theta | \theta) = 2$, et l'on pose $d_i = \frac{1}{2}\|\alpha_i\|^2$, $a_{ij} = \frac{1}{d_i}(\alpha_i | \alpha_j)$.

Avec ces données, on sait construire une algèbre enveloppante quantifiée, engendrée par des E_i, F_i ($i \in \{1, \dots, \ell\}$) et des K_λ ($\lambda \in Q$). (Ici, $v \in \mathbb{C}$ et $q = v^2$ sont des nombres fixés, qui ne sont pas racines de l'unité. Si nécessaire, on aura choisi une racine carrée ou cubique de v de sorte que les expressions v^{d_i} soient définies.) Si M est un $U_q(\mathfrak{g})$ -module et $\mu \in P$, on notera $M_\mu = \{m \in M \mid \forall \lambda \in Q, K_\lambda \cdot m = v^{(\lambda|\mu)}m\}$ son sous-espace de poids μ .

A partir de \mathfrak{g} , on peut construire des algèbres de Lie affines non tordues $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et $\widehat{\mathfrak{g}}$. Par définition, $\widetilde{\mathfrak{g}}$ est l'extension centrale de l'algèbre de boucles et $\widehat{\mathfrak{g}}$ est l'algèbre de Kac-Moody obtenue en lui adjoignant une dérivation (voir [Ka, ch. 7]). Comme $\widehat{\mathfrak{g}}$ est une algèbre de Kac-Moody symétrisable, on peut lui associer une algèbre enveloppante quantifiée $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$.

La procédure est la suivante. On étend \mathbb{Q} en ajoutant deux éléments δ et Λ_0 à la base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ de ce \mathbb{Z} -module libre, et on appelle \mathbb{Q}_∞ le résultat. On prolonge le produit scalaire sur \mathbb{Q} à \mathbb{Q}_∞ par $(\delta | \alpha_i) = (\Lambda_0 | \alpha_i) = (\delta | \delta) = 0$, $(\delta | \Lambda_0) = (\Lambda_0 | \Lambda_0) = 1$ (pour $1 \leq i \leq \ell$). On pose enfin $\alpha_0 = \delta - \theta$, $d_0 = 1$ et $a_{ij} = \frac{1}{d_i}(\alpha_i | \alpha_j)$ pour $0 \leq i, j \leq \ell$.

Définition 3.8 On note $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ la \mathbb{C} -algèbre engendrée par les éléments K_λ ($\lambda \in \mathbb{Q}_\infty$), E_i et F_i ($i \in \{0, \dots, \ell\}$), soumis aux relations :

$$\begin{aligned} K_\lambda K_\mu &= K_{\lambda+\mu} && (\text{pour } \lambda, \mu \in \mathbb{Q}_\infty), \\ K_\lambda E_i &= v^{(\lambda|\alpha_i)} E_i K_\lambda, \quad K_\lambda F_i = v^{-(\lambda|\alpha_i)} F_i K_\lambda && (\text{pour } 0 \leq i \leq \ell \text{ et } \lambda \in \mathbb{Q}_\infty), \\ [E_i, F_j] &= \delta_{ij} \frac{K_{\alpha_i} - K_{-\alpha_i}}{v^{d_i} - v^{-d_i}} && (\text{pour } 0 \leq i, j \leq \ell), \\ \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{v^{d_i}} E_i^r E_j E_i^{1-a_{ij}-r} &= 0 && (\text{pour } 0 \leq i, j \leq \ell), \\ \sum_{r=0}^{1-a_{ij}} \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{v^{d_i}} F_i^r F_j F_i^{1-a_{ij}-r} &= 0 && (\text{pour } 0 \leq i, j \leq \ell). \end{aligned}$$

C'est une algèbre de Hopf, le coproduit et l'augmentation étant donnés par les formules :

$$\begin{aligned} \Delta(K_\lambda) &= K_\lambda \otimes K_\lambda, && \varepsilon(K_\lambda) = 1 && (\text{pour } \lambda \in \mathbb{Q}_\infty), \\ \Delta(E_i) &= E_i \otimes 1 + K_{\alpha_i} \otimes E_i, && \varepsilon(E_i) = 0 && (\text{pour } 0 \leq i \leq \ell), \\ \Delta(F_i) &= F_i \otimes K_{-\alpha_i} + 1 \otimes F_i, && \varepsilon(F_i) = 0 && (\text{pour } 0 \leq i \leq \ell). \end{aligned}$$

On note C et D les éléments K_δ et K_{Λ_0} .

L'algèbre $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ n'a pas de représentation irréductible de dimension finie plus grande que 1. On s'intéressera donc à la sous-algèbre de Hopf engendrée par les E_i , F_i ($i \in \{0, \dots, \ell\}$) et les K_λ ($\lambda \in \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}\delta$), que l'on notera $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$. On a donc les inclusions d'algèbres de Hopf $U_q(\mathfrak{g}) \subseteq U_q(\widetilde{\mathfrak{g}}) \subseteq U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$. L'élément C appartient au centre de $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$. Chari et Pressley [CP2, §12.2.B] ont montré que dans tout $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ -module de dimension finie, l'élément $C^2 = K_{2\delta}$ agit comme l'identité. Je dirai (suivant leur terminologie) qu'un $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ -module M est de type 1 s'il est somme directe de ses espaces de poids :

$$M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}\{0, \dots, \ell\}} = \{m \in M \mid \forall i \in \{0, \dots, \ell\}, K_{\alpha_i} \cdot m = v^{d_i \lambda_i} m\}.$$

De la même manière que pour l'algèbre $U_q(\mathfrak{g})$, on peut ramener l'étude des $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$ -modules de dimensions finies à celle des $U_q(\mathfrak{g})$ -modules de dimensions finies et de type 1. Dans un tel module, l'élément central C agit comme l'identité.

3.2.2 Classification de Chari et Pressley

Il existe une autre définition des algèbres $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ et $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$, due à Drinfeld [Dr3] et à Beck [Be]. (J'adopterai les notations de ce dernier dans la suite de ce travail.) Pour cela, on choisit une fonction d'orientation $o : \{1, \dots, \ell\} \rightarrow \{\pm 1\}$ sur le graphe de Dynkin de \mathfrak{g} , et on adjoint artificiellement une racine carrée de l'élément C à $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$.

Théorème 3.9 *L'algèbre $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ est isomorphe à la \mathbb{C} -algèbre donnée par les générateurs $x_{i,r}^\pm$ (avec $1 \leq i \leq \ell$ et $r \in \mathbb{Z}$), $K_i^{\pm 1}$ (avec $1 \leq i \leq \ell$), $h_{i,r}$ (avec $1 \leq i \leq \ell$ et $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$), $C^{\pm 1/2}$ soumis à des relations que l'on trouvera par exemple dans [Be, theorem 4.7], parmi lesquelles $K_i x_{j,r}^\pm = v^{\pm(\alpha_i|\alpha_j)} x_{j,r}^\pm K_i$.*

Le morphisme $U_q(\mathfrak{g}) \hookrightarrow U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ s'écrit $E_i \mapsto x_{i,0}^+$, $F_i \mapsto x_{i,0}^-$, $K_{\alpha_i} \mapsto K_i$. L'algèbre $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ vient avec un groupe à un paramètre d'automorphismes définis par :

$$\begin{aligned} (\text{pour } w \in \mathbb{C}^\times) \quad \tau_w : & \left(U_q(\tilde{\mathfrak{g}}) \rightarrow U_q(\tilde{\mathfrak{g}}), \right. \\ & K_i \mapsto K_i, \quad C^{\pm 1/2} \mapsto C^{\pm 1/2}, \\ & \left. h_{i,r} \mapsto w^r h_{i,r}, \quad x_{i,r}^\pm \mapsto w^r x_{i,r}^\pm \right). \end{aligned}$$

Les formules dans [loc. cit.] montrent que $\tau_w(E_0) = wE_0$ et $\tau_w(F_0) = w^{-1}F_0$. L'automorphisme intérieur de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ défini par D stabilise la sous-algèbre $U_q(\mathfrak{g})$ et induit sur celle-ci l'automorphisme τ_v .

On appelle N^\pm les sous-algèbres de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ engendrées respectivement par les $(x_{i,r}^\pm)$, et H la sous-algèbre engendrée par les (K_i) , par les $(h_{i,r})$ et par $C^{\pm 1/2}$. Les relations du théorème 4.7 de [Be] montrent que dans tout $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -module de dimension finie, l'algèbre H agit comme une algèbre commutative. Les éléments $(x_{i,r}^\pm)$ engendrent les idéaux d'augmentation des algèbres N^\pm respectivement. Enfin, on dispose d'une décomposition triangulaire $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}) = N^- \cdot H \cdot N^+$.

Chari et Pressley (voir par exemple [CP3]) ont montré que l'on pouvait décrire les $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -modules simples de type 1 et de dimensions finies de la manière suivante. A tout ℓ -uplet (P_i) de polynômes dont les termes constants valent 1, ils associent un caractère κ de l'algèbre H , défini sur les générateurs $h_{i,r}$ et K_i par les formules :

$$\begin{aligned} \kappa(C) &= 1, \\ \kappa(K_i) &= v^{d_i \deg P_i}, \\ \exp((v^{d_i} - v^{-d_i}) \sum_{s \geq 1} \kappa(h_{i,s}) u^s) &= \frac{P_i(v^{-2d_i} u)}{P_i(u)} \quad (\text{série génératrice en } u), \\ \exp(-(v^{d_i} - v^{-d_i}) \sum_{s \geq 1} \kappa(h_{i,-s}) u^{-s}) &= v^{2d_i \deg P_i} \frac{P_i(v^{-2d_i} u)}{P_i(u)} \quad (\text{série génératrice en } u^{-1}). \end{aligned}$$

Ils construisent alors le $H \cdot N^+$ -module de dimension 1 sur lequel N^+ agit via l'augmentation et H agit par κ , et induisent de $H \cdot N^+$ à $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$. Le module $M((P_i))$ obtenu est de type 1, et ses poids en tant que $U_q(\mathfrak{g})$ -module sont les $\lambda - \sum_{i=1}^{\ell} N\alpha_i$, avec $\lambda = \sum_i (\deg P_i) \varpi_i$. Tout $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -module quotient K non trivial de $M((P_i))$ est dit module de plus haut poids (P_i) ; l'image du générateur canonique de $M((P_i))$ dans K n'est pas nulle, et est l'unique vecteur de $U_q(\mathfrak{g})$ -poids λ de K ; il est appelé générateur canonique de K . Le module $M((P_i))$ possède un unique quotient simple, noté $L((P_i))$; il est de dimension finie.

Théorème 3.10 [CP3]: *La construction ci-dessus met en bijection les classes d'isomorphisme de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -modules simples de type 1 et de dimensions finies avec les ℓ -uplets (P_i) de polynômes dont les termes constants sont égaux à 1.*

Si M est un $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -module simple de dimension finie et de type 1, j'appellerai polynômes de Chari–Pressley de M le ℓ -uplet de polynômes (P_i) qui lui est ainsi associé.

Exemple. Si (P_i) est un ℓ -uplet de polynômes dont les termes constants sont égaux à 1, alors l'image inverse par l'automorphisme τ_w du module simple $L((P_i))$ admet pour polynômes de Chari–Pressley la famille des $(u \mapsto P_i(wu))$. On en déduit que pour $w \neq 1$, le module $\tau_w^*L((P_i))$ n'est pas isomorphe au module $L((P_i))$, sauf s'il s'agit du module trivial (voir [CP4, proposition 5.1].)

Soient M un $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -module de type 1 et (P_i) un ℓ -uplet de polynômes dont les termes constants sont égaux à 1. On dit qu'un élément $m \in M \setminus \{0\}$ est un $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -vecteur de plus haut poids (P_i) si N^+ agit sur m par l'augmentation et si H agit sur m par le caractère κ associé aux (P_i) . Le sous- $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -module de M engendré par m est un module de plus haut poids (P_i) , dont m est le générateur canonique (à scalaire près).

Proposition 3.11 [CP5, §6.3]: *Soient (P_i) et (P'_i) des ℓ -uplets de polynômes, M et M' des $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -modules de plus hauts poids (P_i) et (P'_i) respectivement, et $m \in M$, $m' \in M'$ des générateurs canoniques. Alors dans $M \otimes M'$, $m \otimes m'$ est un $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -vecteur de plus haut poids $(P_i P'_i)$.*

Chari et Pressley ont étudié les inclusions entre les algèbres enveloppantes affines quantifiées. Notons $I = \{1, \dots, \ell\}$ les sommets du graphe de Dynkin de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soit $J \subseteq I$ l'ensemble des sommets d'un sous-diagramme connexe, et soit \mathfrak{g}_J la sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} engendrée par les vecteurs de racines de poids $(\pm\alpha_j)_{j \in J}$. Le théorème 3.9 montre que l'homomorphisme naturel d'algèbres de Hopf de $U_q(\mathfrak{g}_J)$ dans $U_q(\mathfrak{g})$ se prolonge en un homomorphisme d'algèbres de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_J)$ dans $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$. Posons $Q^+ = \sum_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i$ et $Q_J^+ = \sum_{i \in J} \mathbb{N}\alpha_i$.

Proposition 3.12 [CP4, §2]

- a) *Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de polynômes de termes constants égaux à 1, soit M un $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -module engendré par un $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -vecteur m de plus haut poids (P_i) , soit $\lambda = \sum_{i \in I} (\deg P_i)\varpi_i$, et soit $\bigoplus_{\eta \in \lambda - Q^+} M_\eta$ la décomposition de M en sous- $U_q(\mathfrak{g})$ -espaces de poids. Alors le sous- $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_J)$ -module engendré par m est égal à $\bigoplus_{\eta \in \lambda - Q_J^+} M_\eta$; on le note M_J .*
- b) *Si, dans les notations du a), M est le $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -module simple $L((P_i)_{i \in I})$, alors M_J est le $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_J)$ -module simple $L((P_i)_{i \in J})$.*
- c) *Soient (P_i) et (P'_i) deux familles de polynômes de termes constants égaux à 1, soient $\lambda = \sum_{i \in I} (\deg P_i)\varpi_i$ et $\lambda' = \sum_{i \in I} (\deg P'_i)\varpi_i$, et soient M et M' des $U_q(\tilde{\mathfrak{g}})$ -modules de plus hauts poids (P_i) et (P'_i) respectivement. Alors l'injection canonique $M_J \otimes M'_J \rightarrow M \otimes M'$ est un morphisme de $U_q(\tilde{\mathfrak{g}}_J)$ -modules, et son image est $\bigoplus_{\eta \in Q_J^+} (M \otimes M')_{\lambda + \lambda' - \eta}$.*

3.3 Modules sur l'algèbre de Hecke affine de type A

Ce paragraphe donne un survol rapide de la classification des modules simples de dimensions finies sur l'algèbre de Hecke affine de type A (sous la forme que lui a donnée Rogawski [Rg1, Rg2]; voir aussi [Ho2]). Les outils principaux utilisés sont :

- la description de Bernstein de l'algèbre de Hecke affine, qui met en évidence une grosse sous-algèbre commutative ;
- les opérateurs d'entrelacement de Matsumoto, dont les images et les coïmages seront les modules simples recherchés.

L'utilisation plus systématique de ces opérateurs d'entrelacement simplifie quelquefois les preuves de Rogawski, et je le signalerai.

3.3.1 $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$, modules de la série principale, et opérateurs d'entrelacement

Soient $d, \mathfrak{S}_d, S, \ell, w_0$ comme au paragraphe 3.1.2. Dans ce paragraphe, j'avais rappelé la définition de l'algèbre de Hecke associée au système de Coxeter (\mathfrak{S}_d, S) , et l'avais notée $\mathcal{H}_q(\text{GL}_d)$.

Définition 3.13 (Bernstein) *Soit $\mathcal{A} = \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_d, x_d^{-1}]$ l'algèbre des polynômes de Laurent en x_1, \dots, x_d . Le groupe \mathfrak{S}_d agit sur \mathcal{A} par permutations des variables, en posant $w \cdot x_j = x_{w(j)}$. L'algèbre de Hecke affine de type A_{d-1} est l'algèbre engendrée par $\mathcal{H}_q(\text{GL}_d)$ et par \mathcal{A} , soumises aux relations :*

$$x_j T_{s_i} = T_{s_i} x_j \quad \text{pour } j \notin \{i, i+1\}, \quad T_{s_i} x_i T_{s_i} = q x_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d-1.$$

Je noterai $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ cette algèbre.

L'algèbre $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ vient avec un groupe à un paramètre d'automorphismes, appelés automorphismes de torsion, définis par $\tau_z : (\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d) \rightarrow \mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d), T_{s_i} \mapsto T_{s_i}, x_j \mapsto z x_j)$, pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$. De plus on a le théorème suivant :

Théorème 3.14 (Bernstein, Lusztig [Lu1][Ho2]) *La multiplication dans l'algèbre $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathcal{H}_q(\text{GL}_d) \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$.*

Je définis à présent (suivant [Mm, p. 99] et [Cd]) les éléments :

$$A_{s_i} = (v^{-1} T_{s_i} x_i - v T_{s_i}^{-1} x_{i+1}) \in \mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d).$$

On vérifie les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A_{s_i} A_{s_j} &= A_{s_j} A_{s_i} \quad (\text{si } |i-j| \geq 2), & A_{s_i} A_{s_{i+1}} A_{s_i} &= A_{s_{i+1}} A_{s_i} A_{s_{i+1}}, \\ A_{s_i} x_i &= x_{i+1} A_{s_i}, & A_{s_i} x_{i+1} &= x_i A_{s_i}, \\ A_{s_i} x_j &= x_j A_{s_i} \quad (\text{si } j \notin \{i, i+1\}), & & \end{aligned}$$

et on peut donc définir A_w pour $w \in \mathfrak{S}_d$ comme étant $A_{s_{i_1}} \cdots A_{s_{i_k}}$, où $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ est une décomposition réduite de w . On a alors : $x_i A_w = A_w x_{w^{-1}(i)}$.

\mathcal{A} étant une sous-algèbre commutative de l'algèbre de Hecke affine, on cherche à la trigonaliser dans les représentations de dimensions finies. On introduit donc la notion de poids. Soit $\mathcal{C} = \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ l'ensemble des caractères de l'algèbre \mathcal{A} . Un tel caractère sera appelé poids et sera écrit comme un point $\chi = [\chi_1, \dots, \chi_d]$ de $(\mathbb{C}^\times)^d$, et \mathfrak{S}_d agit sur \mathcal{C} par $w \cdot [\chi_1, \dots, \chi_d] = [\chi_{w^{-1}(1)}, \dots, \chi_{w^{-1}(d)}]$. Un poids $\chi \in \mathcal{C}$ étant donné, on définit le sous-espace de poids χ (respectivement le sous-espace de poids généralisé χ) d'un module K par : $K_\chi = \{m \in K \mid \forall x \in \mathcal{A}, x \cdot m = \chi(x)m\}$ (respectivement $K_\chi^{\text{gén}} = \{m \in K \mid \forall x \in \mathcal{A}, \exists p \in \mathbb{N}, (x - \chi(x))^p \cdot m = 0\}$). On dit que χ est un poids de K si $K_\chi \neq 0$. Les éléments non nuls de K_χ sont dits vecteurs de poids χ ; si m est un tel vecteur et si $w \in \mathfrak{S}_d$, alors $A_w \cdot m$ est nul ou est un vecteur de poids $w\chi$.

Grâce au théorème 3.14, on peut imiter la construction des modules de Verma en introduisant les modules standard. Un caractère $\chi \in \mathcal{C}$ donne un \mathcal{A} -module \mathbb{C}_χ de dimension 1, dont on notera 1_χ le générateur évident. On peut considérer le module induit de \mathcal{A} à $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$, qu'on notera $I(\chi) = \mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d) \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}_\chi$. En tant que $\mathcal{H}_q(\text{GL}_d)$ -module, $I(\chi)$ est isomorphe à la représentation régulière gauche (et est de dimension finie). Il n'est pas difficile de voir que les poids de $I(\chi)$ forment une \mathfrak{S}_d -orbite dans \mathcal{C} , et que les dimensions des sous-espaces de poids généralisés sont toutes égales [Rg1, §2]. Si $\chi \in \mathcal{C}$ est un poids et si K est un $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -module, les homomorphismes de $I(\chi)$ dans K sont en bijection avec le sous-espace de poids K_χ .

On s'intéresse ensuite aux homomorphismes entre deux $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -modules standard. Pour qu'un homomorphisme non nul entre $I(\psi)$ et $I(\chi)$ puisse exister, il faut et il suffit que ψ appartienne à la \mathfrak{S}_d -orbite de χ dans \mathcal{C} . Une manière simple de construire certains tels homomorphismes est d'utiliser les éléments A_w . Pour tout poids χ , l'application $\hat{A}_w(\chi) : (I(w\chi) \rightarrow I(\chi), x \otimes 1_{w\chi} \mapsto xA_w \otimes 1_\chi)$ est un morphisme de $\mathcal{H}_q(\text{GL}_d)$ -modules, et est appelé opérateur d'entrelacement standard. On dispose alors de la propriété de tresses : si $w, w' \in \mathfrak{S}_d$ sont deux permutations telles que $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$, alors $A_{ww'} = A_w \cdot A_{w'}$, et donc $\hat{A}_{ww'}(\chi) = \hat{A}_{w'}(\chi) \circ \hat{A}_w(w' \cdot \chi)$. Enfin, on peut montrer [Rg1, §2] que les valeurs propres de l'opérateur $\hat{A}_{s_i}(\chi)$ sont $v\chi_i - v^{-1}\chi_{i+1}$ et $-v^{-1}\chi_i + v\chi_{i+1}$, donc que $\hat{A}_{s_i}(\chi)$ est inversible si et seulement si $\chi_i \neq q^{\pm 1}\chi_{i+1}$.

3.3.2 Classification des modules sur l'algèbre de Hecke affine

La construction et la classification des $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -modules simples de dimensions finies se fait par récurrence sur d , en utilisant l'induction parabolique.

A une partition $d = d_1 + \cdots + d_t$ de d , on associe la partie T de S formée des s_i tels que $i \notin \{d_1, d_1 + d_2, \dots, d_1 + \cdots + d_{t-1}\}$. Soit W_T le sous-groupe (parabolique) de \mathfrak{S}_d engendré par T et w_T l'élément de plus grande longueur dans W_T . Soit $W(T) = \{w \in \mathfrak{S}_d \mid \ell(w w_T) = \ell(w) + \ell(w_T)\}$ le sous-groupe des permutations « shuffles » : une permutation $w \in \mathfrak{S}_d$ est dans $W(T)$ si et seulement si $w(1) < \cdots < w(d_1)$, $w(d_1 + 1) < \cdots < w(d_1 + d_2), \dots, w(d_1 + \cdots + d_{t-1} + 1) < \cdots < w(d_1 + \cdots + d_t)$. Soit enfin \mathcal{H}_T la

sous-algèbre de $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ engendrée par les $(T_{s_i})_{s_i \in \mathbb{T}}$ et les $(x_j^{\pm 1})_{1 \leq j \leq d}$. Cette algèbre $\mathcal{H}_{\mathbb{T}}$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_{d_1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_{d_t})$, et $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ est un $\mathcal{H}_{\mathbb{T}}$ -module à droite libre dont $(T_w)_{w \in \mathbb{W}(\mathbb{T})}$ est une base.

Soient alors K_1, \dots, K_t des modules sur $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_{d_1}), \dots, \mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_{d_t})$ respectivement. L'espace vectoriel $K_1 \otimes \cdots \otimes K_t$ est un $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_{d_1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_{d_t})$ -module, et je noterai $K_1 \times \cdots \times K_t = \mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d) \otimes_{\mathcal{H}_{\mathbb{T}}} (K_1 \otimes \cdots \otimes K_t)$ le module induit à $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$.

On va prendre pour K_i des modules construits à partir de caractères d'une forme particulière, paramétrée par certains segments au sens de la définition suivante :

Définition 3.15 [Rg2, §§2 et 3]

- a) On appelle *segment* une suite de nombres complexes de la forme $\Delta = (q^{d-1}x, q^{d-2}x, \dots, qx, x)$, avec d entier et $x \in \mathbb{C}^\times$. L'entier d est sa longueur, et on lui associe les caractères $\chi(\Delta) = [q^{d-1}x, \dots, x]$ et $\tilde{\chi}(\Delta) = [x, \dots, q^{d-1}x]$ de \mathcal{A} .
- b) On appelle *ligne passant par x* la partie $\{q^a x \mid a \in \mathbb{Z}\}$ de \mathbb{C}^\times .
- c) On dit que deux segments Δ et Δ' sont liés s'ils sont sur la même ligne, et si, lorsqu'on écrit $\Delta = (q^{a+d-1}x, \dots, q^a x)$ et $\Delta' = (q^{a'+d'-1}x, \dots, q^{a'} x)$, on a : $a + d > a' + d' \geq a > a'$ ou $a' + d' > a + d \geq a' > a$.
- d) Deux segments $\Delta = (q^{a+d-1}x, \dots, q^a x)$ et $\Delta' = (q^{a'+d'-1}x, \dots, q^{a'} x)$ sur une même ligne étant donnés, on dit que Δ précède Δ' si : $a + d - 1 < a' + d' - 1$ ou si : $a + d - 1 = a' + d' - 1$ et $a \leq a'$.

Soit Δ un segment de longueur d . Le $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -module $I(\tilde{\chi}(\Delta))$ possède un unique vecteur de poids $\chi(\Delta)$, qui est l'élément $C_{w_0} \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Delta)}$ (voir [Rg1, §4]). Le sous-espace vectoriel engendré par cet élément est un sous- $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -module de $I(\tilde{\chi}(\Delta))$ [loc. cit.], que l'on note $\langle \Delta \rangle$. Un calcul simple montre que le coefficient de $T_{w_0} \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Delta)}$ dans le développement de $A_{w_0} \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Delta)}$ sur la base des $(T_w \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Delta)})_{w \in \mathfrak{S}_d}$ est $v^{-\ell(w_0)} \prod_{i < j} (\tilde{\chi}_i - \tilde{\chi}_j)$ (si $\tilde{\chi}(\Delta) = [\tilde{\chi}_1, \dots, \tilde{\chi}_d]$). Ainsi, $A_{w_0} \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Delta)}$ n'est pas nul. Comme $A_{w_0} \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Delta)}$ est de poids $w_0 \tilde{\chi}(\Delta) = \chi(\Delta)$, il est égal (à scalaire non nul près) à $C_{w_0} \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Delta)}$. Cela montre que $\langle \Delta \rangle$ est l'image de l'opérateur d'entrelacement $\hat{A}_{w_0}(\tilde{\chi}(\Delta)) : I(\chi(\Delta)) \rightarrow I(\tilde{\chi}(\Delta))$.

Soit $\Phi = (\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ une suite de segments dont les longueurs sont respectivement d_1, \dots, d_t , avec $d = d_1 + \cdots + d_t$. Soient \mathbb{T} , $w_{\mathbb{T}}$, etc. les objets associés à cette partition de d (comme au début de ce paragraphe). On dispose alors des $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_{d_i})$ -modules $\langle \Delta_i \rangle$, et l'on peut considérer le $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -module induit $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle$. Soient $\chi(\Phi)$ et $\tilde{\chi}(\Phi)$ les caractères obtenus en juxtaposant les caractères associés aux segments Δ_i , c'est-à-dire $\chi(\Phi) = [\chi(\Delta_1), \dots, \chi(\Delta_t)]$ et $\tilde{\chi}(\Phi) = [\tilde{\chi}(\Delta_1), \dots, \tilde{\chi}(\Delta_t)]$. Le module $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle$ peut se voir comme étant le sous-module de $I(\tilde{\chi}(\Phi))$ engendré par l'élément $C_{w_{\mathbb{T}}} \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Phi)}$, et aussi par l'élément $A_{w_{\mathbb{T}}} \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Phi)}$. (Pour vérifier cela, il suffit de remarquer que les antisymétriseurs C_{w_0} des différents $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_{d_i})$ donnent l'élément $C_{w_{\mathbb{T}}}$ dans l'identification $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_{d_1}) \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_{d_t}) \simeq \mathcal{H}_{\mathbb{T}}$.) On peut facilement montrer [loc. cit.] que les poids (généralisés) du

module $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle$ sont donnés (avec multiplicités) comme étant l'image de $\chi(\Phi) \in \mathcal{C}$ sous l'action de $W(T) \subseteq \mathfrak{S}_d$.

Théorème 3.16 [Rg1, §5][Rg2]: *Soit $(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ une suite de segments dont la somme des longueurs est d , et gardons les notations T et w_T précédentes.*

- a) *L'ensemble (avec multiplicités) des facteurs de composition du $\mathcal{H}_q(\widehat{GL}_d)$ -module $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend les Δ_i .*
- b) *Vu (par restriction) comme un $\mathcal{H}_q(GL_d)$ -module, $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle$ contient le module $J(w_T)$ avec la multiplicité 1. En notant $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$ l'unique $\mathcal{H}_q(\widehat{GL}_d)$ -facteur de composition du module $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle$ contenant $J(w_T)$ en tant que $\mathcal{H}_q(GL_d)$ -module, on obtient une bijection entre les classes d'isomorphisme de $\mathcal{H}_q(\widehat{GL}_d)$ -modules simples de dimensions finies et l'ensemble des suites (non ordonnées) de segments de longueur totale d .*
- c) *Si les Δ_i sont ordonnés de sorte que, pour tous $i \leq j$, Δ_i précède Δ_j (dès qu'ils sont sur une même ligne), alors $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle$ possède un unique quotient simple, $\langle \Delta_t \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$ possède un unique sous-module simple, et ces deux modules sont isomorphes à $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$.*

Preuve Seule la deuxième moitié du c) n'est pas prouvée dans les articles de Rogawski. Dans les notations de l'énoncé, il s'agit de montrer que $\langle \Delta_t \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$ possède un socle isomorphe à $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$. Le lecteur peut sans inconvénient omettre la preuve (technique) de cette assertion. Je vais utiliser les méthodes de l'article [Rg2], auquel je me réfère pour les définitions et les notations non explicitées.

- a) L'analyse conduite dans [Rg2, §4] permet de se ramener au cas où tous les segments sont sur une même ligne. On se place donc dans ce cas, et on appelle $\Phi = (\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ la suite de segments. Je conserve les notations $d = d_1 + \cdots + d_t$, T , w_T , etc. présentées avant le théorème. Soit w_1 l'élément de plus grande longueur dans $W(T)$, et soient $T_1 = w_1 T w_1^{-1} = \{s_i \in \mathfrak{S}_d \mid i \notin \{d_t, d_t + d_{t-1}, \dots, d_t + \cdots + d_2\}\}$, $W_{T_1} = w_1 W_T w_1^{-1}$, $w_{T_1} = w_1 w_T w_1^{-1}$, $W(T_1) = W(T) w_1^{-1}$. Le sous-groupe W_{T_1} est ainsi le sous-groupe parabolique associé à la partition $d_t + \cdots + d_1$ de d , et w_1^{-1} est l'élément le plus long de W_{T_1} . Si Φ_1 est la suite de segments $(\Delta_t, \dots, \Delta_1)$, on a donc $\chi(\Phi) = w_1^{-1} \chi(\Phi_1)$.

Posons $\chi_1 = \chi(\Phi_1)$; les poids du module $\langle \Delta_t \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$ sont les $w \chi_1$, où w décrit $W(T_1)$. Pour l'ordre \leq de la définition 3.1 (iii) de [Rg2], le plus petit poids de ce module est $\chi = w_1^{-1} \chi_1$, d'après l'hypothèse sur l'ordre dans lequel sont rangés les segments Δ_i . Admettons provisoirement que tout sous-module $\neq 0$ de $\langle \Delta_t \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$ possède χ comme plus petit poids. Si L est un sous-module simple de $\langle \Delta_t \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$, la proposition 6.1 de [Rg2] montre alors que L est un quotient de $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle$, donc [Rg2, theorem 3.3] que L est isomorphe à $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$. Ainsi, nous aurons montré que le socle de $\langle \Delta_t \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$ est un $\mathcal{H}_q(\widehat{GL}_d)$ -module isotypique de type $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$, ce qui entraînera l'assertion, puisque $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$ intervient avec la multiplicité (de Jordan–Hölder) 1 dans $\langle \Delta_t \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$.

- b) Il nous suffit donc de montrer que si ψ est le plus petit poids d'un sous-module $L \neq 0$ de $\langle \Delta_t \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$, on a $\psi = \chi$. On assimile $\langle \Delta_t \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$ au sous-module de $I(\tilde{\chi}(\Phi_1))$ engendré par $C_{w_{T_1}} \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Phi_1)}$. Choisissons $w \in W(T_1)$ de sorte que ψ s'écrive $w\chi_1$ et que L possède un vecteur de poids ψ de la forme :

$$(C_{ww_{T_1}} + \sum_{y \succ ww_{T_1}} \alpha_y C_y) \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Phi_1)} \quad (\text{où } \alpha_y \in \mathbb{C}).$$

Soit $[\chi(E_1), \dots, \chi(E_u)]$ la décomposition en segments de ψ . Nous savons que ψ est un poids min-réduit (voir [Rg2, définition 3.1 et proposition 6.2]).

Si i et $i+1$ sont deux positions contigües à l'intérieur d'un même segment E_j , le poids $s_i\psi$ est strictement inférieur au poids ψ , donc $s_i\psi$ n'est pas un poids de L . Le lemme 5.3 de [Rg2] montre qu'on ne peut pas avoir $s_iww_{T_1} > ww_{T_1}$, c'est-à-dire que l'on a $w_{T_1}w^{-1}(i) > w_{T_1}w^{-1}(i+1)$. Pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, notons $\rho(k)$ le nombre j tel que $d_t + \cdots + d_{j+1} + 1 \leq k \leq d_t + \cdots + d_j$. On peut traduire la condition précédente combinatoirement en disant que la fonction $\rho \circ w^{-1}$ est croissante sur chaque segment E_j .

Les données dont nous disposons à présent sont les suivantes : d est un entier, $d_t + \cdots + d_1$ est une partition de d , $W(T_1)$ est l'ensemble des permutations « shuffles » associé à cette partition, w_1^{-1} est l'élément de plus grande longueur dans $W(T_1)$, $w \in W(T_1)$, χ_1 est un caractère tel que $d_1 + \cdots + d_t$ soit la partition de d associée à la décomposition en segments du poids $\chi = w_1^{-1}\chi_1$, les poids χ et $\psi = w\chi_1$ sont min-réduits, et la fonction ρ construite à l'aide de la partition $d_t + \cdots + d_1$ de d vérifie que $\rho \circ w^{-1}$ est croissante sur chaque segment de la décomposition en segments de ψ . Il s'agit d'hypothèses purement combinatoires, et nous allons montrer, par récurrence sur d , qu'elles entraînent que $\psi = \chi$. Cela achèvera la démonstration.

- c) Plaçons-nous dans les hypothèses ci-dessus, et conservons la notation $[\chi(\Delta_1), \dots, \chi(\Delta_t)]$ pour la décomposition en segments de χ et la notation $[\chi(E_1), \dots, \chi(E_u)]$ pour la décomposition en segments de ψ . Soit E_j le segment auquel appartient la position $w(d)$. Comme $\rho \circ w^{-1}(w(d)) = 1$, toutes les positions « à gauche » de $w(d)$ dans E_j vont prendre la valeur 1 sous la fonction $\rho \circ w^{-1}$; ces positions sont donc images par w de positions appartenant au segment Δ_1 dans l'écriture $\chi_1 = [\chi(\Delta_t), \dots, \chi(\Delta_1)]$. L'extrémité droite de Δ_1 est donc envoyée par w sur le début de E_j . Comme w est une permutation « shuffle », le reste du segment Δ_1 est envoyé par w sur des segments plus à gauche que E_j dans la décomposition en segments $[\chi(E_1), \dots, \chi(E_u)]$ de ψ .

Le fait que ψ soit min-réduit entraîne d'une part, qu'en réalité, l'extrémité gauche de E_j est formée de toute l'image par w de Δ_1 , et d'autre part que $E_1 \leq \cdots \leq E_j$. Le fait que χ soit min-réduit entraîne qu'il est le plus petit poids de l'ensemble $W(T_1)\chi_1$. On a donc $\Delta_1 \leq E_1 \leq \cdots \leq E_j \leq \Delta_1$, ce qui montre que w envoie Δ_1 sur tout le segment E_j . On peut alors modifier w pour qu'il envoie les positions du segment Δ_1 sur les positions du segment E_1 , sans altérer les autres hypothèses de l'énoncé combinatoire. Pour un tel w , on peut utiliser facilement l'hypothèse de récurrence.

□

Corollaire 3.17 *Dans les hypothèses du théorème 3.16 c), il existe un unique (à scalaire près) homomorphisme non nul de $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -modules de $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle$ vers $\langle \Delta_t \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$, et son image est isomorphe au module $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$.*

3.3.3 Filtration de Rogawski

Pour construire nos R -matrices trigonométriques, nous aurons besoin de renseignements plus précis sur la manière de construire $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$. Il nous faut voir que l'homomorphisme défini dans le dernier corollaire peut se construire à l'aide des opérateurs d'entrelacement standard. Cette construction est intimement liée à la filtration de type Jantzen définie par Rogawski sur $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle$ [Rg1, §6]. En fait, il s'agit de montrer que l'application $\bar{\phi}$ de Rogawski [loc. cit.] peut se construire en utilisant les opérateurs $\hat{A}_w(\chi)$.

Dans ce paragraphe, une partition $d = d_1 + \cdots + d_t$ de d sera fixée, et T, w_T, \dots désigneront les mêmes objets qu'au paragraphe 3.3.2. Soit w_1 l'élément le plus long de $W(T)$: c'est la permutation qui, à i compris entre $d_1 + \cdots + d_{j-1} + 1$ et $d_1 + \cdots + d_j$, associe $d_t + \cdots + d_{j+1} + (i - d_{j-1})$. Soit $\Phi = (\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ une suite de segments ordonnés de sorte que Δ_i précède Δ_j pour tous $i \leq j$ tels que Δ_i et Δ_j soient sur une même ligne. J'identifie le module $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle$ au sous-module de $I(\tilde{\chi}(\Phi))$ engendré par l'élément $A_{w_T} \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Phi)}$. Posant $T_1 = w_1 T w_1^{-1}$, $w_{T_1} = w_1 w_T w_1^{-1}$, $W(T_1) = W(T) w_1^{-1}$, $\Phi_1 = (\Delta_t, \dots, \Delta_1)$, j'identifie de même le module $\langle \Delta_t \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$ au sous-module de $I(\tilde{\chi}(\Phi_1))$ engendré par l'élément $A_{w_{T_1}} \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Phi_1)}$. La permutation $w_T w_1^{-1} = w_1^{-1} w_{T_1} = w_0$ est de longueur $\ell(w_T) + \ell(w_1^{-1}) = \ell(w_1^{-1}) + \ell(w_{T_1})$, et donc $A_{w_T} A_{w_1^{-1}} = A_{w_1^{-1}} A_{w_{T_1}}$. Ceci montre que l'opérateur $\hat{A}_{w_1^{-1}}(\tilde{\chi}(\Phi_1)) : I(\tilde{\chi}(\Phi)) \rightarrow I(\tilde{\chi}(\Phi_1))$ envoie le sous-module $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle$ dans le sous-module $\langle \Delta_t \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$. Malheureusement, $\hat{A}_{w_1^{-1}}(\tilde{\chi}(\Phi_1))$ est souvent nul sur $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle$, et il est nécessaire de recourir à la technique utilisée par Rogawski.

Si $z \in \mathbb{C}^\times$, et si $\Delta = (q^{e-1}x, \dots, x)$ est un segment, on pose $\Delta(z) = (q^{e-1}xz, \dots, xz)$, de sorte que l'image inverse du $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -module $\langle \Delta \rangle$ par l'automorphisme τ_z soit isomorphe au module $\langle \Delta(z) \rangle$.

On identifie l'espace sous-jacent au module $I(\tilde{\chi}(\Phi)) = \mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d) \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}_{\tilde{\chi}(\Phi)}$ à l'espace $\mathcal{H}_q(\text{GL}_d)$, et on voit le sous-module $\langle \Delta_1 \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle$ de $I(\tilde{\chi}(\Phi))$ comme le sous-espace vectoriel engendré par les $(T_w C_{w_T})_{w \in W(T)}$ dans $\mathcal{H}_q(\text{GL}_d)$. On identifie de la même manière l'espace sous-jacent à $I(\tilde{\chi}(\Phi_1))$ à $\mathcal{H}_q(\text{GL}_d)$ et l'espace sous-jacent à $\langle \Delta_t \rangle \times \cdots \times \langle \Delta_1 \rangle$ au sous-espace vectoriel engendré par les $(T_w C_{w_{T_1}})_{w \in W(T_1)}$. On se ramène ainsi à des espaces fixes.

Soit R l'anneau de valuation discrète $\mathbb{C}[z]_{(z-1)}$, localisé de l'anneau $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ en l'idéal maximal $(z - 1)$. On peut faire les constructions des modules standard $I(\chi)$ pour tout R -point χ de \mathcal{A} , et l'on pourra identifier l'espace sous-jacent au module obtenu à $\mathcal{H}_q(\text{GL}_d) \otimes_{\mathbb{C}} R$.

Soient (a_1, \dots, a_t) des entiers deux à deux distincts. Pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$, on peut considérer les suites de segments $\Phi(z) = (\Delta_1(z^{a_1}), \dots, \Delta_t(z^{a_t}))$ et $\Phi_1(z) = (\Delta_t(z^{a_t}), \dots, \Delta_1(z^{a_1}))$. Plutôt que de fixer z , on peut le prendre générique, en considérant $\Phi(z)$ et $\Phi_1(z)$ comme des suites de segments à valeurs dans \mathbb{R} . On définit alors $\langle \Delta_1(z^{a_1}) \rangle \times \dots \times \langle \Delta_t(z^{a_t}) \rangle$ et $\langle \Delta_t(z^{a_t}) \rangle \times \dots \times \langle \Delta_1(z^{a_1}) \rangle$ comme étant les sous- $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{R}$ -modules de $I(\tilde{\chi}(\Phi(z)))$ et $I(\tilde{\chi}(\Phi_1(z)))$ engendrés par $A_{w_T} \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Phi(z))}$ et $A_{w_{T_1}} \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Phi_1(z))}$ respectivement. En les identifiant aux sous- \mathbb{R} -modules libres de bases les $(T_w C_{w_T})_{w \in W(T)}$ et $(T_w C_{w_{T_1}})_{w \in W(T_1)}$ respectivement, on peut examiner la restriction à ces sous-espaces de l'opérateur $\hat{A}_{w_1^{-1}}(\tilde{\chi}(\Phi_1(z)))$ en termes de matrice à coefficients dans \mathbb{R} . Pour z générique, les segments $\Delta_i(z^{a_i})$ sont sur des lignes différentes, et donc l'opérateur $\hat{A}_{w_1^{-1}}(\tilde{\chi}(\Phi_1(z)))$ est inversible, grâce à la remarque à la fin du paragraphe 3.3.1. La matrice définie par l'opérateur $\hat{A}_{w_1^{-1}}(\tilde{\chi}(\Phi_1(z)))$ n'est donc pas nulle. En divisant par la plus grande puissance de $(z-1)$ possible, on obtient un homomorphisme de $\langle \Delta_1(z^{a_1}) \rangle \times \dots \times \langle \Delta_t(z^{a_t}) \rangle$ dans $\langle \Delta_t(z^{a_t}) \rangle \times \dots \times \langle \Delta_1(z^{a_1}) \rangle$ dont la réduction $\bar{\phi}$ modulo $(z-1)$ n'est pas nulle. Cette construction, jointe au fait que $\langle \Delta_1(z^{a_1}) \rangle \times \dots \times \langle \Delta_t(z^{a_t}) \rangle$ soit l'image de l'opérateur d'entrelacement standard $\hat{A}_{w_T}(\tilde{\chi}(\Phi(z)))$, montre le théorème suivant :

Théorème 3.18 *Soient $(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ une suite de segments de longueur totale d , ordonnés comme dans le théorème 3.16 c), et soient a_1, \dots, a_t des entiers deux à deux distincts. En étendant les scalaires à $\mathbb{R} = \mathbb{C}[z]_{(z-1)}$, on peut considérer la suite de segments $\Phi_1(z) = (\Delta_t(z^{a_t}), \dots, \Delta_1(z^{a_1}))$. Alors il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$ soit isomorphe à l'image de la réduction modulo $(z-1)$ de l'opérateur standard $\frac{1}{(z-1)^k} \hat{A}_{w_0}(\tilde{\chi}(\Phi_1(z)))$: $I(w_0 \tilde{\chi}(\Phi_1(z))) \rightarrow I(\tilde{\chi}(\Phi_1(z)))$. (L'entier k est déterminé par les conditions que $\frac{1}{(z-1)^k} \hat{A}_{w_0}(\tilde{\chi}(\Phi_1(z)))$ soit régulier en $z=1$ et que sa réduction modulo $(z-1)$ soit non nulle.)*

Ce théorème donne une méthode effective pour construire tous les $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -modules simples de dimensions finies.

Je compare maintenant brièvement cette construction à celle de Rogawski [Rg1, §6]. Rogawski construit lui aussi une application $\phi : \langle \Delta_1(z^{a_1}) \rangle \times \dots \times \langle \Delta_t(z^{a_t}) \rangle \rightarrow \langle \Delta_t(z^{a_t}) \rangle \times \dots \times \langle \Delta_1(z^{a_1}) \rangle$ par un procédé analogue. Cependant, il n'utilise pas les opérateurs \hat{A}_w , et est obligé de construire à la main les opérateurs qui échangent deux segments ([Rg1, proposition 6.3]). Cela est plus compliqué, notamment pour vérifier que ces opérateurs d'échange élémentaire respectent bien les sous-modules $\langle \Delta_1(z^{a_1}) \rangle \times \dots \times \langle \Delta_t(z^{a_t}) \rangle$ des modules standard. De la même manière, Rogawski est obligé de choisir les entiers a_i et a_j égaux quand les segments Δ_i et Δ_j le sont. (Pour la construction donnée ici, il est au contraire nécessaire de les choisir différents.) Enfin, Rogawski construit cette application ϕ dans le but d'étudier les facteurs de composition du $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -module $\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_t \rangle$, autres que $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$, en construisant une filtration de type Jantzen. La formule de somme de Rogawski [Rg1, theorem 6.5] (couplée à la remarque au bas de la p. 254 de [Rg2] concernant l'indépendance linéaire des caractères formels des modules simples) montre que

la réduction de ϕ modulo $(z - 1)$ ne peut pas être nulle. A scalaire près, il s'agit donc de l'application $\bar{\phi}$ construite ci-dessus.

Proposition 3.19 *Soient $(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ et $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{t'})$ deux suites de segments de longueurs totales respectives d et d' , telles que :*

- aucun segment Δ_i n'est lié ou n'a de point commun avec un segment $\Delta'_{i'}$;
- sur chaque ligne dans \mathbb{C}^\times , tous les segments de la famille $(\Delta'_{i'})$ précèdent tous les segments de la famille (Δ_i) .

Alors les $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_{d+d'})$ -modules $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle \times \langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{t'} \rangle$ et $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{t'} \rangle \times \langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$ sont isomorphes au module $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t, \Delta'_1, \dots, \Delta'_{t'} \rangle$.

Preuve Appelons w_0, w'_0 et w_3 les permutations de longueurs maximales de $\mathfrak{S}_d, \mathfrak{S}_{d'}$ et $\mathfrak{S}_{d+d'}$ respectivement, et $w_2 \in \mathfrak{S}_{d+d'}$ la permutation $\begin{pmatrix} 1 & \dots & d & d+1 & \dots & d+d' \\ d & \dots & 1 & d+d' & \dots & d+1 \end{pmatrix}$. On peut supposer que les suites de segments sont ordonnées comme dans l'énoncé du théorème 3.16 c). On étend les scalaires à l'anneau $\mathbb{R} = \mathbb{C}[z]_{(z-1)}$, on choisit des entiers $a_1, \dots, a_t, a'_1, \dots, a'_{t'}$ deux à deux distincts, et on pose $\Phi_1(z) = (\Delta_t(z^{a_t}), \dots, \Delta_1(z^{a_1}))$ et $\Phi'_1(z) = (\Delta'_{t'}(z^{a'_{t'}}), \dots, \Delta'_1(z^{a'_1}))$. Le théorème 3.18 donne alors deux entiers k et k' tels que $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$ et $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{t'} \rangle$ soient les images de la réduction modulo $(z - 1)$ des opérateurs $\frac{1}{(z-1)^k} \hat{A}_{w_0}(\tilde{\chi}(\Phi_1(z)))$ et $\frac{1}{(z-1)^{k'}} \hat{A}_{w'_0}(\tilde{\chi}(\Phi'_1(z)))$. Le module $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle \times \langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{t'} \rangle$ est alors réalisé comme l'image dans $I(\tilde{\chi}(\Phi_1(1)), \tilde{\chi}(\Phi'_1(1)))$ de la réduction modulo $(z - 1)$ de l'opérateur $\frac{1}{(z-1)^{k+k'}} \hat{A}_{w_2}(\tilde{\chi}(\Phi_1(z)), \tilde{\chi}(\Phi'_1(z)))$. La réduction modulo $(z - 1)$ de l'opérateur $\hat{A}_{w_3 w_2^{-1}}(w_0 \tilde{\chi}(\Phi_1(1)), w'_0 \tilde{\chi}(\Phi'_1(1)))$ est inversible, de sorte que le module $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle \times \langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{t'} \rangle$ peut être vu comme l'image de la réduction modulo $(z - 1)$ de l'opérateur composé des deux précédents, à savoir $\frac{1}{(z-1)^{k+k'}} \hat{A}_{w_3}(\tilde{\chi}(\Phi_1(z)), \tilde{\chi}(\Phi'_1(z)))$. En appliquant à nouveau le théorème 3.18, on voit que cette image est $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t, \Delta'_1, \dots, \Delta'_{t'} \rangle$. Cela entraîne la première assertion. La seconde s'en déduit, en remarquant que l'opérateur $\hat{A}_{w_3 w_2^{-1}}(\tilde{\chi}(\Phi_1(1)), \tilde{\chi}(\Phi'_1(1)))$ est un isomorphisme de $I(\tilde{\chi}(\Phi'_1(1)), \tilde{\chi}(\Phi_1(1)))$ dans $I(\tilde{\chi}(\Phi_1(1)), \tilde{\chi}(\Phi'_1(1)))$ qui envoie le sous-module $\langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{t'} \rangle \times \langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$ sur le sous-module $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle \times \langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{t'} \rangle$. \square

Corollaire 3.20 *Soient $(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ et $(\Delta'_1, \dots, \Delta'_{t'})$ deux suites de segments de longueurs totales respectives d et d' . Alors l'ensemble des $x \in \mathbb{C}^\times$ tels que le $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_{d+d'})$ -module $(\tau_x^* \langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle) \times \langle \Delta'_1, \dots, \Delta'_{t'} \rangle$ ne soit pas simple est fini.*

3.3.4 L'anneau $\hat{\mathcal{R}}$ de Zelevinsky

Pour étudier le comportement des représentations de l'algèbre $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ sous l'induction parabolique, Zelevinsky [Ze] a construit un anneau \mathbb{N} -gradué $\hat{\mathcal{R}}$. En degré d , $\hat{\mathcal{R}}_d$ est le groupe

de Grothendieck de la catégorie des $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -modules de dimensions finies. Le produit entre un élément K de $\hat{\mathcal{R}}_d$ et un élément K' de $\hat{\mathcal{R}}_{d'}$ est donné par l'induit parabolique $K \times K'$.

Proposition 3.21 *$\hat{\mathcal{R}}$ est un anneau (commutatif) de polynômes sur l'ensemble des segments.*

Preuve Ce résultat figure explicitement dans l'article de Zelevinsky [Ze, corollary 7.5] pour le cas des représentations du groupe linéaire sur un corps local. Dans le cas des algèbres de Hecke, on peut utiliser la même analyse. Les propositions 5.2 et 5.4 de [Rg2] montrent que les images dans $\hat{\mathcal{R}}$ des représentations définies par des segments : $K = \langle \Delta \rangle$ et $K' = \langle \Delta' \rangle$ commutent. D'un autre côté, la connaissance des facteurs de composition d'un module K donné par un produit de segments (voir [Rg2, theorem 3.5]) permet de montrer (par récurrence sur t , et à t fixé, sur le t -uplet donné par les longueurs des segments) que les images dans $\hat{\mathcal{R}}$ de tels modules forment une \mathbb{Z} -base de $\hat{\mathcal{R}}$. \square

3.4 Le foncteur de Schur–Weyl pour $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$

Le dernier outil que je vais utiliser dans cette étude des représentations de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ est un foncteur de type Schur–Weyl. Nous allons voir qu'il donne un lien très fort entre la théorie des représentations de l'algèbre de Hecke affine et celle de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$. En particulier, ce foncteur envoie un module irréductible sur un module irréductible (ou sur zéro), et il est possible grâce à lui de construire tous les $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules simples de dimensions finies et de type 1. Cette propriété, jointe aux constructions des paragraphes 3.3.2 et 3.3.3, vont me permettre de répondre à une question de Cherednik [Cd] : la procédure de fusion permet de construire tous les $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules simples de dimensions finies (et de type 1).

Baucoup des résultats exposés dans les paragraphes 3.4.1 à 3.4.4 sont tirés de l'article [CP5].

3.4.1 La représentation polynomiale tensorielle et le foncteur de Schur–Weyl

Le foncteur de Schur–Weyl, dans la version présentée ici, a été introduit par Chari et Pressley [CP5], et (avec des preuves malheureusement non publiées) par Ginzburg, Reshetikhin et Vasserot [GRV].

La représentation naturelle V de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$, l'algèbre $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$, l'algèbre $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ et sa sous-algèbre \mathcal{A} ont été introduites aux paragraphes 3.1.1, 3.2.1 et 3.3.1 respectivement. Une fonction d'orientation $o : \{1, \dots, n-1\} \rightarrow \{\pm 1\}$ sur le graphe de Dynkin de \mathfrak{sl}_n sera fixée, comme au paragraphe 3.2.2.

La représentation V est un \mathbb{C} -espace vectoriel de base (e_1, \dots, e_n) . On considère le \mathbb{C} -espace vectoriel $V[t, t^{-1}] = V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, muni de la base $(e_i \otimes t^p)_{1 \leq i \leq n, p \in \mathbb{Z}}$. On munit

$V[t, t^{-1}]$ d'une structure de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module en posant :

$$\begin{aligned}
K_{\alpha_i} \cdot (e_j \otimes t^p) &= v^{(\alpha_i | \varepsilon_j)} (e_j \otimes t^p) && (\text{pour } 1 \leq i \leq n-1), \\
E_i \cdot (e_j \otimes t^p) &= \delta_{i, j-1} (e_{j-1} \otimes t^p) && (\text{pour } 1 \leq i \leq n-1), \\
F_i \cdot (e_j \otimes t^p) &= \delta_{i, j} (e_{j+1} \otimes t^p) && (\text{pour } 1 \leq i \leq n-1), \\
K_{\alpha_0} \cdot (e_j \otimes t^p) &= v^{(\varepsilon_n - \varepsilon_1 | \varepsilon_j)} (e_j \otimes t^p), \\
E_0 \cdot (e_j \otimes t^p) &= (-o(1)v^n) \delta_{1j} (e_n \otimes t^{p+1}), \\
F_0 \cdot (e_j \otimes t^p) &= (-o(1)v^{-n}) \delta_{nj} (e_1 \otimes t^{p-1}).
\end{aligned}$$

Notamment, l'élément central $C = K_{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}}$ agit par l'identité sur $V[t, t^{-1}]$, et l'action de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ est $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ -linéaire. Le fait que ces formules définissent bien une structure de $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -module est conséquence de calculs analogues à ceux de [CP5, §4.2]. (Nous verrons au §3.5.3 une explication plus conceptuelle de ce fait, empruntée à [GRV].) Par produit tensoriel, on construit donc le $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module $(V[t, t^{-1}])^{\otimes d}$, que j'appellerai (suivant [GRV, §4]) représentation polynomiale tensorielle, et que je noterai $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$. L'élément de base $(e_{j_1} \otimes t^{p_1}) \otimes \dots \otimes (e_{j_d} \otimes t^{p_d})$ sera noté $e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes t_1^{p_1} \dots t_d^{p_d}$.

L'espace $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ est un \mathcal{A} -module à droite libre pour l'action :

$$(e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes t_1^{p_1} \dots t_d^{p_d}) \cdot x_i = e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes t_1^{p_1} \dots t_i^{p_i-1} \dots t_d^{p_d}.$$

D'un autre côté, on dispose de l'action de $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ sur $V^{\otimes d}$, décrite au §3.1.3. Soient $1 \leq i \leq d-1$ et $(p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{Z}^d$, et écrivons dans $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$: $x_1^{-p_1} \dots x_d^{-p_d} \cdot T_{s_i} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} T_w \cdot a_w$, avec $a_w \in \mathcal{A}$. Une telle écriture est unique car $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ est un \mathcal{A} -module libre à droite de base $(T_w)_{w \in \mathfrak{S}_d}$ (théorème 3.14). Ceci permet de définir :

$$(e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes t_1^{p_1} \dots t_d^{p_d}) \cdot T_{s_i} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} ((e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d}) \cdot T_w) \otimes 1 \cdot a_w,$$

et on munit ainsi l'espace $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ d'une structure de $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -module à droite. En tant que $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -module, il s'agit donc du module induit à partir du $\mathcal{H}_q(\text{GL}_d)$ -module $V^{\otimes d}$.

Des calculs analogues à ceux menés au paragraphe 4.2 de [CP5] montrent que $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ est un $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ - $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -bimodule. Nous verrons au paragraphe 3.5.3 une preuve plus conceptuelle de ce fait.

Remarque. Il est possible d'étendre la structure de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module sur $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ en une structure de $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -module, en posant $D \cdot (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes t_1^{p_1} \dots t_d^{p_d}) = v^{p_1 + \dots + p_d} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes t_1^{p_1} \dots t_d^{p_d}$. Cette action ne commute pas à $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ tout entier.

Nous pouvons alors définir le foncteur de Schur–Weyl et énoncer ses premières propriétés.

Définition 3.22 *Le foncteur $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}] \otimes_{\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)} -$ de la catégorie des $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -modules vers la catégorie des $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules est appelé foncteur de Schur–Weyl et est noté \mathcal{F}_d^n .*

Chari et Pressley n'utilisent pas explicitement la représentation polynomiale tensorielle dans leur définition du foncteur de Schur–Weyl. L'identité entre leur construction et la définition 3.22 résulte des isomorphismes donnés dans la preuve du point c) de la proposition suivante :

Proposition 3.23 a) Si K est un $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -module de dimension finie, alors $\mathcal{F}_d^n(K)$ est un $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module de dimension finie et de type 1.

b) Si $d_1 + \dots + d_t$ est une partition de l'entier d , et si K_1, \dots, K_t sont des modules de dimensions finies sur $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_{d_1}), \dots, \mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_{d_t})$ respectivement, alors $\mathcal{F}_d^n(K_1 \times \dots \times K_t)$ est un $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module isomorphe au module $\mathcal{F}_{d_1}^n(K_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{d_t}^n(K_t)$.

c) Soit K un $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -module. Si l'on voit (par restriction) K comme un $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -module, alors les espaces $\mathcal{F}_d^n(K)$ et $\mathcal{S}_d^n(K)$ sont naturellement isomorphes en tant que $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -modules.

d) \mathcal{F}_d^n est un foncteur exact.

Preuve a) On remarque que $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ est un \mathcal{A} -module libre de rang fini. Si K est un $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -module de dimension finie, alors $\mathcal{F}_d^n(K)$ est un quotient du $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}] \otimes_{\mathcal{A}} K$, lequel est de type 1 et de dimension finie.

b) Cet énoncé est prouvé dans [CP5, proposition 4.7], mais j'en rappelle la preuve pour la commodité du lecteur. Avec les notations de l'énoncé, on a :

$$\mathcal{F}_d^n(K_1 \times \dots \times K_t) = (V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]) \otimes_{\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)} (\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d) \otimes_{\mathcal{H}_T} (K_1 \otimes \dots \otimes K_t))$$

où $\mathcal{H}_T \simeq \mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_{d_1}) \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_{d_t})$ est la sous-algèbre définie au §3.3.2. Modulo des isomorphismes canoniques, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d^n(K_1 \times \dots \times K_t) &\simeq (V^{\otimes d_1}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_{d_1}^{\pm 1}] \otimes \dots \otimes V^{\otimes d_t}[t_{d_1+\dots+d_{t-1}+1}^{\pm 1}, \dots, t_{d_1+\dots+d_t}^{\pm 1}]) \otimes_{\mathcal{H}_T} (K_1 \otimes \dots \otimes K_t) \\ &\simeq (V^{\otimes d_1}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_{d_1}^{\pm 1}] \otimes_{\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_{d_1})} K_1) \otimes \dots \otimes \\ &\quad \otimes (V^{\otimes d_t}[t_{d_1+\dots+d_{t-1}+1}^{\pm 1}, \dots, t_{d_1+\dots+d_t}^{\pm 1}] \otimes_{\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_{d_t})} K_t) \\ &\simeq \mathcal{F}_{d_1}^n(K_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_{d_t}^n(K_t). \end{aligned}$$

c) Pour prouver c), il suffit de constater que les applications $(\mathcal{F}_d^n(K) \rightarrow \mathcal{S}_d^n(K))$ et $(\mathcal{S}_d^n(K) \rightarrow \mathcal{F}_d^n(K))$ définies par :

$$\left(\begin{array}{l} V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}] \otimes_{\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)} K \rightarrow V^{\otimes d} \otimes_{\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)} K \\ (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes t_1^{p_1} \dots t_d^{p_d}) \otimes m \mapsto (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d}) \otimes (x_1^{-p_1} \dots x_d^{-p_d} \cdot m) \end{array} \right)$$

et :

$$\left(\begin{array}{l} V^{\otimes d} \otimes_{\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)} K \rightarrow V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}] \otimes_{\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)} K \\ (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d}) \otimes m \mapsto (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes 1) \otimes m \end{array} \right)$$

sont des isomorphismes réciproques bien définis de $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -modules. Le seul point délicat est de vérifier que la première application est bien définie. Cela est conséquence de la définition de la structure de $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -module sur $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$.

d) L'assertion est conséquence du c) et de la propriété analogue pour le foncteur \mathcal{S}_d^n .
□

3.4.2 Représentations d'évaluation

Grâce à des homomorphismes d'algèbres ($\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d) \rightarrow \mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$) et ($U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n) \rightarrow U_q(\mathfrak{gl}_n)$), il est possible de construire par image inverse certains modules de dimensions finies sur $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ et $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$. Je généralise légèrement le théorème 5.5 de [CP5].

Définition 3.24 [CP5, §§5.1 et 5.4]: Soit $x \in \mathbb{C}^\times$. On définit deux homomorphismes dits « d'évaluation » par :

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_x : \left(U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n) \rightarrow U_q(\mathfrak{gl}_n), \right. \\ K_{\alpha_i} \mapsto K_{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}} \quad (\text{pour } 1 \leq i \leq n-1), \\ E_i \mapsto E_i \quad (\text{pour } 1 \leq i \leq n-1), \\ F_i \mapsto F_i \quad (\text{pour } 1 \leq i \leq n-1), \\ K_{\alpha_0} \mapsto K_{\varepsilon_n - \varepsilon_1}, \\ E_0 \mapsto (-o(1) xv) K_{\varepsilon_1 + \varepsilon_n} \{F_{n-1}, \dots, \{F_2, F_1\}\} \quad (\text{où } \{x, y\} = vxy - yx), \\ F_0 \mapsto ((-1)^{n-1} o(1) x^{-1} v^{1-n}) \{E_{n-1}, \dots, \{E_2, E_1\}\} K_{-\varepsilon_1 - \varepsilon_n} \Big). \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_x : \left(\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d) \rightarrow \mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d), \right. \\ T_{s_i} \mapsto T_{s_i}, \\ x_j \mapsto q^{d-j} x T_{s_j}^{-1} T_{s_{j+1}}^{-1} \dots T_{s_{d-1}}^{-2} \dots T_{s_{j+1}}^{-1} T_{s_j}^{-1} \quad (\text{pour } 1 \leq j \leq d-1), \\ x_d \mapsto x \Big). \end{aligned}$$

Preuve Il me faut montrer que les conditions imposées à $\mathrm{ev}_x : (U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n) \rightarrow U_q(\mathfrak{gl}_n))$ définissent bien un homomorphisme d'algèbres. Ce fait remonte à Jimbo [Ji1], et nous en verrons une preuve au §3.5.2. On peut également le montrer de la manière suivante, en introduisant les automorphismes de Lusztig.

Soient (s_1, \dots, s_{n-1}) les générateurs usuels du groupe de Weyl \mathfrak{S}_n de \mathfrak{gl}_n : s_i est la réflexion simple le long de la racine α_i , et agit ainsi sur le groupe des poids $P = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_j$.

Pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, soit T_i l'automorphisme de l'algèbre $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ défini par :

$$\begin{aligned} T_i : E_i &\mapsto -F_i K_{\alpha_i}, & E_{i\pm 1} &\mapsto -v^{-1}\{E_i, E_{i\pm 1}\}, \\ F_i &\mapsto -K_{-\alpha_i} E_i, & F_{i\pm 1} &\mapsto \{F_i, F_{i\pm 1}\}, \\ E_j &\mapsto E_j, & F_j &\mapsto F_j, & (\text{si } j \notin \{i-1, i, i+1\}), \\ K_\lambda &\mapsto K_{s_i(\lambda)}. \end{aligned}$$

Ces automorphismes coïncident avec l'extension à $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ des automorphismes définis dans [Be, §1]. Ils vérifient les relations de tresses de \mathfrak{S}_n :

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}, \quad T_i T_j = T_j T_i \quad \text{si } |i-j| \geq 2.$$

Si $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ est une décomposition réduite d'un $w \in \mathfrak{S}_n$, la composée $T_{i_1} \cdots T_{i_k}$ ne dépend donc que de w et est notée T_w . Lusztig (cf. [Be, lemma 3.2]) montre la propriété importante : si α_i, α_j sont des racines simples, si $w \in \mathfrak{S}_n$ est tel que $w(\alpha_i) = \alpha_j$, alors $T_w(E_i) = E_j$ et $T_w(F_i) = F_j$. On a ainsi, par exemple, (pour $2 \leq i \leq n-1$) :

$$T_{i-1} T_{i-2} \cdots T_2 T_i T_{i-1} \cdots T_3 (F_2) = F_i.$$

Pour montrer que ev_x est un morphisme d'algèbres bien défini, il suffit d'établir les relations suivantes dans $U_q(\mathfrak{gl}_n)$:

$$\begin{aligned} [K_{\varepsilon_1 + \varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2 (F_1), E_j] &= 0 \quad \text{si } j \notin \{1, n-1\}, \\ K_{\varepsilon_1 + \varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2 (F_1) E_j^2 - (v + v^{-1}) E_j K_{\varepsilon_1 + \varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2 (F_1) E_j \\ &\quad + E_j^2 K_{\varepsilon_1 + \varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2 (F_1) = 0 \quad \text{si } j \in \{1, n-1\}, \\ (K_{\varepsilon_1 + \varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2 (F_1))^2 E_j - (v + v^{-1}) K_{\varepsilon_1 + \varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2 (F_1) E_j (K_{\varepsilon_1 + \varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2 (F_1)) \\ &\quad + E_j (K_{\varepsilon_1 + \varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2 (F_1))^2 = 0 \quad \text{si } j \in \{1, n-1\}, \\ [K_{\varepsilon_1 + \varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2 (F_1), F_j] &= 0 \quad \text{si } 1 \leq j \leq n-1, \end{aligned}$$

et les relations analogues obtenues en échangeant les E_j et les F_j . (Ceci est valable pour $n \geq 3$; pour $n = 2$, les relations à vérifier sont légèrement différentes.)

Montrons la seconde relation pour $j = n-1$ (c'est la vérification la plus compliquée à

faire) :

$$\begin{aligned}
\text{l.h.s.} &= K_{\varepsilon_1+\varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2(F_1) E_{n-1}^2 - (v + v^{-1}) E_{n-1} K_{\varepsilon_1+\varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2(F_1) E_{n-1} \\
&\quad + E_{n-1}^2 K_{\varepsilon_1+\varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2(F_1) \\
&= K_{\varepsilon_1+\varepsilon_n} (T_{n-1} \cdots T_2(F_1) E_{n-1}^2 - (v^2 + 1) E_{n-1} T_{n-1} \cdots T_2(F_1) E_{n-1} \\
&\quad + v^2 E_{n-1}^2 T_{n-1} \cdots T_2(F_1)) \\
&= K_{\varepsilon_1+\varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2 [F_1 T_2^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1} (E_{n-1}^2) \\
&\quad - (v^2 + 1) T_2^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1} (E_{n-1}) F_1 T_2^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1} (E_{n-1}) \\
&\quad + v^2 T_2^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1} (E_{n-1}^2) F_1] \\
&= K_{\varepsilon_1+\varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2 [F_1 (T_2^{-1} \cdots T_{n-2}^{-1} (-K_{-\alpha_{n-1}} F_{n-1}))^2 \\
&\quad - (v^2 + 1) (T_2^{-1} \cdots T_{n-2}^{-1} (-K_{-\alpha_{n-1}} F_{n-1})) F_1 (T_2^{-1} \cdots T_{n-2}^{-1} (-K_{-\alpha_{n-1}} F_{n-1})) \\
&\quad + v^2 (T_2^{-1} \cdots T_{n-2}^{-1} (-K_{-\alpha_{n-1}} F_{n-1}))^2 F_1] \\
&= K_{\varepsilon_1+\varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2 [F_1 (K_{\varepsilon_n-\varepsilon_2} T_{n-1} \cdots T_3(F_2))^2 \\
&\quad - (v^2 + 1) (K_{\varepsilon_n-\varepsilon_2} T_{n-1} \cdots T_3(F_2)) F_1 (K_{\varepsilon_n-\varepsilon_2} T_{n-1} \cdots T_3(F_2)) \\
&\quad + v^2 (K_{\varepsilon_n-\varepsilon_2} T_{n-1} \cdots T_3(F_2))^2 F_1] \\
&= K_{\varepsilon_1+2\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2 [F_1 (T_{n-1} \cdots T_3(F_2))^2 \\
&\quad - (v + v^{-1}) (T_{n-1} \cdots T_3(F_2)) F_1 (T_{n-1} \cdots T_3(F_2)) \\
&\quad + (T_{n-1} \cdots T_3(F_2))^2 F_1] \\
&= K_{\varepsilon_1+2\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n} T_{n-1} \cdots T_2 [T_{n-1} \cdots T_3(F_1 F_2^2 - (v + v^{-1}) F_2 F_1 F_2 + F_2^2 F_1)] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Les autres cas des relations se traitent de manière semblable. (On peut diviser par deux le nombre de vérifications à faire en utilisant l'automorphisme Ω défini dans [Be, §1].) \square

Les foncteurs \mathcal{F}_d^n et \mathcal{S}_d^n (voir 3.1.3) échangent ces évaluations :

Proposition 3.25 *Si $x \in \mathbb{C}^\times$ et si K est un $\mathcal{H}_q(\text{GL}_d)$ -module de dimension finie, alors $\mathcal{F}_d^n(\text{ev}_x^* K) \simeq \text{ev}_{x^{-1}}^*(\mathcal{S}_d^n K)$.*

Preuve Il suffit de le voir pour le module régulier $K = \mathcal{H}_q(\text{GL}_d)$, car les foncteurs respectent les décompositions en sommes directes et $\mathcal{H}_q(\text{GL}_d)$ est semi-simple. Il est facile de voir que l'application linéaire $(\text{ev}_{x^{-1}}^*(\mathcal{S}_d^n K) = \text{ev}_{x^{-1}}^*(V^{\otimes d}) \rightarrow \mathcal{F}_d^n(\text{ev}_x^* K), e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \mapsto e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \otimes 1)$ est bijective. Il reste à vérifier que cette bijection respecte l'action de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$, c'est-à-dire de E_0 et F_0 . Dans le cas de E_0 , il s'agit de montrer que :

$$\begin{aligned}
&x^{-1} v^{1-n} (K_{\varepsilon_1+\varepsilon_n} \{F_{n-1}, \dots, \{F_2, F_1\}\}) \cdot (e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d}) = \\
&\sum_{\substack{1 \leq p \leq d \\ j_p=1}} v^{(\varepsilon_n - \varepsilon_1 |\varepsilon_{j_1} + \dots + \varepsilon_{j_{p-1}})} e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_{p-1}} \otimes e_n \otimes e_{j_{p+1}} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \cdot q^{p-d} x^{-1} T_{s_p} \cdots T_{s_{d-1}}^2 \cdots T_{s_p}
\end{aligned}$$

dans le $U_q(\mathfrak{gl}_n)\text{-}\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -bimodule $V^{\otimes d}$.

Nous allons montrer par récurrence sur d la formule plus générale :

$$(\forall d, i \geq 1) \quad v^{1-i}(K_{\varepsilon_1}\{F_i, \dots, \{F_2, F_1\}\}) \cdot (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d}) = \sum_{\substack{1 \leq p \leq d \\ j_p=1}} v^{-(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1}+\dots+\varepsilon_{j_{p-1}})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e_{j_p}} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes e_{i+1} \cdot v^{p-d} T_{s_{d-1}} \dots T_{s_p}.$$

La clé du calcul est la règle sympathique à laquelle obéissent les coproduits des vecteurs de racines de la base P. B. W. construite par Rosso [Ro1] :

$$\Delta(\{F_i, \dots, \{F_2, F_1\}\}) = \{F_i, \dots, \{F_2, F_1\}\} \otimes K_{-\alpha_1-\dots-\alpha_i} + 1 \otimes \{F_i, \dots, \{F_2, F_1\}\} + \sum_{j=1}^{i-1} (q-1) \{F_j, \dots, \{F_2, F_1\}\} \otimes K_{-\alpha_1-\dots-\alpha_j} \{F_i, \dots, \{F_{j+2}, F_{j+1}\}\}.$$

Pour $d = 1$, les deux membres de la formule de récurrence valent 0 si $j_1 \neq 1$ et e_{i+1} si $j_1 = 1$. Admettons cette formule pour $d-1$, et cassons $V^{\otimes d}$ en deux morceaux $V^{\otimes d-1} \otimes V$. On distingue trois cas selon que $j_d = 1$, $j_d \geq i+1$, ou $2 \leq j_d \leq i$.

– cas $j_d = 1$:

$$\begin{aligned} \text{l.h.s.} &= v^{1-i}(K_{\varepsilon_1}\{F_i, \dots, \{F_2, F_1\}\}) \cdot (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_{d-1}}) \otimes K_{\varepsilon_{i+1}} \cdot e_{j_d} + \\ &\quad + K_{\varepsilon_1} \cdot (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_{d-1}}) \otimes (v^{1-i} K_{\varepsilon_1} \{F_i, \dots, \{F_2, F_1\}\} \cdot e_{j_d}) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq p \leq d-1 \\ j_p=1}} v^{-(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1}+\dots+\varepsilon_{j_{p-1}})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e_{j_p}} \otimes \dots \otimes e_{i+1} \otimes e_{j_d} \cdot v^{p-d+1} T_{s_{d-2}} \dots T_{s_p} + \\ &\quad + v^{(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1}+\dots+\varepsilon_{j_{d-1}})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_{d-1}} \otimes e_{i+1} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq p \leq d-1 \\ j_p=1}} v^{-(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1}+\dots+\varepsilon_{j_{p-1}})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e_{j_p}} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes e_{i+1} \cdot v^{p-d} T_{s_{d-1}} \dots T_{s_p} + \\ &\quad + (1-q) \sum_{\substack{1 \leq p \leq d-1 \\ j_p=1}} v^{-(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1}+\dots+\varepsilon_{j_{p-1}})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e_{j_p}} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes \\ &\quad \otimes e_{i+1} \cdot v^{p-d} T_{s_{d-2}} \dots T_{s_p} + v^{(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1}+\dots+\varepsilon_{j_{d-1}})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_{d-1}} \otimes e_{i+1} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq p \leq d-1 \\ j_p=1}} v^{-(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1}+\dots+\varepsilon_{j_{p-1}})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e_{j_p}} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes e_{i+1} \cdot v^{p-d} T_{s_{d-1}} \dots T_{s_p} + \\ &\quad + \left((1-q) \sum_{\substack{1 \leq p \leq d-1 \\ j_p=1}} v^{-(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1}+\dots+\varepsilon_{j_{p-1}})+(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_{p+1}}+\dots+\varepsilon_{j_{d-1}})-1} + \right. \\ &\quad \left. + v^{(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1}+\dots+\varepsilon_{j_{d-1}})} \right) e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_{d-1}} \otimes e_{i+1} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq p \leq d-1 \\ j_p=1}} v^{-(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1}+\dots+\varepsilon_{j_{p-1}})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e_{j_p}} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes e_{i+1} \cdot v^{p-d} T_{s_{d-1}} \dots T_{s_p} + \\ &\quad + v^{-(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1}+\dots+\varepsilon_{j_{d-1}})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_{d-1}} \otimes e_{i+1} \\ &= \text{r.h.s.} \end{aligned}$$

– cas $j_d \geq i + 1$:

$$\begin{aligned}
\text{l.h.s.} &= v^{1-i}(K_{\varepsilon_1}\{F_i, \dots \{F_2, F_1\}\}) \cdot (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_{d-1}}) \otimes K_{\varepsilon_{i+1}} \cdot e_{j_d} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq p \leq d-1 \\ j_p=1}} v^{-(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1} + \dots + \varepsilon_{j_{p-1}})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e_{j_p}} \otimes \dots \otimes \\
&\quad \otimes e_{i+1} \otimes e_{j_d} \cdot v^{(\varepsilon_{i+1}|\varepsilon_{j_d})} v^{p-d+1} T_{s_{d-2}} \dots T_{s_p} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq p \leq d-1 \\ j_p=1}} v^{-(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1} + \dots + \varepsilon_{j_{p-1}})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e_{j_p}} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes e_{i+1} \cdot v^{p-d} T_{s_{d-1}} \dots T_{s_p} \\
&= \text{r.h.s.}
\end{aligned}$$

– cas $2 \leq j_d \leq i$:

$$\begin{aligned}
\text{l.h.s.} &= v^{1-i}(K_{\varepsilon_1}\{F_i, \dots \{F_2, F_1\}\}) \cdot (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_{d-1}}) \otimes K_{\varepsilon_{i+1}} \cdot e_{j_d} + \\
&\quad + (q-1)v^{1-i}(K_{\varepsilon_1}\{F_{j_d-1}, \dots \{F_2, F_1\}\}) \cdot (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_{d-1}}) \otimes \\
&\quad \otimes (K_{\varepsilon_{j_d}}\{F_i, \dots \{F_{j_d+1}, F_{j_d}\}\}) \cdot e_{j_d} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq p \leq d-1 \\ j_p=1}} v^{-(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1} + \dots + \varepsilon_{j_{p-1}})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e_{j_p}} \otimes \dots \otimes e_{i+1} \otimes \\
&\quad \otimes e_{j_d} \cdot v^{p-d+1} T_{s_{d-2}} \dots T_{s_p} + (q-1) \sum_{\substack{1 \leq p \leq d-1 \\ j_p=1}} v^{-(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1} + \dots + \varepsilon_{j_{d-1}})} \\
&\quad e_{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e_{j_p}} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes e_{i+1} \cdot v^{p-d} T_{s_{d-2}} \dots T_{s_p} \\
&= \sum_{\substack{1 \leq p \leq d-1 \\ j_p=1}} v^{-(\varepsilon_1|\varepsilon_{j_1} + \dots + \varepsilon_{j_{p-1}})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e_{j_p}} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes e_{i+1} \cdot v^{p-d} T_{s_{d-1}} \dots T_{s_p} \\
&= \text{r.h.s.}
\end{aligned}$$

Dans le cas de F_0 , il s'agit de montrer que :

$$\begin{aligned}
&(-1)^{n-2} x v(\{E_{n-1}, \dots \{E_2, E_1\}\}) K_{-\varepsilon_1 - \varepsilon_n} \cdot (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d}) = \\
&\sum_{\substack{1 \leq p \leq d \\ j_p=n}} v^{(\varepsilon_1 - \varepsilon_d|\varepsilon_{j_{p+1}} + \dots + \varepsilon_{j_d})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_{p-1}} \otimes e_1 \otimes e_{j_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \cdot q^{d-p} x T_{s_p}^{-1} \dots T_{s_{d-1}}^{-2} \dots T_{s_p}^{-1}.
\end{aligned}$$

C'est à nouveau un cas particulier d'une formule plus générale, qui se montre par récurrence sur d :

$$\begin{aligned}
(\forall d, i \geq 1) \quad &(-1)^{n-1-i} (\{E_{n-1}, \dots \{E_{i+1}, E_i\}\}) K_{-\varepsilon_i} \cdot (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d}) = \\
&\sum_{\substack{1 \leq p \leq d \\ j_p=n}} v^{(\varepsilon_n|\varepsilon_{j_1} + \dots + \varepsilon_{j_{p-1}})} e_{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e_{j_p}} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes e_i \cdot v^{d-p} T_{s_{d-1}}^{-1} \dots T_{s_p}^{-1}.
\end{aligned}$$

□

De la même manière, et ainsi que Drinfeld [Dr1] l'a signalé, le foncteur \mathcal{F}_d^n commute aux foncteurs donnés par les automorphismes de torsion (voir les paragraphes 3.2.1 et 3.3.1) :

Proposition 3.26 *Si $x \in \mathbb{C}^\times$ et si K est un $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -module de dimension finie, alors $\mathcal{F}_d^n(\tau_x^* K) \simeq \tau_{x^{-1}}^*(\mathcal{F}_d^n K)$.*

J'omets la preuve, très simple, de cette proposition.

3.4.3 Modules standard et opérateurs d'entrelacement

Je vais maintenant étudier l'image, par le foncteur de Schur–Weyl, des constructions des paragraphes 3.3.1 et 3.3.2. L'application linéaire \widehat{R}^{VV} a été définie au §3.1.3.

Proposition 3.27 *Soient $\chi = [\chi_1, \dots, \chi_d]$ un poids de $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ et $i \in \{1, \dots, d-1\}$.*

- L'image par le foncteur \mathcal{F}_d^n du module standard $I(\chi)$ est naturellement isomorphe au module $\text{ev}_{\chi_1}^* V \otimes \dots \otimes \text{ev}_{\chi_d}^* V$.*
- En identifiant les espaces sous-jacents aux modules $I(\chi)$ et $I(s_i \chi)$ à l'espace $V^{\otimes d}$, l'image par le foncteur \mathcal{F}_d^n de l'opérateur d'entrelacement $\widehat{A}_{s_i}(\chi) : I(s_i \chi) \rightarrow I(\chi)$ est donné par l'opérateur $(\widehat{R}^{\text{VV}} \chi_i - (\widehat{R}^{\text{VV}})^{-1} \chi_{i+1})$, agissant dans les i et $i+1$ -ièmes facteurs du produit tensoriel $V^{\otimes d}$.*

Preuve a) Par définition, $\mathcal{F}_d^n(I(\chi)) = V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}] \otimes_{\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)} (\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d) \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}_\chi)$. C'est donc un $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module isomorphe à $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}] \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}_\chi$. L'application linéaire :

$$u : \begin{pmatrix} \text{ev}_{\chi_1}^* V \otimes \dots \otimes \text{ev}_{\chi_d}^* V \rightarrow \mathcal{F}_d^n(I(\chi)) \\ e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \mapsto e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes 1 \otimes 1_\chi \end{pmatrix}$$

est donc un isomorphisme de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules, et il suffit de vérifier qu'elle est $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -linéaire.

L'action de E_0 sur un vecteur $e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \in \text{ev}_{\chi_1}^* V \otimes \dots \otimes \text{ev}_{\chi_d}^* V$ s'écrit :

$$E_0 \cdot (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d}) = \sum_{\substack{1 \leq p \leq d \\ j_p=1}} v^{(\varepsilon_n - \varepsilon_1 | \varepsilon_{j_1} + \dots + \varepsilon_{j_{p-1}})} (-o(1) \chi_p^{-1} v^n) e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_{p-1}} \otimes e_n \otimes e_{j_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{j_d}.$$

L'action de E_0 sur le vecteur $e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes 1 \otimes 1_\chi \in \mathcal{F}_d^n(I(\chi))$ est donnée par :

$$\begin{aligned} & E_0 \cdot (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes 1) \otimes 1_\chi \\ &= \sum_{\substack{1 \leq p \leq d \\ j_p=1}} v^{(\varepsilon_n - \varepsilon_1 | \varepsilon_{j_1} + \dots + \varepsilon_{j_{p-1}})} (-o(1) v^n) (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_{p-1}} \otimes e_n \otimes e_{j_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes t_p) \otimes 1_\chi \\ &= \sum_{\substack{1 \leq p \leq d \\ j_p=1}} v^{(\varepsilon_n - \varepsilon_1 | \varepsilon_{j_1} + \dots + \varepsilon_{j_{p-1}})} (-o(1) \chi_p^{-1} v^n) (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_{p-1}} \otimes e_n \otimes e_{j_{p+1}} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes 1) \otimes 1_\chi. \end{aligned}$$

La comparaison de ces deux calculs montre que u commute à l'action de E_0 . Le cas de F_0 est similaire.

- b) L'opérateur d'entrelacement $\hat{A}_{s_i}(\chi) : (\mathbb{I}(s_i\chi) \rightarrow \mathbb{I}(\chi), x \otimes 1_{s_i\chi} \mapsto xA_{s_i} \otimes 1_\chi)$ est envoyé, par le foncteur \mathcal{F}_d^n , sur l'opérateur :

$$\left(\begin{array}{l} V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}] \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}_{s_i\chi} \rightarrow V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}] \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}_\chi \\ (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes t_1^{p_1} \dots t_d^{p_d}) \otimes 1_{s_i\chi} \mapsto ((e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes t_1^{p_1} \dots t_d^{p_d}) \cdot A_{s_i}) \otimes 1_\chi \end{array} \right).$$

Dans $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}] \otimes_{\mathcal{A}} \mathbb{C}_\chi$, on a :

$$\begin{aligned} & ((e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes t_1^{p_1} \dots t_d^{p_d}) \cdot A_{s_i}) \otimes 1_\chi \\ &= ((e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes 1) \cdot (x_1^{-p_1} \dots x_d^{-p_d} A_{s_i})) \otimes 1_\chi \\ &= ((e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes 1) \cdot (A_{s_i} x_1^{-p_1} \dots x_i^{-p_{i+1}} x_{i+1}^{-p_i} \dots x_d^{-p_d})) \otimes 1_\chi \\ &= ((e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes 1) \cdot (v^{-1} T_{s_i} x_1^{-p_1} \dots x_i^{1-p_{i+1}} x_{i+1}^{-p_i} \dots x_d^{-p_d} - \\ & \quad - v T_{s_i}^{-1} x_1^{-p_1} \dots x_i^{-p_{i+1}} x_{i+1}^{1-p_i} \dots x_d^{-p_d})) \otimes 1_\chi \\ &= ((e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes 1) \cdot (v^{-1} T_{s_i} \chi_1^{-p_1} \dots \chi_i^{1-p_{i+1}} \chi_{i+1}^{-p_i} \dots \chi_d^{-p_d} - \\ & \quad - v T_{s_i}^{-1} \chi_1^{-p_1} \dots \chi_i^{-p_{i+1}} \chi_{i+1}^{1-p_i} \dots \chi_d^{-p_d})) \otimes 1_\chi \end{aligned}$$

Dans l'identification du a), $\mathcal{F}_d^n(\hat{A}_{s_i}(\chi))$ est donc donné par :

$$\left(\begin{array}{l} \text{ev}_{\chi_1}^* V \otimes \dots \otimes \text{ev}_{\chi_{i+1}}^* V \otimes \text{ev}_{\chi_i}^* V \otimes \dots \otimes \text{ev}_{\chi_d}^* V \rightarrow \text{ev}_{\chi_1}^* V \otimes \dots \otimes \text{ev}_{\chi_d}^* V \\ e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \mapsto (e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d}) \cdot (v^{-1} T_{s_i} \chi_i - v T_{s_i}^{-1} \chi_{i+1}) \end{array} \right).$$

□

L'assertion a) est la proposition 4.8 de [CP5]. L'opérateur $(\hat{R}^{\text{VV}} \chi_i - (\hat{R}^{\text{VV}})^{-1} \chi_{i+1})$ de l'assertion b) est la R -matrice trigonométrique de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ dans sa représentation naturelle [Ji2].

Proposition 3.28 *Soit $d \geq 1$ et soit $x \in \mathbb{C}^\times$.*

- a) *Soit Δ le segment $(q^{d-1}x, q^{d-2}x, \dots, x)$. Si $d \leq n$, alors l'image par \mathcal{F}_d^n du module $\langle \Delta \rangle$ est isomorphe au module $\text{ev}_{x-1}^* L(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_d)$; sinon, l'image par \mathcal{F}_d^n du module $\langle \Delta \rangle$ est le module zéro.*
- b) *Soit $\Phi = (\Delta_1, \dots, \Delta_d)$ la suite de segments $(\{xq^{1-d}\}, \{xq^{2-d}\}, \dots, \{x\})$. Alors l'image par \mathcal{F}_d^n du module $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_d \rangle$ est isomorphe au module $\text{ev}_{x-1}^* L(d\varepsilon_1)$.*

Preuve a) Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ engendré par l'élément C_{w_0} (voir §3.1.2) est un sous- $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -module du module $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$. De plus, on a $T_{s_i} C_{w_0} = -C_{w_0}$ dans $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$, d'après la formule définissant C_{w_0} , de sorte que $\mathbb{C} \cdot C_{w_0}$ est un $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -module dont le seul poids est $(q^{d-1}x, q^{d-2}x, \dots, x) = \chi(\Delta)$. Il est donc isomorphe au sous-module $\mathbb{C} \cdot C_{w_0} \otimes 1_{\tilde{\chi}(\Delta)}$ de $I(\tilde{\chi}(\Delta))$, c'est-à-dire à $\langle \Delta \rangle$. On peut donc voir $\langle \Delta \rangle$ comme le sous-module $\mathrm{ev}_x^* J(w_0)$ de $\mathrm{ev}_x^* \mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$. On déduit alors de la proposition 3.25 que $\mathcal{F}_d^n(\langle \Delta \rangle)$ est isomorphe à $\mathrm{ev}_{x^{-1}}^* \mathcal{S}_d^n(J(w_0))$, et on utilise le théorème 3.4.

b) De manière analogue, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ engendré par C'_{w_0} est un sous- $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -module du module $\mathrm{ev}_x^* \mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$, de dimension 1, et de poids $[xq^{1-d}, xq^{2-d}, \dots, x] = \chi(\Phi)$. C'est donc un quotient simple du module standard $I(\chi(\Phi))$. Le théorème 3.16 c) montre alors qu'il s'agit de $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_d \rangle$. Ce dernier module est ainsi isomorphe au module $\mathrm{ev}_x^* J(1)$, et on conclut de manière analogue au cas a).

□

Remarque. La preuve de la proposition repose sur le calcul explicite des segments associés à deux des composantes simples du module $\mathrm{ev}_x^* \mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$. Il ne semble pas y avoir moyen d'utiliser les idempotents de Gyoja [Gy] de l'algèbre $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ pour effectuer ce calcul pour les autres composantes, car ces idempotents ne sont pas des $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -vecteurs de poids dans $\mathrm{ev}_x^* \mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$. On peut néanmoins trouver les segments associés à toutes les représentations de la forme $\mathrm{ev}_x^* J(w)$ en utilisant les théorèmes 5.5 et 7.6 de [CP5] et la proposition 12.2.13 de [CP2].

Dans les notations du a) de la proposition 3.28, on remarque que $\langle \Delta \rangle$ est l'image de l'opérateur d'entrelacement $\hat{A}_{w_0}(\tilde{\chi}(\Delta)) : I(\chi(\Delta)) \rightarrow I(\tilde{\chi}(\Delta))$. Dans les notations du b) de la proposition 3.28, on peut facilement voir que $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_d \rangle$ est l'image de l'opérateur d'entrelacement $\hat{A}_{w_0}(w_0\chi(\Phi)) : I(\chi(\Phi)) \rightarrow I(w_0\chi(\Phi))$. Cela montre, en appliquant le foncteur de Schur–Weyl, que l'on peut construire les $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules $\mathrm{ev}_{x^{-1}}^* L(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_d)$ et $\mathrm{ev}_{x^{-1}}^* L(d\varepsilon_1)$ à l'aide de la R -matrice trigonométrique dans la représentation naturelle de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$. Ce dernier fait est connu depuis [KRS] et [Ji1] : par exemple, Jimbo se sert de cette construction pour isoler la composante de type $L(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_d)$ dans le $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module $V^{\otimes d}$.

3.4.4 Correspondance pour les modules irréductibles

Ce paragraphe a pour but de montrer que le foncteur de Schur–Weyl envoie un $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -module simple de dimension finie sur un $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module simple ou sur zéro, et d'expliciter la correspondance obtenue.

La notion de segment a été définie au §3.3.2. A une famille $(\Delta_j)_{1 \leq j \leq t}$ de segments de longueur totale d , donnés par $\Delta_j = (q^{d_j-1}x_j, \dots, x_j)$, Chari et Pressley associent la famille de polynômes (P_i) donnés par : $P_i(u) = \prod_{\{j|d_j=i\}} \left(\frac{uq}{v^i x_j} - 1 \right)$. Le résultat qui suit étend au cas $d \geq n$ le théorème 7.6 de [CP5].

Théorème 3.29 Soit $(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ une suite non ordonnée de segments de longueur totale d , et soit $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$ le $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -module simple de dimension finie qui lui est associé par la correspondance du théorème 3.16. Si tous les segments Δ_j sont de longueurs inférieures ou égales à n , alors $\mathcal{F}_d^n(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle)$ est le $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module simple $L((P_i))$ donné par les $n-1$ premiers polynômes de la famille (P_i) associée à $(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$. Sinon, $\mathcal{F}_d^n(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle)$ est le module zéro.

Preuve La démonstration que je donne est une adaptation de la preuve de Chari et Pressley [loc. cit.]. Le réseau des poids de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ est noté $P_n = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i$, et si $\lambda \in P$ est dominant, le $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module simple de plus haut poids λ est noté $L(\lambda)$. Pour simplifier l'écriture, je noterai ϖ_d le poids $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_d$.

- a) Si la suite est réduite à un seul segment : $\Delta = (q^{d-1}x, \dots, x)$, alors, en utilisant la proposition 3.25, on voit que $\mathcal{F}_d^n(\langle \Delta \rangle)$ est le module $\mathrm{ev}_{x-1}^* L(\varpi_d)$ si $d \leq n$, ou est le module zéro sinon. Dans le premier cas, on obtient donc un $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module simple, dont on peut facilement calculer les polynômes de Chari–Pressley (voir [CP2, proposition 12.2.13] ou le corollaire 3.41 de ce chapitre).
- b) S'il existe un segment Δ_j de longueur $d_j > n$, alors $\mathcal{F}_{d_j}^n(\langle \Delta_j \rangle) = 0$ d'après le a), et donc $\mathcal{F}_d^n(\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_t \rangle) = 0$ grâce à la proposition 3.23 b). L'image par \mathcal{F}_d^n du sous-quotient $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$ est donc le module zéro.
- c) Traitons à présent le cas où $d < n$. On suppose que les segments $(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ sont ordonnés de la manière décrite au théorème 3.16 c), et on les écrit sous la forme $\Delta_j = (q^{d_j-1}x_j, \dots, x_j)$. Conformément aux notations du paragraphe 3.3.2, on appelle w_T l'élément de plus grande longueur dans le sous-groupe parabolique de \mathfrak{S}_d associé à la partition $d_1 + \dots + d_t$ de d . Alors $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$ est l'unique quotient simple de $\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_t \rangle$, et est l'unique $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -facteur de composition de celui-ci contenant le $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -facteur de composition $J(w_T)$. Le théorème 4.2 de [CP5] affirme que \mathcal{F}_d^n induit une équivalence de catégorie entre la catégorie des $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -modules de dimensions finies et une certaine sous-catégorie pleine abélienne de la catégorie des $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules de type 1 et de dimensions finies. L'image par \mathcal{F}_d^n de $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$ est donc l'unique quotient simple du $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module $\mathcal{F}_d^n(\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_t \rangle) \simeq \mathrm{ev}_{x_1-1}^* L(\varpi_{d_1}) \otimes \dots \otimes \mathrm{ev}_{x_t-1}^* L(\varpi_{d_t})$. La proposition 3.23 c) montre que $\mathcal{F}_d^n(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle)$ est l'unique facteur de composition du $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module $\bigotimes_{j=1}^t \mathrm{ev}_{x_j-1}^* L(\varpi_{d_j})$ qui contient la composante $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -isotypique de type $\mathfrak{S}_d^n(J(w_T)) \simeq L(\varpi_{d_1} + \dots + \varpi_{d_t})$. Cela montre que $\bigotimes_{j=1}^t \mathrm{ev}_{x_j-1}^* L(\varpi_{d_j})$ est, en tant que $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module, engendré par le produit tensoriel des vecteurs de plus hauts poids. C'est donc un $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module de plus haut poids, et ce plus haut poids est donné par la famille (P_i) (en utilisant la proposition 3.11 et le a)). Le fait que $\mathcal{F}_d^n(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle)$ en soit l'unique quotient simple entraîne le résultat dans ce cas.

d) Il reste à traiter le cas où n est supérieur aux longueurs de tous les segments, mais où il est inférieur à d . Ce cas découle du précédent par un procédé de stabilisation. On choisit un entier $N > d$. On note P_n et P_N les réseaux des $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ et $U_q(\mathfrak{gl}_N)$ -poids, et P_n est vu comme un sous-réseau de P_N (voir §3.1.4). On voit $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ et $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ comme des sous-algèbres de $U_q(\mathfrak{gl}_N)$ et $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_N)$ respectivement. Si $\lambda \in P_n$ est un poids dominant polynomial, λ est encore dominant dans P_N ; les modules de plus haut poids λ sur $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ et $U_q(\mathfrak{gl}_N)$ sont alors notés $L_n(\lambda)$ et $L_N(\lambda)$ respectivement.

Soit $\lambda \in P_n$ un poids dominant polynomial. L'espace $L_N(\lambda)$ est muni d'une graduation du groupe P_N , et on peut lui appliquer le foncteur de troncation \mathcal{T}_N^n . Le $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module obtenu est alors isomorphe à $L_n(\lambda)$. En identifiant $L_n(\lambda)$ à un sous-espace de $L_N(\lambda)$, on identifie les vecteurs de plus haut poids de ces deux espaces. Je note v_λ ce vecteur.

Soit $x \in \mathbb{C}^\times$. Le $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_N)$ -module $\text{ev}_{x^{-1}}^* L_N(\lambda)$ est simple, muni d'une graduation du groupe P_N , et v_λ est un vecteur de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_N)$ -plus haut poids. Le $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module $\text{ev}_{x^{-1}}^* L_n(\lambda)$ est simple et v_λ est un vecteur de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -plus haut poids. Le calcul des polynômes de Chari–Pressley pour ces deux modules (voir [CP2, proposition 12.2.13] ou le corollaire 3.41) et la proposition 3.12 b) montrent que le $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module $\text{ev}_{x^{-1}}^* L_n(\lambda)$ peut être identifié au sous-espace $\mathcal{T}_N^n(\text{ev}_{x^{-1}}^* L_N(\lambda))$ de $\text{ev}_{x^{-1}}^* L_N(\lambda)$.

On écrit les segments Δ_j comme au c). On plonge les $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules $\text{ev}_{x_j^{-1}}^* L_n(\varpi_{d_j})$ dans les $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_N)$ -modules $\text{ev}_{x_j^{-1}}^* L_N(\varpi_{d_j})$. La proposition 3.12 c) montre qu'on obtient alors un homomorphisme injectif de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules de $\bigotimes_{j=1}^t \text{ev}_{x_j^{-1}}^* L_n(\varpi_{d_j})$ dans $\bigotimes_{j=1}^t \text{ev}_{x_j^{-1}}^* L_N(\varpi_{d_j})$, dont l'image est $\bigotimes_{j=1}^t \mathcal{T}_N^n(\text{ev}_{x_j^{-1}}^* L_N(\varpi_{d_j}))$. En utilisant la proposition 3.7 b), on identifie ainsi le $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module $\bigotimes_{j=1}^t \text{ev}_{x_j^{-1}}^* L_n(\varpi_{d_j})$ à $\mathcal{T}_N^n(\bigotimes_{j=1}^t \text{ev}_{x_j^{-1}}^* L_N(\varpi_{d_j}))$.

La démonstration du c) est valable pour le $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_N)$ -module $\mathcal{F}_d^N(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle)$. Le $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_N)$ -module $\bigotimes_{j=1}^t \text{ev}_{x_j^{-1}}^* L_N(\varpi_{d_j})$ est donc un module de plus haut poids, son générateur canonique étant le produit tensoriel des vecteurs de plus hauts poids de chacun des facteurs. Il découle alors de la proposition 3.12 a) que le $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module $\mathcal{T}_N^n(\bigotimes_{j=1}^t \text{ev}_{x_j^{-1}}^* L_N(\varpi_{d_j}))$ est engendré par le même vecteur. Le $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module $\bigotimes_{j=1}^t \text{ev}_{x_j^{-1}}^* L_n(\varpi_{d_j})$ est donc un module de plus haut poids, et ce plus haut poids est donné par les $n - 1$ premiers polynômes de Chari–Pressley définissant le plus haut poids de $\bigotimes_{j=1}^t \text{ev}_{x_j^{-1}}^* L_N(\varpi_{d_j})$ (proposition 3.12 b)), c'est-à-dire par les $n - 1$ premiers polynômes de la famille (P_i) associée à $(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$.

Notons $L = L((P_i)_{1 \leq i \leq n-1})$ l'unique quotient simple de $\bigotimes_{j=1}^t \text{ev}_{x_j^{-1}}^* L_n(\varpi_{d_j})$. Le $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -module $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$ est un quotient du module $\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_t \rangle$, donc

$\mathcal{F}_d^n(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle)$ est un quotient de $\mathcal{F}_d^n(\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_t \rangle) \simeq \bigotimes_{j=1}^t \text{ev}_{x_j}^* L_n(\varpi_{d_j})$. On en déduit que L est un quotient de $\mathcal{F}_d^n(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle)$, ou que ce dernier est le module zéro.

Notons enfin K le plus grand sous-module propre de $\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_t \rangle$, et M l'image de $\mathcal{F}_d^N(K)$ dans l'isomorphisme $\mathcal{F}_d^N(\langle \Delta_1 \rangle \times \dots \times \langle \Delta_t \rangle) \simeq \bigotimes_{j=1}^t \text{ev}_{x_j}^* L_N(\varpi_{d_j})$. Cet espace M est un sous-espace P_N -graduée du produit tensoriel. Le $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_N)$ -module quotient $\bigotimes_{j=1}^t \text{ev}_{x_j}^* L_N(\varpi_{d_j})/M$ est simple (voir c)). La proposition 3.12 b) dit que l'image de $\bigotimes_{j=1}^t \text{ev}_{x_j}^* L_n(\varpi_{d_j})$ dans ce module quotient est isomorphe à L. En utilisant la proposition 3.7 a), on en déduit que la dimension de L est égale à celle de l'espace vectoriel :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_N^n(\bigotimes_{j=1}^t \text{ev}_{x_j}^* L_N(\varpi_{d_j})/M) &\simeq \mathcal{J}_N^n(\mathcal{F}_d^N(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle)) \\ &\simeq \mathcal{J}_N^n(\mathcal{S}_d^N(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle)) \simeq \mathcal{S}_d^n(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle). \end{aligned}$$

Les modules $\mathcal{F}_d^n(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle)$ et L ont donc même dimension, ce qui achève la démonstration.

□

Soit $\text{Rep}(U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n))$ l'anneau de Grothendieck de la catégorie des $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules de type 1 et de dimensions finies. Soit $\hat{\mathcal{R}}$ l'anneau de Zelevinsky défini au §3.3.4.

Théorème 3.30 *La famille des foncteurs \mathcal{F}_d^n induit un homomorphisme surjectif d'anneaux de $\hat{\mathcal{R}}$ vers $\text{Rep}(U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n))$. L'anneau $\text{Rep}(U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n))$ est un anneau commutatif de polynômes.*

Preuve La proposition 3.23 b) affirme que la famille des foncteurs \mathcal{F}_d^n induit un homomorphisme d'anneaux. La surjectivité de cet homomorphisme vient du théorème ci-dessus et de la classification des $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules simples de type 1 et de dimensions finies (voir le paragraphe 3.2.2). Le noyau de cet homomorphisme est décrit par le théorème 3.29. La description de $\hat{\mathcal{R}}$ comme anneau de polynômes (proposition 3.23) entraîne l'assertion. □

Remarque. Zelevinsky a en fait muni son espace $\hat{\mathcal{R}}$ d'une structure de \mathbb{Z} -algèbre de Hopf \mathbb{N} -graduée. L'antipode, qu'il note $(\hat{\mathcal{R}} \rightarrow \hat{\mathcal{R}}, \omega \mapsto \omega^t)$ [Ze, §9], est une involution. Il est connu que cette involution est une généralisation de la transposition des diagrammes de Young. Quelques exemples simples confortent l'hypothèse suivante: la classification donnée par Chari et Pressley [CP1] en termes de segments des $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_2)$ -modules simples de type 1 et de dimensions finies est décrite par l'application qui, à une suite de segments deux à deux non liés $(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$, de longueur totale d , associe le $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_2)$ -module $\mathcal{F}_d^2(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle^t)$.

3.4.5 Procédure de fusion et R -matrices trigonométriques

Soit V le $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module naturel. Dans la puissance tensorielle $V^{\otimes d}$, les $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modules $L(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_d)$ et $L(d\varepsilon_1)$ apparaissent avec la multiplicité 1. Un problème consiste à construire un endomorphisme du $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module $V^{\otimes d}$ dont l'image est $L(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_d)$ ou $L(d\varepsilon_1)$. On peut parvenir à ce résultat en utilisant la dualité de Schur–Weyl du §3.1.3, ainsi que le symétriseur C'_{w_0} et l'antisymétriseur C_{w_0} de $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$. La forme des q -analogues des autres idempotents de Young [Gy] (voir aussi [GL]) étant compliquée, il est naturel de chercher d'autres méthodes.

La procédure de fusion [KRS] utilise la « R -matrice trigonométrique », et la proposition 3.27 montre comment ceci est relié aux opérateurs d'entrelacement standard. Les remarques situées à la fin du §3.4.3 donnent précisément la construction d'endomorphismes du $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module $V^{\otimes d}$ dont les images sont $L(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_d)$ et $L(d\varepsilon_1)$. Cette construction peut s'étendre à tous les $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules simples de type 1 et de dimensions finies.

Si M est un $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module simple de type 1 et de dimension finie, alors il existe un entier $d \geq 1$ tel que M soit l'image par le foncteur \mathcal{F}_d^n d'un $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -module simple K de dimension finie (théorème 3.29). Il existe un $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -poids χ tel que, w_0 désignant la permutation de plus grande longueur dans \mathfrak{S}_d , K puisse s'écrire comme image d'un opérateur d'entrelacement $I(w_0\chi) \rightarrow I(\chi)$ (voir le théorème 3.18). L'énoncé précis de ce théorème, associé à la proposition 3.27, montre alors le résultat suivant :

Scolie. Si M est un $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module simple de type 1 et de dimension finie, alors il existe un entier $d \geq 1$ et des nombres complexes $x_1, \dots, x_d \neq 0$, tels que M soit isomorphe à l'image d'un homomorphisme de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules $\psi : \mathrm{ev}_{x_1}^* V \otimes \cdots \otimes \mathrm{ev}_{x_d}^* V \rightarrow \mathrm{ev}_{x_d}^* V \otimes \cdots \otimes \mathrm{ev}_{x_1}^* V$. De plus, cet homomorphisme peut être construit à partir de la R -matrice trigonométrique de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ dans sa représentation naturelle en dérivant par rapport aux x_i .

De la même manière, les propositions 3.23 b) et 3.26 et le corollaire 3.20 donnent :

Proposition 3.31 *Si M et N sont deux $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules simples de dimensions finies et de type 1, alors le module $\tau_z^* M \otimes N$ est simple sauf pour un ensemble fini de valeurs de $z \in \mathbb{C}^\times$.*

La notion de R -matrice et de R -matrice à paramètre spectral [KRS] est antérieure à la définition des algèbres enveloppantes quantifiées. Plus tard, Drinfeld [Dr2] a établi un lien entre les R -matrices trigonométriques et les algèbres enveloppantes affines quantifiées. La définition suivante généralise à tous les $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules les considérations de Jimbo [Ji2] :

Définition 3.32 *Soit M un $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module. Une R -matrice trigonométrique pour M est une famille d'opérateurs \mathbb{C} -linéaires $\widehat{R}^{\mathrm{MM}}(z) : M \otimes M \rightarrow M \otimes M$, dépendant régulièrement de $z \in \mathbb{C}^\times$ telle que :*

- a) $\widehat{R}^{\mathrm{MM}}(z) : \tau_w^* M \otimes \tau_{wz}^* M \rightarrow \tau_{wz}^* M \otimes \tau_w^* M$ soit $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -linéaire pour tous $z, w \in \mathbb{C}^\times$;
- b) $\widehat{R}^{\mathrm{MM}}(1)$ soit un opérateur scalaire non nul ;

c) Les opérateurs $\widehat{R}^{\text{MM}}(z)$ vérifient l'équation de Yang–Baxter à paramètre spectral :

$$\begin{aligned} (\widehat{R}^{\text{MM}}(z) \otimes \text{id}_M)(\text{id}_M \otimes \widehat{R}^{\text{MM}}(wz))(\widehat{R}^{\text{MM}}(w) \otimes \text{id}_M) = \\ (\text{id}_M \otimes \widehat{R}^{\text{MM}}(w))(\widehat{R}^{\text{MM}}(wz) \otimes \text{id}_M)(\text{id}_M \otimes \widehat{R}^{\text{MM}}(z)). \end{aligned}$$

Exemple. La représentation naturelle V de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ donne lieu à la représentation $M = \text{ev}_1^* V$ de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$. On a défini au §3.1.3 l'opérateur $\widehat{R}^{\text{VV}} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$. Si on identifie les espaces sous-jacents de M et de V , alors l'opérateur défini dans [Ji2] : $\widehat{R}^{\text{VV}}(z) = (\widehat{R}^{\text{VV}} - z(\widehat{R}^{\text{VV}})^{-1})$ est une R -matrice trigonométrique pour M .

Preuve On considère l'algèbre de Hecke affine $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_2)$ et l'opérateur d'entrelacement standard $\widehat{A}_{s_1}([(wz)^{-1}, w^{-1}]) : I([w^{-1}, (wz)^{-1}]) \rightarrow I([(wz)^{-1}, w^{-1}])$. En appliquant le foncteur \mathcal{F}_2^n , on obtient l'opérateur $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -linéaire : $\widehat{R}^{\text{VV}}(wz)^{-1} - (\widehat{R}^{\text{VV}})^{-1}w^{-1} : \text{ev}_w^* V \otimes \text{ev}_{wz}^* V \rightarrow \text{ev}_{wz}^* V \otimes \text{ev}_w^* V$ (proposition 3.27). Les égalités $\text{ev}_w = \text{ev}_1 \circ \tau_w$ et $\text{ev}_{wz} = \text{ev}_1 \circ \tau_{wz}$ entraînent que $\widehat{R}^{\text{VV}} - z(\widehat{R}^{\text{VV}})^{-1} : \tau_w^* M \otimes \tau_{wz}^* M \rightarrow \tau_{wz}^* M \otimes \tau_w^* M$ est $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -linéaire. De plus, pour $z = 1$, l'opérateur $\widehat{R}^{\text{VV}} - (\widehat{R}^{\text{VV}})^{-1} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$ est l'action par le scalaire $v - v^{-1}$. Enfin l'équation des tresses pour les opérateurs \widehat{A}_w implique l'égalité suivante entre homomorphismes de $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_3)$ -modules :

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{s_1}([(wz)^{-1}, w^{-1}, 1]) \circ \widehat{A}_{s_2}([w^{-1}, (wz)^{-1}, 1]) \circ \widehat{A}_{s_1}([w^{-1}, 1, (wz)^{-1}]) = \\ \widehat{A}_{s_2}([(wz)^{-1}, w^{-1}, 1]) \circ \widehat{A}_{s_1}([(wz)^{-1}, 1, w^{-1}]) \circ \widehat{A}_{s_2}([1, (wz)^{-1}, w^{-1}]). \end{aligned}$$

En appliquant le foncteur \mathcal{F}_3^n , on en déduit que les opérateurs $\widehat{R}^{\text{VV}}(z)$ vérifient l'équation de Yang–Baxter à paramètre spectral. \square

Je ne sais pas montrer l'existence de R -matrices trigonométriques pour tous les $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules de type 1 et de dimensions finies. Pour les modules simples, je vais montrer le résultat partiel :

Théorème 3.33 *Soit M un $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module simple de type 1 et de dimension finie. Alors il existe une famille d'opérateurs \mathbb{C} -linéaires $\widehat{R}^{\text{MM}}(z) : M \otimes M \rightarrow M \otimes M$, dépendant régulièrement de $z \in \mathbb{C}^\times$, vérifiant les conditions a) et c) de la définition 3.32, et telle que toute famille $\widehat{S}^{\text{MM}}(z) : M \otimes M \rightarrow M \otimes M$, dépendant régulièrement de $z \in \mathbb{C}^\times$ et vérifiant la condition a) soit multiple de $\widehat{R}^{\text{MM}}(z)$ par un élément de $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$.*

Preuve La preuve traduit l'idée de Drinfeld [Dr1] selon laquelle les R -matrices sont les images par le foncteur de Schur–Weyl des opérateurs d'entrelacement standard. Reprenons le raisonnement qui a conduit au scolie. Il existe un entier $d \geq 1$ et des nombres complexes $x_1, \dots, x_d \neq 0$ tels que M soit isomorphe à l'image d'une application $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -linéaire $\psi : \text{ev}_{x_1}^* V \otimes \dots \otimes \text{ev}_{x_d}^* V \rightarrow \text{ev}_{x_d}^* V \otimes \dots \otimes \text{ev}_{x_1}^* V$. De plus, il existe des entiers a_1, \dots, a_d et k tels que, w_0 étant l'élément de plus grande longueur dans \mathfrak{S}_d , l'homomorphisme ψ s'obtienne en

appliquant le foncteur \mathcal{F}_d^n à la réduction modulo $(y-1)$ de $\frac{1}{(y-1)^k} \hat{A}_{w_0}([x_d^{-1}y^{a_d}, \dots, x_1^{-1}y^{a_1}])$. Soit w_4 la permutation de \mathfrak{S}_{2d} donnée par $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & d & d+1 & \cdots & 2d \\ d+1 & \cdots & 2d & 1 & \cdots & d \end{pmatrix}$. La R -matrice trigonométrique de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ dans sa représentation naturelle a pour valeurs propres $v - zv^{-1}$ et $zv - v^{-1}$, donc l'application $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -linéaire $\mathcal{F}_{2d}^n(\hat{A}_{w_4}([z^{-1}x_d^{-1}, \dots, z^{-1}x_1^{-1}, x_d^{-1}, \dots, x_1^{-1}]))$ est inversible, pour z général. Cette application définit un homomorphisme de $(\bigotimes_{i=d}^1 \text{ev}_{x_i}^* V) \otimes \tau_z^*(\bigotimes_{i=d}^1 \text{ev}_{x_i}^* V)$ dans $\tau_z^*(\bigotimes_{i=d}^1 \text{ev}_{x_i}^* V) \otimes (\bigotimes_{i=d}^1 \text{ev}_{x_i}^* V)$ qui envoie le sous-module $(\text{im } \psi) \otimes \tau_z^*(\text{im } \psi)$ dans le sous-module $\tau_z^*(\text{im } \psi) \otimes (\text{im } \psi)$, comme on le voit en utilisant la propriété des tresses pour les opérateurs \hat{A}_w et la caractérisation de ψ en termes de ces opérateurs. On montre ainsi l'existence d'une famille d'opérateurs \mathbb{C} -linéaires $\hat{R}^{\text{MM}}(z) : M \otimes M \rightarrow M \otimes M$ dépendant régulièrement de $z \in \mathbb{C}^\times$, qui vérifie la condition a) de la définition 3.32, et qui est inversible pour z général. En raisonnant comme dans la preuve de l'exemple ci-dessus, on montre que la famille d'opérateurs $\hat{R}^{\text{MM}}(z)$ vérifie la condition c) de la définition 3.32. Les coefficients matriciels de cette famille d'opérateurs sont des éléments de l'anneau principal $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$; en divisant par leur p.g.c.d., on peut les supposer premiers entre eux. Dans ces conditions, l'assertion d'unicité de l'énoncé est conséquence de la proposition 3.31 et du lemme de Schur. \square

Remarque. La condition b) dans la définition 3.32 semble être importante. Jones l'a requise lorsqu'il cherchait à construire les R -matrices trigonométriques pour les algèbres enveloppantes quantifiées de type BCD au niveau de l'algèbre de Birman–Wenzl (« baxtérisation » de l'algèbre de Birman–Wenzl), voir [Jn][CGX]. Par ailleurs, cette condition est remplie par les R -matrices trigonométriques de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ pour les représentations $\text{ev}_1^* L(p(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_q))$ (voir [BGZ]) et pour les R -matrices trigonométriques de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_3)$ pour les représentations $\text{ev}_1^* L(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, $\text{ev}_1^* L(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ et $\text{ev}_1^* L(4\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)$ (voir l'annexe A).

3.5 Représentations polynomiales de $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$

Les algèbres $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ et $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ peuvent être plongées dans une même algèbre $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$, de manière naturelle. La représentation polynomiale tensorielle $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ du §3.4.1 devient alors un $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$ - $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -bimodule, comme l'ont montré Ginzburg, Reshetikhin et Vasserot [GRV]. La dualité de Schur–Weyl obtenue entre les représentations de $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ et celles de $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$ est plus naturelle que celle pour $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ décrite précédemment. Ces considérations me permettront de donner des preuves plus conceptuelles de ce que l'action de $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ sur $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ est $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -linéaire (voir §3.4.1), de l'existence des homomorphismes d'évaluation $\text{ev}_x : U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n) \rightarrow U_q(\mathfrak{gl}_n)$ et de leur lien avec le foncteur de Schur–Weyl (voir §3.4.2). Enfin, cela me permettra d'illustrer l'existence des polynômes de Chari–Pressley pour certains $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -modules simples (voir le paragraphe 3.2.2).

3.5.1 $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$

Notons \widehat{R} la matrice définie à la fin du paragraphe 3.1.1 :

$$\begin{aligned}\widehat{R} &= v \sum_{1 \leq i \leq n} E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} E_{ij} \otimes E_{ji} + (v - v^{-1}) \sum_{1 \leq i < j \leq n} E_{ii} \otimes E_{jj}, \\ \widehat{R}^{-1} &= v^{-1} \sum_{1 \leq i \leq n} E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} E_{ij} \otimes E_{ji} - (v - v^{-1}) \sum_{1 \leq i < j \leq n} E_{jj} \otimes E_{ii}.\end{aligned}$$

On a alors la relation de Hecke $(\widehat{R} - vI)(\widehat{R} + v^{-1}I) = 0$, et on pose $\widehat{R}(z) = \widehat{R} - z\widehat{R}^{-1}$.

Définition 3.34 [FRT2][DF] : On appelle $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ l'algèbre présentée par les générateurs

$$\begin{aligned}\{l_{ij}^+[m] \mid (m \geq 0 \text{ et } 1 \leq i \leq j \leq n) \text{ ou } (m > 0 \text{ et } 1 \leq j < i \leq n)\}, \\ \{l_{ij}^-[m] \mid (m \leq 0 \text{ et } 1 \leq j \leq i \leq n) \text{ ou } (m < 0 \text{ et } 1 \leq i < j \leq n)\},\end{aligned}$$

et $C^{\pm 1}$, et les relations écrites ci-dessous. Ces relations sont écrites de façon condensée grâce à l'introduction des matrices à éléments dans un anneau de séries formelles (séries génératrices) :

$$\begin{aligned}L^+(z) &= (l_{ij}^+(z))_{1 \leq i, j \leq n}, & \text{avec } l_{ij}^+(z) &= \begin{cases} \sum_{m \geq 0} l_{ij}^+[m] z^m & \text{si } i \leq j, \\ \sum_{m > 0} l_{ij}^+[m] z^m & \text{si } i > j, \end{cases} \\ L^-(z) &= (l_{ij}^-(z))_{1 \leq i, j \leq n}, & \text{avec } l_{ij}^-(z) &= \begin{cases} \sum_{m \leq 0} l_{ij}^-[m] z^m & \text{si } i \geq j, \\ \sum_{m < 0} l_{ij}^-[m] z^m & \text{si } i < j. \end{cases}\end{aligned}$$

Posons $L_1^\pm(z) = L^\pm(z) \otimes I$, $L_2^\pm(z) = I \otimes L^\pm(z)$. Les relations qui définissent $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ sont codées sous la forme :

$$\begin{aligned}C^{\pm 1} \text{ est central, } CC^{-1} &= C^{-1}C = 1, \\ \widehat{R}\left(\frac{z}{w}\right)L_2^+(z)L_1^+(w) &= L_2^+(w)L_1^+(z)\widehat{R}\left(\frac{z}{w}\right) \quad (\text{identités entre séries formelles en } w, z), \\ \widehat{R}\left(\frac{z}{w}\right)L_2^-(z)L_1^-(w) &= L_2^-(w)L_1^-(z)\widehat{R}\left(\frac{z}{w}\right) \quad (\text{identités entre séries formelles en } w^{-1}, z^{-1}), \\ \widehat{R}\left(\frac{z}{wC}\right)L_2^+(z)L_1^-(w) &= L_2^-(w)L_1^+(z)\widehat{R}\left(\frac{zC}{w}\right) \quad (\text{identités entre séries formelles en } w^{-1}, z), \\ l_{ii}^+[0]l_{ii}^-[0] &= l_{ii}^-[0]l_{ii}^+[0] = 1.\end{aligned}$$

On peut munir $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ d'une structure d'algèbre de Hopf en définissant un coproduit et une coünité à l'aide des séries génératrices $L^+(z)$ et $L^-(z)$:

$$\begin{aligned}\Delta(L^+(z)) &= L^+(z) \otimes L^+(z), & \varepsilon(L^+(z)) &= I, \\ \Delta(L^-(z)) &= L^-(z) \otimes L^-(z), & \varepsilon(L^-(z)) &= I, \\ \Delta(C^{\pm 1}) &= C^{\pm 1} \otimes C^{\pm 1}, & \varepsilon(C^{\pm 1}) &= 1,\end{aligned}$$

l'antipode étant alors donnée par $S(L^\pm(z)) = (L^\pm(z))^{-1}$ et $S(C) = C^{-1}$, les matrices $L^\pm(z)$ étant inversibles dans l'anneau des matrices carrées d'ordre n sur l'anneau $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)[[z^{\pm 1}]]$.

Il n'y a pas de définition à la Chevalley–Serre de $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$, c'est-à-dire qui soit analogue aux définitions 3.1 ou 3.8. On dispose néanmoins d'un théorème de type « nouvelle réalisation », analogue au théorème 3.9. Adjoignons à $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$ une racine carrée $C^{1/2}$ de C .

Théorème 3.35 [DF]: Dans $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)[[z^{\pm 1}]]$, on peut effectuer une décomposition LU de la matrice $L^\pm(z)$:

$$L^\pm(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ e_1^\pm(z) & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & e_{n-1}^\pm(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1^\pm(z) & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & k_n^\pm(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_1^\pm(z) & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & f_{n-1}^\pm(z) \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons :

$$\begin{aligned} X_i^+(z) &= e_i^+(zC^{1/2}) - e_i^-(zC^{-1/2}) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} X_{i,r}^+ z^r && (\text{pour } 1 \leq i \leq n-1), \\ X_i^-(z) &= f_i^+(zC^{-1/2}) - f_i^-(zC^{1/2}) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} X_{i,r}^- z^r && (\text{pour } 1 \leq i \leq n-1), \\ k_i^\pm(z) &= \sum_{r \geq 0} k_{i,\pm r}^\pm z^{\pm r} && (\text{pour } 1 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

Alors les éléments $k_{i,\pm r}^\pm$ ($1 \leq i \leq n, r \geq 0$), $X_{i,r}^\pm$ ($1 \leq i \leq n-1, r \in \mathbb{Z}$) et $C^{\pm 1/2}$ engendrent $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$. En les soumettant aux relations :

$$\begin{aligned} C^{\pm 1/2} &\text{ est central, } C^{1/2}C^{-1/2} = C^{-1/2}C^{1/2} = 1, \\ k_{i,0}^+ k_{i,0}^- &= k_{i,0}^- k_{i,0}^+ = 1, \\ k_i^\pm(z) k_j^\pm(w) &= k_j^\pm(w) k_i^\pm(z), \\ k_i^+(z) k_i^-(w) &= k_i^-(w) k_i^+(z), \\ \frac{zC^{\pm 1} - w}{zC^{\pm 1}v^{-1} - wv} k_i^\mp(z) k_j^\pm(w) &= k_j^\pm(w) k_i^\mp(z) \frac{z - wC^{\pm 1}}{zv^{-1} - wC^{\pm 1}v} && \text{si } j > i, \\ k_i^+(z) X_j^\pm(w) = X_j^\pm(w) k_i^+(z) &\text{ et } k_i^-(z) X_j^\pm(w) = X_j^\pm(w) k_i^-(z) && \text{si } i \notin \{j, j+1\}, \\ k_i^\pm(z)^{-1} X_i^-(w) k_i^\pm(z) &= \frac{zv^{-1}C^{\pm 1/2} - wv}{zC^{\pm 1/2} - w} X_i^-(w), \\ k_i^\pm(z) X_i^+(w) k_i^\pm(z)^{-1} &= \frac{zv^{-1} - wC^{\pm 1/2}v}{z - wC^{\pm 1/2}} X_i^+(w), \\ k_{i+1}^\pm(z)^{-1} X_i^-(w) k_{i+1}^\pm(z) &= \frac{zvC^{\pm 1/2} - wv^{-1}}{zC^{\pm 1/2} - w} X_i^-(w), \\ k_{i+1}^\pm(z) X_i^+(w) k_{i+1}^\pm(z)^{-1} &= \frac{zv - wC^{\pm 1/2}v^{-1}}{z - wC^{\pm 1/2}} X_i^+(w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [X_i^\pm(z), X_j^\pm(w)] = 0 \quad \text{si } |i - j| > 1, \\
& (wv^{\pm 1} - zv^{\mp 1})X_i^\pm(z)X_i^\pm(w) = X_i^\pm(w)X_i^\pm(z)(wv^{\mp 1} - zv^{\pm 1}), \\
& (w - z)X_i^+(z)X_{i+1}^+(w) = X_{i+1}^+(w)X_i^+(z)(wv - zv^{-1}), \\
& (wv - zv^{-1})X_i^-(z)X_{i+1}^-(w) = X_{i+1}^-(w)X_i^-(z)(w - z), \\
& (X_i^\pm(z_1)X_i^\pm(z_2)X_j^\pm(w) - (v + v^{-1})X_i^\pm(z_1)X_j^\pm(w)X_i^\pm(z_2) + \\
& \quad + X_j^\pm(w)X_i^\pm(z_1)X_i^\pm(z_2)) + (z_1 \leftrightarrow z_2) = 0 \quad \text{si } |i - j| = 1, \\
& [X_i^+(z), X_j^-(w)] = (v - v^{-1})\delta_{ij} \{ \delta(zw^{-1}C^{-1}) \dots \\
& \quad \dots k_{i+1}^-(zC^{-1/2})k_i^-(zC^{-1/2})^{-1} - \delta(zw^{-1}C)k_{i+1}^+(wC^{-1/2})k_i^+(wC^{-1/2})^{-1} \},
\end{aligned}$$

on obtient une présentation de $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$. (Dans l'avant-dernière relation, le signe $(z_1 \leftrightarrow z_2)$ signifie que l'on doit réécrire le premier terme en échangeant z_1 et z_2 ; dans la dernière relation, $\delta(z)$ est la série formelle mal définie $\delta(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} z^r$.)

Remarque. Ce théorème a été démontré par Ding et Frenkel [loc. cit.]. Mes notations étant légèrement différentes, j'ai réécrit les relations qu'ils ont trouvées. On remarquera enfin que Ding et Frenkel, dans leurs calculs, font usage de la relation :

$$\frac{\widehat{R}(z)}{v - zv^{-1}} \frac{\widehat{R}(z^{-1})}{v - z^{-1}v^{-1}} = I \otimes I,$$

qui est conséquence de la relation de Hecke.

L'algèbre de Hopf $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ vient avec un groupe à un paramètre d'automorphismes définis par :

$$\begin{aligned}
(\text{pour } w \in \mathbb{C}^\times) \quad \tau_w : & \left(U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n) \rightarrow U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n), \right. \\
& l_{ij}^\pm[m] \mapsto w^{-m}l_{ij}^\pm[m], & C^{\pm 1/2} \mapsto C^{\pm 1/2}, \\
& k_{i,\pm r}^\pm \mapsto w^{\mp r}k_{i,\pm r}^\pm, & X_{i,r}^\pm \mapsto w^{-r}X_{i,r}^\pm \left. \right).
\end{aligned}$$

De manière condensée, on pourra écrire $\tau_w(L^\pm(z)) = L^\pm(z/w)$.

L'algèbre $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ est une sous-algèbre de $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$. Par suite de l'existence des automorphismes τ_w , il y a plusieurs façons de définir le plongement $U_q(\mathfrak{sl}_n) \hookrightarrow U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$, et j'utiliserai dans la suite celui donné par le théorème suivant. L'algèbre $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ est définie de deux manières aux §§3.2.1 et 3.2.2, et $o : \{1, \dots, n-1\} \rightarrow \{\pm 1\}$ est la fonction d'orientation sur le graphe de Dynkin de \mathfrak{sl}_n permettant de passer de l'une à l'autre.

Théorème 3.36 [DF]: *Il existe un homomorphisme f d'algèbres de Hopf de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ dans $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$ défini par :*

$$\begin{aligned}
f : \left(U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n) \rightarrow U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n), \right. \\
K_{\alpha_i} \mapsto l_{ii}^+[0] (l_{i+1,i+1}^+[0])^{-1} \quad (si \ i \neq 0), \quad K_{\alpha_0} \mapsto C l_{nn}^+[0] l_{11}^-[0], \\
E_i \mapsto \frac{-1}{v-v^{-1}} l_{i+1,i}^-[0] (l_{ii}^-[0])^{-1} \quad (si \ i \neq 0), \quad E_0 \mapsto \frac{o(1)}{v-v^{-1}} v^n l_{1n}^+[-1] l_{nn}^+[0], \\
F_i \mapsto \frac{1}{v-v^{-1}} (l_{ii}^+[0])^{-1} l_{i,i+1}^+[0] \quad (si \ i \neq 0), \quad F_0 \mapsto \frac{-o(1)}{v-v^{-1}} \frac{1}{v^n} l_{nn}^-[0] l_{n1}^+[1] \Big).
\end{aligned}$$

Cet homomorphisme est injectif. Dans les présentations de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ et $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$ données par les théorèmes 3.9 et 3.35, il se lit :

$$\begin{aligned}
C^{1/2} \mapsto C^{1/2}, \quad \sum_{r \in \mathbb{Z}} x_{i,r}^\pm z^r \mapsto \frac{1}{v-v^{-1}} X_i^\pm \left(\frac{C^{1/2}}{v^i z} \right) \\
K_i \exp\left((v-v^{-1}) \sum_{r \geq 1} h_{i,r} z^r \right) \mapsto k_{i+1}^- \left(\frac{C^{1/2}}{v^i z} \right) / k_i^- \left(\frac{C^{1/2}}{v^i z} \right), \\
K_i^{-1} \exp\left(-(v-v^{-1}) \sum_{r \geq 1} h_{i,-r} z^{-r} \right) \mapsto k_{i+1}^+ \left(\frac{C^{1/2}}{v^i z} \right) / k_i^+ \left(\frac{C^{1/2}}{v^i z} \right).
\end{aligned}$$

(On convient dans cette écriture de définir l'application en considérant séparément chaque puissance de z de part et d'autre des symboles \mapsto .)

Preuve Ding et Frenkel montrent que l'application f de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ vers $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$ définie par les formules de la seconde moitié de l'énoncé est un homomorphisme injectif d'algèbres. Montrons que cet homomorphisme envoie les éléments K_{α_i}, E_i, F_i ($0 \leq i \leq n-1$) de $U_q(\tilde{\mathfrak{sl}}_n)$ comme le prétend la première partie de l'énoncé, et que c'est un morphisme de bigèbres.

Les relations données dans [Be] permettent d'écrire les éléments K_{α_i}, E_i, F_i en termes des générateurs de la « nouvelle réalisation » du théorème 3.9 :

$$K_{\alpha_i} = K_i \quad K_\delta = C, \quad (3.1)$$

$$E_i = x_{i,0}^+ \quad E_0 = -o(1) K_{\alpha_0} \{F_{n-1}, \dots, \{F_2, x_{1,1}^-\}\}, \quad (3.2)$$

$$F_i = x_{i,0}^- \quad F_0 = -o(1) (-v^{-1})^{n-2} \{E_{n-1}, \dots, \{E_2, x_{1,-1}^+\}\} K_{-\alpha_0}, \quad (3.3)$$

où $1 \leq i \leq n-1$, $\alpha_0 = \delta - \alpha_1 - \dots - \alpha_{n-1}$ et $\{x, y\} = vxy - yx$.

D'un autre côté, le théorème 3.35 implique les relations suivantes dans $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$:

$$\begin{aligned}
k_{i,0}^\pm[0] &= l_{ii}^\pm[0], \\
X_{i,0}^+ &= -l_{i+1,i}^-[0] (l_{ii}^-[0])^{-1}, & X_{1,1}^+ &= C^{1/2} l_{21}^+[1] (l_{11}^+[0])^{-1}, \\
X_{i,0}^- &= (l_{ii}^+[0])^{-1} l_{i,i+1}^+[0], & X_{1,-1}^- &= -C^{-1/2} (l_{11}^-[0])^{-1} l_{12}^+[-1].
\end{aligned}$$

Il vient :

$$f(E_i) = f(x_{i,0}^+) = \frac{1}{v-v^{-1}} X_{i,0}^+ = \frac{-1}{v-v^{-1}} l_{i+1,i}^- [0] (l_{ii}^- [0])^{-1} \quad (\text{pour } 1 \leq i \leq n-1).$$

On montre de même que :

$$f(F_i) = \frac{1}{v-v^{-1}} (l_{ii}^+ [0])^{-1} l_{i,i+1}^+ [0] \quad (\text{pour } 1 \leq i \leq n-1),$$

$$f(K_{\alpha_i}) = l_{ii}^+ [0] (l_{i+1,i+1}^+ [0])^{-1} \quad (\text{pour } 1 \leq i \leq n-1),$$

$$f(K_{\alpha_0}) = C l_{nn}^+ [0] l_{11}^- [0],$$

$$f(x_{1,1}^-) = \frac{-v}{(v-v^{-1})C} (l_{11}^- [0])^{-1} l_{12}^- [-1],$$

$$f(x_{1,-1}^+) = \frac{C}{v(v-v^{-1})} l_{21}^+ [1] (l_{11}^+ [0])^{-1}.$$

En écrivant les coefficients de $E_{ii} \otimes E_{1,i+1}$, $E_{ii} \otimes E_{1i}$, $E_{i,i+1} \otimes E_{1i}$ et $E_{i1} \otimes E_{1k}$ dans la relation $\widehat{R}(\frac{z}{wC})L_2^+(z)L_1^-(w) = L_2^-(w)L_1^+(z)\widehat{R}(\frac{zC}{w})$, on trouve, pour tous $1 < i \leq k$:

$$(w - zC^{-1})l_{i,i+1}^+(z)l_{1i}^-(w) + C^{-1}z(v - v^{-1})l_{1,i+1}^+(z)l_{ii}^-(w) = \\ (w - zC)l_{1i}^-(w)l_{i,i+1}^+(z) + w(v - v^{-1})l_{1,i+1}^-(w)l_{ii}^+(z),$$

$$(w - zC^{-1})l_{ii}^+(z)l_{1i}^-(w) + C^{-1}z(v - v^{-1})l_{1i}^+(z)l_{ii}^-(w) = (wv - zCv^{-1})l_{1i}^-(w)l_{ii}^+(z),$$

$$(w - zC^{-1})l_{ii}^+(z)l_{1,i+1}^-(w) + C^{-1}z(v - v^{-1})l_{1i}^+(z)l_{i,i+1}^-(w) = \\ (w - zC)l_{1,i+1}^-(w)l_{ii}^+(z) + zC(v - v^{-1})l_{1i}^-(w)l_{i,i+1}^+(z),$$

$$(w - zC^{-1})l_{ik}^+(z)l_{11}^-(w) + C^{-1}z(v - v^{-1})l_{1k}^+(z)l_{i1}^-(w) = \\ (w - zC)l_{11}^-(w)l_{ik}^+(z) + w(v - v^{-1})l_{1k}^-(w)l_{i1}^+(z).$$

En écrivant les termes en $w^0 z^0$ dans les trois premières équations et le terme en $w^1 z^0$ dans la dernière équation, on obtient les relations de commutation, pour tous $1 < i \leq k$:

$$[l_{i,i+1}^+ [0], l_{1i}^- [-1]] = (v - v^{-1}) l_{1,i+1}^- [-1] l_{ii}^+ [0], \quad l_{ii}^+ [0] l_{1i}^- [-1] = v l_{1i}^- [-1] l_{ii}^+ [0], \\ l_{ii}^+ [0] l_{1,i+1}^- [-1] = l_{1,i+1}^- [-1] l_{ii}^+ [0], \quad l_{ik}^+ [0] l_{11}^- [0] = l_{11}^- [0] l_{ik}^+ [0].$$

On en déduit que :

$$f(E_0) = -o(1)f(K_{\alpha_0})\{f(F_{n-1}), \dots, \{f(F_2), f(x_{11}^-)\}\} \\ = \frac{o(1)}{v-v^{-1}} v^n l_{1n}^- [-1] l_{nn}^+ [0].$$

De même, on montre que $f(F_0) = \frac{-o(1)}{v-v^{-1}} \frac{1}{v^n} l_{nn}^- [0] l_{n1}^+ [1]$. Ces formules pour f permettent de voir que f est un homomorphisme de bigèbres. \square

Remarque. Des calculs semblables à ceux de la preuve de la proposition précédente montrent les relations

$$l_{ii}^+ [0] l_{jk}^\pm [m] = v^{\delta_{ik} - \delta_{ij}} l_{jk}^\pm [m] l_{ii}^+ [0] \quad \text{et} \quad l_{ii}^- [0] l_{jk}^\pm [m] = v^{\delta_{ij} - \delta_{ik}} l_{jk}^\pm [m] l_{ii}^- [0]$$

dans $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}}_n)$.

3.5.2 Morphismes d'évaluation

On a vu au théorème 3.2 que $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ admettait une présentation par des générateurs $(l_{ij}^+)_{1 \leq i \leq j \leq n}$ et $(l_{ij}^-)_{1 \leq j < i \leq n}$. Ceci permet de donner une version intrinsèque des applications d'évaluation de la définition 3.24.

Proposition 3.37 a) Il existe un homomorphisme injectif d'algèbres de Hopf $g : U_q(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ tel que $g(l_{ij}^+) = l_{ij}^+[0]$ (pour $1 \leq i \leq j \leq n$) et $g(l_{ij}^-) = l_{ij}^-[0]$ (pour $1 \leq j < i \leq n$).

b) Pour tout $x \in \mathbb{C}^\times$, il existe un homomorphisme surjectif d'algèbres $ev_x : U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n) \rightarrow U_q(\mathfrak{gl}_n)$ tel que :

$$ev_x : \left(U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n) \rightarrow U_q(\mathfrak{gl}_n), \quad C \mapsto 1 \right.$$

$$l_{ij}^+[m] \mapsto \begin{cases} l_{ij}^+ x^{-m} & (\text{pour } i \leq j \text{ et } m \geq 0), \\ -l_{ij}^- x^{-m} & (\text{pour } i > j \text{ et } m \geq 1), \end{cases}$$

$$l_{ij}^-[m] \mapsto \begin{cases} l_{ij}^- x^{-m} & (\text{pour } i \geq j \text{ et } m \leq 0), \\ -l_{ij}^+ x^{-m} & (\text{pour } i < j \text{ et } m \leq -1). \end{cases} \Bigg).$$

On a $ev_x \circ g = \text{id}_{U_q(\mathfrak{gl}_n)}$.

c) L'homomorphisme $f : U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n) \rightarrow U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ du théorème 3.36 est tel que $ev_x \circ f$ coïncide avec l'application d'évaluation de la définition 3.24.

Preuve a) Introduisons les matrices $L^+[0]$ et $L^-[0]$ dont les coefficients sont les $l_{ij}^+[0]$ et $l_{ij}^-[0] \in U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ respectivement. Les relations de la définition 3.34 imposent les relations suivantes sur $L^\pm[0]$ (voir [Cd]) :

$$\widehat{R}L_2^\pm[0]L_1^\pm[0] = L_2^\pm[0]L_1^\pm[0]\widehat{R} \quad \text{et} \quad \widehat{R}L_2^+[0]L_1^-[0] = L_2^-[0]L_1^+[0]\widehat{R}.$$

On en déduit l'existence de g . L'injectivité sera une conséquence directe du b).

b) Dans la définition 3.34, les relations entre les générateurs $(l_{ij}^\pm[m])$ sont encodées à l'aide de matrices $L^\pm(z)$ à coefficients dans $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)[[z^{\pm 1}]]$. De manière similaire, l'application ev_x peut être encodée sous la forme :

$$ev_x(L^+(z)) = \frac{xL^+ - zL^-}{x - z} \quad \text{et} \quad ev_x(L^-(z)) = \frac{xL^+ - zL^-}{x - z}.$$

Il suffit donc de vérifier que l'on a, dans $U_q(\mathfrak{gl}_n)$, les relations :

$$(w\widehat{R} - z\widehat{R}^{-1})(xL_2^+ - zL_2^-)(xL_1^+ - wL_1^-) = (xL_2^+ - wL_2^-)(xL_1^+ - zL_1^-)(w\widehat{R} - z\widehat{R}^{-1}).$$

Cela est conséquence facile des relations du théorème 3.2 et de la relation de Hecke $\widehat{R} - \widehat{R}^{-1} = (v - v^{-1})I \otimes I$.

- c) Le dernier point de la proposition découle du théorème 3.36, de la définition 3.24 et de la définition des éléments l_{ij}^{\pm} de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ (§3.1.1).

□

On voit ici que les applications d'évaluation de Jimbo [CP5, §5.4] sont faciles à définir sur la présentation F.R.T. de $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ (définition 3.34). En revanche, il est difficile de décrire ces applications dans la présentation « algèbre de boucles » du théorème 3.35.

Je vais maintenant montrer comment calculer les polynômes de Chari–Pressley pour un $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module obtenu par image inverse d'un $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module simple polynomial par une évaluation. J'aurai besoin de la proposition suivante :

Proposition 3.38 *L'application ω de $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ dans $U_q(\mathfrak{gl}_n)$, donnée dans la présentation F.R.T. de $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ par :*

$$\omega(L^+(z)) = {}^t(L^-(1/z)), \quad \omega(L^-(z)) = {}^t(L^+(1/z)), \quad \omega(C) = C^{-1},$$

est un automorphisme involutif d'algèbres et un antihomomorphisme de cogèbres. Si $f : U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n) \rightarrow U_q(\mathfrak{gl}_n)$ est l'homomorphisme du théorème 3.36, alors on a :

$$\begin{aligned} \omega \circ f(K_i) &= f(K_i^{-1}), \\ \omega \circ f(h_{i,r}) &= -f(h_{i,-r}), \\ \omega \circ f(x_{i,r}^{\pm}) &= -v^{\mp 1} f(x_{i,-r}^{\mp}), \\ \omega \circ f(C) &= f(C^{-1}). \end{aligned}$$

Preuve On peut définir la transposée d'un élément $M \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})^{\otimes 2}$ dans le premier, le second ou les deux facteurs du produit tensoriel : on notera ${}^{t_1}M$, ${}^{t_2}M$ et tM les résultats de ces trois opérations. La matrice $\widehat{R}(z)$ vérifie la symétrie $\widehat{R}(z) = {}^t\widehat{R}(z)$. L'existence de ω découle directement de ce fait.

Nous avons donc $\omega(l_{ij}^{\pm}[m]) = l_{ji}^{\mp}[-m]$. Les relations données dans le théorème 3.36 impliquent alors que :

$$\begin{aligned} \omega \circ f(K_{\alpha_i}) &= f(K_{-\alpha_i}), & \omega \circ f(E_i) &= -v^{-1}f(F_i), & \omega \circ f(F_i) &= -vf(E_i) \quad (\text{si } i \neq 0), \\ \omega \circ f(K_{\alpha_0}) &= f(K_{-\alpha_0}), & \omega \circ f(E_0) &= -v^{2n-1}f(F_0), & \omega \circ f(F_0) &= -v^{1-2n}f(E_0). \end{aligned}$$

Définissons à présent un deuxième automorphisme involutif ω_2 de l'algèbre $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$, dans la présentation « algèbre de boucles », par :

$$\begin{aligned} \omega_2(C) &= C^{-1}, & \omega_2(k_i^{\pm}(z)) &= k_i^{\mp}\left(\frac{1}{v^{2(i-1)}z}\right) \prod_{j=1}^{i-1} k_j^{\mp}\left(\frac{1}{v^{2(j-1)}z}\right) / k_j^{\mp}\left(\frac{1}{v^{2j}z}\right), \\ \omega_2(X_i^{\pm}(z)) &= -v^{\mp 1} X_i^{\mp}\left(\frac{1}{v^{2i}z}\right). \end{aligned}$$

On déduit du théorème 3.36 que ω_2 envoie $f(K_i)$, $f(h_{i,r})$ et $f(x_{i,r}^{\pm})$ sur respectivement $f(K_i^{-1})$, $-f(h_{i,-r})$ et $-v^{\mp 1}f(x_{i,-r}^{\mp})$. Compte-tenu des relations (3.1) à (3.3), on en déduit que ω et ω_2 coïncident sur l'image de f . (On a en fait $\omega = \omega_2$.) □

Le terme en z^0 de la série formelle $\omega(k_i^\pm(z))$ est $\omega(l_{ii}^\pm[0]) = l_{ii}^\mp[0]$; il est donc inversible dans $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$, et l'on peut définir la série formelle $k_i'^\pm(z) = (\omega(k_i^\pm(z)))^{-1}$ dans $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)[[z^{\pm 1}]]$. Soit J^+ le sous-espace vectoriel de $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$ engendré par les éléments $(l_{ij}^\pm[m])_{i>j}$.

Proposition 3.39 *Les séries formelles $k_i'^\pm(z)$ et $l_{ii}^\pm(z)$ vérifient :*

$$\begin{aligned} k_i'^\pm(z) &\equiv (l_{ii}^\mp(1/z))^{-1} \bmod U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \cdot J^+, \\ \Delta(k_i'^\pm(z)) &\equiv k_i'^\pm(z) \otimes k_i'^\pm(z) \bmod U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \cdot J^+ \otimes U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) + U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \otimes U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \cdot J^+, \\ f(K_i^{\pm 1} \exp(\pm(v - v^{-1}) \sum_{r \geq 1} h_{i, \pm r} z^{\pm r})) &= k_i'^\pm(\frac{z}{v^i C^{1/2}}) / k_{i+1}'^\pm(\frac{z}{v^i C^{1/2}}), \end{aligned}$$

où f est l'homomorphisme du théorème 3.36.

Preuve Soit $J^- = \omega(J^+)$ le sous-espace vectoriel de $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$ engendré par les éléments $(l_{ij}^\pm[m])_{i<j}$. La décomposition LU du théorème 3.35 montre que l'on a :

$$k_{i, \pm r}^\pm \equiv l_{ii}^\pm[\pm r] \bmod U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \cdot J^-.$$

Par ailleurs le coproduit dans $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n)$:

$$\Delta(l_{ij}^\pm[\pm r]) = \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^r l_{ik}^\pm[\pm s] \otimes l_{kj}^\pm[\pm(r-s)]$$

entraîne que l'idéal à gauche $U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \cdot J^-$ est un coïdéal :

$$\Delta(U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \cdot J^-) \subseteq U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \cdot J^- \otimes U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) + U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \otimes U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \cdot J^-$$

et que :

$$\Delta(l_{ii}^\pm[\pm r]) \equiv \sum_{s=0}^r l_{ii}^\pm[\pm s] \otimes l_{ii}^\pm[\pm(r-s)] \bmod U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \cdot J^- \otimes U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) + U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \otimes U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \cdot J^-.$$

On en déduit les trois équations :

$$\begin{aligned} k_i^\pm(z) &\equiv l_{ii}^\pm(z) \bmod U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \cdot J^-, \\ \Delta(k_i^\pm(z)) &\equiv k_i^\pm(z) \otimes k_i^\pm(z) \bmod U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \cdot J^- \otimes U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) + U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \otimes U_q(\tilde{\mathfrak{gl}}_n) \cdot J^-, \\ f(K_i^{\mp 1} \exp(\mp(v - v^{-1}) \sum_{r \geq 1} h_{i, \mp r} z^{\mp r})) &= k_{i+1}^\pm(\frac{C^{1/2}}{v^i z}) / k_i^\pm(\frac{C^{1/2}}{v^i z}), \end{aligned}$$

auxquelles on applique ω . Le passage d'une série $(k_i^\pm(z))^{-1}$ à la série $k_i'^\pm(z)$ se fait sans difficulté, en utilisant le fait que les coefficients des différentes puissances de z dans cette série commutent deux à deux (théorème 3.35). \square

Proposition 3.40 Soit $\lambda = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n \in \mathbb{P}$ un poids polynomial dominant, et $L(\lambda)$ le $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module simple de plus haut poids λ (voir 3.1). Soit $x \in \mathbb{C}^\times$, et soit $(Q_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille de polynômes $Q_i(z) = \prod_{j=1}^{\lambda_i} (zxq^j - 1)$. Dans le $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ -module $\text{ev}_x^* L(\lambda)$, les coefficients de la série génératrice $k_i'^+(z)$ (respectivement $k_i'^-(z)$) agissent sur le vecteur de plus haut poids comme les scalaires donnés par les coefficients de la série obtenue en développant $v^{\lambda_i} \frac{Q_i(zv^{-2})}{Q_i(z)}$ au voisinage de zéro (resp. de l'infini).

Preuve Les éléments de J^+ sont dans l'annulateur du vecteur de plus haut poids. Les coefficients de la série génératrice $k_i'^{\pm}(z)$ agissent donc sur ce vecteur comme le font les coefficients de la série $(l_{ii}^{\mp}(\frac{1}{z}))^{-1}$. Par définition du morphisme d'évaluation (proposition 3.37), ils agissent donc comme les coefficients de la série génératrice $\left(\frac{xK_{\varepsilon_i} - \frac{1}{z}K_{-\varepsilon_i}}{x - \frac{1}{z}}\right)^{-1}$. Cette action est donc scalaire, et donnée en développant en série en $z^{\pm 1}$ la fraction rationnelle

$$\frac{zx - 1}{zxv^{\lambda_i} - v^{-\lambda_i}} = v^{\lambda_i} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \frac{zxq^{j-1} - 1}{zxq^j - 1} = v^{\lambda_i} \frac{Q_i(zq^{-1})}{Q_i(z)}.$$

□

Corollaire 3.41 Soient λ , $L(\lambda)$, x , et (Q_i) comme dans la proposition 3.40. Soit (P_i) la famille de polynômes : $P_i(z) = Q_i(zv^{-i})/Q_{i+1}(zv^{-i}) = \prod_{j=\lambda_{i+1}+1}^{\lambda_i} (zxv^{2j-i} - 1)$. Alors les (P_i) sont les polynômes de Chari–Pressley du $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -module simple $\text{ev}_x^* L(\lambda)$.

Preuve Le vecteur de plus haut poids dans $L(\lambda)$ est un $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ -vecteur de plus haut poids dans $\text{ev}_x^* L(\lambda)$, qui engendre ce dernier module. L'action des éléments K_i et $h_{i,r}$ sur ce vecteur est scalaire, et est donnée par les propositions 3.39 et 3.40. La comparaison du résultat alors obtenu avec les résultats du paragraphe 3.2.2 prouve l'assertion. □

3.5.3 Le foncteur de Schur–Weyl pour $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$

Soit $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ la représentation polynomiale tensorielle de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ (voir §3.4.1). On a muni cet espace d'une structure de $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathbb{GL}}_d)$ -module à droite. Dans l'esprit de la construction F.R.T., Ginzburg, Reshetikhin et Vasserot ont étendu la structure de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_n)$ - $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathbb{GL}}_d)$ -bimodule de $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ en une structure de $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ - $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathbb{GL}}_d)$ -bimodule. Je rappelle ci-dessous leur construction.

L'espace $V[t, t^{-1}]$ du §3.4.1 est muni de la base $(e_i \otimes t^p)_{1 \leq i \leq n, p \in \mathbb{Z}}$, dont la base duale sera notée $((e_i \otimes t^p)^*)$. Les matrices $\widehat{R} = \sum \widehat{R}_{i \otimes k, j \otimes \ell} E_{ij} \otimes E_{kl}$ et $(\widehat{R})^{-1} = \sum (\widehat{R})_{i \otimes k, j \otimes \ell}^{-1} E_{ij} \otimes E_{kl}$ ont été définies au §3.5.1. Soit $P = \sum_{1 \leq i, j \leq n} E_{ij} \otimes E_{ji} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})^{\otimes 2}$ la matrice de l'opérateur qui échange les deux facteurs du produit tensoriel. Si T et L sont deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans des espaces vectoriels en dualité, on notera $\langle T_1, L_2 \rangle$ l'élément de $\text{Mat}_n(\mathbb{C})^{\otimes 2}$ obtenu en prenant coefficient matriciel par coefficient matriciel les crochets de dualité entre T et L .

Pour toute représentation $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ -linéaire d'une algèbre U dans $V[t, t^{-1}]$, on peut définir les formes linéaires $t_{ij}[p] : (U \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \langle (e_i \otimes t^p)^*, x \cdot (e_j \otimes 1) \rangle)$, ainsi que la matrice-série génératrice $T(t) = (\sum_{p \in \mathbb{Z}} t_{ij}[p] t^p)$.

Théorème 3.42 [GRV, §4]: *Il existe une représentation de $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ dans $V[t, t^{-1}]$, qui est $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ -linéaire, et pour laquelle les coefficients matriciels $t_{ij}[p] \in (U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n))^*$ vérifient :*

$$\begin{aligned} \langle t_{ij}[p], l_{k\ell}^+[m] \rangle &= \begin{cases} \delta_{p,-m} \widehat{R}_{k \otimes i, j \otimes \ell} & \text{si } k \leq \ell, m \geq 0, \\ -\delta_{p,-m} (\widehat{R})_{k \otimes i, j \otimes \ell}^{-1} & \text{si } k > \ell, m \geq 1, \end{cases} & \langle t_{ij}[p], C \rangle &= \delta_{p,0} \delta_{ij}, \\ \langle t_{ij}[p], l_{k\ell}^-[m] \rangle &= \begin{cases} \delta_{p,-m} (\widehat{R})_{k \otimes i, j \otimes \ell}^{-1} & \text{si } k \geq \ell, m \leq 0, \\ -\delta_{p,-m} \widehat{R}_{k \otimes i, j \otimes \ell} & \text{si } k < \ell, m \leq -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Les formes linéaires $t_{ij}[p]$ vérifient dans l'algèbre $(U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n))^*$ les relations suivantes :

$$\widehat{R}\left(\frac{z}{w}\right) T_1(w) T_2(z) = T_1(z) T_2(w) \widehat{R}\left(\frac{z}{w}\right).$$

On peut coder les relations ci-dessus sous la forme compacte :

$$\langle T_1(t), L_2^\pm(z) \rangle = P \frac{t \widehat{R} - z \widehat{R}^{-1}}{t - z} \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}[t, t^{-1}][[z^{\pm 1}]])^{\otimes 2}.$$

Le théorème 3.36 montre que ces formules prolongent à $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ la structure de $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -module sur $V[t, t^{-1}]$. Par produit tensoriel, on en déduit une action de $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ sur $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$.

Proposition 3.43 [GRV]: *L'action de l'algèbre de Hecke sur $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ définie au §3.4.1 commute à l'action de $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$.*

Preuve Je vais prouver cette proposition pour $d = 2$. L'algèbre $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_2)$ est engendrée par $x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}$ et T_{s_1} . Les actions de $x_1^{\pm 1}$ et de $x_2^{\pm 1}$ sur $V^{\otimes 2}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ commutent à l'action de $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$, et seul T_{s_1} pose problème. Soit $A_{s_1} = (v^{-1} T_{s_1} x_1 - v T_{s_1}^{-1} x_2) \in \mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_2)$.

Toute matrice appartenant à $\text{Mat}_n(\mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}])^{\otimes 2}$ définit une application $\mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ -linéaire dans $V^{\otimes 2}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$. Soit $\varsigma : V^{\otimes 2}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}] \rightarrow V^{\otimes 2}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ l'application \mathbb{C} -linéaire définie par $\varsigma(e_i \otimes e_j \otimes t_1^{p_1} t_2^{p_2}) = e_i \otimes e_j \otimes t_1^{p_2} t_2^{p_1}$.

L'action de x_1 (resp. de x_2) est donnée par la multiplication par t_1^{-1} (resp. t_2^{-1}). Puisque $A_{s_1} x_1 = x_2 A_{s_1}$ et $A_{s_1} x_2 = x_1 A_{s_1}$, l'action de A_{s_1} sur $V^{\otimes 2}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ est donnée par l'action de ς suivie de l'action de la matrice $(t_1^{-1} \widehat{R} - t_2^{-1} \widehat{R}^{-1})$. L'action d'un élément $x \in U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ sur $V^{\otimes 2}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ est donnée par la matrice $\langle T(t_1), x_{(1)} \rangle \otimes \langle T(t_2), x_{(2)} \rangle$. La relation $\widehat{R}\left(\frac{t_1}{t_2}\right) T_1(t_2) T_2(t_1) = T_1(t_1) T_2(t_2) \widehat{R}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)$ signifie donc que l'action de A_{s_1} sur $V^{\otimes 2}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]$ commute à celle de x .

L'action de A_{s_1} est donc $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ -linéaire ; de l'égalité $A_{s_1} = v^{-1} T_{s_1} (x_1 - x_2) + (v - v^{-1}) x_2$, on déduit alors que l'action de T_{s_1} est $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ -linéaire. \square

La représentation polynomiale tensorielle est donc un $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ - $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -bimodule. Le foncteur \mathcal{F}_d^n est donc un foncteur de la catégorie des $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_d)$ -modules vers la catégorie des $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ -modules. Les propositions 3.23, 3.26 et 3.27 s'étendent immédiatement au cas de $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$. C'est aussi le cas de la proposition 3.25, mais cela nécessite une nouvelle preuve. Celle-ci requiert le lemme suivant :

Lemme 3.44 *Soit $d \geq 1$ un entier, $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_{d+1})$ l'algèbre de Hecke du §3.1.2, $x \in \mathbb{C}^\times$, t_1, \dots, t_d, z des indéterminées. Dans $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_{d+1})$, on pose $\sigma_i = v^{-1}T_{s_i}$. On considère les éléments :*

$$t'_1 = x^{-1}\sigma_2 \cdots \sigma_{d-1}\sigma_d^2\sigma_{d-1} \cdots \sigma_2, \dots, \quad t'_{d-1} = x^{-1}\sigma_d^2, \quad t'_d = x^{-1} \in \mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_{d+1}),$$

ainsi que les polynômes :

$$\begin{aligned} P &= (t_1\sigma_1 - z\sigma_1^{-1}) \cdots (t_d\sigma_d - z\sigma_d^{-1}) \in \mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_{d+1})[t_1, \dots, t_d, z], \\ Q &= (t_1 - z) \cdots (t_{d-1} - z)(x^{-1}\sigma_1 \cdots \sigma_d - z\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_d^{-1}) \in \mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_{d+1})[t_1, \dots, t_d, z]. \end{aligned}$$

(Les t_i et z commutent entre eux et avec les éléments de $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_{d+1})$.)

a) Les éléments t'_1, \dots, t'_d commutent deux à deux.

b) $P - Q$ appartient à l'idéal à gauche de $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_{d+1})[t_1, \dots, t_d, z]$ engendré par les éléments $(t_i - t'_i)_{1 \leq i \leq d}$.

Preuve Le a) est équivalent à l'existence du morphisme d'évaluation de $\mathcal{H}_q(\widehat{\mathrm{GL}}_{d+1})$ dans $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_{d+1})$ (voir la définition 3.24). La preuve du b) est une récurrence sur d . Posons :

$$P_1 = (t_2\sigma_2 - z\sigma_2^{-1}) \cdots (t_d\sigma_d - z\sigma_d^{-1}).$$

Par récurrence sur d , on a :

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv (t_2 - z) \cdots (t_{d-1} - z)(x^{-1}\sigma_2 \cdots \sigma_d - z\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_d^{-1}) \\ &\quad \text{mod } (t_2 - t'_2) \mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_{d+1})[t_1, \dots, t_d, z] + \cdots + (t_d - t'_d) \mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_{d+1})[t_1, \dots, t_d, z]. \end{aligned}$$

Les relations de définition de $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_{d+1})$ entraînent que $(t_1\sigma_1 - z\sigma_1^{-1})$ commute à t'_2, \dots, t'_d . Elles entraînent également l'identité facile :

$$\begin{aligned} (x^{-1}\sigma_d \cdots \sigma_1 - z\sigma_d^{-1} \cdots \sigma_1^{-1})(x^{-1}\sigma_2 \cdots \sigma_d - z\sigma_2^{-1} \cdots \sigma_d^{-1}) &= \\ (x^{-1}\sigma_d \cdots \sigma_2 - z\sigma_d^{-1} \cdots \sigma_2^{-1})(x^{-1}\sigma_1 \cdots \sigma_d - z\sigma_1^{-1} \cdots \sigma_d^{-1}). \end{aligned}$$

Soit alors $J \subseteq \mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_{d+1})[t_1, \dots, t_d, z]$ l'idéal à gauche engendré par les éléments $(t_i - t'_i)_{1 \leq i \leq d}$. On peut calculer :

$$\begin{aligned}
P &= (t_1 \sigma_1 - z \sigma_1^{-1}) P_1 \\
&\equiv (t_2 - z) \cdots (t_{d-1} - z) (t_1 \sigma_1 - z \sigma_1^{-1}) (x^{-1} \sigma_2 \cdots \sigma_d - z \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_d^{-1}) \bmod J \\
&\equiv (t_2 - z) \cdots (t_{d-1} - z) (t'_1 \sigma_1 - z \sigma_1^{-1}) (x^{-1} \sigma_2 \cdots \sigma_d - z \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_d^{-1}) \bmod J \\
&\equiv (t_2 - z) \cdots (t_{d-1} - z) (\sigma_2 \cdots \sigma_d) (x^{-1} \sigma_d \cdots \sigma_1 - z \sigma_d^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}) \\
&\quad (x^{-1} \sigma_2 \cdots \sigma_d - z \sigma_2^{-1} \cdots \sigma_d^{-1}) \bmod J \\
&\equiv (t_2 - z) \cdots (t_{d-1} - z) (\sigma_2 \cdots \sigma_d) (x^{-1} \sigma_d \cdots \sigma_2 - z \sigma_d^{-1} \cdots \sigma_2^{-1}) \\
&\quad (x^{-1} \sigma_1 \cdots \sigma_d - z \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_d^{-1}) \bmod J \\
&\equiv (t_2 - z) \cdots (t_{d-1} - z) (t'_1 - z) (x^{-1} \sigma_1 \cdots \sigma_d - z \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_d^{-1}) \bmod J \\
&\equiv Q \bmod J.
\end{aligned}$$

□

Je donne à présent une preuve de l'extension à $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ de la proposition 3.25.

Preuve Il suffit de montrer le résultat dans le cas du $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -module régulier K . On dispose de l'application linéaire bijective $(\mathrm{ev}_{x^{-1}}^*(V^{\otimes d}) \rightarrow \mathcal{F}_d^n(\mathrm{ev}_x^* K), e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \mapsto e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \otimes 1)$.

Calculons l'action des éléments $l_{ij}^\pm[m]$ dans les bases ainsi décrites. Comme d'habitude, il est pratique de calculer à la fois l'action de tous les éléments $l_{ij}^\pm[m]$ en utilisant la matrice à coefficients séries formelles $L^\pm(z)$. Les indices de ligne et de colonne de cette matrice seront traités comme ceux d'un $d + 1$ -ième facteur dans le produit tensoriel.

Dans $V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$, $L_{d+1}^\pm(z)$ agit par la matrice :

$$\begin{aligned}
\langle T_1(t_1) \cdots T_d(t_d), L_{d+1}^\pm(z) \rangle &= \langle T_1(t_1), L_{d+1}^\pm(z) \rangle \otimes \cdots \otimes \langle T_d(t_d), L_{d+1}^\pm(z) \rangle \\
&= P_{1,d+1} \frac{t_1 \widehat{R}_{1,d+1} - z \widehat{R}_{1,d+1}^{-1}}{t_1 - z} \cdots P_{d,d+1} \frac{t_d \widehat{R}_{d,d+1} - z \widehat{R}_{d,d+1}^{-1}}{t_d - z} \\
&= P_{1,d+1} \cdots P_{d,d+1} \frac{t_1 \widehat{R}_{12} - z \widehat{R}_{12}^{-1}}{t_1 - z} \cdots \frac{t_d \widehat{R}_{d,d+1} - z \widehat{R}_{d,d+1}^{-1}}{t_d - z}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

En tensorisant par $\mathrm{ev}_x^* K$, le vecteur $e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \otimes t_1^{p_1} \cdots t_d^{p_d} \in V^{\otimes d}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}]$ est identifié au vecteur :

$$\begin{aligned}
&(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d} \otimes 1) \cdot (xq^{d-1} T_{s_1}^{-1} \cdots T_{s_{d-1}}^{-2} \cdots T_{s_1}^{-1})^{-p_1} \cdots (xq T_{s_{d-1}}^{-2})^{-p_{d-1}} (x)^{-p_d} = \\
&x^{-(p_1 + \cdots + p_d)} \left[(\widehat{R}_{d-1,d})^{2p_{d-1}} \cdots (\widehat{R}_{12} \cdots \widehat{R}_{d-1,d}^2 \cdots \widehat{R}_{12})^{p_1} \cdot (e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_d}) \right] \otimes 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, dans le module $\mathcal{F}_d^n(\mathrm{ev}_x^* K)$, $L_{d+1}^\pm(z)$ agit par la matrice obtenue en développant (3.4) en série formelle en $z^{\pm 1}$, en rassemblant à gauche les indéterminées t_1, \dots, t_d , et en leur substituant les matrices $x^{-1}(\widehat{R}_{12} \cdots \widehat{R}_{d-1,d}^2 \cdots \widehat{R}_{12}), \dots, x^{-1}(\widehat{R}_{d-1,d})^2, x^{-1}$ respectivement.

D'un autre côté, dans $\text{ev}_{x^{-1}}^*(V^{\otimes d})$, la matrice $L^\pm(z)$ agit comme la matrice $\frac{x^{-1}L^+ - zL^-}{x^{-1} - z}$, à coefficients dans $U_q(\mathfrak{gl}_n)[[z^{\pm 1}]]$. Or dans $V^{\otimes d}$, les éléments $l_{ij}^\pm \in U_q(\mathfrak{gl}_n)$ agissent par les matrices $\langle T_1 \cdots T_d, l_{ij}^\pm \rangle$, et cette action est encodée sous la forme (voir §3.1.1) :

$$\begin{aligned} \langle T_1 \cdots T_d, L_{d+1}^\pm \rangle &= \langle T_1, L_{d+1}^\pm \rangle \otimes \cdots \otimes \langle T_d, L_{d+1}^\pm \rangle \\ &= P_{1,d+1} \widehat{R}_{1,d+1}^{\pm 1} \cdots P_{d,d+1} \widehat{R}_{d,d+1}^{\pm 1} = P_{1,d+1} \cdots P_{d,d+1} \widehat{R}_{12}^{\pm 1} \cdots \widehat{R}_{d,d+1}^{\pm 1}. \end{aligned}$$

Ainsi, dans $\text{ev}_{x^{-1}}^*(V^{\otimes d})$, $L^\pm(z)$ agit par la matrice :

$$P_{1,d+1} \cdots P_{d,d+1} \frac{x^{-1} \widehat{R}_{12} \cdots \widehat{R}_{d,d+1} - z \widehat{R}_{12}^{-1} \cdots \widehat{R}_{d,d+1}^{-1}}{x^{-1} - z}.$$

Les matrices $\widehat{R}_{i,i+1}$ vérifient les mêmes relations que les éléments σ_i de $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_{d+1})$ introduits dans le lemme 3.44. Ce lemme dit alors que les actions de $L^\pm(z)$ dans $\text{ev}_{x^{-1}}^*(V^{\otimes d})$ et dans $\mathcal{F}_d^n(\text{ev}_x^* K)$ sont données par les mêmes matrices. \square

Avec la proposition 3.25, on peut montrer l'extension à $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ de la proposition 3.28. J'étends enfin à $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ le théorème 3.29.

Définition 3.45 *Un $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ -module est dit polynomial s'il est somme directe de modules qui sont des images, par les foncteurs \mathcal{F}_d^n , de $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -modules de dimensions finies (pour des $d \in \mathbb{N}$).*

Reprenons les notations du début du §3.4.4. A une famille de segments $(\Delta_j)_{1 \leq j \leq t}$, de longueur totale d , donnés par $\Delta_j = (q^{d_j-1}x_j, \dots, x_j)$, on associe la famille de polynômes (Q_i) donnée par : $Q_i(z) = \prod_{\{j | d_j \geq i\}} (zq - x_j)$, et les scalaires $\lambda_i = \deg Q_i$. Le polynôme Q_{i+1} divise le polynôme Q_i , et l'on a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$.

Théorème 3.46 .

- a) *Soit $(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ une suite de segments de longueur totale d , et soit $\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle$ le $\mathcal{H}_q(\widehat{\text{GL}}_d)$ -module simple de dimension finie qui lui est associé par la correspondance du théorème 3.16. Si tous les segments Δ_j sont de longueurs inférieures ou égales à n , alors $\mathcal{F}_d^n(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle)$ est un $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ -module simple ; ce module possède un unique $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ -vecteur m de plus haut poids, sur lequel les coefficients de la série génératrice $k_i^+(z)$ (resp. $k_i^-(z)$) agissent par des scalaires, donnés par les coefficients de la série obtenue en développant la fonction rationnelle $z \mapsto v^{\lambda_i} \frac{Q_i(zv^{-2})}{Q_i(z)}$ en série au voisinage de zéro (resp. l'infini). S'il existe un segment de longueur strictement supérieure à n , alors $\mathcal{F}_d^n(\langle \Delta_1, \dots, \Delta_t \rangle)$ est le $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ -module zéro.*
- b) *Les sous-quotients simples d'un $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ -module polynomial sont des $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ -modules polynomiaux.*
- c) *Le produit tensoriel de deux modules polynomiaux est un module polynomial.*

Preuve Le a) s'obtient en réexaminant la preuve du théorème 3.29, en utilisant la version étendue à $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ de la proposition 3.28, et la proposition 3.39.

Soit K un $\mathcal{H}_q(\widehat{GL}_d)$ -module de dimension finie. Le a) et l'exactitude de \mathcal{F}_d^n entraînent que \mathcal{F}_d^n envoie une série de Jordan–Hölder de K sur une série de Jordan–Hölder de $\mathcal{F}_d^n(K)$. Tout sous-quotient simple de $\mathcal{F}_d^n(K)$ est donc isomorphe à l'image par \mathcal{F}_d^n d'un sous-quotient simple de K . Ceci montre b).

c) est conséquence de l'extension à $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ de la proposition 3.23 b). \square

On peut alors construire un anneau de Grothendieck $\text{PRep}(U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n))$ pour la catégorie des modules polynomiaux sur $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$, voir que les foncteurs $(\mathcal{F}_d^n)_{d \in \mathbb{N}}$ définissent un morphisme d'anneaux $\widehat{\mathcal{R}} \rightarrow \text{PRep}(U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n))$, et définir pour $n \leq N$ des foncteurs de troncations qui donnent lieu à des morphismes d'anneaux $\text{PRep}(U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_N)) \rightarrow \text{PRep}(U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n))$. On dispose enfin de foncteurs d'oublis de la structure affine : tout $\mathcal{H}_q(\widehat{GL}_d)$ -module est un $\mathcal{H}_q(GL_d)$ -module, tout $U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)$ est un $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module, et l'on introduit donc pour $\mathcal{H}_q(GL_d)$ et $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ les anneaux \mathcal{R} et $\text{PRep}(U_q(\mathfrak{gl}_n))$, analogues à $\widehat{\mathcal{R}}$ et $\text{PRep}(U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n))$. On a alors les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{\mathcal{R}} & & \mathcal{R} \\
 \mathcal{F}_d^N \swarrow & & \swarrow S_d^N \\
 \text{PRep}(U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_N)) & \longrightarrow & \text{PRep}(U_q(\mathfrak{gl}_N)) \\
 \mathcal{F}_d^n \searrow & & \searrow S_d^n \\
 \text{PRep}(U_q(\widetilde{\mathfrak{gl}}_n)) & & \text{PRep}(U_q(\mathfrak{gl}_n))
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \xleftarrow{\text{ev}^*} \\
 \xrightarrow{\text{oublis}}
 \end{array}$$

Remarque. Comparant ce résultat avec l'énoncé du théorème 3.4, nous voyons que la famille de segments $(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ joue le rôle du diagramme de Young D et que la famille de polynômes (Q_i) joue le rôle des coordonnées (λ_i) du poids λ dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. L'analogie de l'élément w du groupe \mathfrak{S}_d (ou plutôt de la cellule bilatère à laquelle w appartient, voir [KL]) n'apparaît pas naturellement dans l'approche de Rogawski. Je renvoie à [Lu2] et [GRV] pour une approche plus géométrique des représentations de $\mathcal{H}_q(\widehat{GL}_d)$ et de la dualité de Schur–Weyl quantique affine.

3.A Annexe

Si V est la représentation naturelle d'un groupe orthogonal ou symplectique G , le groupe symétrique \mathfrak{S}_d , agissant par permutations des facteurs sur la puissance tensorielle $V^{\otimes d}$, n'engendre pas tout le commutant de l'action (diagonale) de G , et il faut considérer l'algèbre de Brauer (voir par exemple [LR]). Dans le cas q -déformé, Reshetikhin a énoncé que l'action du groupe des tresses (via la R -matrice) dans les puissances tensorielles de la représentation naturelle de $U_q(\mathfrak{so}_n)$ ou $U_q(\mathfrak{sp}_{2n})$ engendre tout le commutant de l'algèbre : la déformation lève les dégénérescences. (Le même résultat est vrai pour l'action du groupe des tresses pures, comme il résulte de la démonstration de [LR].)

L'énoncé analogue pour le $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ -module W donné par la déformation de la représentation adjointe est faux dès que $d = 2$, essentiellement parce que le carré tensoriel de cette représentation possède une composante isotypique de longueur 2. Le commutant complet de $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(W^{\otimes 2})$ n'est donc pas une algèbre commutative, donc n'est pas image du groupe des tresses sur 2 brins. Jones avait posé la question de savoir si la R -matrice trigonométrique de $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ dans cette représentation W pouvait remédier à cette situation.

Pour répondre à ce problème, nous considérerons le $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_3)$ -module $M = \text{ev}_1^* L(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, où ev_1 a été définie au §3.4.2. La restriction de M à la sous-algèbre $U_q(\mathfrak{sl}_3) \subseteq U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_3)$ est isomorphe à W . On peut calculer la R -matrice trigonométrique pour M , au sens de la définition 3.32, par la méthode de fusion. Cette R -matrice définit une famille d'opérateurs $\widehat{R}^{\text{MM}}(z) : M^{\otimes 2} \rightarrow M^{\otimes 2}$, qui commutent à l'action de $U_q(\mathfrak{sl}_3)$. Le résultat du calcul montre que la sous-algèbre de $\text{End}_{\mathbb{C}}(M^{\otimes 2})$ engendrée par les opérateurs $\widehat{R}^{\text{MM}}(z)$ et par l'image du centre de $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ est le commutant complet de l'image de $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(M^{\otimes 2})$.

3.A.1 Présentation des résultats

Soit M un $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_3)$ -module simple de dimension finie et de type 1. La R -matrice trigonométrique de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_3)$ pour M est une famille d'opérateurs $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ -linéaires : $\widehat{R}^{\text{MM}}(z) : M^{\otimes 2} \rightarrow M^{\otimes 2}$, dépendant régulièrement de $z \in \mathbb{C}^\times$. Le $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ -module $M^{\otimes 2}$ se décompose en somme directe $\bigoplus_{\lambda} L(\lambda)^{\oplus d_{\lambda}}$; il se décompose aussi en une partie paire et une partie impaire, données par la R -matrice sans paramètre spectral de $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ (voir [Bk, proposition 3.37]).

Dans une composante isotypique de type $L(\lambda)$ et de longueur $d_{\lambda} = 1$, les opérateurs $\widehat{R}^{\text{MM}}(z)$ agissent par un scalaire, qu'on notera $\rho_{\lambda}(z)$, dépendant régulièrement de $z \in \mathbb{C}^\times$. Dans une composante isotypique N de type $L(\lambda)$ et de longueur $d_{\lambda} \geq 2$, les opérateurs $\widehat{R}^{\text{MM}}(z)$ agissent par des matrices carrées d'ordre d_{λ} , après qu'on a fait choix d'une base de $\text{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_3)}(N)$. Ce choix est équivalent à celui d'une base dans le sous-espace vectoriel des vecteurs de plus haut poids de N , et sera effectué en respectant la décomposition en partie paire et partie impaire de $M^{\otimes 2}$. Alors, si N est de longueur 2 et rencontre la partie paire et la partie impaire de $M^{\otimes 2}$, les opérateurs $\widehat{R}^{\text{MM}}(z)$ seront représentés sur N par des matrices $\begin{pmatrix} \rho_{\lambda}^{\text{pp}}(z) & \rho_{\lambda}^{\text{pi}}(z) \\ \rho_{\lambda}^{\text{ip}}(z) & \rho_{\lambda}^{\text{ii}}(z) \end{pmatrix}$. Un changement de bases soumises à ces contraintes revient à multiplier la fonction $\rho_{\lambda}^{\text{pi}}$ et à diviser la fonction $\rho_{\lambda}^{\text{ip}}$ par un même scalaire non nul : la donnée de ces matrices ne suffit donc pas à décrire complètement les opérateurs $\widehat{R}^{\text{MM}}(z)$.

Pour la description des poids d'un $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ -module, j'adopte les notations de Bourbaki [Bo, Planche I] : les poids fondamentaux sont notés ϖ_1 et ϖ_2 .

Cas de $M = \text{ev}_1^* L(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ La restriction à $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ de M est le module $L(\varpi_1 + \varpi_2)$. La restriction à $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ de $M^{\otimes 2}$ se décompose en :

$$\left(L(2\varpi_1 + 2\varpi_2) \oplus L(\varpi_1 + \varpi_2) \oplus L(0) \right) \oplus \left(L(3\varpi_1) \oplus L(3\varpi_2) \oplus L(\varpi_1 + \varpi_2) \right),$$

la première parenthèse donnant la partie paire du carré tensoriel $M^{\otimes 2}$, la seconde donnant la partie impaire.

L'action de la R -matrice trigonométrique s'écrit :

$$\begin{aligned}
\rho_{2\varpi_1+2\varpi_2}(z) &= -v^{-5}(z-v^2)^2(z-v^6) \\
\rho_{\varpi_1+\varpi_2}^{\text{pp}}(z) &= (v^3-v^{-3})(v-v^{-1})^2\frac{z(z+1)}{2} + (1-z^3) + (v^4+1+v^{-4})(v^2+v^{-2})\frac{z(z-1)}{2} \\
\rho_{\varpi_1+\varpi_2}^{\text{ii}}(z) &= (v^3-v^{-3})(v-v^{-1})^2\frac{z(z+1)}{2} - (1-z^3) - (v^4+1+v^{-4})(v^2+v^{-2})\frac{z(z-1)}{2} \\
\rho_{\varpi_1+\varpi_2}^{\text{pi}}(z) &= -(v^5-v^{-5})(v-v^{-1})\frac{z(z-1)}{2} \\
\rho_{\varpi_1+\varpi_2}^{\text{ip}}(z) &= (v^3-v^{-3})^2\frac{z(z-1)}{2} \\
\rho_{3\varpi_1}(z) &= \rho_{3\varpi_2}(z) = v^{-5}(zv^2-1)(z-v^2)(z-v^6) \\
\rho_0(z) &= -v^{-5}(zv^2-1)(zv^6-1)(z-v^2)
\end{aligned}$$

Ces résultats sont (à un changement de base et au changement de convention $z \mapsto z^{-1}$ près) conformes aux calculs de Hou, Hou, Ma et Yin [HHMY].

Cas de $M = \text{ev}_1^* L(3\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ La restriction à $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ de M est le module $L(2\varpi_1 + \varpi_2)$. La restriction à $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ de $M^{\otimes 2}$ se décompose en :

$$\begin{aligned}
&\left(L(4\varpi_1 + 2\varpi_2) \oplus L(3\varpi_1 + \varpi_2) \oplus L(4\varpi_2) \oplus L(\varpi_1 + 2\varpi_2) \oplus L(2\varpi_1) \right) \oplus \\
&\quad \left(L(2\varpi_1 + 3\varpi_2) \oplus L(3\varpi_1 + \varpi_2) \oplus L(5\varpi_1) \oplus L(\varpi_1 + 2\varpi_2) \oplus L(\varpi_2) \right),
\end{aligned}$$

la première parenthèse donnant la partie paire du carré tensoriel $M^{\otimes 2}$, la seconde donnant la partie impaire.

L'action de la R -matrice trigonométrique s'écrit :

$$\begin{aligned}
\rho_{4\varpi_1+2\varpi_2}(z) &= -v^{-6}(z-v^2)^2(z-v^4)(z-v^8)(zv^2-1) \\
\rho_{2\varpi_1+3\varpi_2}(z) &= v^{-6}(z-v^2)^2(z-v^8)(zv^2-1)(zv^4-1) \\
\rho_{3\varpi_1+\varpi_2}^{\text{pp}}(z) &= v^{-6}(z-v^2)(zv^2-1) \left[(v^4-v^{-4})(v-v^{-1})(v^2-v^{-2})\frac{z(z+1)}{2} + \right. \\
&\quad \left. + (1-z^3) + (v^6+1+v^{-6})(v^2+v^{-2})\frac{z(z-1)}{2} \right] \\
\rho_{3\varpi_1+\varpi_2}^{\text{ii}}(z) &= v^{-6}(z-v^2)(zv^2-1) \left[(v^4-v^{-4})(v-v^{-1})(v^2-v^{-2})\frac{z(z+1)}{2} - \right. \\
&\quad \left. - (1-z^3) - (v^6+1+v^{-6})(v^2+v^{-2})\frac{z(z-1)}{2} \right] \\
\rho_{3\varpi_1+\varpi_2}^{\text{pi}}(z) &= v^{-6}(z-v^2)(zv^2-1)(v-v^{-1})(v^7-v^{-7})\frac{z(z-1)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{3\varpi_1+\varpi_2}^{\text{ip}}(z) &= -v^{-6}(z-v^2)(zv^2-1)(v^3-v^{-3})(v^5-v^{-5})\frac{z(z-1)}{2} \\
\rho_{5\varpi_1}(z) &= v^{-6}(z-v^2)(z-v^4)(z-v^8)(zv^2-1)^2 \\
\rho_{4\varpi_2}(z) &= -v^{-6}(z-v^2)(z-v^4)(z-v^8)(zv^2-1)^2 \\
\rho_{\varpi_1+2\varpi_2}^{\text{pp}}(z) &= (zv^2-1)(zv^4-1)\left[-(v^4-v^{-4})(v-v^{-1})^2\frac{z(z+1)}{2} + \right. \\
&\quad \left. + (1-z^3) + (v^8+2v^2+2v^{-2}+v^{-8})\frac{z(z-1)}{2}\right] \\
\rho_{\varpi_1+2\varpi_2}^{\text{ii}}(z) &= (zv^2-1)(zv^4-1)\left[-(v^4-v^{-4})(v-v^{-1})^2\frac{z(z+1)}{2} - \right. \\
&\quad \left. - (1-z^3) - (v^8+2v^2+2v^{-2}+v^{-8})\frac{z(z-1)}{2}\right] \\
\rho_{\varpi_1+2\varpi_2}^{\text{pi}}(z) &= (zv^2-1)(zv^4-1)(v^4-v^{-4})^2\frac{z(z-1)}{2} \\
\rho_{\varpi_1+2\varpi_2}^{\text{ip}}(z) &= -(zv^2-1)(zv^4-1)(v^2-v^{-2})(v^6-v^{-6})\frac{z(z-1)}{2} \\
\rho_{2\varpi_1}(z) &= -v^{-6}(z-v^2)^2(zv^2-1)(zv^4-1)(zv^8-1) \\
\rho_{\varpi_2}(z) &= v^{-6}(z-v^2)(zv^2-1)^2(zv^4-1)(zv^8-1)
\end{aligned}$$

Autres cas traités J'ai également demandé le calcul pour $M = \text{ev}_1^* L(4\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)$. La composante $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ -isotypique de type $L(2\varpi_1 + 2\varpi_2)$ dans le module $M^{\otimes 2}$ est de longueur 3, et intervient avec la multiplicité 2 dans la partie paire de $M^{\otimes 2}$. Il n'y a pas de choix naturel de base qui permette d'écrire l'action des opérateurs $\widehat{R}^{\text{MM}}(z)$ dans cette partie paire par des matrices carrées d'ordre 2. Les choix effectués dans le calcul conduisent à des solutions épouvantables, comme on pourra le constater dans les listings du paragraphe suivant. Toutefois on peut vérifier que l'opérateur $\widehat{R}^{\text{MM}}(1)$ est scalaire (non nul après exclusion du facteur commun $(z-1)^4$).

Enfin, Chari et Pressley [CP3] ont montré qu'il y a (à torsion près) deux $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_3)$ -modules M et M' dont la restriction à $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ est le module $L(\varpi_1 + \varpi_2)$. On peut construire une R -matrice trigonométrique formée d'opérateurs $\widehat{R}^{M'M}(z) : M' \otimes M \rightarrow M \otimes M'$ qui donnent des opérateurs $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_3)$ -linéaires $\tau_w^* M' \otimes \tau_{wz}^* M \rightarrow \tau_{wz}^* M \otimes \tau_w^* M'$ pour tous $w, z \in \mathbb{C}^\times$. On peut ensuite décomposer ces opérateurs sur les $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ -composantes isotypiques comme précédemment. La valeur $z = 1$ n'a plus aucune particularité. La comparaison des composantes $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ -isotypiques de $M' \otimes M$ et de $M \otimes M'$ ne peut se faire qu'en utilisant la R -matrice de $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ (sans paramètre spectral). Le résultat des calculs s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\rho_{2\varpi_1+2\varpi_2}(z) &= -v^{-11}(z-v^2)(z-v^6)(z-v^8) \\
\rho_{\varpi_1+\varpi_2}^{\text{pp}}(z) &= -v^{-8}(zv^2-1)(z-v^2)(z-v^6) \\
\rho_{\varpi_1+\varpi_2}^{\text{ii}}(z) &= v^{-8}(zv^2-1)(z-v^2)(z-v^6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{\varpi_1+\varpi_2}^{\text{pi}}(z) &= \rho_{\varpi_1+\varpi_2}^{\text{ip}}(z) = 0 \\
\rho_{3\varpi_1}(z) &= v^{-9}(z-v^2)(z-v^4)(z-v^6) \\
\rho_{3\varpi_2}(z) &= v^{-11}(zv^2-1)(z-v^6)(z-v^8) \\
\rho_0(z) &= -v^{-5}(zv^2-1)(z-1)(z-v^2)
\end{aligned}$$

3.A.2 Présentation des programmes

Les calculs ont été effectués par Maple sur `cartan.u-strasbg.fr` (Hewlett-Packard, modèle 9000/735). Les codes qui ont donné les résultats du paragraphe précédent sont partiellement documentés. La méthode employée est essentiellement la procédure de fusion qui nous a permis de démontrer le théorème 3.33 : les modules M étudiés ont été réalisés comme sous-modules de modules $\bigotimes_{i=d}^1 \text{ev}_{x_i}^* V^{(*)}$, et la R -matrice trigonométrique pour M est la restriction à $M^{\otimes 2}$ de la R -matrice trigonométrique pour le produit tensoriel. Cette dernière est obtenue par le procédé décrit à la proposition 3.27 (qui est l'analogie de la procédure de « câblage » [Re1]).

Voici toutefois quelques précisions supplémentaires :

- La représentation naturelle V a été utilisée de manière concomitante avec sa représentation duale V^* , ce qui a pour effet de diminuer d . Ceci est possible car les quatre R -matrices trigonométriques de $U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_3)$ entrelaçant V et V^* sont connues (voir [FRT2] et [DF]).
- Lorsqu'on décompose le module $\bigotimes_{i=d}^1 \text{ev}_{x_i}^* V^{(*)}$ en composantes isotypiques, on s'aperçoit que plusieurs termes peuvent contribuer à une même composante isotypique du carré tensoriel $(\bigotimes_{i=d}^1 \text{ev}_{x_i}^* V^{(*)})^{\otimes 2}$. Pour isoler dans cette composante isotypique la partie qui vient du carré tensoriel de M , le programme diagonalise l'opérateur $R_{21}R_{12}$ venant de la R -matrice de $U_q(\mathfrak{sl}_3)$: on peut alors utiliser des techniques analogues à celles de [Re1].
- Le coproduit utilisé dans les programmes est l'opposé de celui du texte, et il est donc nécessaire d'invertir les deux facteurs. Les résultats présentés au paragraphe précédent tiennent compte de cette correction.

Chapitre 4

Extension d'un résultat de Lusztig et de Levendorskii et Soibelman

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe et $U_q(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante quantifiée.

Si \mathfrak{g} est de type A, la R -matrice, agissant dans les puissances tensorielles de la représentation naturelle, satisfait aux relations de l'algèbre de Hecke (voir §3.1.3). Lusztig [Lu3] dit que cette action de l'algèbre de Hecke est « externe ». Elle correspond à la q -déformation de l'action du groupe symétrique agissant par permutations des facteurs dans les puissances tensorielles de la représentation naturelle de GL_n . On aimerait pouvoir trouver une algèbre de Hecke « interne », qui correspondrait à l'inclusion du groupe de Weyl \mathfrak{S}_n dans GL_n au moyen des matrices de permutations.

Pour toute algèbre simple complexe \mathfrak{g} , Lusztig et, de manière indépendante, Levendorskii et Soibelman [LS], ont introduit un « q -groupe de Weyl » : celui-ci prend la forme d'une action du groupe des tresses du groupe de Weyl de \mathfrak{g} par automorphismes sur $U_q(\mathfrak{g})$ et, de manière compatible, sur les $U_q(\mathfrak{g})$ -modules de dimensions finies et de type 1. Cette action sur un $U_q(\mathfrak{g})$ -module stabilise le sous-espace de poids zéro. Lusztig, Levendorskii et Soibelman ont montré que, si \mathfrak{g} est de type ADE, alors cette action, dans le cas du q -analogue du module adjoint, satisfait à des relations quadratiques du type algèbre de Hecke.

Je montre ici que, dans le type A, cette conclusion reste valable pour d'autres modules. La preuve met en lumière l'analogie avec l'action des R -matrices, et repose sur la « quantification » de la théorie des paires duales de Howe dans le cas le plus simple (dualité (GL_m, GL_n)).

4.1 Action du q -groupe de Weyl

4.1.1 q -Groupe de Weyl

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe de rang ℓ , \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan, $P \subseteq \mathfrak{h}^*$ le réseau des poids entiers, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ un système de racines simples. Le groupe de Weyl de \mathfrak{g} est un système de Coxeter sur l'ensemble des réflexions simples $\{s_1, \dots, s_\ell\}$

et opère sur \mathfrak{h}^* . Soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire invariant sur la forme réelle de \mathfrak{h}^* tel que les $d_i = \frac{1}{2}(\alpha_i | \alpha_i)$ soient entiers. Sur le corps de base $\mathbb{C}(v)$, et en posant $q = v^2$, on peut construire l'algèbre enveloppante quantifiée $U_q(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} et l'algèbre $\mathcal{A}_q(G)$ des fonctions régulières sur le groupe quantique, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires de coefficients de représentations de dimensions finies et de type 1 de $U_q(\mathfrak{g})$. On sait que $U_q(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de Hopf du dual restreint $\mathcal{A}_q(G)^{\text{res}}$.

Lusztig, Levendorskii et Soibelman ont introduit des éléments \bar{s}_i de l'algèbre $\mathcal{A}_q(G)^*$. Par définition, un tel élément agit dans tous les $U_q(\mathfrak{g})$ -modules M de dimensions finies et de type 1, et Lusztig note $T_i : M \rightarrow M$ l'application induite. La définition des \bar{s}_i est telle que :

- si M est un $U_q(\mathfrak{g})$ -module de dimension finie et de type 1, si $m \in M$ est de poids $\lambda \in P$, alors $T_i(m)$ est de poids $s_i \cdot \lambda$;
- les \bar{s}_i vérifient dans $\mathcal{A}_q(G)^*$ les relations de tresses du groupe de Weyl : $\bar{s}_i \bar{s}_j \bar{s}_i \cdots = \bar{s}_j \bar{s}_i \bar{s}_j \cdots$, chaque membre comprenant 2, 3, 4 ou 6 facteurs selon que $\frac{4(\alpha_i | \alpha_j)^2}{(\alpha_i | \alpha_i)(\alpha_j | \alpha_j)}$ vaut 0, 1, 2 ou 3 ;
- les \bar{s}_i sont inversibles dans $\mathcal{A}_q(G)^*$ et l'action par conjugaison de \bar{s}_i dans $\mathcal{A}_q(G)^*$ stabilise la sous-algèbre $U_q(\mathfrak{g})$.

Lusztig a remarqué qu'il y avait quatre variantes possibles pour les \bar{s}_i , et a noté $T'_{i,e}$ et $T''_{i,e}$ (où $e \in \{\pm 1\}$) les applications induites sur les $U_q(\mathfrak{g})$ -modules. Ces applications sont définies par les formules suivantes, dans lesquelles m est un vecteur de poids λ d'un $U_q(\mathfrak{g})$ -module de type 1 et de dimension finie, $n = \frac{1}{d_i}(\alpha_i | \lambda)$, $v_i = v^{d_i}$, et $E_i^{(a)} = \frac{E_i^a}{[a]_i!}$ et $F_i^{(b)} = \frac{F_i^b}{[b]_i!}$ sont les puissances q -divisées (voir [Lu4, §5.1]) :

$$\begin{aligned} T'_{i,e}(m) &= \sum_{a-b+c=n} (-1)^b v_i^{e(b-ac)} F_i^{(a)} E_i^{(b)} F_i^{(c)} \cdot m \\ T''_{i,e}(m) &= \sum_{-a+b-c=n} (-1)^b v_i^{e(b-ac)} E_i^{(a)} F_i^{(b)} E_i^{(c)} \cdot m \end{aligned}$$

On sait enfin que $T''_{i,e} = (T'_{i,e})^{-1}$.

4.1.2 Enoncé du résultat

Dans le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, le groupe de Weyl est le groupe symétrique \mathfrak{S}_n , et le groupe des tresses associé est le groupe d'Artin \mathcal{B}_n . Adoptons les notations de 3.1. L'algèbre $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ peut être vue comme une sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{gl}_n)$. Soient $\mathcal{A}_q(\text{SL}_n)$ et $\mathcal{A}_q(\text{GL}_n)$ les ensembles des combinaisons linéaires de coefficients de représentations de dimensions finies et de type 1 de $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ et $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ respectivement. L'algèbre $\mathcal{A}_q(\text{SL}_n)$ est le quotient de l'algèbre $\mathcal{A}_q(\text{GL}_n)$ par l'idéal engendré par $(\det_q - 1)$, voir §3.1.1 et [FRT1]. Les formules définissant l'action du groupe \mathcal{B}_n sur les $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ -modules de dimensions finies et de type 1 définissent aussi une action de \mathcal{B}_n sur les $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modules de dimensions finies et de type 1. Le q -déformé du \mathfrak{sl}_n -module adjoint est la restriction à $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ du $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module polynomial $L(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1})$. Ce module correspond à un diagramme de Young à n boîtes.

Théorème 4.1 *Si M est un $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -module polynomial simple associé à un diagramme de Young à n boîtes, alors la restriction des $T_{i,e}$ au sous-espace de poids $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$ de M vérifie les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} T_{i,e}T_{j,e} &= T_{j,e}T_{i,e} & \text{si } |i - j| \geq 2, & & (T_{i,e} + q^e)(T_{i,e} - 1) &= 0, \\ T_{i,e}T_{i+1,e}T_{i,e} &= T_{i+1,e}T_{i,e}T_{i+1,e}. \end{aligned}$$

On peut choisir la version $T'_{i,e}$ ou la version $T''_{i,e}$ des $T_{i,e}$.

Ce théorème est une conséquence des propositions 4.3 et 4.5 du prochain paragraphe. On peut aussi le montrer par calculs, en adaptant la démonstration de [LS].

4.2 Construction de la dualité de Howe

La méthode employée pour montrer le théorème 4.1 est de relier la dualité de Schur–Weyl à l’action des $T_{i,e}$ sur les sous-espaces de poids $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$ des $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -modules polynomiaux correspondant aux diagrammes de Young à n boîtes. L’analogie classique de cette construction est connu, et exposé dans [Ho1, §2].

Je rappelle brièvement comment on procède dans le cas classique. On considère deux espaces vectoriels complexes V et W de dimensions m et n respectivement, et on étudie l’action du groupe réductif $G = \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(W)$ sur $V^* \otimes W^*$. On montre que $V^* \otimes W^*$ est une G -variété sphérique, c’est-à-dire qu’un sous-groupe de Borel possède une orbite dense dans $V^* \otimes W^*$. On en déduit que l’action de G dans l’algèbre des fonctions régulières $S(V \otimes W)$ sur $V^* \otimes W^*$ est sans multiplicité, c’est-à-dire que les composantes isotypiques sont de longueur 1. On écrit ainsi chaque composante graduée $S^d(V \otimes W)$ comme somme directe $\bigoplus_i L(\lambda_i) \otimes L'(\mu_i)$, où $L(\lambda_i)$ et $L'(\mu_i)$ sont les modules de plus hauts poids λ_i et μ_i sur $\mathrm{GL}(V)$ et $\mathrm{GL}(W)$ respectivement. L’étude géométrique de la G -variété $V^* \otimes W^*$ permet de montrer que les seuls couples (λ_i, μ_i) pouvant intervenir dans la somme sont les couples tels que λ_i et μ_i soient des poids polynomiaux égaux (cf. §3.1.4), que l’on peut donc décrire par un diagramme de Young D . La composante graduée $S^d(V \otimes W)$ s’écrit donc $\bigoplus_D L(D) \otimes L'(D)$, la somme portant sur certains diagrammes de Young à d boîtes, et en fait, sur tous les diagrammes de Young à d boîtes.

On choisit ensuite une base (e_1, \dots, e_m) de V , et on écrit :

$$S^d(V \otimes W) = S^d(\mathbb{C}e_1 \otimes W \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_m \otimes W)$$

comme somme directe des :

$$\mathbb{C}(e_1^{d_1} \otimes \dots \otimes e_m^{d_m}) \otimes S^{d_1}(W) \otimes \dots \otimes S^{d_m}(W),$$

pour (d_1, \dots, d_m) décrivant l’ensemble des m -uplets d’entiers de somme d . En prenant $m = d$, on peut ainsi voir $W^{\otimes d}$ comme le sous-espace vectoriel de $S^d(V \otimes W)$ formé des vecteurs de poids $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_m$ pour l’action de $\mathrm{GL}_d = \mathrm{GL}(V)$. L’action du groupe de Weyl de GL_d est alors identifiée à l’action par permutations des facteurs dans la puissance tensorielle $W^{\otimes d}$.

Je vais maintenant décrire un q -analogue de cette construction.

4.2.1 La puissance symétrique

On se donne $e = \pm 1$, et on pose $v' = v^e$, $q' = v'^2$. On considère les $\mathbb{C}(v)$ -algèbres $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ et $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ (voir 3.1). La deuxième algèbre est construite au paramètre v' plutôt que v . Quand il sera besoin de distinguer entre les éléments de $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ et ceux de $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$, ces derniers seront surmontés d'un signe prime. De la même manière, pour tout poids dominant polynomial $\lambda = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \lambda_i \varepsilon_i$, on notera $L(\lambda)$ et $L'(\lambda)$ les représentations de $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ et $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ de plus haut poids λ . Grâce à l'antihomomorphisme d'algèbres ($K'_\lambda \mapsto K'_{-\lambda}$, $E'_i \mapsto E'_i$, $F'_i \mapsto F'_i$), la théorie des $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ -modules à droite se déduit de celle des $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ -modules à gauche.

Soient V et W les représentations naturelles de $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ et $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$, W étant considérée comme un $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ -module à droite. V et W sont munies de bases (e_1, \dots, e_m) et (f_1, \dots, f_n) , et les actions sont données par :

$$\begin{aligned} \text{pour } V : K_{\varepsilon_i} \cdot e_j &= v^{\delta_{ij}} e_j, & \text{pour } W : f_k \cdot K'_{\varepsilon_i} &= (v')^{-\delta_{ik}} f_k, \\ E_i \cdot e_j &= \delta_{i+1,j} e_{j-1}, & f_k \cdot E'_i &= \delta_{i+1,k} f_{k-1}, \\ F_i \cdot e_j &= \delta_{ij} e_{j+1}, & f_k \cdot F'_i &= \delta_{ik} f_{k+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $V \otimes W$ est un $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ - $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ -bimodule, et on peut considérer ses puissances tensorielles $T^d(V \otimes W)$. Pour simplifier l'écriture, le vecteur de base $e_{j_1} \otimes f_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{j_d} \otimes f_{k_d}$ sera noté $e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d}$.

Les algèbres de Hecke $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ et $\mathcal{H}_{q'}(\mathrm{GL}_d)$ agissent à droite et à gauche sur $T^d(V \otimes W)$:

$$\begin{aligned} (e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d}) \cdot T_{s_i} &= \\ &\begin{cases} q e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} & \text{si } j_i = j_{i+1}, \\ v e_{j_1, \dots, j_{i+1}, j_i, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} & \text{si } j_i > j_{i+1}, \\ v e_{j_1, \dots, j_{i+1}, j_i, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} + (q-1) e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} & \text{si } j_i < j_{i+1}, \end{cases} \\ T'_{s_i} \cdot (e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d}) &= \\ &\begin{cases} q' e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} & \text{si } k_i = k_{i+1}, \\ v' e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_{i+1}, k_i, \dots, k_d} & \text{si } k_i < k_{i+1}, \\ v' e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_{i+1}, k_i, \dots, k_d} + (q'-1) e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} & \text{si } k_i > k_{i+1}. \end{cases} \end{aligned}$$

$T^d(V \otimes W)$ est ainsi un $U_q(\mathfrak{gl}_m) \otimes \mathcal{H}_{q'}(\mathrm{GL}_d)$ - $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n) \otimes \mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ -bimodule.

L'algèbre tensorielle $T(V \otimes W) = \bigoplus_{d \geq 0} T^d(V \otimes W)$ est un $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ - $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ -bimodule, et la multiplication dans cette algèbre est un morphisme de bimodules.

L'action des opérateurs T_{s_1} et T'_{s_1} sur $T^2(V \otimes W)$ provient de l'action des algèbres de Hecke $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_2)$ et $\mathcal{H}_{q'}(\mathrm{GL}_2)$ sur $V^{\otimes 2}$ et $W^{\otimes 2}$ respectivement. Ainsi, T_{s_1} agit sur $T^2(V \otimes W)$ avec les deux valeurs propres -1 et q , et les espaces propres correspondants sont $L(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \otimes W^{\otimes 2}$ et $L(2\varepsilon_1) \otimes W^{\otimes 2}$. De même, T'_{s_1} admet les deux valeurs propres -1 et q' pour son action sur $T^2(V \otimes W)$, les espaces propres étant respectivement $V^{\otimes 2} \otimes L'(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ et $V^{\otimes 2} \otimes L'(2\varepsilon_1)$.

Dans $T^2(V \otimes W)$, $T_{s_1} T'_{s_1}$ possède les valeurs propres $1, -q, -q'$ et qq' (certaines sont confondues), et les espaces propres correspondants sont des sous- $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ - $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ -bimodules. Soit $J^2 \subseteq T^2(V \otimes W)$ la somme des sous-espaces propres de $T_{s_1} T'_{s_1}$ pour les valeurs propres $-q$ et $-q'$, c'est-à-dire la somme des composantes de $T^2(V \otimes W)$ de type $L(2\varepsilon_1) \otimes L'(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ et $L(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \otimes L'(2\varepsilon_1)$. Soit $J \subseteq T(V \otimes W)$ l'idéal (gradué) engendré par J^2 , et soit $S(V \otimes W)$ l'algèbre (graduée) quotient. C'est un $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ - $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ -bimodule. Nous continuerons à noter $e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d}$ l'image dans $S^d(V \otimes W)$ de l'élément correspondant dans $T^d(V \otimes W)$.

Lemme 4.2 Dans $S^2(V \otimes W)$, on a :

$$e_{rs} \otimes f_{tu} = \begin{cases} \frac{v'+v'-1}{v+v-1} e_{sr} \otimes f_{ut} + \frac{v'/v-v/v'}{v+v-1} e_{rs} \otimes f_{ut} & \text{si } r > s \text{ et } t > u, \\ \frac{v'+v'-1}{v+v-1} e_{sr} \otimes f_{ut} + \frac{vv'-1/vv'}{v+v-1} e_{rs} \otimes f_{ut} & \text{si } r < s \text{ et } t > u, \\ \frac{v+v-1}{v'+v'-1} e_{sr} \otimes f_{ut} + \frac{v'/v-v/v'}{v'+v'-1} e_{sr} \otimes f_{tu} & \text{si } r > s \text{ et } t > u, \\ \frac{v+v-1}{v'+v'-1} e_{sr} \otimes f_{ut} - \frac{vv'-1/vv'}{v'+v'-1} e_{sr} \otimes f_{tu} & \text{si } r > s \text{ et } t < u, \\ v' e_{rs} \otimes f_{ut} & \text{si } r = s \text{ et } t > u, \\ v^{-1} e_{sr} \otimes f_{tu} & \text{si } r > s \text{ et } t = u. \end{cases}$$

Preuve Les vecteurs :

$$\begin{aligned} (ve_{rs} + e_{sr}) \otimes (v'f_{tu} - f_{ut}) & \quad (1 \leq r < s \leq m, 1 \leq t < u \leq n), \\ (e_{rs} - ve_{sr}) \otimes (f_{tu} + v'f_{ut}) & \quad (1 \leq r < s \leq m, 1 \leq t < u \leq n), \\ e_{rr} \otimes (v'f_{tu} - f_{ut}) & \quad (1 \leq r \leq m, 1 \leq t < u \leq n), \\ (e_{rs} - ve_{sr}) \otimes f_{tt} & \quad (1 \leq r < s \leq m, 1 \leq t \leq n), \end{aligned}$$

forment une base de J^2 . \square

Proposition 4.3 a) La dimension de la composante homogène $S^d(V \otimes W)$ est C_{mn+d-1}^d .

b) L'algèbre $S(V \otimes W)$ est sans diviseur de zéro.

c) Notons $\ell(w)$ la longueur de Bruhat d'une permutation $w \in \mathfrak{S}_d$. Pour $1 \leq d \leq \min(m, n)$, le vecteur $\delta_d = \sum_{w, w' \in \mathfrak{S}_d} (-v)^{\ell(w)} (-v')^{-\ell(w')} e_{w(1), \dots, w(d)} \otimes f_{w'(1), \dots, w'(d)} \in S^d(V \otimes W)$ n'est pas nul et est de plus haut poids $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_d$ pour $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ et pour $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$.

d) Pour tout $d \geq 0$, les images dans $\text{End}(S^d(V \otimes W))$ de $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ et de $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ sont exactement le commutant l'une de l'autre. La décomposition isotypique de $S^d(V \otimes W)$ s'écrit $\bigoplus_D L(D) \otimes L'(D)$, où la somme porte sur tous les diagrammes de Young à d boîtes et   au plus $\min(m, n)$ lignes.

Preuve L'espace $S(V \otimes W)$ défini ci-dessus est (à dualisations près) l'algèbre des fonctions sur l'espace quantique des matrices (voir [PW]). Les points a) et b) de la proposition sont prouvés dans [PW, Theorem 3.5.1]. La preuve que nous donnons du a) est certainement identique à la preuve originale de [HZ]. Les énoncés c) et d) existent également dans la littérature; une base de $S(V \otimes W)$ compatible avec sa structure de $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ - $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ -bimodule est donnée en termes de bitableaux dans la thèse de F. Galdi [Gl], ce qui apporte même quelques précisions supplémentaires.

a) Grâce au lemme 4.2, il est facile de voir que les $(e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d})$ forment une famille génératrice de $S^d(V \otimes W)$ quand $(j_1, \dots, j_d, k_1, \dots, k_d)$ parcourt l'un des ensembles :

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(j_1, \dots, k_d) \mid 1 \leq j_i \leq m, 1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_d \leq n, k_i = k_{i+1} \Rightarrow j_i \leq j_{i+1}\}, \\ I_2 &= \{(j_1, \dots, k_d) \mid 1 \leq j_i \leq m, 1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_d \leq n, k_i = k_{i+1} \Rightarrow j_i \geq j_{i+1}\}, \\ I_3 &= \{(j_1, \dots, k_d) \mid 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_d \leq m, 1 \leq k_i \leq n, j_i = j_{i+1} \Rightarrow k_i \leq k_{i+1}\}. \end{aligned}$$

Ces trois ensembles ont C_{mn+d-1}^d pour cardinal, puisqu'on peut les utiliser pour indexer des bases de la puissance symétrique usuelle $S^d(\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n)$.

Je considère le cas $e = 1$, $v = v'$. Le sous-espace vectoriel J^2 est engendré par les vecteurs :

$$e_{rs} \otimes f_{tu} - [e_{sr} \otimes f_{ut}] \quad (\text{pour } r > s \text{ et } t > u), \quad (4.1)$$

$$e_{rs} \otimes f_{tu} - [e_{sr} \otimes f_{ut} + (v - v^{-1})e_{rs} \otimes f_{ut}] \quad (\text{pour } r < s \text{ et } t > u), \quad (4.2)$$

$$e_{rs} \otimes f_{tu} - [ve_{rs} \otimes f_{ut}] \quad (\text{pour } r = s \text{ et } t > u), \quad (4.3)$$

$$e_{rs} \otimes f_{tu} - [v^{-1}e_{sr} \otimes f_{tu}] \quad (\text{pour } r > s \text{ et } t = u). \quad (4.4)$$

Les trois premiers vecteurs peuvent s'écrire plus simplement :

$$e_{rs} \otimes f_{tu} - [(e_{rs} \otimes f_{ut}) \cdot v^{-1}T_{s1}] \quad (\text{pour } t > u).$$

L'ensemble E des $(2d)$ -uplets $\{(j_1, \dots, k_d) \mid 1 \leq j_i \leq m, 1 \leq k_i \leq n\}$ est muni de la relation d'ordre partiel \preceq engendrée par les relations élémentaires $<$:

$(j_1, \dots, k_d) < (j'_1, \dots, k'_d)$ s'il existe i tel que :

- soit $(k_1, \dots, k_d) = (k'_1, \dots, k'_{i-1}, k'_{i+1}, k'_i, k'_{i+2}, \dots, k'_d)$,
 $(j_1, \dots, j_{i-1}, j_{i+2}, \dots, j_d) = (j'_1, \dots, j'_{i-1}, j'_{i+2}, \dots, j'_d)$,
avec $k_i < k_{i+1}$,
- soit $(k_1, \dots, k_d) = (k'_1, \dots, k'_d)$,
 $(j_1, \dots, j_d) = (j'_1, \dots, j'_{i-1}, j'_{i+1}, j'_i, j'_{i+2}, \dots, j'_d)$,
avec $k_i = k_{i+1}$ et $j_i < j_{i+1}$.

I_1 est l'ensemble des éléments minimaux pour l'ordre \preceq . Si $(j'_1, \dots, k'_d) \in E$ n'est pas minimal pour l'ordre \preceq , l'élément $e_{j'_1, \dots, j'_d} \otimes f_{k'_1, \dots, k'_d} \in T^d(V \otimes W)$ est congru modulo J à

une combinaison linéaire d'éléments $e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d}$, avec $(j_1, \dots, k_d) < (j'_1, \dots, k'_d)$. En répétant cette étape élémentaire, qui sera appelée réduction, on voit que tout élément $e_{j'_1, \dots, j'_d} \otimes f_{k'_1, \dots, k'_d} \in T^d(V \otimes W)$ est congru modulo J à une combinaison linéaire d'éléments $(e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d})_{(j_1, \dots, k_d) \in I_1}$.

Cette procédure n'est cependant pas bien définie, car il peut y avoir choix entre plusieurs réductions possibles à certains moments, ce qui conduit à des ambiguïtés. Pour traiter ces ambiguïtés, je vais utiliser un procédé mis au point par Bergman. L'énoncé précis et la formalisation de la récurrence constituent le théorème 1.2 de [Bm].

Je vais montrer le fait suivant (« condition de confluence ») : si un même élément $u = e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} \in T^d(V \otimes W)$ peut subir deux réductions distinctes, conduisant à deux éléments x et $y \in T^d(V \otimes W)$, alors on peut faire subir à x et y des suites de réductions qui conduisent à un même élément $z \in T^d(V \otimes W)$.

Les ambiguïtés à envisager sont celles où il existe i tel que :

$$\{k_i > k_{i+1} \text{ ou } (k_i = k_{i+1} \text{ et } j_i > j_{i+1})\}$$

et $\{k_{i+1} > k_{i+2} \text{ ou } (k_{i+1} = k_{i+2} \text{ et } j_{i+1} > j_{i+2})\}$.

Je considère donc quatre cas :

– $k_i = k_{i+1} = k_{i+2}$, $j_i > j_{i+1} > j_{i+2}$:

Les deux réductions qui causent ambiguïté sont les congruences :

$$e_{j_1, \dots, j_i, j_{i+1}, j_{i+2}, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} \equiv v^{-1} e_{j_1, \dots, j_{i+1}, j_i, j_{i+2}, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} \pmod{J},$$

$$e_{j_1, \dots, j_i, j_{i+1}, j_{i+2}, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} \equiv v^{-1} e_{j_1, \dots, j_i, j_{i+2}, j_{i+1}, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} \pmod{J}.$$

En considérant les suites de réductions :

$$\begin{aligned} v^{-1} e_{j_1, \dots, j_{i+1}, j_i, j_{i+2}, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} &\mapsto v^{-2} e_{j_1, \dots, j_{i+1}, j_{i+2}, j_i, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} \\ &\mapsto v^{-3} e_{j_1, \dots, j_{i+2}, j_{i+1}, j_i, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} \\ v^{-1} e_{j_1, \dots, j_i, j_{i+2}, j_{i+1}, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} &\mapsto v^{-2} e_{j_1, \dots, j_{i+2}, j_i, j_{i+1}, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} \\ &\mapsto v^{-3} e_{j_1, \dots, j_{i+2}, j_{i+1}, j_i, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d}, \end{aligned}$$

on montre que l'ambiguïté est résoluble.

– $k_i > k_{i+1} > k_{i+2}$:

Les deux réductions qui causent ambiguïté sont les congruences :

$$e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_i, k_{i+1}, k_{i+2}, \dots, k_d} \equiv (e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_{i+1}, k_i, k_{i+2}, \dots, k_d}) \cdot v^{-1} T_{s_i} \pmod{J},$$

$$e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_i, k_{i+1}, k_{i+2}, \dots, k_d} \equiv (e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_i, k_{i+2}, k_{i+1}, \dots, k_d}) \cdot v^{-1} T_{s_{i+1}} \pmod{J}.$$

En considérant les suites de réductions :

$$\begin{aligned}
& (e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_{i+1}, k_i, k_{i+2}, \dots, k_d}) \cdot v^{-1} T_{s_i} \\
& \quad \mapsto (e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_{i+1}, k_{i+2}, k_i, \dots, k_d}) \cdot v^{-2} T_{s_i} T_{s_{i+1}} \\
& \quad \mapsto (e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_{i+2}, k_{i+1}, k_i, \dots, k_d}) \cdot v^{-3} T_{s_i} T_{s_{i+1}} T_{s_i} \\
& (e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_i, k_{i+2}, k_{i+1}, \dots, k_d}) \cdot v^{-1} T_{s_{i+1}} \\
& \quad \mapsto (e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_{i+2}, k_i, k_{i+1}, \dots, k_d}) \cdot v^{-2} T_{s_{i+1}} T_{s_i} \\
& \quad \mapsto (e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_{i+2}, k_{i+1}, k_i, \dots, k_d}) \cdot v^{-3} T_{s_{i+1}} T_{s_i} T_{s_{i+1}},
\end{aligned}$$

on montre que l'ambiguïté est résoluble.

– $k_i > k_{i+1} = k_{i+2}$, $j_{i+1} > j_{i+2}$:

Il y a ici cinq cas à traiter, selon la position de j_i par rapport à j_{i+1} et j_{i+2} . Je vais ne traiter que le cas le plus ennuyeux, qui est $j_i < j_{i+2}$. Pour simplifier les notations, je vais prendre $i = 1$ et $d = 3$. Les deux réductions qui causent ambiguïté sont les congruences :

$$\begin{aligned}
e_{j_1, j_2, j_3} \otimes f_{k_1, k_2, k_3} & \equiv e_{j_2, j_1, j_3} \otimes f_{k_2, k_1, k_3} + (v - v^{-1}) e_{j_1, j_2, j_3} \otimes f_{k_2, k_1, k_3} \pmod{J}, \\
e_{j_1, j_2, j_3} \otimes f_{k_1, k_2, k_3} & \equiv v^{-1} e_{j_1, j_3, j_2} \otimes f_{k_1, k_2, k_3} \pmod{J}.
\end{aligned}$$

On considère alors les suites de réductions :

$$\begin{aligned}
& e_{j_2, j_1, j_3} \otimes f_{k_2, k_1, k_3} + (v - v^{-1}) e_{j_1, j_2, j_3} \otimes f_{k_2, k_1, k_3} \\
& \quad \mapsto e_{j_2, j_3, j_1} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} + (v - v^{-1}) e_{j_2, j_1, j_3} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} + (v - v^{-1}) e_{j_1, j_3, j_2} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} \\
& \quad \mapsto v^{-1} e_{j_3, j_2, j_1} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} + (1 - v^{-2}) e_{j_1, j_2, j_3} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} + (v - v^{-1}) e_{j_1, j_3, j_2} \otimes f_{k_2, k_3, k_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v^{-1} e_{j_1, j_3, j_2} \otimes f_{k_1, k_2, k_3} \\
& \quad \mapsto v^{-1} e_{j_3, j_1, j_2} \otimes f_{k_2, k_1, k_3} + (1 - v^{-2}) e_{j_1, j_3, j_2} \otimes f_{k_2, k_1, k_3} \\
& \quad \mapsto v^{-1} e_{j_3, j_2, j_1} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} + (1 - v^{-2}) e_{j_3, j_1, j_2} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} + \\
& \quad \quad + (1 - v^{-2}) e_{j_1, j_2, j_3} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} + (1 - v^{-2})(v - v^{-1}) e_{j_1, j_3, j_2} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} \\
& \quad \mapsto v^{-1} e_{j_3, j_2, j_1} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} + (1 - v^{-2}) e_{j_1, j_2, j_3} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} + \\
& \quad \quad + v^{-1}(1 - v^{-2}) e_{j_1, j_3, j_2} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} + (1 - v^{-2})(v - v^{-1}) e_{j_1, j_3, j_2} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} \\
& \quad = v^{-1} e_{j_3, j_2, j_1} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} + (1 - v^{-2}) e_{j_1, j_2, j_3} \otimes f_{k_2, k_3, k_1} + (v - v^{-1}) e_{j_1, j_3, j_2} \otimes f_{k_2, k_3, k_1},
\end{aligned}$$

qui montrent que l'ambiguïté est résoluble. Les quatre autres cas se traitent de manière analogue.

– $k_i = k_{i+1} > k_{i+2}$, $j_i > j_{i+1}$:

Ce dernier cas est semblable au troisième, toutes les ambiguïtés sont résolubles.

Je suis alors en position d'appliquer le théorème 1.2 de [Bm]. Tenant compte de ce que J est gradué, le théorème affirme que les vecteurs $(e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d})_{(j_1, \dots, j_d) \in I_1}$ forment une base d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de $J \cap T^d(V \otimes W)$ dans $T^d(V \otimes W)$. Ainsi, les images des $(e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d})_{(j_1, \dots, j_d) \in I_1}$ dans $S^d(V \otimes W)$ forment une base de $S^d(V \otimes W)$. On en déduit que $S^d(V \otimes W)$ est de dimension C_{mn+d-1}^d . On en déduit aussi que les $(e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d})_{(j_1, \dots, j_d) \in I_3}$ forment une base de $S^d(V \otimes W)$. Le cas $e = -1$, $v' = v^{-1}$, est semblable et laissé au lecteur. Je précise toutefois que le choix d'un ordre sur E autre que \preccurlyeq rend les calculs plus agréables. (Un bon choix consiste à renverser l'ordre sur les j_i , ce qui conduit à des combinaisons linéaires des éléments $(e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d})_{(j_1, \dots, j_d) \in I_2}$ après réductions.)

- b) Reprenons les notations de la preuve du a). Soit \mathcal{A} l'anneau $\mathbb{C}[v, v^{-1}]$. Les éléments $(e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d})_{(j_1, \dots, j_d) \in E}$ engendrent dans $T^d(V \otimes W)$ un \mathcal{A} -réseau, que je noterai $T_{\mathcal{A}}^d$. Soit $T_{\mathcal{A}} = \bigoplus_{d \geq 0} T_{\mathcal{A}}^d$. Les éléments donnés dans les équations (4.1) à (4.4) forment une base du \mathcal{A} -module $J_{\mathcal{A}}^2 = J^2 \cap T_{\mathcal{A}}^2$. En utilisant dans ce cadre le lemme diamant (théorème 1.2 de [Bm]), on montre que les éléments $(e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d})_{(j_1, \dots, j_d) \in I_1}$ forment une \mathcal{A} -base d'un supplémentaire dans $T_{\mathcal{A}}^d$ de $(T_{\mathcal{A}} \cdot J_{\mathcal{A}}^2 \cdot T_{\mathcal{A}}) \cap T_{\mathcal{A}}^d$. Cela montre l'égalité $(T_{\mathcal{A}} \cdot J_{\mathcal{A}}^2 \cdot T_{\mathcal{A}}) \cap T_{\mathcal{A}}^d = J \cap T_{\mathcal{A}}^d$.

Appelons $K^2 \subseteq T^2(V \otimes W)$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(e_{rs} \otimes f_{tu} - e_{sr} \otimes f_{ut})_{\{1 \leq r, s \leq m; 1 \leq t, u \leq n\}}$, $K_{\mathcal{A}}^2$ le sous- \mathcal{A} -module engendré par ces mêmes vecteurs, et $K \subseteq T(V \otimes W)$ l'idéal engendré par K^2 . Le même raisonnement que ci-dessus montre l'égalité $(T_{\mathcal{A}} \cdot K_{\mathcal{A}}^2 \cdot T_{\mathcal{A}}) \cap T_{\mathcal{A}}^d = K \cap T_{\mathcal{A}}^d$.

Soit \mathfrak{m} l'idéal de \mathcal{A} engendré par $(v - 1)$. On a $K_{\mathcal{A}}^2 + \mathfrak{m}T_{\mathcal{A}}^2 = J_{\mathcal{A}}^2 + \mathfrak{m}T_{\mathcal{A}}^2$, et donc $K \cap T_{\mathcal{A}} + \mathfrak{m}T_{\mathcal{A}} = J \cap T_{\mathcal{A}} + \mathfrak{m}T_{\mathcal{A}}$. Appelons $S_{\mathcal{A}}^d$ et $S_{\mathcal{A}}$ les images de $T_{\mathcal{A}}^d$ et $T_{\mathcal{A}}$ dans $S^d(V \otimes W)$ et $S(V \otimes W)$ respectivement. L'algèbre $S_{\mathcal{A}}/\mathfrak{m}S_{\mathcal{A}}$ est égale à l'algèbre $T_{\mathcal{A}}/\mathfrak{m}T_{\mathcal{A}} + (J \cap T_{\mathcal{A}}) = T_{\mathcal{A}}/\mathfrak{m}T_{\mathcal{A}} + (K \cap T_{\mathcal{A}})$. Cette dernière algèbre est la spécialisation en $v = 1$ de l'algèbre symétrique du \mathcal{A} -module libre de base $(e_j \otimes f_k)_{\{1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\}}$, donc elle est intègre. L'algèbre $S_{\mathcal{A}}/\mathfrak{m}S_{\mathcal{A}}$ est donc intègre. Comme $S_{\mathcal{A}}^d$ est un \mathcal{A} -module libre, de base $(e_{j_1, \dots, j_d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d})_{(j_1, \dots, j_d) \in I_1}$, on a que $S_{\mathcal{A}}$ est un \mathcal{A} -module libre. Finalement, $S_{\mathcal{A}}$ est une algèbre sans diviseur de zéro.

- c) Soit w_0 l'élément de plus grande longueur dans \mathfrak{S}_d et soit :

$$C_{w_0} = (-v)^{\ell(w_0)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} (-q)^{-\ell(w)} T_w$$

l'antisymétriseur dans $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$. Pour l'action de $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$ sur $V^{\otimes d}$ du §3.1.3, on a :

$$\begin{aligned} e_{d, \dots, 1} \cdot C_{w_0} &= \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} (-v)^{\ell(w_0)} (-q)^{-\ell(w)} e_{d, \dots, 1} \cdot T_w \\ &= \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} (-v)^{\ell(w_0)} (-q)^{-\ell(w)} v^{\ell(w)} e_{w^{-1}(d), \dots, w^{-1}(1)} \\ &= \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} (-v)^{\ell(w_0) - \ell(w)} e_{w^{-1}w_0(1), \dots, w^{-1}w_0(d)} \\ &= \sum_{w \in \mathfrak{S}_d} (-v)^{\ell(w)} e_{w(1), \dots, w(d)}. \end{aligned}$$

Il résulte du théorème 3.4 que c'est le vecteur de plus haut poids de la composante de type $L(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_d)$ de $V^{\otimes d}$. On dispose de même de l'antisymétriseur dans $\mathcal{H}_{q'}(\mathrm{GL}_d)$, qu'on notera encore C_{w_0} . On voit alors facilement que δ_d est l'image dans $S^d(V \otimes W)$ de l'élément de $T^d(V \otimes W)$:

$$(-v')^{-\ell(w_0)} C_{w_0} \cdot (e_{d,\dots,1} \otimes f_{1,\dots,d}) \cdot C_{w_0},$$

et que ce dernier est un vecteur de plus haut poids $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_d$ pour les actions de $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ et $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$. Il reste à vérifier que δ_d n'est pas nul.

Dans $\mathcal{H}_q(\mathrm{GL}_d)$, on a $C_{w_0} T_{s_i} = -C_{w_0}$ ([Gy] ou [KL]). L'élément $(e_{d,\dots,1} \otimes f_{k_1,\dots,k_d}) \cdot C_{w_0} \in T^d(V \otimes W)$ est donc vecteur propre pour T_{s_i} avec la valeur propre -1 . On peut décomposer $T^d(V \otimes W) = T^{i-1} \otimes T^2 \otimes T^{d-i+1}$ en sous-espaces propres simultanément pour les opérateurs T_{s_i} et T'_{s_i} . Dans cette décomposition, la composante de $(e_{d,\dots,1} \otimes f_{k_1,\dots,k_d}) \cdot C_{w_0}$ qui est propre pour T'_{s_i} avec la valeur propre q' appartient à $T^{i-1} \otimes J^2 \otimes T^{d-i-1} \subseteq J$. Donc

$$T'_{s_i} \cdot (e_{d,\dots,1} \otimes f_{k_1,\dots,k_d}) \cdot C_{w_0} \equiv -(e_{d,\dots,1} \otimes f_{k_1,\dots,k_d}) \cdot C_{w_0} \pmod{J}.$$

Dans $S^d(V \otimes W)$, on a donc :

$$\begin{aligned} \delta_d &= (-v')^{-\ell(w_0)} C_{w_0} \cdot (e_{d,\dots,1} \otimes f_{1,\dots,d}) \cdot C_{w_0} \\ &= \left(\sum_{w' \in \mathfrak{S}_d} (q')^{-\ell(w')} \right) (e_{d,\dots,1} \otimes f_{1,\dots,d}) \cdot C_{w_0} \\ &= \left(\sum_{w' \in \mathfrak{S}_d} (q')^{-\ell(w')} \right) \left(\sum_{w \in \mathfrak{S}_d} (-v)^{\ell(w)} e_{w(1),\dots,w(d)} \otimes f_{1,\dots,d} \right). \end{aligned}$$

La base obtenue dans la preuve du a) montre que $\delta_d \neq 0$.

- d) Pour tout entier $i \leq \min(m, n)$, je pose $\varpi_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$. Soit $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_t$ une partition d'un entier d , avec $d_1 \leq \min(m, n)$. Cette partition correspond à un diagramme de Young à d boîtes et à au plus $\min(m, n)$ lignes. Le vecteur $\delta_{d_1} \dots \delta_{d_t} \in S^d(V \otimes W)$ n'est pas nul (grâce au b)) et est un vecteur de plus haut poids $\varpi_{d_1} + \dots + \varpi_{d_t}$ pour l'action de $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ et $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ (grâce au c)). Les actions de $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ et de $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ sur $S^d(V \otimes W)$ commutent et sont complètement réductibles. Le $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ - $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ -bimodule $S^d(V \otimes W)$ est donc complètement réductible, et contient au moins une copie de chaque bimodule $L(D) \otimes L'(D)$. Les dimensions de ces bimodules $S^d(V \otimes W)$ et $L(D) \otimes L'(D)$ sont connues, pour le premier par le a), pour le second par les résultats de Lusztig et Rosso. Ces dimensions sont les mêmes que dans le cas classique, rappelé au début de cette partie 4.2. On en déduit la décomposition $S^d(V \otimes W) = \bigoplus_D L(D) \otimes L'(D)$, la somme portant sur tous les diagrammes de Young à d boîtes.

□

4.2.2 Comparaison avec la dualité de Schur–Weyl

Les notations sont celles du paragraphe précédent. On choisit $d \leq m$.

Lemme 4.4 *Dans le $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -module $V^{\otimes d}$, l'action des éléments du q -groupe de Weyl vérifie les formules, pour $1 \leq i \leq d-1$:*

$$T'_{i,e}(e_{1,\dots,i,i+1,\dots,d}) = T''_{i,e}(e_{1,\dots,i,i+1,\dots,d}) = (1 - v^{e+1})e_{1,\dots,i,i+1,\dots,d} - v^e e_{1,\dots,i+1,i,\dots,d}.$$

Preuve Dans le calcul qui suit, je n'écris que les indices en position $i, i+1$. Les règles donnant le coproduit et l'action dans V des éléments de $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ ont été données au §3.1.1 :

$$\begin{aligned} & T'_{i,e}(e_{1,\dots,i,i+1,\dots,d}) \\ &= \sum_{a-b+c=0} (-1)^b v^{e(b-ac)} F_i^{(a)} E_i^{(b)} F_i^{(c)} e_{1,\dots,i,i+1,\dots,d} \\ &= \sum_{a-b=0} (-1)^b v^{eb} F_i^{(a)} E_i^{(b)} e_{1,\dots,i,i+1,\dots,d} + \sum_{a-b+1=0} (-1)^b v^{e(b-a)+1} F_i^{(a)} E_i^{(b)} e_{1,\dots,i+1,i+1,\dots,d} \\ &= e_{1,\dots,i,i+1,\dots,d} - v^e F_i E_i e_{1,\dots,i,i+1,\dots,d} - v^{e+1} E_i e_{1,\dots,i+1,i+1,\dots,d} + v^{e+1} F_i E_i^{(2)} e_{1,\dots,i+1,i+1,\dots,d} \\ &= e_{1,\dots,i,i+1,\dots,d} - v^{e+1} F_i e_{1,\dots,i,i,\dots,d} - v^{e+1} e_{1,\dots,i,i+1,\dots,d} - \\ & \quad - v^e e_{1,\dots,i+1,i,\dots,d} + v^{e+1} F_i e_{1,\dots,i,i,\dots,d} \\ &= (1 - v^{e+1})e_{1,\dots,i,i+1,\dots,d} - v^e e_{1,\dots,i+1,i,\dots,d}. \end{aligned}$$

L'autre calcul est semblable. \square

Considérons à présent le $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ -module à droite $W^{\otimes d}$. Les formules :

$$T'_{s_i} \cdot (f_{k_1,\dots,k_d}) = \begin{cases} q' f_{k_1,\dots,k_d} & \text{si } k_i = k_{i+1}, \\ v' f_{k_1,\dots,k_{i+1},k_i,\dots,k_d} & \text{si } k_i < k_{i+1}, \\ v' f_{k_1,\dots,k_{i+1},k_i,\dots,k_d} + (q' - 1) f_{k_1,\dots,k_d} & \text{si } k_i > k_{i+1}, \end{cases}$$

munissent $W^{\otimes d}$ d'une action de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{q'}(\mathrm{GL}_d)$, donc d'une action du groupe des tresses d'Artin \mathcal{B}_d . On en déduit une structure de \mathcal{B}_d - $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ -bimodule sur $W^{\otimes d}$.

L'espace $S^d(V \otimes W)$ est muni d'une structure de $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -module, donc d'une action du groupe des tresses du groupe de Weyl de \mathfrak{gl}_m (§4.1.1). Ce groupe est le groupe des tresses d'Artin \mathcal{B}_m , mais je vais changer un signe en faisant agir le i -ème générateur du groupe des tresses par $-T_{i,e}$. (On peut prendre $T'_{i,e}$ ou $T''_{i,e}$ de manière indifférente.) On obtient ainsi une structure de \mathcal{B}_m - $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ -bimodule sur $S^d(V \otimes W)$. En voyant \mathcal{B}_d comme le sous-groupe de \mathcal{B}_m engendré par les $d-1$ premiers parmi les générateurs usuels, cela donne une structure de \mathcal{B}_d - $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ -bimodule sur $S^d(V \otimes W)$.

Proposition 4.5 *L'application $(W^{\otimes d} \rightarrow S^d(V \otimes W), f_{k_1,\dots,k_d} \mapsto e_{1,\dots,d} \otimes f_{k_1,\dots,k_d})$ est un homomorphisme injectif de \mathcal{B}_d - $U_{q'}(\mathfrak{gl}_n)$ -bimodules ; son image est l'ensemble des vecteurs de $S^d(V \otimes W)$ qui sont de $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -poids $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_d$.*

Preuve Appelons u cette application. Les assertions sur l'image et sur l'injectivité de u sont conséquences de la preuve du point a) de la proposition 4.3. Il est clair que u est $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -linéaire. Montrons que u commute à l'action du i -ème générateur du groupe des tresses.

Soit $f_{k_1, \dots, k_d} \in W^{\otimes d}$. Le calcul qui suit utilise les lemmes 4.2 et 4.4, ainsi que la convention $v' = v^e$, $e = \pm 1$. Quand des indices sont écrits, ils sont en positions i et $i + 1$.

$$\begin{aligned}
-T_{i,e} \cdot u(f_{k_1, \dots, k_d}) &= -T_{i,e} \cdot (e_{1, \dots, d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d}) \\
&= -(1 - v^{e+1})e_{1, \dots, d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} + v^e e_{1, \dots, i+1, i, \dots, d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} \\
&= -(1 - v^{e+1})e_{1, \dots, d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} + \\
&\quad + v^e \begin{cases} v^{-1}e_{1, \dots, d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} & \text{si } k_i = k_{i+1} \\ e_{1, \dots, d} \otimes f_{k_1, \dots, k_{i+1}, k_i, \dots, k_d} - \frac{vv'-1/vv'}{v'+v'^{-1}} e_{1, \dots, d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} & \text{si } k_i < k_{i+1} \\ e_{1, \dots, d} \otimes f_{k_1, \dots, k_{i+1}, k_i, \dots, k_d} + \frac{v'/v-v/v'}{v'+v'^{-1}} e_{1, \dots, d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} & \text{si } k_i > k_{i+1} \end{cases} \\
&= \begin{cases} q'e_{1, \dots, d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} & \text{si } k_i = k_{i+1} \\ v'e_{1, \dots, d} \otimes f_{k_1, \dots, k_{i+1}, k_i, \dots, k_d} & \text{si } k_i < k_{i+1} \\ v'e_{1, \dots, d} \otimes f_{k_1, \dots, k_{i+1}, k_i, \dots, k_d} + (q' - 1)e_{1, \dots, d} \otimes f_{k_1, \dots, k_d} & \text{si } k_i > k_{i+1}, \end{cases}
\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. \square

Corollaire 4.6 Dans l'espace de $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -poids $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_m$ d'un module M de la forme $L(D)$, où D est un diagramme de Young à m boîtes, les applications du q -groupe de Weyl de $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ agissent en vérifiant les relations de l'algèbre de Hecke.

Preuve Si l'on prend soin de choisir $m = d \leq n$ dans la construction précédente, $L(D)$ s'injecte dans $S^m(V \otimes W)$ de manière $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ -équivariante. \square

Remarque. La construction présentée ici devrait pouvoir se comprendre géométriquement. Soient m, n, d trois entiers supérieurs à 1. Soient X_m et X_n l'ensemble des filtrations à m et à n étapes respectivement de l'espace vectoriel \mathbb{C}^d , et soit X' l'ensemble des drapeaux complets dans \mathbb{C}^d . Le groupe $GL_d(\mathbb{C})$ agit sur X_m , X_n et X' . Soient \mathcal{H} , \mathcal{M} , \mathcal{N} , \mathcal{S} et \mathcal{T} les $\mathbb{C}(v)$ -espaces vectoriels de bases les ensembles des GL_d -orbites dans $X' \times X'$, $X_m \times X_m$, $X_n \times X_n$, $X_m \times X_n$ et $X' \times X_n$ respectivement. Les constructions de Beilinson, Lusztig et MacPherson [BLM] et de Grojnowski et Lusztig [GL] permettent de munir \mathcal{H} , \mathcal{M} , \mathcal{N} de structures d'algèbres, \mathcal{S} d'une structure de \mathcal{M} - \mathcal{N} -bimodule, et \mathcal{T} d'une structure de \mathcal{H} - \mathcal{N} -bimodule. Les algèbres \mathcal{M} et \mathcal{N} sont des quotients des algèbres $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ et $U_q(\mathfrak{gl}_n)$, et l'algèbre \mathcal{H} est isomorphe à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_q(GL_d)$. Les dimensions de \mathcal{S} et \mathcal{T} sont \mathbb{C}_{mn+d-1}^d et n^d respectivement. Le \mathcal{H} - \mathcal{N} -bimodule \mathcal{T} est isomorphe au module $W^{\otimes d}$ utilisé ci-dessus (à une dualisation près). Il est raisonnable d'espérer que le \mathcal{M} - \mathcal{N} -bimodule \mathcal{S} soit isomorphe au $U_q(\mathfrak{gl}_m)$ - $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ -bimodule $S^d(V \otimes W)$ décrit ci-dessus. Faisons $m = d$. \mathcal{H} devient une sous-algèbre de \mathcal{M} . Il semble raisonnable de penser que \mathcal{M} est un quotient de l'algèbre $\mathcal{A}_q(GL_m)^*$, et que les générateurs de \mathcal{H} sont liés à l'image dans \mathcal{M} des éléments $\bar{s}_i \in \mathcal{A}_q(GL_m)^*$.

Des résultats très analogues à ceux de ce paragraphe ont été annoncés dans [Kt].

Bibliographie

- [Ba] P. Baumann, *On the center of quantized enveloping algebras*, à paraître dans Journal of Algebra.
- [BS] P. Baumann, F. Schmitt, *Classification of bicovariant differential calculi on quantum groups (a representation-theoretic approach)*, à paraître dans Communications in Mathematical Physics.
- [Be] J. Beck, *Braid group action and quantum affine algebras*, Commun. Math. Phys. **165** (1994), 555–568.
- [BLM] A. A. Beilinson, G. Lusztig, R. MacPherson, *A geometric setting for the quantum deformation of GL_n* , Duke Math. J. **61** (1990), 655–677.
- [Bk] G. Benkart, *Commuting actions—a tale of two groups*, in : Lie algebras and their representations (Seoul, 1995), S. J. Kang, M. H. Kim, I. Lee éditeurs, Contemporary Mathematics vol. 194, pp. 1–46, American Mathematical Society (1996).
- [Bm] G. M. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Adv. Math. **29** (1978), 178–218.
- [Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6*, Masson (1981).
- [BGZ] A. J. Bracken, M. D. Gould, R. B. Zhang, *From representations of the braid group to solutions of the Yang-Baxter equation*, Nuclear Phys. B **354** (1991), 625–652.
- [Ca] P. Caldero, *Eléments ad-finis de certains groupes quantiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **316** (1993), 327–329.
- [CP1] V. Chari, A. N. Pressley, *Quantum affine algebras*, Commun. Math. Phys. **142** (1991), 261–283.
- [CP2] V. Chari, A. N. Pressley, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press (1994).

- [CP3] V. Chari, A. N. Pressley, *Quantum affine algebras and their representations*, in: Representations of groups, Annual seminar of the Canadian Mathematical Society (Banff, 1994), B. N. Allison, G. H. Cliff éditeurs, C.M.S. conference proceedings vol. 16, pp. 59–78, American Mathematical Society (1995).
- [CP4] V. Chari, A. N. Pressley, *Minimal affinizations of representations of quantum groups: the simply laced case*, J. Algebra **184** (1996), 1–30.
- [CP5] V. Chari, A. N. Pressley, *Quantum affine algebras and affine Hecke algebras*, Pacific J. Math. **174** (1996), 295–326.
- [CGX] Y. Cheng, M. L. Ge, K. Xue, *Yang–Baxterization of braid group representations*, Commun. Math. Phys. **136** (1991), 195–208.
- [Cd] I. V. Cherednik, *A new interpretation of Gelfand–Tsetlin bases*, Duke Math. J. **54** (1987), 563–577.
- [Cu] C. W. Curtis, *Representations of Hecke algebras*, Astérisque **168** (1988), 13–60.
- [Da] I. Damiani, *La R-matrice pour les algèbres quantiques de type affine non tordu*, à paraître aux Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.
- [DKP] C. De Concini, V. G. Kac, C. Procesi, *Quantum coadjoint action*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 151–189.
- [DF] J. Ding, I. B. Frenkel, *Isomorphism of two realizations of quantum affine algebra $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}(n)})$* , Commun. Math. Phys. **156** (1993), 277–300.
- [Dr1] V. G. Drinfeld, *Degenerate affine Hecke algebras and Yangians*, Func. Anal. Appl. **20** (1986), 58–60.
- [Dr2] V. G. Drinfeld, *Quantum groups*, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berkeley, 1986) vol. 1, A. M. Gleason éditeur, pp. 798–820, American Mathematical Society (1987).
- [Dr3] V. G. Drinfeld, *A new realization of Yangians and quantized affine algebras*, Sov. Math. Dokl. **36** (1988), 212–216.
- [Dr4] V. G. Drinfeld, *On almost cocommutative Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 321–342.
- [Et] P. I. Etingof, *Central elements for quantum affine algebras and affine Macdonald's operators*, Math. Res. Let. **2** (1995), 611–628.
- [FP] L. D. Faddeev, P. N. Pyatov, *The differential calculus on quantum linear groups*, in: Contemporary Mathematical Physics (Berezin memorial volume), R. L. Dobrushin, R. A. Minlos, M. A. Shubin, A. M. Vershik éditeurs, Amer. Math. Soc. Transl. series 2 vol. 175, pp. 35–47, American Mathematical Society (1996).

- [FRT1] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 193–225.
- [FRT2] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, in : Algebraic analysis, M. Kashiwara, T. Kawai éditeurs, pp. 129–139, Academic Press (1989).
- [Ga] D. Gaitsgory, *Existence and uniqueness of the R -matrix in quantum groups*, J. Algebra **176** (1995), 653–666.
- [Gl] F. Galdi, Tesi di dottorato di ricerca in matematica, Università di Roma II “Tor Vergata” (1995).
- [GRV] V. Ginzburg, N. Yu. Reshetikhin, É. Vasserot, *Quantum groups and flag varieties*, in : Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups (South Hadley, 1992), P. J. Sally, M. Flato, J. Lepowsky, N. Yu. Reshetikhin, G. J. Zuckerman éditeurs, Contemp. Math. vol. 175, pp. 101–130, American Mathematical Society (1994).
- [GZ] M. D. Gould, Y. Z. Zhang, *Quantum affine algebras and universal R -matrix with spectral parameter*, Lett. Math. Phys. **31** (1994), 101–110.
- [Gr] J. A. Green, *Polynomial representations of GL_n* , Lecture notes in mathematics volume 830, Springer-Verlag (1980).
- [GL] I. Grojnowski, G. Lusztig, *On bases of irreducible representations of quantum GL_n* , in : Kazhdan–Lusztig theory and related topics (Chicago, 1989), V. Deodhar éditeur, Contemp. Math. vol. 139, pp. 167–174, American Mathematical Society (1992).
- [Gy] A. Gyoja, *A q -analogue of Young symmetrizer*, Osaka Math. J. **23** (1986), 841–852.
- [HHMY] B. Y. Hou, B. Y. Hou, Z. Q. Ma, Y. D. Yin, *Solutions of the Yang–Baxter equation in the vertex model and the face model for octet representation*, J. Math. Phys. **32** (1991), 2210–2218.
- [Ho1] R. Howe, *Perspectives on invariant theory*, in : The Schur lectures (1992), I. Piatetski-Shapiro, S. Gelbart éditeurs, Israel mathematical conference proceedings vol. 8, pp. 1–182, American Mathematical Society (1995).
- [Ho2] R. Howe, *Hecke algebras and p -adic GL_n* , in : Representation theory and analysis on homogeneous spaces, a conference in memory of Larry Corwin (Rutgers, 1993), S. Gindikin, R. Goodman, F. P. Greenleaf, P. J. Sally éditeurs, Contemp. Math. vol. 177, pp. 65–100, American Mathematical Society (1994).

- [HZ] R. Q. Huang, J. J. Zhang, *Standard basis theorem for quantum linear groups*, Adv. Maths. **102** (1993), 202–229.
- [Ji1] M. Jimbo, *A q -analogue of $U(\mathfrak{gl}(N + 1))$, Hecke algebra and the Yang–Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **11** (1986), 247–252.
- [Ji2] M. Jimbo, *Quantum R -matrix for the generalized Toda system*, Commun. Math. Phys. **102** (1986), 537–547.
- [Jn] V. F. R. Jones, *On a certain value of the Kauffman polynomial*, Commun. Math. Phys. **125** (1989), 459–467.
- [Jo] A. Joseph, *Quantum groups and their primitive ideals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 29, Springer-Verlag (1995).
- [JL1] A. Joseph, G. Letzter, *Local finiteness of the adjoint action for quantized enveloping algebras*, J. Algebra **153** (1992), 289–318.
- [JL2] A. Joseph, G. Letzter, *Separation of variables for quantized enveloping algebras*, Amer. J. Math. **116** (1994), 127–177.
- [Ju] B. Jurčo, *Differential calculus on quantized simple Lie groups*, Lett. Math. Phys. **22** (1991), 177–186.
- [Ka] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, third edition, Cambridge University Press (1990).
- [Ks] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate texts in mathematics no. 155, Springer-Verlag (1995).
- [Kt] S.-i. Kato, *Hecke algebras and quantum general linear groups*, J. Math. Kyoto Univ. **37** (1997), 241–249.
- [KL] D. Kazhdan, G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. **53** (1979), 165–184.
- [Kn] D. E. Knuth, *The art of computer programming, volume 3*, Addison-Wesley (1973).
- [KRS] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, E. K. Sklyanin, *Yang–Baxter equation and representation theory: I*, Lett. Math. Phys. **5** (1981), 393–403.
- [LT] R. G. Larson, J. Towber, *Two dual classes of bialgebras related to the concepts of “quantum group” and “quantum Lie algebra”*, Comm. Algebra **19** (1991), 3295–3345.

- [LR] R. Leduc, A. Ram, *A ribbon Hopf algebra approach to the irreducible representations of centralizer algebras: the Brauer, Birman–Wenzl, and type A Iwahori–Hecke algebras*, Adv. Math. **125** (1997), 1–94.
- [LS] S. Z. Levendorskii, Ya. S. Soibelman, *Some applications of the quantum Weyl groups*, J. Geom. Phys. **7** (1990), 241–254.
- [Li] P. Littelmann, *On spherical double cones*, J. Algebra **166** (1994), 142–157.
- [Lu1] G. Lusztig, *Some examples of square integrable representations of p -adic groups*, Trans. A.M.S. **277** (1983), 623–653.
- [Lu2] G. Lusztig, *Representations of affine Hecke algebras*, Astérisque **171–172** (1989), 73–84.
- [Lu3] G. Lusztig, *On quantum groups*, J. Algebra **131** (1990), 466–475.
- [Lu4] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Birkhäuser (1994).
- [Ma] I. G. Macdonald, *Orthogonal polynomials and affine Hecke algebras (after Chevalere)*, Séminaire Bourbaki n° 797, Astérisque **237** (1996).
- [Mm] H. Matsumoto, *Analyse harmonique dans les systèmes de Tits bornologiques de type affine*, Lecture notes in mathematics, volume 590, Springer-Verlag (1977).
- [Mo] S. Montgomery, *Hopf algebras and their actions on rings*, Conference board on the mathematical sciences no. 82, American Mathematical Society (1993).
- [PW] B. Parshall, J. Wang, *Quantum linear groups*, Memoirs of the A.M.S. no. 439, American Mathematical Society (1991).
- [Ra] D. E. Radford, *Minimal quasi-triangular Hopf algebras*, J. Algebra **157** (1993), 285–315.
- [Re1] N. Yu. Reshetikhin, *Quantized universal enveloping algebras, the Yang–Baxter equation and invariants of links I*, L.O.M.I. preprint E-4-87, Leningrad.
- [Re2] N. Yu. Reshetikhin, *Quasitriangle Hopf algebras and invariants of tangles*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 491–513.
- [RS] N. Yu. Reshetikhin, M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Quantum R -matrices and factorization problems*, J. Geom. Phys. **5** (1988), 533–550.
- [RT] N. Yu. Reshetikhin, V. G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), 547–597.
- [Rg1] J. D. Rogawski, *On modules over the Hecke algebra of a p -adic group*, Invent. Math. **79** (1985), 443–465.

- [Rg2] J. D. Rogawski, *Representations of $GL(n)$ over a p -adic field with an Iwahori-fixed vector*, Israel J. Math. **54** (1986), 242–256.
- [Ro1] M. Rosso, *An analogue of P.B.W. theorem and the universal R -matrix for $U_h\mathfrak{sl}(N+1)$* , Commun. Math. Phys. **124** (1989), 307–318.
- [Ro2] M. Rosso, *Analogues de la forme de Killing et du théorème d’Harish-Chandra pour les groupes quantiques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **23** (1990), 445–467.
- [Ro3] M. Rosso, *Représentations des groupes quantiques*, Séminaire Bourbaki n° 744, Astérisque **201-202-203** (1991).
- [Ro4] M. Rosso, *Algèbres enveloppantes quantifiées, groupes quantiques compacts de matrices et calcul différentiel non commutatif*, Duke Math. J. **61** (1990), 11–40.
- [Ro5] M. Rosso, *Certaines formes bilinéaires sur les groupes quantiques et une conjecture de Schechtman et Varchenko*, C. R. Acad. Sci. Paris **314** (1992), 5–8.
- [SS1] K. Schmüdgen, A. Schüler, *Classification of bicovariant differential calculi on quantum groups of type A , B , C and D* , Commun. Math. Phys. **167** (1995), 635–670.
- [SS2] K. Schmüdgen, A. Schüler, *Classification of bicovariant differential calculi on quantum groups*, Commun. Math. Phys. **170** (1995), 315–335.
- [Su] R. Suter, *Representation rings and modular transformations; Tensor products of simple $\mathfrak{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ -modules*, Dissertation ETH Zürich Nr. 10878 (1994).
- [Sw] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, Mathematics lecture note series, Benjamin (1969).
- [Ta] T. Tanisaki, *Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal R -matrices for quantum algebras*, in: Infinite analysis (Kyoto 1991) part B, A. Tsuchiya, T. Eguchi, M. Jimbo éditeurs, Advanced Series in Mathematical Physics vol. 16, pp. 941–961, World Scientific Publishing (1992).
- [TW] V. G. Turaev, H. Wenzl, *Quantum invariants of 3-manifolds associated with classical simple Lie algebras*, Int. J. Math. **4** (1993), 323–358.
- [Wo] S. L. Woronowicz, *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*, Commun. Math. Phys. **122** (1989), 125–170.
- [Ye] D. N. Yetter, *Quantum groups and representations of monoidal categories*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **108** (1990), 261–290.
- [Ze] A. V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive p -adic groups II: On irreducible representations of GL_n* , Ann. Sci. École Norm. Sup. **13** (1980), 165–210.