

INSTITUT DE
RECHERCHE
MATHÉMATIQUE
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

Habilitation à diriger des recherches

Université de Strasbourg
Spécialité MATHÉMATIQUES

Pierre Baumann

**Propriétés et combinatoire
des bases de type canonique**

Soutenu le 18 juin 2012
devant la commission d'examen

Benjamin Enriquez, garant
Bernard Leclerc, rapporteur
Peter Littelmann, rapporteur
Markus Reineke, rapporteur
Christian Kassel, examinateur
Marc Rosso, examinateur

www-irma.u-strasbg.fr



À ma mère, courageuse jusqu'au bout

Propriétés et combinatoire des bases de type canonique

Résumé

L'étude des représentations d'un groupe algébrique complexe semi-simple connexe G est généralement menée en choisissant un sous-groupe de Borel B de G et un tore maximal T inclus dans B . Étant donnée une représentation de G sur un espace vectoriel V , il est dès lors naturel de vouloir étudier les bases de V compatibles avec ce choix de (B, T) . Différents travaux de Zelevinsky, Berenstein, Lusztig et Kashiwara ont conduit aux notions de « base canonique », de « bonne base », de « base parfaite », de « base en cordes », ... , et à la construction de telles bases. Le but de ce mémoire est de présenter succinctement cette théorie, d'exposer quelques propriétés remarquables de ces bases et de la combinatoire qu'elles définissent, et de proposer quelques perspectives.

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Un problème classique	2
1.2	La base canonique ou base cristalline globale	3
1.3	La base semi-canonique	3
1.4	Présentation des travaux	3
2	Bases de type canonique et cristal $B(\infty)$	4
2.1	Notations générales	4
2.2	Base de type canonique	6
2.3	Le cristal $B(\infty)$	6
2.4	Application aux représentations	7
2.5	Bases en cordes et algèbres amassées	8
3	Équivalence de Satake géométrique et bases de type canonique	8
3.1	Rappels sur l'équivalence de Satake géométrique	8
3.2	Énoncé du résultat	9
3.3	Plongements projectifs	10
3.4	Action de G	11
3.5	Section hyperplane	12
3.6	Fin de la preuve	13
4	Polytopes de Mirković-Vilonen	15
4.1	Données de Lusztig	15
4.2	Polytope de Harder-Narasimhan	16
4.3	Le modèle préprojectif	17
4.4	Réalisation préprojective des polytopes de Mirković-Vilonen	18
4.5	Polytopes de Mirković-Vilonen affines	19

5	Deux propriétés de la base semi-canonique	20
5.1	Rappels sur la base semi-canonique	20
5.2	Base semi-canonique et action du groupe de Weyl	21
5.3	Comparaison entre la base cristalline globale et la base semi-canonique	21
6	Base cristalline globale et morphisme de Frobenius quantique	22
6.1	Rappels sur le morphisme de Frobenius quantique	22
6.2	Compatibilité à filtration près	23
6.3	Formulaire	23
6.4	Contre-exemple à la compatibilité stricte	24
7	Perspectives	25

1 Introduction

Dans cette partie, nous présentons le contexte historique ayant motivé nos travaux et nous présentons brièvement ceux-ci.

1.1 Un problème classique

Les représentations des groupes classiques, ou plus généralement des groupes réductifs complexes, sont étudiées depuis la première moitié du XX^e siècle. Le livre de Weyl [92] présente la classification des représentations de dimension finie, obtenue par la théorie des caractères. Par la suite, on a cherché d'une part à construire explicitement ces représentations, par voie algébrique ou géométrique (voir par exemple [23, 91, 31]), d'autre part à développer une combinatoire permettant de manipuler le caractère de ces représentations (voir par exemple [46, 34, 66, 30]). Il était dès lors naturel de chercher à construire des bases des représentations qui reflètent cette combinatoire.

Précisons les choses à l'aide de quelques notations. Appelons notre groupe G et notons \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G . Choisissons une décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ et un épinglage (e_i, h_i, f_i) de \mathfrak{g} . Chaque sous-espace vectoriel $\langle e_i, h_i, f_i \rangle$ est une sous-algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, et il est naturel de s'intéresser à l'opération de restriction de \mathfrak{g} à cette sous-algèbre.

Ainsi, une représentation M de G étant donnée, Gelfand et Zelevinsky étudient dans [48] la question de l'existence et de l'unicité d'une base de M formée de vecteurs de poids et compatible avec les noyaux des puissances des endomorphismes par lesquels e_i et f_i agissent sur M . Une telle base est aujourd'hui dite bonne. Gelfand et Zelevinsky justifient leur recherche en expliquant que quand on dispose d'une bonne base d'une représentation M , il est facile de calculer les multiplicités des représentations irréductibles dans les produits tensoriels de la forme $M \otimes N$.

En s'appuyant sur [29], Gelfand et Zelevinsky démontrent l'existence d'une bonne base dans chaque représentation irréductible de $G = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$. Dans le cas $n = 3$, ils montrent en outre l'unicité et écrivent des formules explicites pour les vecteurs de base. Dans [85], Retakh et Zelevinsky étendent ces résultats au cas du groupe $\mathbf{Sp}_4(\mathbb{C})$, au prix d'une condition supplémentaire de cohérence entre les bases des différentes représentations irréductibles du groupe. L'année d'après, le théorème d'existence est étendu aux autres groupes par Mathieu [79], par un argument utilisant le morphisme de Frobenius en caractéristique p .

1.2 La base canonique ou base cristalline globale

Les carquois étaient un outil originellement destiné à faciliter l'étude des représentations indécomposables d'une algèbre. Mais en prouvant que les représentations indécomposables d'un carquois de Dynkin sont en bijection avec les racines positives du système de racines correspondant, Gabriel [36] introduit ces objets dans la théorie de Lie. Continuant dans cette direction, Ringel montre comment reconstruire l'algèbre de Lie \mathfrak{n}^+ à partir de la catégorie des représentations du carquois, par une construction qu'il appelle algèbre de Hall [86]. Il observe que cette méthode conduit naturellement au groupe quantique $U_q(\mathfrak{n}^+)$, introduit quelques années plus tôt par Drinfeld et Jimbo.

Utilisant l'analogie avec la construction des bases de Kazhdan-Lusztig dans les algèbres de Hecke et la théorie des faisceaux caractères, Lusztig traduit la construction de Ringel sous une forme géométrique [71]. Sous sa forme définitive [76], la construction de Lusztig consiste à catégorifier l'algèbre $U_q(\mathfrak{n}^+)$, en construisant un isomorphisme entre chaque sous-espace de poids de $U_q(\mathfrak{n}^+)$ et le groupe de Grothendieck d'une catégorie de faisceaux. Les classes des faisceaux pervers simples fournissent alors une base de $U_q(\mathfrak{n}^+)$. Après spécialisation à $q = 1$, on obtient une base \mathbf{B} de $U(\mathfrak{n}^+)$, que Lusztig appelle base canonique. Cette base jouit de propriétés favorables, qui permettent de montrer qu'étant donné une représentation rationnelle irréductible M de G et un vecteur de plus bas poids $m \in M$, si l'on note a l'application $x \mapsto xm$ de $U(\mathfrak{n}^+)$ dans M , alors $a(B) \setminus \{0\}$ est la base duale d'une bonne base de M^* .

De son côté, inspiré par des travaux de physiciens théoriciens, Kashiwara étudie les représentations du groupe quantique $U_q(\mathfrak{g})$ à la limite $q = 0$. Dans [58], il prouve que quand G est un groupe classique, il est possible de construire, dans chaque représentation de dimension finie de $U_q(\mathfrak{g})$, une base dans laquelle l'action des éléments e_i et f_i se simplifie grandement à la limite $q = 0$. Dans [59, 60], il relève ces bases à $q = 0$ en de vraies bases des représentations, introduisant ainsi une base de $U_q(\mathfrak{n}^+)$ qu'il appelle la base cristalline globale. En fait, cette base coïncide avec la base canonique \mathbf{B} de Lusztig, ainsi qu'il a été démontré par Grojnowski et Lusztig [50].

La construction de Lusztig et celle de Kashiwara présentent l'une et l'autre leurs avantages : la première conduit à des résultats de positivité quand G est simplement lacé ; la seconde permet de traiter le cas non-simplement lacé sans complication supplémentaire et met en évidence une structure combinatoire, appelée cristal [63].

1.3 La base semi-canonique

Dans sa construction de la base cristalline globale, Lusztig utilise des faisceaux pervers. Pour étudier les variétés caractéristiques de ces faisceaux, Lusztig est amené à définir des variétés, appelées depuis variétés nilpotentes de Lusztig, et qui sont en fait les variétés des représentations d'une algèbre préprojective. Lusztig explique que les sous-espaces de poids de $U(\mathfrak{n}^+)$ peuvent être réalisés en termes de fonctions constructibles sur ces variétés nilpotentes, ce qui lui permet de définir une nouvelle base de $U(\mathfrak{n}^+)$, qu'il appelle la base semi-canonique [75, 78]. Cette base jouit des mêmes propriétés que la base canonique, mais en est différente [40]. Elle n'est définie qu'en type simplement lacé.

1.4 Présentation des travaux

Dans ce mémoire, nous présentons quatre travaux.

Le premier, inédit, concerne l'équivalence de Satake géométrique. Cette équivalence permet de réaliser la représentation $L(\lambda)$ de plus haut poids λ de G comme l'homologie d'intersection d'une certaine variété de Schubert $\overline{\mathcal{G}r_\lambda}$ dans la grassmannienne affine $\mathcal{G}r(G^\vee)$ du dual de Langlands de G [49]. Dans ce cadre, Mirković et Vilonen définissent des cycles algébriques dans $\overline{\mathcal{G}r_\lambda}$ et montrent que leurs classes fondamentales forment une base de $IH(\overline{\mathcal{G}r_\lambda})$. On obtient ainsi une base de $L(\lambda)$. Faisant varier λ dans le cône des poids entiers dominants, on obtient une base de $U(\mathfrak{n}^+)$, qui jouit de propriétés semblables à celles des bases canonique et semi-canonique. La preuve de ce dernier fait repose sur un calcul de multiplicité d'intersection de cycles algébriques, rendu possible grâce à une paramétrisation obtenue dans [7].

Le second résultat part de l'observation que toutes ces bases (base canonique, base semi-canonique, base des cycles MV) obéissent à une même combinatoire, à savoir celle du cristal de Kashiwara $B(\infty)$ [63]. Ainsi, à chaque $b \in B(\infty)$ correspond un cycle de Mirković et Vilonen Z_b et une composante irréductible Λ_b d'une variété nilpotente de Lusztig. Maintenant, à chaque élément $b \in B(\infty)$, Kamnitzer associe un polytope $\text{Pol}(b)$, qu'il appelle polytope de Mirković-Vilonen [57]. Kamnitzer montre en outre que $\text{Pol}(b)$ est l'image de Z_b par l'application moment. Notre résultat, obtenu en collaboration avec Kamnitzer [8], exprime $\text{Pol}(b)$ en termes de Λ_b . Un prolongement de ce résultat, obtenu avec Kamnitzer et Tingley [9], généralise ce résultat au cas où \mathfrak{g} est une algèbre de Kac-Moody affine symétrique.

Le troisième résultat concerne la base semi-canonique de $U(\mathfrak{n}^+)$: nous expliquons qu'elle est compatible avec l'action du groupe de Weyl, là où cela est possible [4]. Notons que le résultat analogue pour la base canonique est connu [88, 77]. À ce résultat de compatibilité, nous joignons un théorème de comparaison entre les bases canonique et semi-canonique : la matrice de passage entre ces deux bases est unitriangulaire inférieure pour l'ordre donné par l'inclusion des polytopes MV [5].

Le quatrième travail concerne la base canonique : nous étudions sa compatibilité avec l'action du Frobenius quantique. Notre résultat est ici négatif : il n'y a pas compatibilité, un contre-exemple apparaissant à la frontière du domaine amassé de $B(\infty)$. C'est en fait le même contre-exemple que celui apparaissant dans [65], section 7, et dans [68]. Les calculs nécessaires à l'établissement de ce contre-exemple sont plutôt lourds [5].

2 Bases de type canonique et cristal $B(\infty)$

Cette partie, qui ne contient pas de résultat personnel non-banal, introduit une notion de « base de type canonique », qui nous permet de mettre les bases mentionnées dans l'introduction sous un même toit : les bases canonique et semi-canonique de Lusztig ainsi que la base des cycles MV évoquée au paragraphe 1.4 sont toutes trois de type canonique. Au reste, pour éviter tout risque de confusion, nous désignerons désormais la base canonique de Lusztig sous le vocable de base cristalline globale.

2.1 Notations générales

Soit G un groupe algébrique complexe semi-simple connexe, soit B un sous-groupe de Borel de G et soit T un tore maximal de B .

Soit \mathfrak{g} et \mathfrak{h} les algèbres de Lie de G et T . Les endomorphismes $\text{ad}(h)$ de \mathfrak{g} , pour $h \in \mathfrak{h}$, sont simultanément diagonalisables : notant

$$\mathfrak{g}^\lambda = \bigcap_{h \in \mathfrak{h}} \ker(\text{ad}(h) - \lambda(h)\text{id})$$

le sous-espace propre simultané défini par un élément $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on a alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha,$$

où $R = \{\alpha \neq 0 \mid \mathfrak{g}^\alpha \neq 0\}$. L'ensemble $R \subseteq \mathfrak{h}^*$, appelé système de racines de \mathfrak{g} , caractérise \mathfrak{g} à isomorphisme près. De plus, $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$.

Un système de racines simples est une base $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ de \mathfrak{h}^* formée d'éléments de R , dans laquelle les coordonnées de chaque élément de R sont des entiers soit tous positifs, soit tous négatifs. Un système de racines simples détermine donc une partition $R = R^+ \sqcup R^-$ de R et une décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ de \mathfrak{g} , où $\mathfrak{n}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in R^\pm} \mathfrak{g}^\alpha$. La donnée du sous-groupe de Borel B est équivalente à celle d'un système de racines simples : le lien est donné par la condition que l'algèbre de Lie de B soit $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$.

Dans ce contexte, un épingleage de \mathfrak{g} est la donnée d'une famille de triplets (e_i, h_i, f_i) tels que

$$e_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}, \quad h_i \in \mathfrak{h}, \quad f_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}, \quad [h_i, e_i] = 2e_i, \quad [h_i, f_i] = -2f_i, \quad [e_i, f_i] = h_i.$$

Pour chaque i , on dispose alors d'un homomorphisme d'algèbres de Lie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto e_i, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto h_i, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto f_i$$

de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ dans \mathfrak{g} . L'élément $\bar{s}_i = \exp(e_i)\exp(-f_i)\exp(e_i)$ normalise T . L'automorphisme $s_i = \text{Ad}(\bar{s}_i)$ de \mathfrak{h} est la réflexion hyperplane relativement à la décomposition $\mathfrak{h} = (\ker \alpha_i) \oplus \mathbb{C}h_i$. Le sous-groupe $W \subseteq \mathbf{GL}(\mathfrak{h})$ engendré par les s_i , appelé groupe de Weyl, laisse stable R ; on peut montrer qu'il agit transitivement sur l'ensemble des systèmes de racines simples.

Pour rendre les choses plus symétriques, on écrit souvent α_i^\vee à la place de h_i . La matrice de Cartan est la matrice à coefficients entiers $A = (a_{i,j})$, où $a_{i,j} = \langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle$.

On note $X = \text{Hom}(T, \mathbb{C}^*)$ le réseau des caractères de T ; par différentiation, X peut être vu comme un réseau de \mathfrak{h}^* . On note Q le sous-groupe et Q_+ le sous-monoïde de \mathfrak{h}^* engendrés par les racines simples α_i ; ainsi $Q_+ \subseteq Q \subseteq X$. Enfin, on note $X_{++} = \{\lambda \in X \mid \forall i \in I, \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \geq 0\}$ l'ensemble des poids dominants.

Partant de la matrice de Cartan A , on considère la \mathbb{C} -algèbre associative \mathbf{f} engendrée par des symboles θ_i , pour $i \in I$, soumis aux relations

$$\sum_{p+q=1-a_{i,j}} (-1)^p \frac{\theta_i^p}{p!} \theta_j \frac{\theta_i^q}{q!}, \quad (1)$$

pour tous $i \neq j$ dans I . Cette algèbre est graduée par le semi-groupe Q_+ , le générateur θ_i étant de degré α_i . Nous écrivons $\mathbf{f} = \bigoplus_{\nu \in Q_+} \mathbf{f}_\nu$; les éléments de \mathbf{f}_ν sont dits éléments de poids ν . L'algèbre \mathbf{f} vient avec un anti-automorphisme σ , qui fixe tous les générateurs θ_i . Pour $(i, n) \in I \times \mathbb{N}$, il est habituel d'introduire la puissance divisée $\theta_i^{(n)} = \theta_i^n / n!$.

L'intérêt de l'algèbre \mathbf{f} provient du résultat suivant, dû à Serre : les applications $\theta_i \mapsto e_i$ et $\theta_i \mapsto f_i$ se prolongent en des isomorphismes d'algèbres $x \mapsto x^+$ et $x \mapsto x^-$ de \mathbf{f} sur les algèbres enveloppantes $U(\mathfrak{n}^+)$ et $U(\mathfrak{n}^-)$, respectivement.

Enfin, nous noterons N le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie \mathfrak{n}^+ ; c'est le radical unipotent du groupe B . L'algèbre $\mathbb{C}[N]$ des fonctions régulières sur N s'identifie naturellement au dual gradué de $U(\mathfrak{n}^+)$, donc s'identifie au dual gradué de \mathbf{f} .

2.2 Base de type canonique

Une base \mathbf{B} de \mathbf{f} est dite de type canonique si elle vérifie les axiomes suivants.

(C1) Les éléments de \mathbf{B} sont des vecteurs de poids.

(C2) $1 \in \mathbf{B}$.

(C3) Chaque idéal à droite $\theta_i^p \mathbf{f}$ est un sous-espace de coordonnées pour la base \mathbf{B} .

Cette condition signifie que le sous-espace vectoriel $\theta_i^p \mathbf{f}$ est engendré par une partie de \mathbf{B} . Elle implique que \mathbf{B} induit une base dans chaque quotient $\theta_i^p \mathbf{f} / \theta_i^{p+1} \mathbf{f}$.

(C4) Dans les bases induites par \mathbf{B} , la multiplication à gauche par $\theta_i^{(p)}$ de $\mathbf{f} / \theta_i \mathbf{f}$ sur $\theta_i^p \mathbf{f} / \theta_i^{p+1} \mathbf{f}$ est donnée par une matrice de permutation.

(C5) \mathbf{B} est stable par σ .

La base cristalline globale et la base semi-canonique sont toutes deux des bases de type canonique. Pour la première, c'est conséquence des théorèmes 14.3.2 et 14.4.3 de [76] ou du théorème 7 de [60], de la proposition 5.3.1 de [61] et du théorème 2.1.1 de [62]. Pour la seconde, c'est conséquence du lemme 2.5 et des théorèmes 3.1 et 3.8 de [78],

2.3 Le cristal $B(\infty)$

L'algèbre \mathbf{f} possède donc plusieurs bases de type canonique. Il est naturel d'étudier comment elles se comparent. Dans ce paragraphe, nous expliquons que toutes ces bases peuvent être indexées de façon naturelle par un même ensemble, à savoir le cristal $B(\infty)$ de Kashiwara, et qu'il est possible de munir cet ensemble d'une relation d'ordre de sorte que la matrice de passage entre deux bases de type canonique soit toujours unitriangulaire inférieure.

Un cristal au sens de Kashiwara [63] est un ensemble B muni d'applications

$$\text{wt} : B \rightarrow X, \quad \varepsilon_i, \varphi_i : B \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \rightarrow B \sqcup \{0\},$$

pour chaque $i \in I$. Ici, 0 est un élément fantôme ajouté à B de façon que \tilde{e}_i et \tilde{f}_i soient partout définies. On demande que $\langle \alpha_i^\vee, \text{wt}(b) \rangle = \varphi_i(b) - \varepsilon_i(b)$ pour chaque $b \in B$. Les opérateurs \tilde{e}_i et \tilde{f}_i sont des bijections partielles réciproques l'une de l'autre : $b' = \tilde{e}_i b''$ si et seulement si $\tilde{f}_i b' = b''$. Quand b' et b'' sont ainsi reliés, on demande aussi que

$$\text{wt}(b') = \text{wt}(b'') + \alpha_i, \quad \varepsilon_i(b') = \varepsilon_i(b'') - 1 \quad \text{et} \quad \varphi_i(b') = \varphi_i(b'') + 1.$$

Un isomorphisme entre deux cristaux est une bijection entre les ensembles qui commute aux applications de structure wt , ε_i , φ_i , \tilde{e}_i et \tilde{f}_i .

Une base de type canonique \mathbf{B} est automatiquement munie d'une structure de cristal, de la façon suivante. L'application wt envoie un élément $b \in \mathbf{B}$ sur son poids. Soient $i \in I$ et $b \in \mathbf{B}$. On définit $\varphi_i(b)$ comme étant le plus grand $p \in \mathbb{N}$ tel que $b \in \theta_i^p \mathbf{f}$ et on pose $\varepsilon_i(b) = \varphi_i(b) - \langle \alpha_i^\vee, \text{wt}(b) \rangle$. On établit les bijections \tilde{e}_i et \tilde{f}_i de sorte que pour avoir $b' = \tilde{e}_i b''$, il faut et il suffit qu'il existe $b \in \mathbf{B}$ et $p \geq 1$ tels que

$$\varphi_i(b) = 0, \quad \theta_i^{(p)} b \equiv b' \pmod{\theta_i^{p+1} \mathbf{f}}, \quad \theta_i^{(p-1)} b \equiv b'' \pmod{\theta_i^p \mathbf{f}};$$

(on a alors $p = \varphi(b') = \varphi(b'') + 1$).

Un résultat de Berenstein et Kazhdan [15] affirme que les cristaux des bases de type canonique de \mathbf{f} peuvent être identifiés. Plus précisément, si \mathbf{B}' et \mathbf{B}'' sont deux bases de type

canonique de \mathbf{f} , alors il existe un unique isomorphisme de cristaux $\mathbf{B}' \cong \mathbf{B}''$; de plus, cet isomorphisme commute à l'involution σ ([5], section 2.4).

On note $B(\infty)$ le cristal abstrait sous-jacent à toutes les bases de type canonique de \mathbf{f} . Il est muni d'une involution σ et peut servir d'ensemble d'indexation commun à toutes les bases de type canonique de \mathbf{f} .

Considérons à présent la construction suivante. Étant donnés (b', b'') et (c', c'') dans $B(\infty)^2$, on écrit $(b', b'') \approx (c', c'')$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- Il existe $i \in I$ tel que $\varphi_i(b') = \varphi_i(b'')$ et $(c', c'') = (\tilde{e}_i b', \tilde{e}_i b'')$.
- Il existe $i \in I$ tel que $\varphi_i(b') = \varphi_i(b'') > 0$ et $(c', c'') = (\tilde{f}_i b', \tilde{f}_i b'')$.
- $(c', c'') = (\sigma(b'), \sigma(b''))$.

Étant donnés $(b', b'') \in B(\infty)^2$, on écrit $b' \leq b''$ si b' et b'' ont même poids et si, pour chaque suite finie de mouvements élémentaires

$$(b', b'') = (b'_0, b''_0) \approx (b'_1, b''_1) \approx \dots \approx (b'_\ell, b''_\ell),$$

on a $\varphi_i(b'_\ell) \leq \varphi_i(b''_\ell)$ pour chaque $i \in I$.

On a alors ([5], proposition 2.6) :

Proposition 1 *La relation \leq est un ordre sur $B(\infty)$. La matrice de passage entre deux bases de type canonique de \mathbf{f} est unitriangulaire inférieure quand $B(\infty)$ est muni de l'ordre \leq .*

Cette proposition est pour l'essentiel une réinterprétation de la démonstration du théorème de Berenstein et Kazhdan utilisé dans le paragraphe précédent. Il suffit en fait d'observer que la matrice de passage $M = (m_{b', b''})$ entre deux bases de type canonique de \mathbf{f} vérifie nécessairement

$$(b', b'') \approx (c', c'') \implies m_{b', b''} = m_{c', c''} \quad \text{et} \quad m_{b', b''} \neq 0 \implies (\forall i \in I, \varphi_i(b'') \leq \varphi_i(b')).$$

2.4 Application aux représentations

Toute représentation rationnelle M de G est somme directe de ses sous-espaces de poids $M_\mu = \{m \in M \mid \forall t \in T, tm = \mu(t)m\}$, pour $\mu \in X$. Si M est irréductible, alors elle est de plus haut poids : il existe $\lambda \in X_{++}$ tel que chaque vecteur non-nul $m \in M_\lambda$ engendre M en tant que $U(\mathfrak{n}^-)$ -module. Fixant un tel m , on peut contempler l'application linéaire $a : x \mapsto x^- m$ de \mathbf{f} dans M : elle est surjective et son noyau est l'idéal à gauche engendré par les éléments $\theta_i^{1+\langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle}$.

Soit maintenant \mathbf{B} une base de type canonique de \mathbf{f} . Les propriétés (C3) et (C5) entraînent que $\ker a$ est un sous-espace de coordonnées pour \mathbf{B} , de sorte que $a(\mathbf{B}) \setminus \{0\}$ est une base de M . Les éléments de cette base sont les $a(b)$, avec $b \in \mathbf{B}$ tel que $\varphi_i(\sigma(b)) \leq \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle$ pour tout $i \in I$.

La propriété (C1) implique évidemment que les sous-espaces de poids de M sont des sous-espaces de coordonnées pour cette base, ce qui conduit immédiatement à la formule

$$\dim M_\mu = \text{Card}\{b \in B(\infty) \mid \text{wt}(b) = \lambda - \mu \text{ et } \forall i \in I, \varphi_i(\sigma(b)) \leq \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle\}.$$

Notons $(e_i)_M$ et $(f_i)_M$ les endomorphismes de M par lesquels e_i et f_i agissent. En utilisant la propriété (C3), on voit sans peine que pour tout $p \in \mathbb{N}$, le sous-espace $\text{im}(f_i)_M^p$ est engendré par les $a(b)$, où $b \in \mathbf{B}$ vérifie $\varphi_i(b) \geq p$. La théorie des représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ montre alors que le sous-espace $\text{im}(e_i)_M^p$ est engendré par les $a(b)$, où $b \in \mathbf{B}$ est tel que $\varphi_i(b) + \langle \alpha_i^\vee, \lambda - \text{wt}(b) \rangle \geq p$. Il s'ensuit que la base duale de $a(\mathbf{B}) \setminus \{0\}$ est une bonne base de M^* , au sens de Gelfand et Zelevinsky (paragraphe 1.1).

Enfin, on remarque que la démonstration par Kashiwara ([62], section 3.2) de la compatibilité des sous-modules de Demazure de M avec la base cristalline globale n'utilise en fait que les axiomes (C1)–(C5), et s'étend par conséquent sans changement aux autres bases de type canonique.

2.5 Bases en cordes et algèbres amassées

Plusieurs bases \mathbf{B} de \mathfrak{f} satisfont aux conditions (C1)–(C5). Dans [18], Berenstein et Zelevinsky proposent une notion plus contraignante de base en cordes qui, espèrent les auteurs, pourrait s'accompagner d'un résultat d'unicité. Les contraintes supplémentaires consistent à demander la compatibilité avec la déformation quantique $U_q(\mathfrak{n}^+)$ ainsi que des propriétés de positivité satisfaites par la base cristalline globale.

Le plus intéressant dans ce travail est toutefois l'idée d'exploiter la structure multiplicative de l'algèbre $\mathbb{C}[N]$. De fait, l'article [18] est le précurseur de la théorie des algèbres amassées ; on y trouve notamment la liste des variables d'amas et des relations d'échange de l'algèbre $\mathbb{C}[N]$ pour le cas $G = \mathbf{SL}_4(\mathbb{C})$.

Soit M une représentation fondamentale de G , c'est-à-dire une représentation rationnelle irréductible dont le plus haut poids est un poids fondamental. La transposée de l'application $\alpha : \mathfrak{f} \rightarrow M$ du paragraphe précédent est un plongement $M^* \hookrightarrow \mathbb{C}[N]$. Les images des vecteurs extrémaux de M^* dans ce plongement sont appelés mineurs drapeaux dans [19]. Ces mineurs drapeaux appartiennent aux bases duales de toutes les bases de type canonique de \mathfrak{f} .

Dans la structure d'algèbre amassée de $\mathbb{C}[N]$, les variables d'amas des graines standards sont des mineurs drapeaux ([17], section 2 et [42], section 4). Cela encourage à étudier si la base duale d'une base de type canonique donnée de \mathfrak{f} est compatible avec la structure d'algèbre amassée de $\mathbb{C}[N]$.

Dans le cas de la base semi-canonique, la compatibilité est complète, comme l'ont montré Geiß, Leclerc et Schröer : les monômes d'amas appartiennent à la base semi-canonique duale [41] et les relations d'échange proviennent d'extensions entre représentations de l'algèbre préprojective [43]. Dans le cas de la base canonique, on dispose de résultats partiels de compatibilité, voir par exemple [83, 28, 51].

3 Équivalence de Satake géométrique et bases de type canonique

Dans la section 2.2, nous avons expliqué que deux procédés généraux de construction de bases de type canonique étaient connus : la base cristalline globale et la base semi-canonique. Le but de cette partie est de montrer que les travaux de Mirković et Vilonen [80] sur l'équivalence de Satake géométrique conduisent également à une base de type canonique.

3.1 Rappels sur l'équivalence de Satake géométrique

Soit $T^\vee = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$ le tore dual de T . Le groupe des caractères de T^\vee est un réseau X^\vee de l'espace vectoriel \mathfrak{h} , canoniquement isomorphe au dual de X , et qui contient le système de racines inverses R^\vee . Soit G^\vee le dual de Langlands de G : c'est le groupe réductif construit à partir du tore T^\vee et du système de racines R^\vee .

Soit $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[t]]$ l'anneau des séries formelles et soit $\mathcal{K} = \mathbb{C}((t))$ le corps des séries de Laurent, autrement dit, le corps des fractions de \mathcal{O} . Pour tout groupe algébrique complexe M , on peut regarder l'ensemble homogène $\mathcal{G}r(M) = M(\mathcal{K})/M(\mathcal{O})$, appelé grassmannienne affine de M . Si M est semi-simple, $\mathcal{G}r(M)$ est muni d'une structure de ind-schéma ([67], appendice C).

Soit $\text{Perv}(\mathcal{G}r(G^\vee))$ la catégorie des faisceaux pervers $G^\vee(\mathcal{O})$ -équivariants à support compact et à coefficients dans \mathbb{C} . Cette catégorie abélienne peut être munie d'une structure de catégorie tensorielle rigide, et le foncteur hypercohomologie est exact, fidèle et tensoriel. La catégorie $\text{Perv}(\mathcal{G}r(G^\vee))$ est donc équivalente à la catégorie des représentations d'un groupe pro-algébrique, dont on montre qu'il est isomorphe à G (travaux de Beilinson et Drinfeld, Ginzburg, Mirković et Vilonen [13, 49, 80]).

Chaque $\lambda \in X$ peut être vu comme un cocaractère (sous-groupe à un paramètre multiplicatif) $a \mapsto \lambda \otimes a$ de T^\vee . Évaluant ce cocaractère sur t , on obtient un point de $T^\vee(\mathcal{K})$, qui est généralement noté t^λ . Ces éléments t^λ peuvent être vus comme des points dans la grassmannienne affine $\mathcal{G}r(G^\vee)$; en fait, ce sont exactement les points fixes pour l'action de $T^\vee(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{G}r(G^\vee)$.

Pour $\lambda \in X$, notons $\mathcal{G}r_\lambda$ la $G^\vee(\mathcal{O})$ -orbite de t^λ dans $\mathcal{G}r(G^\vee)$. La décomposition de Cartan dans $G^\vee(\mathcal{K})$ affirme que l'application $\lambda \mapsto \mathcal{G}r_\lambda$ est une bijection de X_{++} sur l'ensemble des $G^\vee(\mathcal{O})$ -orbites dans $\mathcal{G}r^\vee$. Les objets simples de $\text{Perv}(\mathcal{G}r(G^\vee))$ sont donc les faisceaux de cohomologie d'intersection $\mathcal{I}_\lambda = \text{IC}(\overline{\mathcal{G}r_\lambda}, 1)$, prolongements minimaux du système local trivial sur l'ouvert lisse simplement connexe $\mathcal{G}r_\lambda$. Dans l'équivalence de Satake géométrique, ce faisceau est envoyé sur le G -module simple de plus haut poids λ , que nous notons $L(\lambda)$.

3.2 Énoncé du résultat

Le groupe G^\vee arrive avec le tore maximal T^\vee et avec un sous-groupe de Borel, correspondant au choix $R_+^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in R_+\}$ des racines positives. Soit $N^{-\vee}$ le radical unipotent du sous-groupe de Borel opposé. Pour $\mu \in X$, notons T_μ la $N^{-\vee}(\mathcal{K})$ -orbite de t^μ dans $\mathcal{G}r(G^\vee)$. Notons $\rho : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire telle que $\rho(\alpha_i) = 1$ pour chaque $i \in I$.

Dans leur travail sur l'équivalence de Satake géométrique [80], Mirković et Vilonen montrent que pour $\lambda \in X_{++}$ et $\mu \in X$, l'intersection $\mathcal{G}r_\lambda \cap \overline{T_\mu}$ est une partie localement fermée de $\mathcal{G}r(G^\vee)$ équidimensionnelle de dimension $\rho(\lambda - \mu)$. Ils déduisent de ce résultat que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\mathcal{A} \in \text{Perv}(\mathcal{G}r(G^\vee))$, l'application naturelle

$$\bigoplus_{\substack{\mu \in X \\ 2\rho(\mu) = k}} H_{T_\mu}^k(\mathcal{G}r(G^\vee), \mathcal{A}) \rightarrow H^k(\mathcal{G}r(G^\vee), \mathcal{A}) \quad (2)$$

(de la cohomologie à support dans la cohomologie ordinaire) est un isomorphisme.

Mirković et Vilonen montrent également que pour $\lambda \in X_{++}$ et $\mu \in X$, le groupe de cohomologie $H_{T_\mu}^{2\rho(\mu)}(\mathcal{G}r(G^\vee), \mathcal{I}_\lambda)$ s'identifie au groupe d'homologie de Borel-Moore de dimension maximale $H_{2\rho(\lambda-\mu)}(\mathcal{G}r_\lambda \cap \overline{T_\mu})$ à coefficients dans \mathbb{C} . Les classes fondamentales des composantes irréductibles de $\mathcal{G}r_\lambda \cap \overline{T_\mu}$ peuvent ainsi être vues dans $H_{T_\mu}^{2\rho(\mu)}(\mathcal{G}r(G^\vee), \mathcal{I}_\lambda)$; elles forment une base de cet espace.

Notons $\mathcal{Z}(\lambda)_\mu$ l'ensemble de ces composantes irréductibles et posons $\mathcal{Z}(\lambda) = \bigsqcup_{\mu \in X} \mathcal{Z}(\lambda)_\mu$. Notant $[Z]$ la classe fondamentale d'une composante irréductible Z , nous voyons alors à l'aide de (2) que $\{[Z] \mid Z \in \mathcal{Z}(\lambda)\}$ est une base de $H(\mathcal{G}r(G^\vee), \mathcal{I}_\lambda)$. Composant avec l'équivalence de Satake géométrique, nous obtenons une base de $L(\lambda)$ indexée par $\mathcal{Z}(\lambda)$, appelée base des cycles MV.

L'ensemble $\mathcal{Z}(\lambda)$ peut être muni d'une structure de cristal. Deux voies sont possibles pour définir cette structure : une construction due à Braverman et Gaitsgory [25], et une construction, basée sur le modèle des chemins, due à Gaussent et Littelmann [38]. (Il est connu que les deux constructions mènent à la même structure de cristal, voir [7], théorème 25.)

Le but de cette partie est de prouver le résultat suivant, qui décrit l'action des générateurs de Chevalley e_i et f_i sur les éléments de la base des cycles MV.

Théorème 2 *Soit $Z \in \mathcal{Z}(\lambda)$ un cycle MV. Alors*

$$e_i[Z] - \varepsilon_i(Z)[\tilde{e}_i Z] \in \sum_{\substack{Y \in \mathcal{Z}(\lambda) \\ \varepsilon_i(Y) < \varepsilon_i(Z) - 1}} \mathbb{Q}[Y], \quad f_i[Z] - \varphi_i(Z)[\tilde{f}_i Z] \in \sum_{\substack{Y \in \mathcal{Z}(\lambda) \\ \varphi_i(Y) < \varphi_i(Z) - 1}} \mathbb{Q}[Y].$$

Ce théorème montre que la base des cycles MV est parfaite, au sens de Berenstein et Kazhdan [15]. Nous esquissons sa preuve dans les paragraphes 3.3 à 3.6.

On peut montrer que les bases des cycles MV des G -modules $L(\lambda)$ se recollent en une base de l'algèbre $\mathbb{C}[N]$ via les plongements $L(\lambda) \hookrightarrow \mathbb{C}[N]$. Par passage au dual, on obtient une base de type canonique de \mathfrak{f} .

Signalons enfin qu'une conjecture due à Anderson [1] propose une procédure géométrique, inspirée du produit de fusion de Beilinson et Drinfeld ([80], section 5), pour déterminer les constantes de structure de la multiplication de $\mathbb{C}[N]$ dans cette base. La conjecture est prouvée en type A par Anderson et Kogan [3]. D'après Kamnitzer, le cas général de la conjecture peut être établi par des méthodes semblables à celles utilisées pour démontrer le théorème 2.

3.3 Plongements projectifs

Pour éviter quelques détails techniques pénibles dont le traitement requiert l'article [26], nous nous bornerons à considérer le cas où G est simple de type adjoint. Une étape préliminaire à la preuve du théorème 2 est de comprendre comment plonger la grassmannienne affine $\mathcal{G}r(G^\vee)$ dans un espace projectif.

Soit $\widehat{\mathfrak{g}}^\vee$ l'algèbre de Kac-Moody affine obtenue à partir de l'algèbre de Lie \mathfrak{g}^\vee de G^\vee . Le dual de sa sous-algèbre de Cartan s'écrit $\widehat{\mathfrak{h}}^{\vee*} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}\delta^\vee \oplus \mathbb{C}\Lambda_0$, avec les notations habituelles ([55], §6.2).

Pour chaque entier $\ell \geq 1$, notons V_ℓ la représentation intégrable de plus haut poids $\ell\Lambda_0$ de $\widehat{\mathfrak{g}}^\vee$. Cette représentation s'intègre à une extension centrale $E_\ell(G^\vee(\mathcal{H}))$ de $G^\vee(\mathcal{H})$ par \mathbb{C}^* ([37], définition 7.1 et section 12). Le cocycle définissant l'extension fait intervenir le symbole modéré ([37], théorème 12.24), qui est trivial sur \mathcal{O} . La restriction de l'extension à $G^\vee(\mathcal{O})$ est donc scindée. Cela nous donne un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & G^\vee(\mathcal{O}) & & \\ & & & & \swarrow s & \downarrow & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \xrightarrow{i} & E_\ell(G^\vee(\mathcal{H})) & \xrightarrow{p} & G^\vee(\mathcal{H}) \longrightarrow 1. \end{array}$$

Soit v_ℓ le vecteur de plus haut poids de V_ℓ . L'application $g \mapsto gv_\ell$ de $E_\ell(G^\vee(\mathcal{H}))$ dans V_ℓ induit un plongement ψ_ℓ de la grassmannienne affine $\mathcal{G}r(G^\vee)$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V_\ell)$. Ce plongement est un morphisme de ind-variétés ([67], appendice C).

Nous désignerons par \mathcal{L}_ℓ le fibré en droites $\psi_\ell^* \mathcal{O}(1)$. L'application $\ell \mapsto \mathcal{L}_\ell$ se prolonge en un isomorphisme de \mathbb{Z} sur le groupe de Picard de $\mathcal{G}r(G^\vee)$ ([89], section 2.7 et [67], proposition C.12).

Faisons agir \mathbb{C}^* sur \mathcal{K} par rotation des boucles, en posant $a \cdot f(t) = f(at)$ pour $(a, f) \in \mathbb{C}^* \times \mathcal{K}$. Par functorialité, \mathbb{C}^* agit sur $G^\vee(\mathcal{K})$ et sur V_ℓ . Comme cette action laisse invariant le symbole modéré, \mathbb{C}^* agit aussi sur l'extension $E_\ell(G^\vee(\mathcal{K}))$. Le produit semi-direct $\widehat{G}^\vee = E_\ell(G^\vee(\mathcal{K})) \rtimes \mathbb{C}^*$ agit donc sur $\mathcal{G}r(G^\vee)$ et sur V_ℓ , et le plongement ψ_ℓ est équivariant pour ces actions.

Le groupe \widehat{G}^\vee contient le tore $\widehat{T}^\vee = i(\mathbb{C}^*) \times s(T^\vee(\mathbb{C})) \times \mathbb{C}^*$. Le groupe des caractères de ce tore s'identifie au réseau $\mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus X^\vee \oplus \mathbb{Z}\delta^\vee$ de $\widehat{\mathfrak{h}}^{\vee*}$. Soit $Q : X \rightarrow \mathbb{Z}$ la forme quadratique W -invariante valant 1 sur les racines courtes, soit $B : X \times X \rightarrow \mathbb{Z}$ la forme polaire de Q , et soit $\iota : X \rightarrow X^\vee$ l'application $\lambda \mapsto B(\lambda, ?)$. La W -invariance de Q entraîne que $\iota(\alpha_i) = Q(\alpha_i)\alpha_i^\vee$. Pour $\lambda \in X$, posons $\pi(\lambda) = \Lambda_0 - \iota(\lambda) - Q(\lambda)\delta^\vee$.

Proposition 3 *Soit $\lambda \in X$. L'image par le plongement ψ_ℓ du point $t^\lambda \in \mathcal{G}r(G^\vee)$ est une droite de V_ℓ incluse dans le sous-espace de poids $\ell\pi(\lambda)$.*

Preuve. Le plus simple ici est d'invoquer [55], formule (6.5.4). Pour une justification complète, il est toutefois nécessaire de calculer dans le groupe \widehat{G}^\vee . La partie $\Lambda_0 - \iota(\lambda)$ du poids, qui décrit l'action des deux premiers facteurs $i(\mathbb{C}^*) \times s(T^\vee(\mathbb{C}))$ du tore \widehat{T}^\vee , est justifiée dans [80], formule (3.2). Le dernier terme $-Q(\lambda)\delta^\vee$, qui décrit l'action par rotation des lacets, repose sur le calcul du cocycle définissant l'extension centrale $E_\ell(G^\vee(\mathcal{K}))$ ([37], théorème 12.24). \square

3.4 Action de G

La clé de la preuve du théorème 2 figure dans des articles de Ginzburg et de Vasserot [49, 90]; elle nous a été expliquée par Mirković.

Choisir une équivalence de catégories entre $\text{Perv}(\mathcal{G}r(G^\vee))$ et la catégorie des représentations de G , c'est choisir un isomorphisme Φ de G sur le groupe \overline{G} des automorphismes du foncteur fibre $H(\mathcal{G}r(G^\vee), ?)$. Il nous faut fixer Φ pour pouvoir dire comment G agit sur les espaces vectoriels $H(\mathcal{G}r(G^\vee), \mathcal{A})$.

Notons $\overline{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie de \overline{G} . Dans le travail de Mirković et Vilonen, l'action du tore T sur $H(\mathcal{G}r(G^\vee), \mathcal{A})$ est décrite par la décomposition (2) en somme directe de sous-espaces de poids. Ceci définit un isomorphisme de T sur un tore maximal \overline{T} de \overline{G} . On obtient alors un isomorphisme de \mathfrak{h} sur l'algèbre de Lie $\overline{\mathfrak{h}}$ de \overline{T} , dont la transposée envoie le système de racines de $\overline{\mathfrak{g}}$ sur R ([80], (7.6)). Notons $h = 2\rho$ l'élément de \mathfrak{h} tel que $\alpha_i(h) = 2$ pour tout $i \in I$ et \overline{h} l'image de h dans $\overline{\mathfrak{h}}$.

Considérons maintenant un fibré \mathcal{L} sur $\mathcal{G}r(G^\vee)$. La première classe de Chern $c_1(\mathcal{L})$ agit par cup-produit sur $H(\mathcal{G}r(G^\vee), \mathcal{A})$, définissant un élément $\overline{e}_\mathcal{L}$ de l'algèbre de Lie $\overline{\mathfrak{g}}$ de \overline{G} . Comme \overline{h} agit sur $H^k(\mathcal{G}r(G^\vee), \mathcal{A})$ par multiplication par k , nous avons $[\overline{h}, \overline{e}_\mathcal{L}] = 2\overline{e}_\mathcal{L}$. Dans la décomposition

$$\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \overline{\mathfrak{g}}^\alpha$$

de $\overline{\mathfrak{g}}$ relativement à la sous-algèbre de Cartan $\overline{\mathfrak{h}}$, $\overline{e}_\mathcal{L}$ s'écrit donc $\sum_{i \in I} \overline{e}_{\mathcal{L}, i}$, avec $e_{\mathcal{L}, i} \in \overline{\mathfrak{g}}^{\alpha_i}$.

Si en outre \mathcal{L} est très ample, alors le théorème de Lefschetz difficile fournit, pour chaque $\mathcal{A} \in \text{Perv}(\mathcal{G}r(G^\vee))$, un endomorphisme $\overline{f}_{\mathcal{L}, \mathcal{A}}$ de $H(\mathcal{G}r(G^\vee), \mathcal{A})$ tel que $(\overline{e}_\mathcal{L}, \overline{h}, \overline{f}_{\mathcal{L}, \mathcal{A}})$ est un \mathfrak{sl}_2 -triplet. Cet endomorphisme $\overline{f}_{\mathcal{L}, \mathcal{A}}$ est unique, donc naturel en \mathcal{A} ([24], chapitre VIII, §11, lemme 1); il provient donc d'un élément $\overline{f}_\mathcal{L}$ de $\overline{\mathfrak{g}}$. Ainsi, il existe un \mathfrak{sl}_2 -triplet $(\overline{e}_\mathcal{L}, \overline{h}, \overline{f}_\mathcal{L})$ dans $\overline{\mathfrak{g}}$. Ceci implique que tous les $\overline{e}_{\mathcal{L}, i}$ sont non-nuls ([24], chapitre VIII, §11, proposition 8).

Observant que l'application $\mathcal{L} \mapsto \overline{e}_{\mathcal{L}, i}$ est un homomorphisme du groupe de Picard de $\mathcal{G}r(G^\vee)$ dans $\overline{\mathfrak{g}}^{\alpha_i}$, on définit \overline{e}_i de façon que $\overline{e}_{\mathcal{L}, i} = \ell Q(\alpha_i)\overline{e}_i$ pour chaque $\ell \in \mathbb{Z}$; ainsi \overline{e}_i est un

élément non-nul de \bar{g}^{α_i} . L'isomorphisme $\Phi : G \rightarrow \bar{G}$ désiré s'obtient alors en intégrant l'unique isomorphisme de \mathfrak{g} sur $\bar{\mathfrak{g}}$ qui prolonge l'identification $\mathfrak{h} \cong \bar{\mathfrak{h}}$ définie plus haut et qui envoie e_i sur \bar{e}_i .

3.5 Section hyperplane

Dans ce paragraphe, nous abrégons $\mathcal{G}r(G^\vee)$ en $\mathcal{G}r$.

Faisons $\ell = 1$ dans les constructions du paragraphe 3.3, et simplifions les notations V_1 , ψ_1 et \mathcal{L}_1 en V , ψ et \mathcal{L} , respectivement. Regardant $\mathcal{G}r$ comme la section nulle dans l'espace total L du fibré \mathcal{L} , nous pouvons considérer la classe de Thom $\tau \in H_{\mathcal{G}r}^2(L)$.

Soit $\mu \in X$. Soit f une forme linéaire sur V nulle sur les sous-espaces de poids différents de $\pi(\mu)$ et non-nulle sur la droite $\psi(t^\mu)$; soit D l'hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ d'équation f . D'après [80], proposition 3.1,

$$\bar{T}_\mu = \bigcup_{v \in \mu + Q_+} T_v \quad \text{et} \quad D \cap \bar{T}_\mu = \bar{T}_\mu \setminus T_\mu = \bigcup_{i \in I} \overline{T_{\mu + \alpha_i}}.$$

Regardant f comme une application continue de $\mathcal{G}r$ dans L telle que $f(\mathcal{G}r \setminus D) \subseteq L \setminus \mathcal{G}r$, nous pouvons former $f^* \tau \in H_D^2(\mathcal{G}r)$. Avec ces notations, chaque faisceau pervers \mathcal{A} sur $\mathcal{G}r$ donne lieu à un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H_{\bar{T}_\mu}(\mathcal{G}r, \mathcal{A}) & \longrightarrow & H(\mathcal{G}r, \mathcal{A}) & & \\ \cup f^* \tau \downarrow & & \cup f^* \tau \downarrow & \searrow \cup c_1(\mathcal{L}) & \\ H_{D \cap \bar{T}_\mu}(\mathcal{G}r, \mathcal{A}) & \longrightarrow & H_D(\mathcal{G}r, \mathcal{A}) & \longrightarrow & H(\mathcal{G}r, \mathcal{A}), \end{array}$$

qui commute d'après [53], II.10.2 et II.10.4.

Posons $k = 2\rho(\mu)$. Soit $\lambda \in X_{++}$. La dimension de $\mathcal{G}r_\lambda$ est $d = 2\rho(\lambda)$. Notons $j : \mathcal{G}r_\lambda \hookrightarrow \bar{\mathcal{G}r}_\lambda$ l'inclusion; alors $j^* \mathcal{I}_\lambda$ est le système local trivial $\underline{\mathbb{C}}$, décalé de d . On peut alors former le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} H_{\bar{T}_\mu}^k(\mathcal{G}r, \mathcal{I}_\lambda) & \xrightarrow{\cong} & H_{\bar{T}_\mu}^k(\bar{\mathcal{G}r}_\lambda, j_* j^* \mathcal{I}_\lambda) & \xlongequal{\quad} & H_{\bar{T}_\mu \cap \mathcal{G}r_\lambda}^{k+d}(\mathcal{G}r_\lambda, \underline{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{[\mathcal{G}r_\lambda] \cap} & H_{d-k}(\bar{T}_\mu \cap \mathcal{G}r_\lambda) \\ \cup f^* \tau \downarrow & & \cup f^* \tau \downarrow & & \cup f^* \tau|_{\mathcal{G}r_\lambda} \downarrow & & \cap f^* \tau|_{\bar{T}_\mu \cap \mathcal{G}r_\lambda} \downarrow \\ H_{D \cap \bar{T}_\mu}^{k+2}(\mathcal{G}r, \mathcal{I}_\lambda) & \xrightarrow{\cong} & H_{D \cap \bar{T}_\mu}^{k+2}(\bar{\mathcal{G}r}_\lambda, j_* j^* \mathcal{I}_\lambda) & \xlongequal{\quad} & H_{D \cap \bar{T}_\mu \cap \mathcal{G}r_\lambda}^{k+2+d}(\mathcal{G}r_\lambda, \underline{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{[\mathcal{G}r_\lambda] \cap} & H_{d-k-2}(D \cap \bar{T}_\mu \cap \mathcal{G}r_\lambda), \end{array}$$

où les deux flèches horizontales de droite sont données par la dualité d'Alexander sur la variété lisse orientée $\mathcal{G}r_\lambda$. Ce diagramme commute, par functorialité pour le premier carré, par changement de base pour le second, et grâce à [53], IX.3.4 pour le troisième.

Soit $Z \in \mathcal{Z}(\lambda)_\mu$ une composante irréductible de $\bar{T}_\mu \cap \mathcal{G}r_\lambda$. Sa classe fondamentale $[Z] \in H_{d-k}(\bar{T}_\mu \cap \mathcal{G}r_\lambda)$ est un élément de la base des cycles MV de $L(\lambda) = H(\mathcal{G}r, \mathcal{I}_\lambda)$. D'après les diagrammes qui précèdent, le résultat de l'action de l'élément $\bar{e}_\mathcal{L}$ sur $[Z]$ est égal à $[Z] \cap f^* \tau|_Z$. Grâce à [53], théorème 4.7, on peut d'ailleurs réécrire cette expression comme le produit d'intersection $[Z] \cdot [D]$, vu que $f^* \tau$ est la classe de Thom de D dans $\mathcal{G}r$.

3.6 Fin de la preuve

Conservons les notations du paragraphe précédent. L'intersection $D \cap \overline{T}_\mu \cap \mathcal{G}r_\lambda$ est équidimensionnelle de dimension $\rho(\lambda - \mu) - 1$, et ses composantes irréductibles sont les cycles MV appartenant à $\bigcup_{i \in I} \mathcal{L}(\lambda)_{\mu + \alpha_i}$. Les classes fondamentales de ces cycles MV forment la base de l'espace $H_{d-k-2}(D \cap \overline{T}_\mu \cap \mathcal{G}r_\lambda)$ dans laquelle nous devons évaluer les coordonnées du produit $[Z] \cdot [D]$.

Proposition 4 *Soit $(\lambda, \mu, i) \in X_{++} \times X \times I$. Soient $Z \in \mathcal{L}(\lambda)_\mu$ et $Y \in \mathcal{L}(\lambda)_{\mu + \alpha_i}$. Si $Y = \tilde{e}_i Z$, alors $Y \subseteq Z$ et $\varepsilon_i(Y) = \varepsilon_i(Z) - 1$. Si $Y \subseteq Z$ et $Y \neq \tilde{e}_i Z$, alors $\varepsilon_i(Y) < \varepsilon_i(Z) - 1$.*

Preuve. Pour une partie irréductible R de dimension finie de $\mathcal{G}r$, notons $\mu_-(R)$ le plus grand poids $\nu \in X$ (pour l'ordre défini par le cône Q_+) tel que $R \subseteq \overline{T}_\nu$. Pour chaque $i \in I$, choisissons un relèvement \check{s}_i de la réflexion simple s_i au normalisateur du tore T^\vee dans G^\vee . Par définition de la structure de cristal sur l'ensemble des cycles MV, nous avons

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(Z)\alpha_i &= s_i \mu_-(\check{s}_i Z) - \mu, \\ \varepsilon_i(Y)\alpha_i &= s_i \mu_-(\check{s}_i Y) - (\mu + \alpha_i),\end{aligned}$$

d'où

$$\mu_-(\check{s}_i Y) = \mu_-(\check{s}_i Z) + (\varepsilon_i(Z) - \varepsilon_i(Y) - 1)\alpha_i.$$

Ainsi, $\varepsilon_i(Z) \geq \varepsilon_i(Y) + 1$ dès que $\mu_-(\check{s}_i Y) = \mu_-(\check{s}_i Z) \in Q_+$, donc dès que $Y \subseteq Z$. Le résultat désiré provient alors de [7], proposition 12. \square

L'intersection $[Z] \cdot [D]$ est un élément de $H_{d-k-2}(Z \cap D)$, où $Z \cap D$ désigne l'intersection ensembliste. La classe fondamentale $[Y]$ d'un cycle MV ne peut apparaître dans ce produit que si $Y \subseteq Z \cap D$. D'après la proposition 4, pour Y de poids $\mu + \alpha_i$, cela nécessite que $Y = \tilde{e}_i Z$ ou que $\varepsilon_i(Y) < \varepsilon_i(Z) - 1$. On en déduit que

$$\overline{e}_{\mathcal{L},i}[Z] - m[\tilde{e}_i Z] \in \sum_{\substack{Y \in \mathcal{F}(\lambda) \\ \varepsilon_i(Y) < \varepsilon_i(Z) - 1}} \mathbb{Z}[Y],$$

où m est la multiplicité de $[\tilde{e}_i Z]$ dans le produit d'intersection.

Proposition 5 *Avec les notations ci-dessus, $m = Q(\alpha_i)\varepsilon_i(Z)$.*

Preuve. Invoquant [35], corollaire 19.2, nous pouvons calculer l'intersection au sens de la géométrie algébrique. Ainsi m est la multiplicité de $\tilde{e}_i Z$ dans la trace sur Z du diviseur D .

Soit \check{x}_i le sous-groupe à un paramètre additif de G^\vee correspondant à la racine simple α_i^\vee . Nous l'étendons en un morphisme $\mathcal{K} \rightarrow \widehat{G}^\vee$. Soit $P_i^{-,\vee}$ le sous-groupe parabolique de G^\vee contenant $N^{-,\vee}$ et les $\check{x}_i(a)$, pour $a \in \mathbb{C}$. Soit $N_i^{-,\vee}$ le radical unipotent de $P_i^{-,\vee}$.

Définissons μ_- comme dans la preuve de la proposition 4. Soit $k = \varepsilon_i(Z)$, soit $Y = \tilde{e}_i^k Z$, soit $\xi = \mu_-(Y) = \mu + k\alpha_i$, soit $r = \langle \xi, \alpha_i^\vee \rangle$, soit $\check{Z} = Z \cap \mathcal{G}r_\lambda \cap \check{s}_i T_{s_i \xi}$, et soit $\check{Y} = Y \cap \mathcal{G}r_\lambda \cap \check{s}_i T_{s_i \xi}$. Posons

$$\mathbb{C}[t^{-1}]_k^+ = \left\{ a_{-k} t^{-k} + a_{1-k} t^{1-k} + \dots + a_{-1} t^{-1} \mid (a_{-k}, a_{1-k}, \dots, a_{-1}) \in \mathbb{C}^k \right\}.$$

D'après [7], proposition 4.5 (ii), l'application $F : (p, y) \mapsto \check{x}_i(pt^r)y$ est un homéomorphisme de $\mathbb{C}[t^{-1}]_k^+ \times \check{Y}$ sur \check{Z} ; on peut en fait montrer que c'est un isomorphisme de variétés algébriques. Le cycle $\tilde{e}_i Z$ est un diviseur de Z ; dans l'ouvert \check{Z} , son équation est $a_{-k} = 0$.

Notre but à présent est d'évaluer f au point $\psi(F(p, y))$.

Écrivons $\psi(t^\xi) = \mathbb{C}v_0$, avec v_0 de poids $\pi(\xi)$. Nous pouvons écrire $y = gt^\xi$, avec $g \in N_i^{-, \vee}(\mathcal{K})$. Utilisant la \widehat{G}^\vee -équivariance de ψ , nous voyons que $\psi(y) = \mathbb{C}v$, où $v = gv_0$. On peut donc écrire $v = v_0 + \dots + v_N$, où le vecteur v_j est de poids $\pi(\xi) - \beta_j - q_j\delta^\vee$, avec $\beta_0 = q_0 = 0$, et avec β_j somme non-vide d'éléments de $R^\vee \setminus \{\alpha_i^\vee\}$ si $j \neq 0$.

Développons le produit

$$\check{x}_i(pt^r)v = \prod_{\ell=1}^k \left(\sum_{n_\ell \geq 0} \frac{a^{-n_\ell}}{n_\ell!} X_{\alpha_i^\vee + (r-\ell)\delta^\vee}^{n_\ell} \right) v,$$

où $X_{\alpha_i^\vee + q\delta} \in \widehat{\mathfrak{g}^\vee}$ est la dérivée en zéro du sous-groupe additif $a \mapsto \check{x}_i(at^q)$ de \widehat{G}^\vee . Pour que le terme

$$\left(\prod_{\ell=1}^k X_{\alpha_i^\vee + (r-\ell)\delta^\vee}^{n_\ell} \right) v_j$$

n'annule pas f , il est nécessaire que

$$\sum_{\ell=1}^k n_\ell(\alpha_i^\vee + (r-\ell)\delta^\vee) + \pi(\xi) - \beta_j - q_j\delta^\vee = \pi(\mu).$$

Cette condition se réécrit comme un système de deux équations

$$\left(\sum_{\ell=1}^k n_\ell \right) \alpha_i^\vee - kQ(\alpha_i)\alpha_i^\vee - \beta_j = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\ell=1}^k (r-\ell)n_\ell - q_j = k(r-k)Q(\alpha_i).$$

La première égalité force $j = 0$, car β_j ne peut pas appartenir à α_i^\vee quand $j \neq 0$. Il vient alors

$$\sum_{\ell=1}^k n_\ell = kQ(\alpha_i) \quad \text{et} \quad \sum_{\ell=1}^k (r-\ell)n_\ell = k(r-k)Q(\alpha_i).$$

La positivité des n_ℓ implique alors que $n_1 = \dots = n_{k-1} = 0$ et que $n_k = kQ(\alpha_i)$. Bref nous avons montré que

$$f(\check{x}_i(pt^r)v) = \frac{a^{-n}}{n!} f\left(X_{\alpha_i^\vee + (r-k)\delta^\vee}^n v_0\right),$$

avec $n = kQ(\alpha_i)$.

On considère maintenant une autre forme linéaire g sur V , nulle sur les sous-espaces de poids différents de $\pi(\xi)$ et non nulle sur la droite $\psi(t^\xi)$. Alors g ne s'annule pas sur \check{Z} , car

$$g(\check{x}_i(pt^r)v) = g(v_0) \neq 0.$$

La fonction rationnelle f/g est donc sans pôle sur \check{Z} et vaut

$$a^{-n} \frac{f\left(X_{\alpha_i^\vee + (r-k)\delta^\vee}^n v_0\right)}{n!g(v_0)}$$

au point $F(p, y)$. Le second facteur ne dépend pas de (p, y) , donc est une constante non-nulle. On voit ainsi que l'équation locale f/g du diviseur D s'annule le long de $\tilde{e}_i Z$ avec la multiplicité $n = Q(\alpha_i)\varepsilon_i(Z)$, comme annoncé. \square

À ce stade, nous avons démontré la première des formules promises dans le théorème 2. La seconde s'en déduit par des considérations élémentaires sur les représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

4 Polytopes de Mirković-Vilonen

Soit $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ la forme réelle du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathfrak{h}^* . Les hyperplans $\ker \alpha$ de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, pour $\alpha \in R$, définissent un ensemble de facettes sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, appelé éventail de Weyl.

À chaque $b \in B(\infty)$ correspond un polytope convexe dans $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, appelé polytope MV de b et noté $\text{Pol}(b)$, dont l'éventail normal est moins fin que l'éventail de Weyl. De plus, l'application $b \mapsto \text{Pol}(b)$ est injective.

Le polytope $\text{Pol}(b)$ peut être construit de différentes façons : comme l'image par l'application moment d'un cycle MV (d'où la terminologie polytope MV) [2, 56, 57], ou à partir des données de Lusztig de b .

Le but de cette partie est d'expliquer que si la matrice de Cartan A est symétrique, alors $\text{Pol}(b)$ peut également être vu comme le polytope de Harder-Narasimhan d'une représentation de l'algèbre préprojective. Ce résultat donne une légitimité supplémentaire à ces polytopes MV, et suggère une façon d'étendre la notion de polytope MV au cas des groupes de Kac-Moody affines symétriques.

4.1 Données de Lusztig

Soit N le nombre de racines positives ; c'est aussi la longueur de l'élément le plus long w_0 du système de Coxeter $(W, (s_i)_{i \in I})$. On note \mathcal{X} l'ensemble de toutes les suites $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$ telles que $w_0 = s_{i_1} \cdots s_{i_N}$. Chaque élément $\mathbf{i} \in \mathcal{X}$ fournit une énumération β_1, \dots, β_N des éléments de R^+ , à savoir $\beta_k = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}} \alpha_{i_k}$.

Soit v une indéterminée. Soit (d_i) une famille d'entiers strictement positifs tels que la matrice $(d_i a_{i,j})$ soit symétrique. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in I$, on pose $[n]_i = (v^{d_i n} - v^{-d_i n}) / (v^{d_i} - v^{-d_i})$ et $[n]_i! = [1]_i \cdots [n]_i$. Soit $U_q(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante quantifiée de \mathfrak{g} ; c'est une $\mathbb{C}(v)$ -algèbre engendrée par des éléments E_i, F_i et K_i , pour $i \in I$; voir par exemple [20], Section 3.1. On définit les puissances divisées de E_i par $E_i^{(n)} = E_i^n / [n]_i!$. Soit $U_q(\mathfrak{n}^+)$ la sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les éléments E_i , et soit $x \mapsto \bar{x}$ l'automorphisme de la \mathbb{C} -algèbre $U_q(\mathfrak{n}_+)$ tel que $\bar{v} = v^{-1}$ et $\bar{E}_i = E_i$.

Soit T_i l'automorphisme de $U_q(\mathfrak{g})$ construit par Lusztig et noté $T'_{i,-1}$ dans [73]. Un élément $\mathbf{i} \in \mathcal{X}$ étant fixé, on sait que pour $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$ parcourant \mathbb{N}^N , les monômes

$$E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{n})} = E_{i_1}^{(n_1)} T_{i_1}(E_{i_2}^{(n_2)}) \cdots (T_{i_1} \cdots T_{i_{N-1}})(E_{i_N}^{(n_N)})$$

forment une base PBW de $U_q(\mathfrak{n}_+)$. De plus, pour chaque $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^N$, il y a un unique élément invariant sous l'involution $x \mapsto \bar{x}$ de la forme

$$b_{\mathbf{i}}(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^N} \zeta_{\mathbf{m}}^{\mathbf{n}} E_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{m})},$$

avec $\zeta_{\mathbf{n}}^{\mathbf{n}} = 1$ et $\zeta_{\mathbf{m}}^{\mathbf{n}} \in v^{-1} \mathbb{Z}[v^{-1}]$ pour $\mathbf{m} \neq \mathbf{n}$. Ces éléments $b_{\mathbf{i}}(\mathbf{n})$ forment la base cristalline globale de $U_q(\mathfrak{n}_+)$; elle ne dépend pas du choix de \mathbf{i} [71].

Ce que nous avons appelé plus haut (section 2) la base cristalline globale de \mathbf{f} est simplement cette base, après spécialisation à $v = 1$ et transport sous l'isomorphisme $\mathbf{f} \cong U(\mathfrak{n}_+)$. La base cristalline globale de $U_q(\mathfrak{n}_+)$ est donc canoniquement indexée par le cristal $B(\infty)$. L'application $\mathbf{n} \mapsto b_{\mathbf{i}}(\mathbf{n})$ peut ainsi être regardée comme une bijection de \mathbb{N}^N sur $B(\infty)$. La bijection réciproque est appelée donnée de Lusztig dans la direction \mathbf{i} ; nous la noterons $b \mapsto \mathbf{n}_{\mathbf{i}}(b)$. Les bijections affines par morceaux de Lusztig ([75], section 12.6 et [20], théorème 5.2 et proposition 7.1) décrivent comment $\mathbf{n}_{\mathbf{i}}(b)$ dépend de \mathbf{i} .

Dans [88], section 3.4, Saito explique comment calculer $\mathbf{n}_i(b)$ en fonction de b à l'aide des seules opérations de cristal. Pour cela, il introduit des opérations s_i sur $B(\infty)$, définies par

$$s_i(b) = \tilde{e}_i^k(\sigma(\tilde{f}_i^{\max}(\sigma(b')))),$$

où $b' = \tilde{f}_i^{\max} b$ et $k = \varepsilon_i(\sigma(b'))$; nous appellerons ces opérations les réflexions cristallines. Pour $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_N)$ dans \mathcal{X} et $b \in B(\infty)$, les composantes n_1, \dots, n_N de $\mathbf{n}_i(b)$ sont alors données par

$$n_k = \varphi_{i_k}(s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1}(b)). \quad (3)$$

Ceci étant rappelé, fixons $b \in B(\infty)$. Prenons $\mathbf{i} \in \mathcal{X}$ et posons $(n_1, \dots, n_N) = \mathbf{n}_i(b)$ et $\beta_k = s_{i_1} \cdots s_{i_{k-1}} \alpha_{i_k}$. À première vue, le poids

$$\text{wt}(b) - \sum_{t=1}^k n_t \beta_t$$

dépend de \mathbf{i} et de k . À l'aide des bijections affines par morceaux de Lusztig, on peut cependant montrer qu'il ne dépend que de $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$, de sorte qu'on peut légitimement le noter $\mu_w(b)$. On définit alors $\text{Pol}(b)$ comme étant l'enveloppe convexe des poids $\mu_w(b)$, pour w parcourant W .

Dans [57], Kamnitzer montre que chaque poids $\mu_w(b)$ est un sommet de $\text{Pol}(b)$ et que le cône normal à $\text{Pol}(b)$ au point $\mu_w(b)$ est wC_0 , où

$$C_0 = \{\theta \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \forall i \in I, \langle \theta, \alpha_i \rangle > 0\}$$

est la chambre dominante. En particulier, la donnée de $\text{Pol}(b)$ détermine les poids $\mu_w(b)$, donc contient l'information sur toutes les données de Lusztig $\mathbf{n}_i(b)$.

4.2 Polytope de Harder-Narasimhan

Les résultats de ce paragraphe sont tirés de [9], section 3.

Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne essentiellement petite, dont tous les objets sont de longueur finie. Le groupe de Grothendieck $K_0(\mathcal{A})$ est un groupe abélien libre, de base l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples. Comme de coutume, on note $[T]$ la classe d'un objet T dans $K_0(\mathcal{A})$.

Étant donné un objet $T \in \mathcal{A}$, les classes $[X]$ de sous-objets $X \subseteq T$ sont en nombre fini. L'enveloppe convexe dans $K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}} = K_0(\mathcal{A}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ de ces points est un polytope à sommets entiers, que nous appellerons polytope de Harder-Narasimhan (HN en abrégé) de T et que nous noterons $\text{Pol}(T)$. La fonction support $\psi_{\text{Pol}(T)}$ de ce polytope est définie comme étant l'application qui, à une forme linéaire $\theta : K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$, associe la valeur maximale de θ sur $\text{Pol}(T)$. Avec cette notation, les facettes de $\text{Pol}(T)$ sont les parties de la forme $P_{\theta} = \{x \in \text{Pol}(T) \mid \theta(x) = \psi_{\text{Pol}(T)}(\theta)\}$.

Soit $\theta : K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. On dit qu'un objet $T \in \mathcal{A}$ est θ -semi-stable si $\theta([T]) = 0$ et si $\theta([X]) \leq 0$ pour tout sous-objet $X \subseteq T$. Les objets θ -semi-stables forment une sous-catégorie abélienne et fermée sous extension de \mathcal{A} , que nous noterons \mathcal{R}_{θ} .

Fixons $T \in \mathcal{A}$. À l'aide de la théorie des filtrations de Harder-Narasimhan (voir par exemple [84]), on montre que pour chaque $\theta \in K_0(\mathcal{A})_{\mathbb{R}}^*$, le sous-ensemble $\{X \subseteq T \mid \theta([X]) = \psi_{\text{Pol}(T)}(\theta)\}$ du treillis des sous-objets de T admet un plus petit élément et un plus grand élément, que nous noterons T_{θ}^{\min} et T_{θ}^{\max} . Le quotient $T_{\theta}^{\max}/T_{\theta}^{\min}$ est θ -semi-stable; notant $i : \mathcal{R}_{\theta} \hookrightarrow \mathcal{A}$ l'inclusion de catégories, la facette P_{θ} de $\text{Pol}(T)$ est l'image par l'application $K_0(i)_{\mathbb{R}}$ du polytope HN de

$T_\theta^{\max}/T_\theta^{\min}$ (calculé relativement à la catégorie \mathcal{B}_θ), translatée de $[T_\theta^{\min}]$. Ainsi, une facette d'un polytope HN est encore un polytope HN, aplati par $K_0(i)_\mathbb{R}$.

Notons C_+ le cône ouvert de $K_0(\mathcal{A})_\mathbb{R}^*$ formé des formes linéaires θ telles que $\theta([S]) > 0$ pour tout objet simple S de \mathcal{A} . Nous regardons C_+ comme le cône des éléments strictement positifs pour un certain ordre sur $K_0(\mathcal{A})_\mathbb{R}^*$. Si $\theta \in C_+$, alors pour chaque objet T de \mathcal{A} , la face P_θ du polytope HN $\text{Pol}(T)$ est réduite au point $[T]$ et la face $P_{-\theta}$ est réduite au point 0.

Considérons maintenant un chemin $t \mapsto \theta_t$ décroissant dans $K_0(\mathcal{A})_\mathbb{R}^*$ et joignant un point de C_+ à un point de $-C_+$. Prenons un objet T de \mathcal{A} . Les faces P_{θ_t} dessinent alors un chemin sur $\text{Pol}(T)$ qui va de $[T]$ à 0. La plupart du temps, θ_t est dans un cône ouvert de l'éventail normal à $\text{Pol}(T)$, de sorte que P_{θ_t} est un sommet. De temps en temps, θ_t passe d'un cône ouvert à un autre en franchissant une facette de l'éventail normal, et à cet instant précis, P_{θ_t} est une facette du polytope $\text{Pol}(T)$. Dans T , cela correspond à la filtration donnée par les sous-modules $T_{\theta_t}^{\min}$: au moment où θ_t franchit une facette de l'éventail normal, il y a un saut dans la filtration, avec $T_{\theta_t}^{\max}/T_{\theta_t}^{\min}$ pour sous-quotient. Ainsi, notre chemin définit une filtration de chaque objet T avec des sous-quotients semi-stables.

Quand le chemin $s \mapsto \theta_t$ est pris au hasard, il évite les facettes de codimension plus grande que 2 de l'éventail normal. Les faces P_{θ_t} de $\text{Pol}(T)$ sont alors des sommets ou des arêtes : notre chemin qui va de $[T]$ à 0 est dans le 1-squelette du polytope.

4.3 Le modèle préprojectif

Revenons à la théorie de Lie et supposons que la matrice de Cartan $A = (a_{i,j})$ soit symétrique. Le diagramme de Dynkin est un graphe ayant I pour ensemble de sommets. Deux sommets i et j sont reliés par $-a_{i,j}$ arêtes.

Le graphe étant sans boucle, chaque arête a exactement deux sommets ; orienter une arête, c'est décréter qu'un de ces sommets est la source et l'autre est le but de l'arête. On note H l'ensemble des arêtes orientées ; la source d'une arête orientée $h \in H$ est notée h' , son but est noté h'' .

Il y a une involution sans point fixe $h \mapsto \bar{h}$ qui échange source et but. Une orientation du graphe est un sous-ensemble $\Omega \subseteq H$ tel que $(\Omega, \bar{\Omega})$ soit une partition de H . On se fixe une orientation Ω , et pour $h \in H$, on pose $\varepsilon_\Omega(h) = 1$ si $h \in \Omega$ et $\varepsilon_\Omega(h) = -1$ sinon.

Soit \mathbf{k} un corps algébriquement clos. Soit $K\bar{Q}$ la \mathbf{k} -algèbre des chemins du carquois $\bar{Q} = (I, H)$. Pour $i \in I$, on pose

$$\rho_i = \sum_{\substack{h \in H \\ h''=i}} \varepsilon_\Omega(h) h \bar{h}.$$

Le quotient de $K\bar{Q}$ par l'idéal engendré par les ρ_i est appelé algèbre préprojective et est noté Λ_Ω .

Un Λ_Ω -module est donc la donnée d'un \mathbf{k} -espace vectoriel I -gradué $\mathbf{V} = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{V}_i$ et d'applications linéaires $x_h : \mathbf{V}_{h'} \rightarrow \mathbf{V}_{h''}$ soumises aux relations

$$\sum_{\substack{h \in H \\ h''=i}} \varepsilon_\Omega(h) x_h x_{\bar{h}} = 0, \quad (4)$$

pour tout $i \in I$. Supposant \mathbf{V} de dimension finie, on définit le vecteur-dimension de ce Λ_Ω -module comme étant la fonction $v : i \mapsto \dim \mathbf{V}_i$, qu'on identifie au poids $\sum_{i \in I} v(i) \alpha_i$.

On note $\Lambda_\Omega\text{-mod}$ la catégorie des Λ_Ω -modules de dimension finie. Pour $i \in I$, on note S_i le Λ_Ω -module simple de vecteur-dimension α_i . Tout Λ_Ω -module simple est isomorphe à un S_i .

Étant donné un \mathbf{k} -espace vectoriel I -gradué \mathbf{V} de dimension finie, on note $\Lambda_{\mathbf{V},\Omega}$ la sous-variété de

$$\mathbf{E}_{\mathbf{V}} = \bigoplus_{h \in H} \text{Hom}(\mathbf{V}_{h'}, \mathbf{V}_{h''})$$

formée des éléments $x = (x_h)$ satisfaisant aux relations (4). Les points de $\Lambda_{\mathbf{V},\Omega}$ sont donc les structures de Λ_{Ω} -modules qu'on peut mettre sur \mathbf{V} .

À bijection canonique près, l'ensemble des composantes irréductibles de $\Lambda_{\mathbf{V},\Omega}$ dépend seulement du vecteur-dimension ν de \mathbf{V} , et pas de \mathbf{V} ou de Ω ([73], sections 12.14 and 12.15); nous noterons cet ensemble \mathfrak{B}_{ν} . Suivant [72], section 8 et [65], nous munissons l'union disjointe $\mathfrak{B} = \bigsqcup_{\nu \in Q_+} \mathfrak{B}_{\nu}$ d'une structure de cristal avec involution, isomorphe à $B(\infty)$. Étant donné $b \in B(\infty)$ et \mathbf{V} de vecteur-dimension $\text{wt}(b)$, nous notons Λ_b la composante irréductible de $\Lambda_{\mathbf{V},\Omega}$ qui correspond à b .

Dans la suite, nous simplifierons souvent les notations Λ_{Ω} et $\Lambda_{\mathbf{V},\Omega}$ en Λ et $\Lambda_{\mathbf{V}}$, respectivement.

4.4 Réalisation préprojective des polytopes de Mirković-Vilonen

L'application vecteur-dimension permet d'identifier $K_0(\Lambda\text{-mod})$ à Q , et donc d'identifier $K_0(\Lambda\text{-mod})_{\mathbb{R}}$ à $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Le cône C_+ se trouve alors identifié à la chambre dominante C_0 . Le théorème suivant est démontré dans [9] (voir le théorème 5.19 et le corollaire 5.22 de cet article).

Théorème 6 (a) *L'éventail normal du polytope HN d'un Λ -module de dimension finie est moins fin que l'éventail de Weyl.*

(b) *Soit F une face de codimension 1 de l'éventail de Weyl. Soit $\theta \in F$ et soit $\alpha \in R_+$ la racine positive orthogonale à F . Alors il existe un Λ -module L_F indécomposable de vecteur-dimension α tel que $\mathcal{R}_{\theta} = \text{add} L_F$. De plus, $\text{End}_{\Lambda}(L_F) = \mathbf{k}$ et $\text{Ext}_{\Lambda}^1(L_F, L_F) = 0$.*

Avec les notations du (b), nous pouvons écrire $T_{\theta}^{\max}/T_{\theta}^{\min} = L_F^{\oplus n}$ pour chaque Λ -module T de dimension finie; l'entier n est alors la longueur de l'arête de $\text{Pol}(T)$ joignant $[T_{\theta}^{\min}]$ et $[T_{\theta}^{\max}]$, l'unité de mesure étant α . Ainsi, le théorème 6 donne une description complète du polytope $\text{Pol}(T)$ par son éventail normal et les longueurs des arêtes.

Comme dans le paragraphe 4.2, considérons un chemin $t \mapsto \theta_t$ décroissant dans $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ et joignant un point de C_0 à un point de $-C_0$, assez générique pour éviter toutes les facettes de codimension supérieure à 2 de l'éventail de Weyl. Ce chemin traverse successivement des chambres $C_0, s_{i_1}C_0, s_{i_1}s_{i_2}C_0, \dots, -C_0$, où $\mathbf{i} \in \mathcal{X}$. Notons F_k la cloison séparant la k -ième de la $(k+1)$ -ième chambre de cette liste et θ_k le point de F_k par où passe le chemin. Alors les sous-quotients $T_{\theta_k}^{\max}/T_{\theta_k}^{\min}$ de la filtration décroissante d'un Λ -module T sont de la forme $L_{F_k}^{\oplus n_k}$. À dualité près, cette filtration est celle construite par Geiß, Leclerc et Schröer ([45], section 10). On a alors le résultat suivant ([9], Proposition 5.25; voir aussi [54]).

Proposition 7 *Soit $b \in B(\infty)$ et soit $(n_1, \dots, n_N) = \mathbf{n}_{\mathbf{i}}(b)$. Prenons un point général dans Λ_b et regardons-le comme un Λ -module T . Alors $T_{\theta_k}^{\max}/T_{\theta_k}^{\min} \cong L_{F_k}^{\oplus n_k}$ pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$.*

Réexaminant la définition des polytopes MV en termes de données de Lusztig, on voit alors que pour T général dans Λ_b , on a $\text{Pol}(T) = \text{Pol}(b)$. En d'autres termes, les polytopes MV sont les polytopes HN génériques pour la catégorie $\Lambda\text{-mod}$.

Un ingrédient crucial dans la preuve du théorème 6 est la théorie du basculement de Buan, Iyama, Reiten et Scott [27]. Ces auteurs considèrent l'idéal annulateur I_i du module S_i et observent que l'on a les relations de tresses $I_i I_j = I_j I_i$ si $a_{i,j} = 0$ et $I_i I_j I_i = I_j I_i I_j$ si $a_{i,j} = -1$. On peut alors associer un idéal bilatère à tout $w \in W$ en posant $I_w = I_{i_1} \cdots I_{i_k}$, où $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ est une décomposition réduite. Chaque idéal I_w est projectif, basculant, et de codimension finie. On montre alors que pour $w \in W$ et $\theta \in wC_0$, les sous-modules T_θ^{\min} et T_θ^{\max} d'un Λ -module T de dimension finie coïncident et sont égaux à l'image de l'application d'évaluation $I_w \otimes_\Lambda \text{Hom}_\Lambda(I_w, T) \rightarrow T$.

Pour prouver la proposition 7, nous sommes donc conduits à chercher le lien entre données de Lusztig et théorie du basculement. Deux ingrédients sont ici employés : d'une part, la méthode de Saito (3) ramenant la détermination des données de Lusztig au calcul des réflexions cristallines s_i ; d'autre part, le théorème 5.3 de [8], qui affirme que pour tout $b \in B(\infty)$, le foncteur de réflexion $\text{Hom}_\Lambda(I_i, ?)$ envoie le point général de Λ_b sur le point général de $\Lambda_{s_i(b)}$.

4.5 Polytopes de Mirković-Vilonen affines

Nous voulons maintenant généraliser cette notion de polytope MV au cas où la matrice de Cartan A est de type affine. Le cristal $B(\infty)$ est toujours bien défini ; de fait, les définitions données dans la section 2 ont un sens pour toute matrice de Cartan généralisée symétrisable.

En type affine, l'équivalence de Satake géométrique ne fonctionne plus très bien. Des variétés algébriques pouvant servir de substitut aux cycles MV ont été construites [33, 39], mais on ne sait actuellement pas étendre les résultats de [57] à ce cadre.

On pourrait procéder comme dans le paragraphe 4.1, car des bases PBW ont été définies pour les algèbres enveloppantes quantifiées affines, et elles sont compatibles avec la base cristalline globale [10, 11, 12, 52]. Une description purement combinatoire des polytopes MV affines ainsi définis serait alors l'analogue des bijections linéaires par morceaux R_i^1 définies par Lusztig dans [71], section 2.6.

Nous allons pour notre part utiliser le modèle préprojectif. De fait, les résultats du paragraphe 4.3 sont valables pour toute matrice de Cartan généralisée symétrique A , à condition d'introduire une condition de nilpotence sur les représentations de l'algèbre préprojective ([72], section 8).

Dans le cadre affine, R est formé des racines réelles, conjuguées des racines simples par le groupe de Weyl, et des racines imaginaires, qu'il faut compter avec multiplicité. Soit \mathfrak{h} la sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Kac-Moody affine, soit δ la racine imaginaire positive indécomposable, soit $\bar{\mathfrak{h}}^*$ le sous-espace vectoriel de \mathfrak{h}^* engendré par R , et soit $\mathring{\mathfrak{h}}$ l'orthogonal de δ dans $\bar{\mathfrak{h}}$. L'image \mathring{R} de $R \setminus \mathbb{Z}\delta$ dans $\bar{\mathfrak{h}}^*/C\delta$ est le système de racines classique (fini). Les hyperplans $\ker \alpha$ dessinent sur $\bar{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}$ un éventail (non localement fini), que nous appellerons encore éventail de Weyl ; ils dessinent sur $\mathring{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}$ l'éventail de Weyl de \mathring{R} . Nous noterons Γ l'ensemble des rayons (cônes de dimension 1) de l'éventail dans $\mathring{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}$. Pour chaque chambre de Weyl $C \subseteq \mathring{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}$, nous noterons $\Gamma_C = \Gamma \cap \bar{C}$.

On remarque que les polytopes HN des Λ -modules vivent dans l'espace vectoriel $\bar{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}^*$. Avec ces conventions, le théorème 6 est encore valable dans le cas affine, à condition d'ajouter la condition $\theta(\delta) \neq 0$ aux hypothèses du point (b) (autrement dit, on demande que la racine α soit réelle).

Quand $\theta \in \mathring{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}$, les choses se compliquent sensiblement. On observe toutefois que la condition d'être θ -semi-stable est ouverte, au sens où pour chaque \mathbf{k} -espace vectoriel I -gradué \mathbf{V} , l'ensemble $\{T \in \Lambda_{\mathbf{V}} \mid T \in \mathcal{R}_\theta\}$ est une partie ouverte de $\Lambda_{\mathbf{V}}$. Il est donc licite de dire que le point

général d'une composante irréductible de $\Lambda\mathfrak{v}$ est θ -semi-stable.

On a alors ([9], théorème 7.19 et corollaire 7.20) :

Théorème 8 (a) *Pour chaque $\gamma \in \Gamma$ et chaque entier $n \geq 1$, il existe une unique composante irréductible $I(\gamma, n) \in \mathfrak{B}$ dont le point général est un Λ -module de vecteur-dimension $n\delta$, indécomposable et θ -semi-stable pour tout θ assez proche du rayon γ .*

(b) *Soit C une chambre de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{\circ}$ et soit $Z \in \mathfrak{B}$. Alors il existe des couples $(\gamma_1, n_1), \dots, (\gamma_p, n_p)$ dans $\Gamma_C \times \mathbb{N}$, uniques à permutation près, tels que pour $\theta \in C$ et pour T général dans Z , la décomposition de Krull-Schmidt de $T_{\theta}^{\max}/T_{\theta}^{\min}$ est de la forme $X_1 \oplus \dots \oplus X_p$, avec X_k général dans $I(\gamma_k, n_k)$.*

Avec les notations du (b), l'arête de $\text{Pol}(T)$ joignant $[T_{\theta}^{\min}]$ et $[T_{\theta}^{\max}]$ peut donc être décorée par la donnée des $(\gamma_1, n_1), \dots, (\gamma_p, n_p)$ à l'ordre près. Pour $\gamma \in \Gamma_C$ donné, on peut rassembler les entiers dans $\{n_k \mid \gamma_k = \gamma\}$ en une partition λ_{γ} . On peut montrer que λ_{γ} ne dépend que de Z et de γ , et pas du choix de la chambre C telle que $\gamma \in \overline{C}$.

En fin de compte, nous sommes conduits à considérer des polytopes à sommets entiers dans $\overline{\mathfrak{h}}^*$, dont l'éventail normal est moins fin que l'éventail de Weyl, munis d'une famille de partitions $(\lambda_{\gamma})_{\gamma \in \Gamma}$; un tel polytope est appelé polytope GGMS décoré. (L'acronyme GGMS est formé des initiales des noms des auteurs de l'article [47].) Un polytope GGMS décoré de la forme $\text{Pol}(T)$, avec T point général d'une composante irréductible $Z \in \mathfrak{B}$, muni des partitions construites à l'alinéa précédent, est appelé polytope MV. On peut montrer qu'un polytope GGMS décoré est MV si et seulement si ses 2-faces sont des polytopes MV de rang 2. Ainsi, il suffit de savoir décrire les polytopes MV de type $A_1 \times A_1$, A_2 et $A_1^{(1)}$ pour savoir décrire les polytopes MV pour n'importe quel type (affine symétrique). Nous renvoyons à [9], paragraphe 7.6, pour l'énoncé précis et la preuve de ce fait.

5 Deux propriétés de la base semi-canonique

Dans cette section, on s'intéresse à la base semi-canonique de Lusztig. Celle-ci n'est définie que si la matrice de Cartan A est symétrique; nous nous plaçons donc dans ce cas. (En revanche, A peut être une matrice de Cartan généralisée.) Nous présentons deux résultats : un théorème affirmant la compatibilité de la base semi-canonique avec l'action du groupe de Weyl, et un résultat de comparaison entre la base semi-canonique et la base cristalline globale.

5.1 Rappels sur la base semi-canonique

On reprend les notations du paragraphe 4.3. Étant donné un \mathbf{k} -espace vectoriel I -gradué \mathbf{V} et une orientation Ω du graphe de Dynkin, nous avons construit une sous-variété $\Lambda_{\mathbf{V}, \Omega}$ de

$$\mathbf{E}_{\mathbf{V}} = \bigoplus_{h \in H} \text{Hom}(\mathbf{V}_{h'}, \mathbf{V}_{h''}).$$

Le groupe $G_{\mathbf{V}} = \prod_{i \in I} \mathbf{GL}(\mathbf{V}_i)$ agit de façon naturelle sur $\mathbf{E}_{\mathbf{V}}$ et $\Lambda_{\mathbf{V}, \Omega}$.

Pour un vecteur-dimension $v \in \mathcal{Q}_+$, on note S_v l'ensemble des couples formés d'une suite $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$ d'éléments de I et d'une suite $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ d'entiers positifs tels que $v = \sum_{k=1}^m a_k \alpha_{i_k}$. Chaque $(\mathbf{i}, \mathbf{a}) \in S_v$ définit un monôme $\Theta_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{a})} = \theta_{i_1}^{(a_1)} \dots \theta_{i_m}^{(a_m)}$ de \mathbf{f} , de poids v .

Prenons $(\mathbf{i}, \mathbf{a}) \in S_v$ et prenons un \mathbf{k} -espace vectoriel I -gradué \mathbf{V} , de vecteur-dimension v . On appelle drapeau de type (\mathbf{i}, \mathbf{a}) dans \mathbf{V} une filtration décroissante $\mathbf{V} = \mathbf{V}^0 \supseteq \mathbf{V}^1 \supseteq \dots \supseteq \mathbf{V}^m = 0$ d'espaces vectoriels I -gradués tels que $\mathbf{V}^{k-1}/\mathbf{V}^k$ ait $a_k \alpha_{i_k}$ pour vecteur-dimension.

À isomorphisme canonique près, l'espace des fonctions constructibles \mathbf{G}_V -invariantes à valeurs complexes dépend seulement du vecteur dimension v de \mathbf{V} ; on le note $\widetilde{M}(v)$. Dans [73], section 12, Lusztig munit $\widetilde{M} = \bigoplus_{v \in Q_+} \widetilde{M}(v)$ d'une structure d'algèbre et construit un homomorphisme injectif $\kappa : \mathbf{f} \rightarrow \widetilde{M}$ (cet homomorphisme est noté γ dans [73] et κ dans [78]). L'application κ est définie de sorte que pour chaque $(\mathbf{i}, \mathbf{a}) \in S_v$, la valeur de $\kappa(\Theta_1^{(\mathbf{a})})$ en un point $x \in \Lambda_{\mathbf{V}, \Omega}$ soit égale à la caractéristique d'Euler-Poincaré de l'ensemble des drapeaux de \mathbf{V} de type (\mathbf{i}, \mathbf{a}) stables par x .

Chaque composante irréductible Z de $\Lambda_{\mathbf{V}, \Omega}$ contient un sous-ensemble ouvert dense Z_0 tel que toute fonction de $\kappa(\mathbf{f}_v)$ est constante sur Z_0 . On note $\delta_Z : \mathbf{f}_v \rightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire obtenue en faisant suivre κ de l'évaluation en un point de Z_0 . Ces formes linéaires δ_Z , pour $Z \in \mathfrak{B}_v$, forment une base du dual de \mathbf{f}_v ([73], section 12.14, et [78], théorème 2.7). Assemblant les bases duales dans \mathbf{f}_v pour tous les $v \in Q_+$, nous obtenons une base de \mathbf{f} . C'est la base semi-canonique. Nous noterons S l'isomorphisme de cristal de $B(\infty)$ sur la base semi-canonique. On peut vérifier que le vecteur dual à l'élément $S(b)$ de la base semi-canonique est la forme linéaire δ_Z , avec $Z = \Lambda_b$; autrement dit, les indexations par $B(\infty)$ de la base semi-canonique et de \mathfrak{B} sont cohérentes.

5.2 Base semi-canonique et action du groupe de Weyl

Nous avons défini au paragraphe 2.1 des éléments \bar{s}_i du groupe G . Soit T_i l'automorphisme de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ induit par l'action adjointe de \bar{s}_i .

Posons $U^+ = U(\mathfrak{n}^+)$. Posons $U_i^+ = U^+ \cap T_i(U^+)$; c'est l'algèbre enveloppante du radical nilpotent de la sous-algèbre parabolique $\mathbf{C}f_i \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$. Alors T_i se restreint en un automorphisme de U_i^+ . Par ailleurs, les décompositions

$$U^+ = e_i U^+ \oplus U_i^+ \quad \text{et} \quad U^+ = U^+ e_i \oplus U_i^+$$

fournissent des projections ${}^i\pi : U^+ \rightarrow U_i^+$ et $\pi^i : U^+ \rightarrow U_i^+$.

Transportons la base semicanonique de \mathbf{f} à U^+ grâce à l'isomorphisme $x \mapsto x^+$. Souvenons-nous des réflexions cristallines $s_i : B(\infty) \rightarrow B(\infty)$ de Saito, introduites au paragraphe 4.1.

Théorème 9 *Soit $b \in B$ tel que $\varphi_i(b) = 0$. Alors $T_i({}^i\pi(S(b))) = \pi^i(S(s_i b))$.*

Ce théorème est démontré dans [4]. L'ingrédient principal de la démonstration est le fait que le foncteur de réflexion $\text{Hom}_\Lambda(I_i, ?)$ du paragraphe 4.4 induise la réflexion cristalline s_i au niveau des composantes irréductibles des variétés $\Lambda_{\mathbf{V}}$. Une fois ce résultat acquis, la preuve se résume à une analyse combinatoire de la situation, consistant à découper des variétés en morceaux et à calculer leur caractéristique d'Euler-Poincaré à l'aide d'actions de \mathbb{C}^* .

Il convient ici de noter que l'analogue du théorème 9 pour la base cristalline globale est connu depuis longtemps, grâce aux travaux de Saito et de Lusztig [88, 77]; ce résultat passe même à la déformation quantique.

On notera enfin que le théorème 9 est encore valable quand A est une matrice de Cartan généralisée symétrique.

5.3 Comparaison entre la base cristalline globale et la base semi-canonique

Étant donnés $(b', b'') \in B(\infty)^2$, on écrit $b' \leq_{\text{pol}} b''$ si b' et b'' ont même poids et si $\text{Pol}(b') \subseteq \text{Pol}(b'')$. La relation \leq_{pol} est certainement une relation d'ordre, puisque l'application $b \mapsto \text{Pol}(b)$ est injective. Notre résultat suivant ([5], théorème 4.4) compare la base semi-canonique à la base cristalline globale à l'aide de \leq_{pol} .

Proposition 10 *La matrice de passage entre la base cristalline globale et la base semi-canonique est unitriangulaire inférieure quand $B(\infty)$ est muni de l'ordre \leq_{pol} .*

Pour prouver la proposition 10, on passe par l'intermédiaire des bases PBW ; cette stratégie est assez naturelle, vu la définition des polytopes MV et vu le lien étroit existant entre base cristalline globale et base PBW (voir le paragraphe 4.1). La petite difficulté est dans la comparaison entre la base semi-canonique et la base PBW : il est ici utile de savoir exprimer les faces des polytopes MV dans le langage des représentations de l'algèbre préprojective (voir [8], paragraphe 4.1, et [9], corollaire 5.21).

On peut alors combiner le théorème 9 aux propositions 1 et 10 pour obtenir un ensemble assez contraignant de conditions sur la matrice de passage entre la base cristalline globale et la base semi-canonique. L'idée est, dans la définition de l'ordre \leq , de remplacer la condition d'avoir $\varphi_i(b'_\ell) \leq \varphi_i(b''_\ell)$ pour tout $i \in I$ par la condition $\text{Pol}(b'_\ell) \subseteq \text{Pol}(b''_\ell)$, et d'ajouter la possibilité

– Il existe $i \in I$ tel que $\varphi_i(b') = \varphi_i(b'') = 0$ et $(c', c'') = (s_i b', s_i b'')$.

à la liste des mouvements élémentaires définissant la relation $(b', b'') \approx (c', c'')$. Ces modifications transforment l'ordre \leq en un ordre plus faible que \leq et \leq_{pol} , pour lequel la matrice de passage entre la base cristalline globale et la base semi-canonique est encore unitriangulaire inférieure.

6 Base cristalline globale et morphisme de Frobenius quantique

Dans cette section, nous étudions la compatibilité du morphisme de Frobenius quantique et de son scindage avec les bases de type canonique de \mathbf{f} . Ces morphismes nécessitant l'utilisation du groupe quantique, la notation \mathbf{f} désignera dans cette section la déformation quantique de l'algèbre définie au paragraphe 2.1. En outre, nous aurons besoin d'une base que se relève au groupe quantique et qui puisse être spécialisée en une racine de l'unité. Ceci nous invite à nous focaliser sur la base cristalline globale.

6.1 Rappels sur le morphisme de Frobenius quantique

Nous suivons les notations du livre de Lusztig [76] ; en particulier, nous supposons que les conditions (a) et (b) du paragraphe 35.1.2 de ce livre sont vérifiées.

Soit (d_i) une famille d'entiers strictement positifs tels que la matrice $(d_i a_{i,j})$ soit symétrique. Soit v une indéterminée. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in I$, on définit l'entier de Gauss $[n]_i$ et la factorielle de Gauss $[n]_i!$ comme dans le paragraphe 4.1. À partir de ces données, on définit \mathbf{f} comme la $\mathbb{C}(v)$ -algèbre engendrée par des éléments θ_i , pour $i \in I$, soumis aux relations (1), dans lesquelles les factorielles $p!$ et $q!$ ont été remplacées par leurs analogues gaussiens $[p]_i!$ et $[q]_i!$.

Soit $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$. La \mathcal{A} -sous-algèbre de \mathbf{f} engendrée par les puissances divisées $\theta_i^{(n)} = \theta_i^n / [n]_i!$ est une \mathcal{A} -forme $\mathcal{A}\mathbf{f}$ dans \mathbf{f} . Nous pouvons alors spécialiser le paramètre v en n'importe quel élément inversible d'un anneau commutatif R par un changement de base $R \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\mathbf{f}$ ([76], section 31.1). Ainsi par exemple, l'algèbre \mathbf{f} du paragraphe 2.1 est la spécialisation de $\mathcal{A}\mathbf{f}$ sur \mathbb{C} à la valeur $v = 1$. La base cristalline globale est en fait une \mathcal{A} -base de $\mathcal{A}\mathbf{f}$, donc elle induit une R -base dans chaque spécialisation $R\mathbf{f}$.

Soit $\ell \geq 1$ un entier. Pour $i \in I$, soit ℓ_i le plus petit entier positif tel que $\ell_i d_i \in \ell\mathbb{Z}$. On définit une nouvelle matrice de Cartan $A^* = (a_{i,j}^*)$ en posant $a_{i,j}^* = a_{i,j} \ell_j / \ell_i$. Si l'on pose $d_i^* = d_i \ell_i^2$, alors la matrice $(d_i^* a_{i,j}^*)$ est symétrique, ce qui permet de définir une $\mathbb{C}(v)$ -algèbre \mathbf{f}^* et une

\mathcal{A} -forme $\mathcal{A}\mathbf{f}^*$. Comme racines et coracines simples pour la donnée de Cartan étoilée, on choisit de prendre $\alpha_i^* = \ell_i \alpha_i$ et $(\alpha_i^*)^\vee = \alpha_i^\vee / \ell_i$.

Soit $\Phi_{2\ell}$ le 2ℓ -ième polynôme cyclotomique. Notons $R = \mathbb{Q}[\zeta]/(\Phi_{2\ell}(\zeta))$. Soient ${}_R\mathbf{f}$ et ${}_R\mathbf{f}^*$ les spécialisations de $\mathcal{A}\mathbf{f}$ et $\mathcal{A}\mathbf{f}^*$ sur R à la valeur $v = \zeta$. Alors il y a un homomorphisme d'algèbres $Fr_\ell : {}_R\mathbf{f} \rightarrow {}_R\mathbf{f}^*$ qui envoie le générateur $\theta_i^{(n)}$ sur $\theta_i^{(n/\ell_i)}$ si n est un multiple de ℓ_i et sur 0 sinon ; cette application est appelé le morphisme de Frobenius quantique. Dans l'autre sens, il y a un homomorphisme d'algèbres $Fr'_\ell : {}_R\mathbf{f}^* \rightarrow {}_R\mathbf{f}$ qui envoie $\theta_i^{(n)}$ sur $\theta_i^{(n\ell_i)}$; cette application est appelée le scindage du Frobenius quantique.

Soit $B(\infty)^*$ l'analogue du cristal $B(\infty)$ pour la matrice de Cartan A^* et l'algèbre \mathbf{f}^* . Dans [64], Kashiwara montre qu'il existe une unique application $S_\ell : B(\infty)^* \rightarrow B(\infty)$ telle que

$$\begin{aligned} \text{wt}(S_\ell(b)) &= \text{wt}(b), & \varepsilon_i(S_\ell(b)) &= \ell_i \varepsilon_i(b), & \varphi_i(S_\ell(b)) &= \ell_i \varphi_i(b), \\ S_\ell(\tilde{e}_i b) &= \tilde{e}_i^{\ell_i} S_\ell(b), & S_\ell(\tilde{f}_i b) &= \tilde{f}_i^{\ell_i} S_\ell(b). \end{aligned}$$

6.2 Compatibilité à filtration près

La meilleure compatibilité dont on puisse rêver entre la base cristalline globale et le morphisme de Frobenius quantique serait que

$$Fr_\ell(G(b')) = \begin{cases} G(b'') & \text{si } b' = S_\ell(b'') \\ 0 & \text{si } b' \notin \text{im } S_\ell \end{cases} \quad \text{et} \quad Fr'_\ell(G(b'')) = G(S_\ell(b'')), \quad (5)$$

où $G(b')$ et $G(b'')$ sont les éléments dans les bases cristallines globales de ${}_R\mathbf{f}$ et ${}_R\mathbf{f}^*$ qui correspondent à $b' \in B(\infty)$ et $b'' \in B(\infty)^*$, respectivement.

Cette propriété a lieu en types A_1 , A_2 , A_3 et B_2 . Nous devons cette belle observation à Littelmann, qui l'a vérifiée en utilisant les formules explicites pour la base cristalline globale données par Lusztig ([71], section 3.4) et Xi [93, 94]. Malheureusement, (5) tombe en défaut en type A_5 , comme nous le verrons au paragraphe 6.4.

La compatibilité peut toutefois être partiellement restaurée en filtrant \mathbf{f} et \mathbf{f}^* à l'aide de l'ordre \leq_{pol} , ainsi que le montre la proposition suivante ([5], proposition 6.3).

Proposition 11 *Soit $\ell \geq 1$ et soit $(b', b'') \in B(\infty) \times B(\infty)^*$.*

- (a) *Si $G(b'')$ apparaît dans le développement de $Fr_\ell(G(b'))$ sur la base cristalline globale de ${}_R\mathbf{f}^*$, alors $b' \leq_{\text{pol}} S_\ell(b'')$.*
- (b) *Si $G(b')$ apparaît dans le développement de $Fr'_\ell(G(b''))$ sur la base cristalline globale de ${}_R\mathbf{f}$, alors $S(b'') \leq_{\text{pol}} b'$.*

6.3 Formulaire

Le défaut de compatibilité stricte du morphisme de Frobenius quantique avec la base cristalline globale apparaît précisément à l'endroit où le support singulier des faisceaux pervers utilisés dans la construction de Lusztig de la base cristalline globale cesse d'être irréductible [65]. Cette situation a été étudiée en grand détail par Geiß, Leclerc et Schröer [40]. Nous avons toutefois besoin d'un petit complément d'information.

On se place en type A_5 , les sommets du diagramme de Dynkin étant numérotés de la façon habituelle. Pour $p \geq 1$, on pose :

$$\begin{aligned}\tilde{E}_p &= (\tilde{e}_2 \tilde{e}_4)^p (\tilde{e}_1 \tilde{e}_3^2 \tilde{e}_5)^p (\tilde{e}_2 \tilde{e}_4)^p \\ \xi_p &= (\theta_2^{(p)} \theta_4^{(p)}) (\theta_1^{(p)} \theta_3^{(2p)} \theta_5^{(p)}) (\theta_2^{(p)} \theta_4^{(p)}) \\ \eta_p &= (\theta_2^{(p)} \theta_4^{(p)}) (\theta_1^{(p)} \theta_3^{(2p)} \theta_5^{(p)}) (\theta_2^{(2p)} \theta_4^{(2p)}) (\theta_1^{(p)} \theta_3^{(2p)} \theta_5^{(p)}) (\theta_2^{(p)} \theta_4^{(p)})\end{aligned}$$

Pour chaque $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, on pose $b_{r,s} = \tilde{E}_{r+s} \tilde{E}_s 1$; c'est un élément de $B(\infty)$. On note $G(b_{r,s})$ l'élément de la base cristalline globale de $\mathcal{A}\mathbf{f}$ indexé par $b_{r,s}$. Le résultat suivant se trouve dans [5], paragraphe 5.1.

Théorème 12 *Pour chaque $p \geq 1$,*

$$\begin{aligned}\xi_p &= G(b_{p,0}), \\ \eta_p &= G(b_{0,p}) + G(b_{2,p-1}) + G(b_{4,p-2}) + \cdots + G(b_{2p,0}).\end{aligned}$$

Pour démontrer ce résultat, on utilise le langage géométrique de Lusztig [73] : les monômes ξ_p et η_p sont représentés par des complexes de faisceaux semi-simples, de la forme $L_{\mathbf{i}, \mathbf{a}; \Omega} = (\pi_{\mathbf{i}, \mathbf{a}})_! 1$, où $\pi_{\mathbf{i}, \mathbf{a}}$ est une application propre. (On a adopté ici les mêmes notations que celles de Lusztig.) Le point important est que dans notre cas, l'application $\pi_{\mathbf{i}, \mathbf{a}}$ est semi-petite, et on peut identifier les strates pertinentes. Malheureusement, la preuve des inégalités établissant la semi-petitesse de $\pi_{\mathbf{i}, \mathbf{a}}$ est basée sur des calculs explicites pénibles et pas conceptuels.

6.4 Contre-exemple à la compatibilité stricte

Revenons à l'étude du morphisme de Frobenius quantique et à son scindage.

On se place donc dans le type A_5 , et on prend $d_i = 1$ pour tout i , d'où $\ell_i = \ell$ et $A^* = A$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}Fr_\ell(\xi_p) &= \begin{cases} \xi_{p/\ell} & \text{si } \ell \text{ divise } p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} & Fr_\ell(\eta_p) &= \begin{cases} \eta_{p/\ell} & \text{si } \ell \text{ divise } p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ Fr'_\ell(\xi_p) &= \xi_{\ell p}, & Fr'_\ell(\eta_p) &= \eta_{\ell p}.\end{aligned}$$

Le théorème 12 donne alors

$$Fr_\ell(G(b_{p,0})) = \begin{cases} G(b_{p/\ell,0}) & \text{si } \ell \text{ divise } p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$Fr_2(G(b_{0,1})) + G(b_{1,0}) = 0,$$

et

$$Fr'_\ell(G(b_{p,0})) = G(b_{\ell p,0}),$$

$$Fr'_\ell(G(b_{0,1})) = G(b_{0,\ell}) + G(b_{2,\ell-1}) + G(b_{4,\ell-2}) + \cdots + G(b_{2\ell-2,1}).$$

Ainsi (5) n'est pas vérifié.

7 Perspectives

Cette partie du mémoire n'est pas publique.

Références

- [1] J. Anderson, *On Mirković and Vilonen's intersection homology cycles for the loop Grassmannian*. Ph.D. Thesis, Princeton University, 2000.
- [2] J. Anderson, *A polytope calculus for semi-simple groups*. *Duke Math. J.* **116** (2003), 567–588.
- [3] J. Anderson, M. Kogan, *The algebra of Mirković-Vilonen cycles in type A*. In : *In honor of Robert D. MacPherson*, *Pure Appl. Math. Q.* **2** (2006), Special Issue, Part 2, 1187–1215.
- [4] P. Baumann, *Weyl group action and semi-canonical bases*. *Adv. Math.* **228** (2011), 2874–2890.
- [5] P. Baumann, *The canonical basis and the quantum Frobenius morphism*. Prépublication arXiv:1201.0303.
- [6] P. Baumann, T. Dunlap, J. Kamnitzer, P. Tingley, *Rank 2 affine MV polytopes*. Prépublication arXiv:1202.6416.
- [7] P. Baumann, S. Gaussent, *On Mirković-Vilonen cycles and crystal combinatorics*. *Represent. Theory* **12** (2008), 83–130.
- [8] P. Baumann, J. Kamnitzer, *Preprojective algebras and MV polytopes*. *Represent. Theory* **16** (2012), 152–188.
- [9] P. Baumann, J. Kamnitzer, P. Tingley, *Affine Mirković-Vilonen polytopes*. Prépublication arXiv:1110.3661.
- [10] J. Beck, *Convex bases of PBW type for quantum affine algebras*. *Comm. Math. Phys.* **165** (1994), 193–199.
- [11] J. Beck, V. Chari, A. Pressley, *An algebraic characterization of the affine canonical basis*. *Duke Math. J.* **99** (1999), 455–487.
- [12] J. Beck, H. Nakajima, *Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras*. *Duke Math. J.* **123** (2004), 335–402.
- [13] A. Beilinson, V. Drinfeld, *Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigen-sheaves*. Livre inachevé disponible à l'adresse <http://www.math.uchicago.edu/~mitya/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf>.
- [14] A. Berenstein, D. Kazhdan, *Geometric and unipotent crystals*. In : *GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999)*, *Geom. Funct. Anal.* **2000**, Special Volume, Part I, 188–236.
- [15] A. Berenstein, D. Kazhdan, *Geometric and unipotent crystals. II. From unipotent bicrystals to crystal bases*. In : *Quantum groups*, pp. 13–88, *Contemp. Math.* vol. 433, American Mathematical Society, 2007.
- [16] A. Berenstein, S. Fomin, A. Zelevinsky, *Parametrizations of canonical bases and totally positive matrices*. *Adv. Math.* **122** (1996), 49–149.
- [17] A. Berenstein, S. Fomin, A. Zelevinsky, *Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells*. *Duke Math. J.* **126** (2005), 1–52.

- [18] A. Berenstein, A. Zelevinsky, *String bases for quantum groups of type A_r* . In : *I. M. Gelfand Seminar*, pp. 51–89, Adv. Soviet Math. vol. 16, Part 1, American Mathematical Society, 1993.
- [19] A. Berenstein, A. Zelevinsky, *Total positivity in Schubert varieties*. Comment. Math. Helv. **72** (1997), 128-166.
- [20] A. Berenstein, A. Zelevinsky, *Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties*. Invent. Math. **143** (2001), 77–128.
- [21] P. Biane, P. Bougerol, N. O’Connell, *Littelmann paths and Brownian paths*. Duke Math. J. **130** (2005), 127–167.
- [22] P. Biane, P. Bougerol, N. O’Connell, *Continuous crystal and Duistermaat-Heckman measure for Coxeter groups*. Adv. Math. **221** (2009), 1522–1583.
- [23] R. Bott, *Homogeneous vector bundles*. Ann. of Math. (2) **66** (1957), 203–248.
- [24] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie. Chapitres VII et VIII*. Actualités Scientifiques et Industrielles vol. 1364, Hermann, 1975.
- [25] A. Braverman, D. Gaitsgory, *Crystals via the affine Grassmannian*. Duke Math. J. **107** (2001), 561–575.
- [26] J.-L. Brylinski, P. Deligne, *Central extensions of reductive groups by \mathbf{K}_2* . Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **94** (2001), 5–85.
- [27] A. B. Buan, O. Iyama, I. Reiten, J. Scott, *Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups*. Compos. Math. **145** (2009), 1035–1079.
- [28] P. Caldero, *Adapted algebras for the Berenstein-Zelevinsky conjecture*. Transform. Groups **8** (2003), 37–50.
- [29] C. De Concini, D. Kazhdan, *Special bases for S_N and $GL(n)$* . Israel J. Math. **40** (1981), 275–290.
- [30] M. Demazure, *Une nouvelle formule des caractères*. Bull. Sci. Math. (2) **98** (1974), 163–172.
- [31] M. Demazure, *A very simple proof of Bott’s theorem*. Invent. Math. **33** (1976), 271–272.
- [32] M. Ehrig, *MV-polytopes via affine buildings*. Duke Math. J. **155** (2010), 433–482.
- [33] M. Finkelberg, I. Mirković, *Semi-infinite flags. I. Case of global curve \mathbb{P}^1* . In : *Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications*, pp. 81–112, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 194, American Mathematical Society, 1999.
- [34] H. Freudenthal, *Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen. I, II*. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. **57** (= Indag. Math. **16**) (1954), 369–276, 487–491.
- [35] W. Fulton, *Intersection theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 2, Springer-Verlag, 1984.
- [36] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellungen. I*. Manuscripta Math. **6** (1972), 71–103.
- [37] H. Garland, *The arithmetic theory of loop groups*. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **52** (1980), 5–136.
- [38] S. Gaussent, P. Littelmann, *LS galleries, the path model, and MV cycles*. Duke Math. J. **127** (2005), 35–88.
- [39] S. Gaussent, G. Rousseau, *Kac-Moody groups, hovels and Littelmann paths*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **58** (2008), 2605–2657.


- [40] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Semicanonical bases and preprojective algebras*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **38** (2005), 193–253.
- [41] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Rigid modules over preprojective algebras*. Invent. Math. **165** (2006), 589–632.
- [42] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Auslander algebras and initial seeds for cluster algebras*. J. Lond. Math. Soc. (2) **75** (2007), 718–740.
- [43] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Semicanonical bases and preprojective algebras. II. A multiplication formula*. Compos. Math. **143** (2007), 1313–1334.
- [44] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Preprojective algebras and cluster algebras*. In : *Trends in representation theory of algebras and related topics*, pp. 253–283, EMS Series of Congress Reports, European Mathematical Society, 2008.
- [45] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, *Kac-Moody groups and cluster algebras*. Adv. Math. **228** (2011), 329–433.
- [46] I. M. Gelfand, M. Cetlin, *Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices*. Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **71** (1950), 825–828.
- [47] I. M. Gelfand, R. M. Goresky, R. D. MacPherson, V. V. Serganova, *Combinatorial geometries, convex polyhedra, and Schubert cells*. Adv. Math. **63** (1987), 301–316.
- [48] I. M. Gelfand, A. Zelevinsky, *Polyhedra in the scheme space and the canonical basis in irreducible representations of \mathfrak{gl}_3* . Funktsional. Anal. i Prilozhen. **19** (1985), 72–75 ; traduction anglaise dans Funct. Anal. Appl. **19** (1985), 141–144.
- [49] V. Ginzburg, *Perverse sheaves on a loop group and Langlands duality*. Prépublication arXiv:alg-geom/9511007.
- [50] I. Grojnowski, G. Lusztig, *A comparison of bases of quantized enveloping algebras*. In : *Linear algebraic groups and their representations (Los Angeles, CA, 1992)*, pp. 11–19, Contemp. Math. vol. 153, American Mathematical Society, 1993.
- [51] D. Hernandez, B. Leclerc, *Quantum Grothendieck rings and derived Hall algebras*. Prépublication arXiv:1109.0862.
- [52] K. Ito, *A new description of convex bases of PBW type for untwisted quantum affine algebras*. Hiroshima Math. J. **40** (2010), 133–183.
- [53] B. Iversen, *Cohomology of sheaves*. Universitext, Springer-Verlag, 1986.
- [54] Y. Jiang, *Parametrizations of canonical bases and irreducible components of nilpotent varieties*. Prépublication arXiv:1110.2937.
- [55] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, 1990.
- [56] J. Kamnitzer, *The crystal structure on the set of Mirković-Vilonen polytopes*. Adv. Math. **215** (2007), 66–93.
- [57] J. Kamnitzer, *Mirković-Vilonen cycles and polytopes*. Ann. of Math. **171** (2010), 245–294.
- [58] M. Kashiwara, *Crystalizing the q -analogue of universal enveloping algebras*. Comm. Math. Phys. **133** (1990), 249–260.
- [59] M. Kashiwara, *Bases cristallines*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **311** (1990), 277–280.
- [60] M. Kashiwara, *On crystal bases of the Q -analogue of universal enveloping algebras*. Duke Math. J. **63** (1991), 465–516.

- [61] M. Kashiwara, *Global crystal bases of quantum groups*. Duke Math. J. **69** (1993), 455–485.
- [62] M. Kashiwara, *The crystal base and Littelmann’s refined Demazure character formula*. Duke Math. J. **71** (1993), 839–858.
- [63] M. Kashiwara, *On crystal bases*. In : *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, pp. 155–197, CMS Conference Proceedings vol. 16, American Mathematical Society, 1995.
- [64] M. Kashiwara, *Similarity of crystal bases*. In : *Lie algebras and their representations (Seoul, 1995)*, pp. 177–186, Contemp. Math. vol. 194, American Mathematical Society, 1996.
- [65] M. Kashiwara, Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases*. Duke Math. J. **89** (1997), 9–36.
- [66] B. Kostant, *A formula for the multiplicity of a weight*. Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 53–73.
- [67] S. Kumar, *Infinite Grassmannians and moduli spaces of G -bundles*. In : *Vector bundles on curves—new directions (Cetraro, 1995)*, pp. 1–49, Lecture Notes in Math. vol. 1649, Springer-Verlag, 1997.
- [68] B. Leclerc, *Imaginary vectors in the dual canonical basis of $U_q(\mathfrak{n})$* . Transform. Groups **8** (2003), 95–104.
- [69] B. Leclerc, *Cluster algebras and representation theory*. In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume IV*, pp. 2471–2488, Hindustan Book Agency, 2010.
- [70] P. Littelmann, *Paths and root operators in representation theory*. Ann. of Math. **142** (1995), 499–525.
- [71] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*. J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447–498.
- [72] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras II*. Progr. Theoret. Phys. Suppl. **102** (1990), 175–201.
- [73] G. Lusztig, *Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras*. J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 365–421.
- [74] G. Lusztig, *Introduction to quantized enveloping algebras*. In : *New developments in Lie theory and their applications (Córdoba, 1989)*, pp. 49–65, Progress in Mathematics vol. 105, Birkhäuser, 1992.
- [75] G. Lusztig, *Affine quivers and canonical bases*. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **76** (1992), 111–163.
- [76] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*. Progress in Mathematics vol. 110, Birkhäuser, 1993.
- [77] G. Lusztig, *Braid group action and canonical bases*. Adv. Math. **122** (1996), 237–261.
- [78] G. Lusztig, *Semicanonical bases arising from enveloping algebras*. Adv. Math. **151** (2000), 129–139.
- [79] O. Mathieu, *Good bases for G -modules*. Geom. Dedicata **36** (1990), 51–66.
- [80] I. Mirković, K. Vilonen, *Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings*. Ann. of Math. **166** (2007), 95–143.
- [81] S. Morier-Genoud, *Relèvement géométrique de la base canonique et involution de Schützenberger*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **337** (2003), 371–374.

- [82] D. Muthiah, *Double MV cycles and the Naito-Sagaki-Saito crystal*. Prépublication arXiv: 1108.5404.
- [83] M. Reineke, *Multiplicative properties of dual canonical bases of quantum groups*. J. Algebra **211** (1999), 134–149.
- [84] M. Reineke, *The Harder-Narasimhan system in quantum groups and cohomology of quiver moduli*. Invent. Math. **152** (2003), 349–368.
- [85] V. S. Retakh, A. V. Zelevinsky, *The base affine space and canonical basis in irreducible representations of the group Sp_4* . Dokl. Akad. Nauk SSSR **300** (1988), 31–35 ; traduction anglaise dans Soviet Math. Dokl. **37** (1988), 618–622.
- [86] C. M. Ringel, *Hall algebras and quantum groups*. Invent. Math. **101** (1990), 583–591.
- [87] C. Sabbah, *Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux*. In : *Systèmes différentiels et singularités (Luminy, 1983)*, pp. 161–192, Astérisque **130** (1985).
- [88] Y. Saito, *PBW basis of quantized universal enveloping algebras*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **30** (1994), 209–232.
- [89] P. Slodowy, *On the geometry of Schubert varieties attached to Kac-Moody Lie algebras*. In : *Proceedings of the 1984 Vancouver conference in algebraic geometry*, pp. 405–442, CMS Conference Proceedings vol. 6, American Mathematical Society, 1986.
- [90] É. Vasserot, *On the action of the dual group on the cohomology of perverse sheaves on the affine Grassmannian*. Compos. Math. **131** (2002), 51–60.
- [91] D. Verma, *Structure of certain induced representations of complex semisimple lie algebras*. Ph.D. Thesis, Yale University, 1966.
- [92] H. Weyl, *The classical groups. Their invariants and representations*. Princeton University Press, 1939.
- [93] N. Xi, *Canonical basis for type A_3* . Comm. Algebra **27** (1999), 5703–5710.
- [94] N. Xi, *Canonical basis for type B_2* . J. Algebra **214** (1999), 8–21.


L'étude des représentations d'un groupe algébrique complexe semi-simple connexe G est généralement menée en choisissant un sous-groupe de Borel B de G et un tore maximal T inclus dans B . Étant donnée une représentation de G sur un espace vectoriel V , il est dès lors naturel de vouloir étudier les bases de V compatibles avec ce choix de (B, T) . Différents travaux de Zelevinsky, Berenstein, Lusztig et Kashiwara ont conduit aux notions de « base canonique », de « bonne base », de « base parfaite », de « base en cordes », ... , et à la construction de telles bases. Le but de ce mémoire est de présenter succinctement cette théorie, d'exposer quelques propriétés remarquables de ces bases et de la combinatoire qu'elles définissent, et de proposer quelques perspectives.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501
 Université de Strasbourg et CNRS
 7 rue René Descartes
 67084 STRASBOURG CEDEX



UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Tél. 03 68 85 01 29
 Fax 03 68 85 03 28
www-irma.u-strasbg.fr
irma@math.unistra.fr



Institut de Recherche
Mathématique Avancée

IRMA 2012/005
<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00705204>

ISSN 0755-3390