DEUG MIAS 1re année
Année 2004–2005

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

UFR de mathématique et d'informatique — Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes — 67084 Strasbourg Cedex

Table des matières

Avant-propos

En 2000, l'Université Louis Pasteur s'était engagée auprès du Ministère de l'Éducation Nationale à instituer un enseignement d'histoire des sciences pour tous les étudiants en première année de DEUG. Pour la filière MIAS, cet engagement s'était concrétisé par la création d'un cours d'histoire des mathématiques en 2003. Des notes de cours ont été rédigées puis mises à disposition des étudiants début 2004. Le présent polycopié en est une version mise à jour. Les seuls changements concernent les chapitres 9, 10 et 11 : les erreurs détectées ont été corrigés et plusieurs paragraphes ont été réécrits. Le texte conserve donc ses plus gros défauts, à savoir sa longueur excessive et la lourdeur de sa rédaction. C'est malheureusement le prix à payer pour que nos explications soient précises et complètes.

Lors de la mise en place de ce cours, notre première tâche en tant qu'enseignants fut de réfléchir aux objectifs que nous voulions atteindre. Que devions-nous transmettre ? Nous avions peu de points de repère, car les enseignements d'histoire des sciences sont plutôt rares en France, et le sont encore plus quand il s'agit d'enseignements obligatoires destinés à un public en première année d'université. Nous étions au minimum tenu de présenter les grandes lignes de l'histoire des mathématiques, à savoir donner les réponses aux questions « qui, quand, quoi, où, comment » concernant les principales étapes du développement de la pensée mathématique.

Ne faire que cela aurait déjà permis d'apporter aux étudiants des éléments de culture scientifique utiles pour la compréhension des théories mathématiques modernes. Nous avons cependant estimé souhaitable d'aller plus loin en proposant une interprétation de l'histoire des mathématiques à travers une triple mise en perspective. Premièrement, nous mettons en évidence le fait que les mathématiques sont le fruit d'un travail collectif de réflexion commencé il y a plusieurs millénaires. Elles n'existeraient pas s'il n'y avait pas eu d'homme ou de femme pour les créer, les développer et les utiliser. Autrement dit, les mathématiques ne sont pas une théorie morte, qui aurait de tout temps existé, où il n'y aurait plus rien à découvrir, et pour l'usage de laquelle on pourrait se reposer sur les programmes de calcul formel disponibles sur nos ordinateurs. Pour souligner ce caractère humain des mathématiques, nous décrivons la position sociale, les motivations et les méthodes de travail des savants dans chacune des sociétés que nous abordons. Deuxièmement, nous montrons l'importance des traditions dans la constitution de cette science. Un exemple qui illustre bien ce point est fourni par un ouvrage écrit vers 300 avant J.-C., les *Éléments* d'Euclide : non seulement ce texte a joué un rôle majeur dans la consolidation du savoir mathématique grec et sa transmission aux civilisations postérieures, mais en outre il a codifié durablement la manière de faire des mathématiques. L'invention de la géométrie analytique au début du XVII^{e} siècle est elle aussi un bel exemple de l'influence durable des problématiques des géomètres grecs sur le développement des mathématiques. Troisièmement, nous montrons sur quelques exemples l'existence de liens entre les progrès de la science et le contexte économique, scientifique et culturel dans lequel vivent les hommes et les femmes qui produisent cette science. L'exemple classique, et sur lequel les historiens s'accordent, est que le développement du commerce international dans les grandes cités italiennes au XIIIe siècle a créé les conditions favorables à la formation d'une communauté de calculateurs. Nous verrons aussi que l'idéalisme des philosophes grecs de l'Antiquité et des néo-humanistes allemands du XIXe siècle a encouragé des recherches purement théoriques.

Le cours suit une approche chronologique. Nous avons choisi de commencer au début du IIe millénaire avant J.-C. en Mésopotamie et de nous arrêter aux portes du XIXe siècle en Europe. Dans les six premiers chapitres, nous nous attachons à expliquer ce qui tourne autour des questions d'héritage culturel entre civilisations et des liens entre pratique scientifique et contexte social ; c'est pourquoi nous y faisons quelques brefs rappels historiques. Les quatre chapitres suivants ont pour objectif de présenter, sur l'exemple de l'analyse infinitésimale, la manière dont une théorie scientifique voit le jour, avec des avancées rapides, mais aussi des controverses et des conservatismes qui constituent des freins au progrès.

Certains étudiants peuvent avoir le sentiment que cet enseignement est inutile, car il ne donne pas un accès immédiat aux théories mathématiques modernes et efficaces. Cela est vrai, mais après tout les mathématiques paraissent elles aussi souvent inutiles. Le but d'un enseignement d'histoire des sciences et de culture scientifique est le même que celui d'un enseignement de sciences traditionnel : il permet de transmettre l'expérience de nos prédécesseurs. L'histoire permet de prendre du recul par rapport aux événements immédiats ; la culture permet d'avoir des repères.

Nous avons été amenés à faire des choix et donc à omettre des sujets pourtant intéressants. Par exemple, nous aurions aimé parler des différents systèmes de numération : le fait que des techniques de calcul arithmétique différentes aient été utilisées, chacune spécialement adaptée aux particularités d'un système de numération, est un parfait exemple de l'influence que peut avoir le choix des notations dans le développement d'une théorie mathématique. Nous passons également trop rapidement sur l'acceptation des nombres négatifs et des nombres complexes et n'abordons pas les questions liées à la construction des nombres réels. Les mathématiques ont longtemps entretenu une relation privilégiée avec l'astronomie, puisque jusqu'au XIXe siècle, les deux disciplines ne formaient qu'une seule science ; cependant, nous n'analysons pas l'impact sur le développement des mathématiques des procédés mis au point pour les besoins des astronomes. Nous avons également mis de côté les mathématiques de la Chine et de l'Inde anciennes. Deux autres omissions volontaires encore sont l'histoire des probabilités et la problématique des géométries non-euclidiennes. Enfin, nous ne parlons quasiment pas des mathématiques des XIXe et XXe siècle : quatre-vingt-dix pour-cent des avancées en mathématiques ont pourtant été faites dans les deux derniers siècles.

La forme actuelle de ce cours doit beaucoup au travail de Silke Slembek, qui faisait partie de l'équipe enseignante pendant l'année scolaire 2002–2003. Nous tenons à la remercier pour l'énorme travail de recherche documentaire et de mise en forme qu'elle a accompli. Nous devons également des remerciements à Alain Kuzniak pour ses conseils toujours très pertinents, notamment concernant les mathématiques grecques.

Pour l'équipe enseignante,
Pierre Baumann

Chapitre 1

Anciennes Civilisations

Résumé et objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, nous présentons le cadre historique, social et culturel de la civilisation mésopotamienne, dans laquelle s'est développé un des premiers savoirs mathématiques. Un grand nombre de textes produits par cette civilisation sont parvenus jusqu'à nous, grâce à la durabilité du support matériel utilisé. La plupart de ces textes se présentent sous forme de listes à vocation exhaustive. Cette façon d'organiser les connaissances reflète la conception du monde qu'avaient les hommes et les femmes de cette civilisation : il est possible d'appréhender les phénomènes naturels en observant les régularités selon lesquelles ils se produisent, mais pas de les expliquer en les reliant causalement les uns aux autres.

Nous examinons ensuite les textes mathématiques produits par cette civilisation. Après avoir expliqué le système de numération et les méthodes de calcul arithmétique utilisés par les scribes mésopotamiens, nous examinons les textes de procédure qu'ils utilisaient lorsqu'il devaient résoudre un problème. La présentation même de ces textes montrent que les Mésopotamiens n'avaient développé aucun symbolisme ni aucun concept abstrait. Les mathématiques n'étaient pas une science avec des objets, des concepts et des méthodes, mais un ensemble de techniques opératoires permettant de résoudre efficacement les problèmes concrets de la société.

1.1 Introduction

Il y a dix mille ans de cela, l'homme invente l'agriculture : il se met à cultiver et à élever, et ne vit plus seulement des hasards de la cueillette et la chasse. Il devient sédentaire et s'attache à sa terre.

En plusieurs endroits de la planète, ce changement cause un vrai bouleversement : entre le VI^{e} et le II^{e} millénaire avant notre Ère, plusieurs grandes sociétés organisées prennent forme, en Mésopotamie, en Égypte, en Chine et en Inde. Des bribes de civilisations apparaissent également en Amérique du Sud.

L'écriture apparaît dans les civilisations mésopotamienne, égyptienne et chinoise vers 3000 avant J.-C. C'est également dans ces trois civilisations que l'on trouve les premières traces d'existence de techniques mathématiques : les premiers systèmes de numération et les méthodes de calculs qui en permettent la manipulation servent à la gestion (gestion du calendrier, gestion des réserves, transactions commerciales, collecte des impôts...) tandis qu'une géométrie élémentaire permet de résoudre les questions de mesure (volumes de grain et aire des champs, problèmes liés à la construction d'édifices...)

Les techniques mathématiques utilisées dans ces trois civilisations possèdent plusieurs points communs. D'une part, elles sont mises en œuvre pour résoudre les mêmes types de problème pratique. Ensuite, leur usage est réservée à l'élite administrative. Enfin, la forme de ces mathématiques est celle d'un ensemble de procédures présentées sur des exemples numériques concrets ; aucun concept général n'est dégagé, aucun formalisme n'est utilisé ; les procédures ne sont ni décrites de façon générale, ni démontrées.

Nous allons à présent porter notre attention sur les techniques mathématiques de la civilisation mésopotamienne, appelées souvent mathématiques babyloniennes. Notre étude illustrera et justifiera les affirmations générales ci-dessus.

1.2 La civilisation mésopotamienne

La Mésopotamie est la région du Moyen-Orient formée par la plaine du Tigre et de l'Euphrate. Plusieurs peuples ont vécu là entre le VI$^{\text{e}}$ et le I$^{\text{er}}$ millénaire avant J.-C. Les Sumériens s'y établissent au IV$^{\text{e}}$ millénaire ; ils y fondent de puissantes cités-états, inventent la vie urbaine et l'écriture. Le pouvoir politique sur ces terres fertiles passa ensuite entre les mains des Akkadiens, qui fondent la ville de Babylone à la fin du III$^{\text{e}}$ millénaire. Puis vinrent les Amorrites vers 1900 avant J.-C. ; le roi des Amorrites Hammourabi fait de Babylone sa capitale et fonde le premier Empire babylonien. Après la destruction de la ville par les Hittites, ce sera le tour des Kassites de régner sur Babylone, tandis que l'Empire hourrite du Mitanni domine en Haute-Mésopotamie. Le suivant sur la liste est le puissant Empire des Assyriens, qui durera du XIV$^{\text{e}}$ au VII$^{\text{e}}$ siècle avant J.-C. et qui s'étendra à son apogée jusqu'en Égypte ; on a retrouvé à Ninive la bibliothèque du roi assyrien Assourbanipal. La mort de ce dernier affaiblit l'Empire : au VII$^{\text{e}}$–VI$^{\text{e}}$ siècle, une éphémère dynastie néobabylonienne s'établit à Babylone et contrôle des territoires s'étendant jusqu'à Jérusalem. L'histoire continue alors avec l'Empire perse et celui d'Alexandre le Grand ; nous en parlerons ultérieurement.

Nous avons écrit plusieurs fois le mot « empire », synonyme de pouvoir centralisé s'étendant sur un vaste territoire (plusieurs fois la France). Le souverain, à moitié divinisé aux yeux de son peuple, se trouve au sommet de l'État. Une haute administration l'aide à gérer les affaires de l'empire. Les membres de cette haute administration occupent une place élevée dans la hiérarchie sociale, car ils sont nécessaires à l'exercice et au maintien du pouvoir. En dessous de ces couches sociales supérieures se trouvent les artisans et commerçants, puis les paysans, et enfin les esclaves.

Les « porteurs de savoir » importants pour notre histoire appartiennent à la haute administration civile. Ils ont appris à lire, à écrire et à calculer dans des écoles mises en place par le pouvoir central. Ces « scribes », comme on les appelle, mettent leurs compétences au service du pouvoir qui les emploie. Ils doivent par exemple veiller à la bonne marche des chantiers d'intérêt collectif, comme l'entretien des digues et des canaux d'irrigation (nécessaires sur des terres fertilisées par la crue annuelle du Tigre et de l'Euphrate) ou la construction de grands monuments. Il y a là des problèmes de gestion (approvisionnement en matériaux, paie et nourriture des ouvriers) et des questions techniques (arpentage, architecture). Les scribes sont également en charge des questions administratives ou juridiques (calcul des impôts, rédaction de contrats de mariages, règlement des héritages, des protocoles commerciaux, etc.) Grâce à leur formation, les scribes maîtrisent les techniques mathématiques nécessaires à la résolution des problèmes qu'ils peuvent rencontrer dans leur travail. Nous examinerons bientôt la forme particulière sous laquelle ces techniques se présentent. Avant cela, nous allons essayer de comprendre la façon dont les Mésopotamiens appréhendaient le monde et organisaient leurs connaissances.

1.3 Les textes mésopotamiens

La grande chance des historiens spécialistes de la civilisation mésopotamienne est de disposer de sources directes et authentiques. Il s'agit de textes écrits sur de petites tablettes d'argile, souvent rectangulaires, de taille comprise entre quelques centimètres à quelques dizaines de centimètres. Grâce au climat sec du Moyen-Orient, ces tablettes ont traversé les siècles, ce qui n'est malheureusement pas le cas des papyri égyptiens ou grecs. Plusieurs milliers de tablettes en argile ont été mises à jour lors de fouilles archéologiques ; la plupart d'entre elles datent de l'époque d'Hammourabi ou viennent de la bibliothèque d'Assourbanipal. Ces tablettes sont aujourd'hui conservées dans des musées ou des universités ; la Bibliothèque Nationale Universitaire de Strasbourg en possède quelques-unes.

Les scribes mésopotamiens marquaient l'argile de leurs tablettes en frappant dessus avec un roseau taillé en biseau, de sorte que leur écriture est cunéiforme, c'est-à-dire en forme de coin. L'usage de cette écriture s'était perdue au fil des siècles, mais des travaux effectués au cours du XIXe siècle ont permis d'en percer la signification. Mettant les chroniques historiques, les textes à usage commercial et la littérature de côté, nous allons concentrer notre étude sur les textes consignant le savoir mésopotamien. Plusieurs disciplines sont concernées (divination, médecine, astronomie, mathématiques, etc.), mais les textes présentent tous la même structure frappante : ils comportent de longues listes de cas.

Voici l'exemple [1] d'un traité de médecine ayant appartenu à la bibliothèque d'Assourbanipal :

> Un homme :
> Si sa fesse droite est rouge : [...]
> Si sa fesse gauche est rouge : il [traînera] sa maladie.
> Si ses fesses sont rouges : [il n'y a pas de] « coup ».
> Si sa fesse droite est jaune : sa maladie changera.
> Si sa fesse gauche est jaune : sa maladie sera pénible.
> Si ses fesses sont jaunes : il sera anxieux.
> Si sa fesse droite est noire : sa maladie sera pénible.
> Si sa fesse gauche est noire : il sera anxieux.
> Si ses fesses sont noires : [...]
> Si sa fesse droite est mâchurée : il traînera, puis mourra.
> ...

Le texte continue ainsi sur quarante grandes tablettes. Toutes les parties du corps sont passées en revue, dans différentes couleurs ou différents états possibles. L'auteur de ce traité de médecine a donc manifestement souhaité être exhaustif et systématique. En revanche, aucun principe général ne vient aider le lecteur à naviguer dans cette table de pronostic médical : on

1. Cet exemple et le suivant sont tirés de l'article *Babylone -1800* de James Ritter, dans *Éléments d'histoire des sciences*, sous la direction de Michel Serres, Paris : Bordas, 1989 ; texte réédité par Larousse, 1997.

peut observer au fil des exemples que le rouge est une couleur plus grave que le jaune et moins dangereuse que le noir, mais ce fait n'est jamais affirmé tel quel. La structure du texte est par ailleurs simple et uniforme : après l'apostrophe « un homme », les phrases suivent toutes le même modèle en commençant par une observation et en annonçant le pronostic.

D'autres traités médicaux présentent les remèdes permettant d'infléchir le cours de la maladie. Voici ce qu'on a retrouvé sur une tablette écrite à l'époque d'Hammourabi :

> Si un homme est malade de jaunisse : tu tremperas de la racine de réglisse dans du lait, tu laisseras reposer la nuit sous les étoiles, tu mélangeras dans de l'huile, tu lui donneras à boire et il guérira.
>
> Si un homme, un scorpion l'a piqué : tu appliqueras les excréments d'un bœuf et il guérira.
>
> Si un homme a la « fièvre de sécheresse » : (...) de la cendre, de la farine-*isqūqum*, de la plante-*ammaštakal*, une vieille brique dans de l'huile de sésame tu mélangeras, il boira et il guérira.

Là encore, la structure du texte est simple : un problème est posé au médecin, puis la solution est présentée sous la forme d'une suite d'opérations à exécuter, qui sont des instructions données à la deuxième personne du singulier. Aucune initiative n'est laissée au médecin, aucune explication ne vient justifier l'adéquation du remède à l'état du malade, et le texte ne révèle pas l'identité du médecin qui a mis au point le remède.

Ces choix dans la manière de rédiger le savoir sont nécessairement en rapport avec le mode de pensée des Mésopotamiens. Ces derniers ne nous ayant laissé aucun texte philosophique, il ne nous est pas possible d'énoncer avec certitude quelle était leur conception du monde, mais nous pouvons émettre des hypothèses raisonnables. Comme la plupart des peuples antiques, les Mésopotamiens croyaient que les phénomènes naturels étaient causés par l'action de nombreux dieux et démons. Dans ce contexte, il n'était pas pertinent de chercher la cause d'un phénomène naturel dans un autre phénomène naturel ; en revanche, on peut espérer qu'un phénomène puisse en annoncer un autre. Les Mésopotamiens pensaient ainsi qu'il était possible de prévoir l'avenir grâce à des procédés divinatoires, voire même de contrôler partiellement la nature par la magie. Les longues listes de cas figurant sur les tablettes mésopotamiennes reflètent cette conception du monde. En mettant en évidence des corrélations et des régularités observées sur un très grand nombre de cas, elles fournissaient une grille de lecture formée de situations de référence ; un praticien confronté à un problème précis pouvait ainsi se repérer, puis annoncer le pronostic et apporter le remède adapté.

Nous examinerons bientôt le cas des textes mathématiques et constaterons l'existence de nombreux points communs avec les traités médicaux présentés plus haut : la présentation avec des listes de situations particulières est analogue, la structure grammaticale des textes de procédure est semblable celle de la table de remèdes, et il n'y a jamais d'explication justifiant le bon fonctionnement d'un procédé ou indiquant son origine. Avant cela, nous devons comprendre la façon dont les scribes mésopotamiens écrivaient les nombres.

1.4 Le système de numération mésopotamien

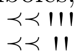
Les Mésopotamiens avaient deux systèmes de numération. Le premier, utilisé dans la vie quotidienne, consistait à grouper les unités par paquets de 10, 60, 100, 600, 1000 et 3600, à la manière du système d'unités anglo-saxon où le pied fait 12 pouces, le *yard* en fait 36, le *furlong* en fait 7920 et le *mile* en fait 63360.

Le second système, appelé « système sexagésimal », était utilisé dans les textes mathématiques et reposait sur l'utilisation de la base soixante. Pour écrire le nombre 13 509 en base soixante par exemple, on effectue successivement deux divisions euclidiennes pour écrire

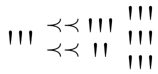
$$13\,509 = 225 \times 60 + 9 \qquad \text{puis} \qquad 225 = 3 \times 60 + 45,$$

de sorte d'arriver à l'écriture $13\,509 = 3 \times 60^2 + 45 \times 60 + 9$. (Une manière d'interpréter ce résultat est de dire que 13 509 secondes font 3 heures, 45 minutes et 9 secondes.) Il faut alors savoir comment on écrit les différents « chiffres en base soixante » que sont 3, 45 et 9 et quelle convention on utilise pour indiquer que 3 est le chiffre des « trois-mille-six-centaines », 45 est celui des soixantaines, et 9 est celui des unités.

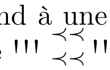
Les conventions des Mésopotamiens reposent sur deux principes :

– Un système additif pour les chiffres avec l'utilisation de deux symboles, le clou () qui vaut un et le chevron () qui vaut dix. Le chiffre 45 est ainsi écrit .
– Un principe positionnel permettant l'assemblage de ces « chiffres en base soixante », et qui dit qu'on doit juxtaposer les chiffres de droite à gauche dans l'ordre croissant de leur importance, en commençant par le chiffre des unités, puis celui des soixantaines, etc.

Avec ces conventions, le nombre treize-mille-cinq-cent-neuf s'écrit donc

.

Dans la suite, nous utiliserons toutefois une notation plus simple (du moins pour nous) et nous nous contenterons d'écrire par exemple 3,45,9 plutôt que les symboles cunéiformes ci-dessus.

Pour écrire un nombre en base dix, nous utilisons les dix symboles 0, 1,... 9. De manière analogue, le système utilisé par les Mésopotamiens utilise des chiffres de 0 à 59. Mais le principe utilisé par les Mésopotamiens dans l'écriture de leurs chiffres fait que le chiffre 0 correspond à une absence de symbole[2]. Cela cause des ambiguïtés de lecture : par exemple, l'écriture  peut aussi bien désigner 3,42 (c'est-à-dire deux-cent-vingt-deux) que 3,0,42 (c'est-à-dire dix-mille-huit-cent-quarante-deux).

Le système d'écriture des Mésopotamiens possède une autre caractéristique étonnante. Il sert en effet à noter non seulement les nombres entiers, mais aussi les nombres fractionnaires. Le principe que les Mésopotamiens utilisaient est identique à notre emploi d'une virgule pour séparer le chiffre des unités du chiffre des dixièmes (nous désignons par exemple le nombre douze-et-trois-dixièmes par 12,3), à ceci près qu'ils n'utilisaient aucun symbole pour indiquer où se situait le chiffre des unités. Ces conventions ont pour conséquence que les nombres ne sont déterminés par leur écriture qu'à multiplication par une puissance de soixante près : l'écriture  par exemple peut désigner aussi bien un que un soixantième, voire même soixante si l'on imagine qu'il y a un zéro à la droite du symbole. On pense que les Mésopotamiens levaient les éventuelles ambiguïtés soit par le bon sens, soit par un commentaire oral.

Dans les traductions des textes mésopotamiens, l'écriture des nombres est généralement modernisée grâce à l'emploi de deux conventions : d'une part, les chiffres 0 manquants sont rétablis ; d'autre part, la position du chiffre des unités dans l'écriture d'un nombre fractionnaire

2. Différentes marques furent toutefois utilisées à partir du VIIe siècle avant J.-C. pour signaler l'existence d'un chiffre zéro.

est indiquée par un point-virgule entre le chiffre des unités et le chiffre des soixantièmes. Ainsi l'écriture $1,30$ signifie quatre-vingt-dix ; l'écriture $1;30$ signifie quatre-vingt-dix soixantièmes, c'est-à-dire un et demi ; et l'écriture $0;1,30$ signifie quatre-vingt-dix sur trois-mille-six-cents, c'est-à-dire un quarantième (ce que l'on peut comprendre en disant que une minute et trente secondes forment un quarantième d'heure). Ces conventions facilitent la compréhension pour un lecteur moderne, mais introduisent une distinction entre nombre entier et nombre fractionnaire absente des textes originaux.

1.5 Techniques de calcul

La majorité des tablettes d'argile mésopotamiennes ayant rapport aux mathématiques sont des tables ; les scribes s'y rapportaient à chaque fois qu'ils devaient exécuter des opérations complexes pour mener à bien un calcul.

Certaines de ces tables donnent les constantes utiles aux calculs. On peut par exemple trouver sur une même table aussi bien des constantes de nature purement géométrique, telle l'*igigubbûm* du cercle [3], que des constantes de conversion permettant de passer d'une unité de mesure à une autre ou la grille des salaires de différentes catégories d'ouvriers.

On a également retrouvé un grand nombre de tables de multiplication. La table de multiplication par 9 se présente ainsi :

9
Multiplié par 1 : 9.
Multiplié par 2 : 18.
Multiplié par 3 : 27.
...
Multiplié par 19 : 2,51.
Multiplié par 20 : 3,0.
Multiplié par 30 : 4,30.
Multiplié par 40 : 6,0.
Multiplié par 50 : 7,30.

Par comparaison avec nos tables de multiplication qui vont jusqu'à neuf fois neuf, nous pourrions nous attendre à ce que les Mésopotamiens aient fabriqué des tables allant jusqu'à 59 fois 59. Mais en fait, on n'a pas retrouvé par exemple de table de multiplication par 11 ni par 13. En revanche, on a retrouvé des tables de multiplication par 1,15 (c'est-à-dire soixante-quinze), 3,45 (c'est-à-dire deux-cent-vingt-cinq), et même 44,26,40 (cent-soixante-mille). Certains nombres semblent ainsi avoir eu les faveurs des scribes mésopotamiens. Nous expliquerons bientôt cette apparente bizarrerie.

On a aussi trouvé des tables très complètes de carrés. Une telle table présente deux listes de nombres, disposées l'une à côté de l'autre, et les nombres de la colonne de droite sont les carrés des nombres de la colonne de gauche. Lues à l'envers, une telle table peut aussi servir de table de racines carrées. On a de même retrouvé des tables de cubes.

3. C'est la constante par laquelle il faut multiplier le carré de la circonférence d'un cercle pour obtenir l'aire du disque correspondant. Les tables donnent généralement la valeur $0;5$, ce qui correspond à $4\pi = 12$. Néanmoins certaines procédures demandent de corriger le résultat par un facteur $0;57,36$, ce qui donne la « meilleure » valeur $\pi = \frac{3}{0;57,36} = 3 + \frac{1}{8}$. Nous n'avons aucun indice sur l'origine de cette valeur ni sur le degré de fiabilité que les Mésopotamiens lui accordaient.

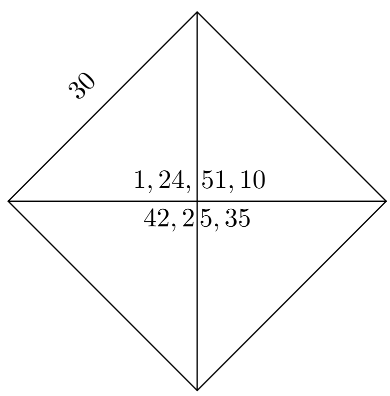
En revanche, il n'a été retrouvé ni table d'addition, ni table de soustraction, ni table de division. En ce qui concerne les deux premières opérations, l'hypothèse la plus simple est de supposer que les scribes savaient additionner et soustraire sans avoir besoin d'utiliser une table. Le cas de la division est plus intéressant : pour diviser par un nombre, les scribes mésopotamiens multipliaient par son inverse. Cela est attesté à la fois par l'examen des textes de procédure (voir le paragraphe suivant) ainsi que par l'existence de tables d'inverses. On a par exemple retrouvé des tablettes comportant les deux colonnes de nombres suivantes :

2	30
3	20
5	12
10	6
13,20	6
16	3,45
25	2,24
40	1,30
44,26,40	1,21
48	1,15

Il s'agit bien d'une table d'inverses. Bien sûr, 2 fois 30 font soixante, c'est-à-dire 1,0, mais les scribes mésopotamiens, qui n'indiquaient pas la position du chiffre des unités, écrivaient un et soixante de la même manière. On peut aussi insérer de manière convenable une virgule pour séparer le chiffre des unités du chiffre des soixantièmes et lire ainsi dans la table que 2 fois $0;30$ font 1 et que 16 fois $0;3,45$ font 1.

En observant cette liste, on s'aperçoit que les nombres pour lesquels existent des tables de multiplication sont présents dans les tables d'inverses. Autrement dit, les scribes mésopotamiens ont manifesté une certaine préférence pour les nombres présents dans les tables d'inverses, c'est-à-dire les nombres dont l'inverse s'écrit avec peu de chiffres en base soixante. Cette préférence fait suite à des besoins pratiques : si l'on effectue souvent des divisions par 16, il est souhaitable de disposer d'une table de division par 16, c'est-à-dire d'une table de multiplication par $0;3,45$.

Un dernier exemple de table nous est fourni par la tablette YBC 7289.



Le nombre 42,25,35,0 est 30 fois 1,24,51,10. Si l'on insère une virgule sexagésimale (désignée ici par un point-virgule) entre le 42 et le 25 d'une part, et entre le 1 et le 24 d'autre part, on arrive à $42;25,35 = 30 \times 1;24,51,10$. Le nombre $1;24,51,10$ vaut $\frac{305\,470}{60^3} = 1,41421296...$ en notation décimale ; c'est une très bonne approximation de $\sqrt{2} = 1,41421356...$. La qualité de ce résultat témoigne de la sophistication des méthodes de calcul dont disposaient les Mésopotamiens [4] ; en revanche, il semble que les Mésopotamiens n'ont pas mené de recherche sur la nature du nombre $\sqrt{2}$, puisqu'aucun document retrouvé ne permet de penser que les Mésopotamiens avaient réfléchi aux implications pour la notion de nombre de l'impossibilité d'écrire $\sqrt{2}$ avec un nombre fini de chiffres sexagésimaux.

1.6 Textes de procédure

Pour résoudre un problème pratique, les scribes mésopotamiens se référaient à des textes de procédure. Nous commençons par examiner un texte [5] qui explique à son lecteur comment trouver le volume d'un silo à grains (un puits cylindrique creusé dans le sol) connaissant son diamètre et sa profondeur :

> La procédure pour un « tronc ». 5, une coudée, était son diamètre. En mesure de grain combien vaut-il ?
>
> Dans ton procédé : autant que le diamètre mets la profondeur. Convertis 5 ; à 1 cela monte. Triple 5, le diamètre ; à 15 cela monte. 15 est la circonférence du « tronc ». Carre 15 ; à 3,45 cela monte. Multiplie 3,45 par 5, l'*igigubbûm* du cercle ; à « 18,45 comme surface » cela monte. Multiplie 18,45 par 1, la profondeur ; à « 18,45 comme volume » cela monte. Multiplie 18,45 par 6, [l'*igigubbûm* de] la mesure de grain ; à 1,52,30 cela monte. Le « tronc » contient 1 *pānum*, 5 *sūtum*, $2\frac{1}{2}$ *qûm* de grain. Voilà la procédure.

La lecture de ce texte permet de retrouver plusieurs caractéristiques des textes de procédure mathématique mésopotamiens. Nous voyons que comme sur la tablette de prescription médicale du paragraphe 1.3, la solution du problème se présente sous la forme d'une suite d'instructions données à l'impératif. Aucune justification n'est donnée quant au bon fonctionnement de la procédure. Aucune mention n'indique quand, comment, ni par qui la procédure a été découverte.

Concernant le contenu mathématique à présent, on constate qu'un scribe qui lisait ce texte était guidé pas à pas pour effectuer un calcul équivalent à notre formule moderne

$$\text{volume} = \frac{\text{carré de la circonférence}}{4\pi} \times \text{profondeur.}$$

Pour bien nous en convaincre, réécrivons ce texte en séparant les différentes étapes de calcul et en rétablissant la position de la virgule dans les nombres.

(1) Dans ton procédé : autant que le diamètre mets la profondeur.

(2) Convertis $0;5$; à 1 cela monte.

(3) Triple $0;5$, le diamètre ; à $0;15$ cela monte. $0;15$ est la circonférence du « tronc ».

4. Le procédé utilisé par les Mésopotamiens pour parvenir à cette approximation de $\sqrt{2}$ n'est pas connu avec certitude. Une hypothèse très convaincante est présentée dans le livre de O. Neugebauer et A. J. Sachs, *Mathematical cuneiform texts*, New Haven : American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, 1945, p. 43.

5. Cet exemple et sa traduction sont tirés de l'article *Chacun sa vérité* de James Ritter, dans *Éléments d'histoire des sciences*, sous la direction de Michel Serres, Paris : Bordas, 1989 ; texte réédité par Larousse, 1997.

(4) Carre $0;15$; à $0;3,45$ cela monte.

(5) Multiplie $0;3,45$ par $0;5$, l'*igigubbûm* du cercle ; à « $0;0,18,45$ comme surface » cela monte.

(6) Multiplie $0;0,18,45$ par 1, la profondeur ; à « $0;0,18,45$ comme volume » cela monte.

(7) Multiplie $0;0,18,45$ par 6,0,0, [l'*igigubbûm* de] la mesure de grain ; à $1,52;30$ cela monte. Le « tronc » contient 1 *pānum*, 5 *sūtum*, $2\frac{1}{2}$ *qûm* de grain. Voilà la procédure.

L'étape (1) est une simple convention : on affirme que la profondeur du silo est égale à son diamètre. L'étape (2) est une conversion d'unité : le silo a une profondeur de $0;5 = \frac{1}{12}$ *nindan*, soit 1 coudée [6]. L'étape (3) permet d'obtenir la circonférence du silo à partir de son diamètre, en multipliant par 3. Les étapes (4) et (5) calculent l'aire du silo en multipliant le carré de la circonférence par l'*igigubbûm* du cercle, qui vaut $0;5 = \frac{1}{12}$. (Cela revient à prendre $4\pi = 12$.) Pour accomplir ces étapes, le scribe devait regarder d'abord dans une table de carrés, puis dans sa table d'*igigubbûm*, puis enfin devait utiliser une table de multiplication. L'étape (6) demande de multiplier l'aire exprimée en SAR par la profondeur exprimée en coudées pour obtenir le volume exprimé en *mūšarum*. Une dernière conversion à l'étape (7) permet de passer des *mūšarum* aux *qûm* ; elle demande au scribe de regarder l'*igigubbûm* de la mesure de grain dans sa table de constantes.

Dans cet exemple, l'énoncé du problème et l'exposé de la solution sont présentés sur des valeurs numériques particulières ; le texte n'aborde pas le cas général, et c'est au lecteur que revient la tâche d'adapter la procédure à d'autres valeurs numériques. Un deuxième point remarquable est que tout est expliqué à l'aide de mots, sans qu'il soit fait usage de symbole ou de formule. Un troisième trait, déjà observé, est la nature procédurale de l'exposé. On retrouve ces trois caractéristiques dans tous les textes mathématiques mésopotamiens ; en fait, on les trouve également dans tous les textes mathématiques des autres anciennes civilisations, Égypte et Chine antiques.

Voici à présent quelques autres énoncés de problèmes retrouvés sur des tablettes mésopotamiennes :

> Suppose que, en ce moment, tu prêtes un *kur* à intérêt. En combien d'années doivent-ils être égaux ?

> Si un homme me transporte 9 sosses de briques à trois cordes de distance, je lui donne deux *sûtu* de grain. Actuellement, l'architecte me fait faire la paie. J'ai appelé quatre hommes : le premier m'a porté 7 fois l'inverse, le deuxième 11 fois, le troisième 13 fois, le quatrième 14 fois. Dans la mesure où [chacun] m'avait livré des briques, dans cette mesure je lui donne du grain.

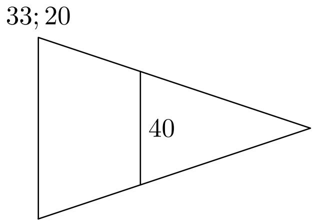
> D'un *bùr* j'ai récolté 4 *gur* de grains. D'un deuxième *bùr* j'ai récolté 3 *gur* de grains. La récolte du premier excède celle du deuxième de 8,20 [*qûm*]. La somme de mes champs : 30[,0 SAR]. Que sont mes champs ?

6. Le nindan est l'unité de longueur habituelle des Paléobabyloniens ; un *nindan* vaut à peu près 6 mètres. Il y a 12 coudées dans un *nindan*. L'unité d'aire est le SAR ; c'est l'aire d'un carré de côté un *nindan*. L'unité de volume est le *mūšarum* ; c'est le volume d'un parallélépipède de base un SAR et de hauteur une coudée. Les capacités sont souvent exprimées en mesure de grain. L'unité de base est le *qûm*, qui vaut à peu près un litre. Le *qûm* a des multiples, parmi lesquels le *pānum*, qui vaut 60 *qûm*, et le *sūtum*, qui en vaut 10.

Dans le premier problème, il faut trouver la durée d'un prêt alors qu'on connaît son taux d'intérêt (précisé ailleurs sur la tablette), avec la condition qu'à terme, les intérêts soient égaux au principal. Le second problème demande de calculer la paie d'ouvriers proportionnellement au travail effectué. Dans le troisième problème, on connaît les rendements agricoles de deux champs, la somme des aires de ces champs, et la différence entre les récoltes des deux champs, et on demande de trouver les aires des deux champs. Pour résoudre ce problème aujourd'hui, nous commencerions par le traduire en un système de deux équations linéaires à deux inconnues ; la méthode des Mésopotamiens est légèrement différente, puisqu'ils ne possèdent pas les concepts d'inconnue et d'équation [7].

D'autres énoncés proposent des problèmes plus géométriques :

> Un triangle. Je n'en connais pas le flanc ni le front supérieur. La surface est 1 *bur*, 2 *ebel*. Du front supérieur, je suis descendu de 33; 20. La transversale est 40. Que sont le flanc et le front ?



> Soit une botte de roseau. 4 est la circonférence inférieure, 2 la circonférence supérieure, 6 la hauteur. Qu'est la terre ?

Dans le premier problème, on se donne un triangle comme sur la figure de gauche ci-après. Deux des longueurs de la figure sont données, ainsi que l'aire du triangle (elle vaut 1 *bur*, 2 *ebel*, c'est-à-dire 50 SAR). On demande de trouver les quantités b et h (le front et le flanc du triangle). D'un point de vue moderne, il s'agit donc de résoudre le système de deux équations à deux inconnues

$$\frac{1}{2}\,bh = 50 \qquad \text{et} \qquad \frac{b-40}{33;20} = \frac{b}{h}.$$

Dans le second problème, on demande de trouver le volume d'un tronc de cône (figure de droite ci-après). La solution proposée par le scribe consiste à calculer les aires S et S' des disques inférieur et supérieur puis à effectuer un calcul équivalent à la formule

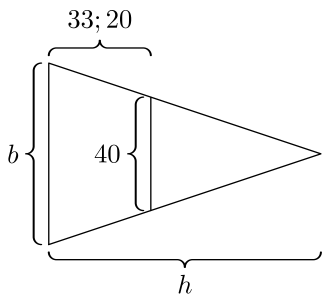
$$\text{volume} = \text{hauteur} \times \frac{S+S'}{2}.$$

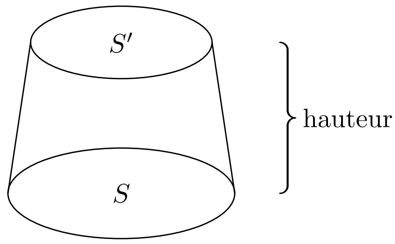
Or la formule correcte est

$$\text{volume} = \text{hauteur} \times \frac{S+\sqrt{SS'}+S'}{3}.$$

On voit ainsi que l'absence de démonstration conduisait parfois les Mésopotamiens à des résultats ou des méthodes inexacts. Autrement dit, la géométrie des Mésopotamiens est essentiellement calculatoire et empirique.

7. Le lecteur souhaitant avoir davantage de détail sur ce problème est invité à consulter de livre de B. L. van der Waerden, *Science awakening*, Leyden : Noordhoff International Publishing, 1961, p. 66. Une des difficultés de l'énoncé est que l'auteur utilise plusieurs unités de mesure différentes simultanément : le *bùr* et le SAR pour les aires, le *gur* et le *qûm* pour les volumes de grain.





Pour résumer, les textes de procédure mathématique que l'on a retrouvés proposent des méthodes pour résoudre des problèmes de calculs d'intérêts, de salaires, ou de répartition de biens ou de nourriture, et des problèmes de détermination de longueurs, d'aires ou de volumes. Les mathématiques mises en jeu sont plutôt modestes : outre le calcul arithmétique en base soixante, les scribes mésopotamiens savaient manipuler les proportionnalités et les progressions arithmétiques et géométriques, savaient déterminer quelques aires et volumes simples, et savaient résoudre des problèmes qui aujourd'hui seraient écrits sous la forme d'une équation du second degré ou d'un système de deux équations à deux inconnues, les équations étant du premier ou du deuxième degré.

En exercice, nous examinons le cas de la tablette BM 13 901. Cette tablette est un véritable petit traité d'algèbre en vingt-quatre problèmes. Les sept premiers problèmes apprennent au lecteur à résoudre des problèmes qui, traduits en termes modernes, sont des équations du second degré en une inconnue. Les problèmes suivants demandent au lecteur de trouver deux puis trois quantités inconnues. La lecture de cette tablette appelle plusieurs remarques. D'abord, les problèmes sont purement numériques, sans référence à des unités de mesure. Il ne s'agit peut-être pas de « science fondamentale », c'est-à-dire d'un savoir développé pour lui-même, mais il ne s'agit pas non plus d'une technique développée pour résoudre des problèmes pratiques. Ensuite, tous les calculs tombent juste, même quand il y a des extractions de racines carrées à effectuer. Cet ouvrage présente donc une liste de cas pouvant servir de modèles. Troisième remarque, les procédures de résolution donnent toujours une et une seule solution, même quand le problème mathématique a deux racines positives. Enfin, quand on examine l'ensemble des vingt-quatre problèmes de la tablette, on s'aperçoit qu'ils sont ordonnés de manière très réfléchie, comme si l'on voulait apprendre la méthode générale au lecteur, en lui indiquant d'abord la méthode dans le cas le plus simple, puis en lui apprenant à modifier la méthode dans les cas plus compliqués.

1.7 De la technique aux jeux arithmétiques

Le savoir mathématique des peuples mésopotamiens est resté remarquablement stable pendant plus d'un millénaire. Cette stagnation montre que les scribes n'ont pas cherché à développer le savoir pour lui-même. Étaient-ils trop occupés à gérer les problèmes administratifs de l'État qu'ils servaient ? Ou bien les liens qu'ils entretenaient avec un pouvoir autoritaire les privaient-ils de la liberté d'esprit nécessaire à l'avancement de toute recherche ?

Quoi qu'il en soit, il semble clair que les scribes ne se sont pas intéressés seulement aux problèmes qui avaient une utilité immédiate pour leur travail d'administrateurs. Plusieurs tablettes mésopotamiennes montrent en effet que les scribes ont « joué » avec les nombres apparaissant sur leurs tables. Le problème suivant est manifestement issu de la manipulation des tables d'inverses :

L'*igibûm* était supérieur à l'*igûm* de 7. Quels sont l'*igûm* et l'*igibûm* ?

Dans ce problème, on demande de trouver deux nombres dont la différence vaut 7 et qui apparaissent en regard l'un de l'autre dans la table d'inverses (*igibûm* et *igûm* sont les noms des deux colonnes dans les tables d'inverses). La réponse attendue est 12 et 5. Ce problème avait-il un but pédagogique, par exemple celui de rendre le lecteur familier avec les nombres figurant dans les tables d'inverses ? Ou bien était-ce un simple jeu, une devinette d'arithmétique ?

Un deuxième exemple est fourni par la tablette VAT 8521 :

> Prête au taux de douze sicles pour une mine d'argent ; que l'emprunteur te donne comme intérêt un carré.

Ici, on parle d'un prêt au taux de 20% (une mine vaut soixante sicles), et on demande quel capital il faut prêter pour que les intérêts soient un carré. La solution qui suit l'énoncé précise que les intérêts doivent être égaux à 1,40 (le carré de 10), ce qui lève l'ambiguïté de la question. Le problème semble gratuit et académique. Est-ce un exercice pédagogique ou un jeu mathématique ?

Nous ne connaissons pas les motivations des auteurs de ces problèmes. Une chose est sûre en revanche : ces problèmes sont liés aux techniques mathématiques des Mésopotamiens, à savoir l'utilisation de la base soixante et le recours à des tables pour effectuer les calculs. C'est un fait général que les techniques utilisées au sein d'une société orientent la direction des recherches qui y sont menées.

Chapitre 2

La science mathématique des anciens Grecs

Résumé et objectifs du chapitre

Avec les philosophes grecs de l'Antiquité, les mathématiques changent de nature : alors qu'elles ne constituaient dans les anciennes civilisations qu'un ensemble de techniques opératoires énoncées sans justification, elles jouent chez les Grecs le rôle d'une science modèle, un terrain où l'on peut exercer ses facultés de raisonnement sur des objets idéaux et où l'on peut réfléchir sur les méthodes de démonstration. Les mathématiciens vont être ainsi conduits à questionner la nature des êtres mathématiques qu'ils rencontrent et à dégager un petit nombre de propriétés à partir desquelles il sera possible de déduire des propositions plus complexes.

Dans ce chapitre, nous apportons des éléments de réponse aux questions suivantes. Quelles sources permettent l'étude des mathématiques grecques ? Qui furent les mathématiciens grecs, comment travaillaient-ils, et quelles furent leurs principales découvertes ? Quelles sont les principales différences entre les mathématiques grecques et les mathématiques mésopotamiennes ?

Nous présentons par ailleurs l'ouvrage le plus important de toutes les mathématiques grecques, à savoir les *Éléments* d'Euclide. Dans cet ouvrage, Euclide a rassemblé les résultats mathématiques connus à son époque qu'il jugeait fondamentaux. Les *Éléments* ont une triple importance historique : l'étude de l'ouvrage renseigne sur l'histoire des mathématiques grecques pré-euclidiennes ; son texte porte les stigmates causés par les aléas de la conservation des textes anciens ; enfin les *Éléments* ont influencé les mathématiques pendant plus de vingt siècles, codifiant notamment une manière de rédiger les mathématiques et de faire de la géométrie encore en usage de nos jours.

2.1 La civilisation grecque

Vers 1200 avant J.-C., les Doriens, un peuple indo-européen, envahissent la péninsule grecque et colonisent les côtes de l'Asie mineure et les îles de la mer Égée, provoquant l'effondrement des civilisations mycénienne et crétoise. Les Grecs étendent progressivement leur territoire d'influence sur les rives de la mer Méditerranée et de la Mer Noire ; la « Grande Grèce » du VII^{e} siècle comprend ainsi le sud de l'Italie, la Sicile, les rives de l'actuelle Bulgarie, ainsi que quelques colonies plus lointaines. En sillonnant la mer Méditerranée, les Grecs entrent en contact avec d'autres peuples. Ils se trouvent ainsi mis en présence de techniques utiles, adoptant par exemple une écriture basée sur l'alphabet phénicien dès 900 avant J.-C. (Les Phéniciens étaient un peuple installé sur les côtes du Proche-Orient.)

La société dorienne, initialement oligarchique, se démocratise vers 600 avant J.-C. (En vérité, cette démocratie n'est que partielle, puisque seuls les citoyens mâles, c'est-à-dire à Athènes 30 000 personnes sur 250 000 habitants, peuvent prendre part aux décisions politiques comme le déclenchement d'une guerre ou la condamnation d'un citoyen à l'exil.) À la suite de ces changements politiques, la Grèce se retrouve organisée en petites cités-états dispersées le long des côtes et dans les îles, qui ne sont pas soumises à un pouvoir central. Les guerres sont fréquentes : contre les Perses (guerres médiques) au Ve siècle pour le contrôle de l'Asie mineure, mais aussi entre les cités grecques, Athènes, Sparte puis Thèbes ayant tour à tour l'hégémonie et la maîtrise des colonies.

Au nord de la péninsule grecque, la Macédoine avait été unifiée aux VIIe et VIe siècles avant J.-C. Vers 360, le roi de Macédoine Philippe II réorganise l'armée de son état puis soumet les unes après les autres les cités grecques. Philippe II achève la conquête de la Grèce en 338 et s'autoproclame protecteur des Grecs. Son fils Alexandre le Grand (356–323 avant J.-C.) consolide son pouvoir en Grèce puis continue cette politique d'expansion des territoires soumis à son autorité. Au fil des batailles, il prend ainsi au détriment de l'empire achéménide le contrôle de la Lybie, de l'Égypte, de la Palestine, de l'Asie mineure, de la Mésopotamie et de la Perse, puis continue vers l'est jusqu'à la vallée de l'Indus, avant d'installer la capitale de son empire dans l'ancienne ville de Babylone. Il fonde également de nombreuses villes, aussitôt baptisées du nom d'Alexandrie ; la plus célèbre d'entre elles est située en Égypte sur les rives du Nil.

A la mort d'Alexandre le Grand, ses lieutenants se partagent son empire. Leurs descendants régneront pendant encore trois siècles sur la partie méditerranéenne de l'empire, avant que ces territoires ne deviennent des provinces romaines au Ier siècle de notre Ère. Au Moyen-Orient et en Asie centrale, le pouvoir est progressivement reconquis par les chefs des peuples autochtones.

Grâce aux conquêtes d'Alexandre, la culture grecque se répand de la vallée du Nil à celle de l'Indus, et la langue grecque devient la langue de communication dans une région allant de la Méditerranée orientale au Moyen-Orient. À Alexandrie-du-Nil, les successeurs d'Alexandre-le-Grand fondent vers 290 avant J.-C. le « Musée » (littéralement : « Temple des muses »). Cette institution offre un lieu de travail aux savants de l'époque, avec des salles de réunion, un observatoire, et surtout une immense bibliothèque destinée à rassembler tout le savoir antique, qui accueillera au fil des siècles juqu'à plusieurs centaines de milliers de manuscrits.

2.2 Le problème des sources

Grâce aux tablettes d'argile, nous disposons des textes mathématiques mésopotamiens dans leur version originale. À l'opposé, aucun écrit autographe d'un mathématicien grec n'est parvenu jusqu'à nous. Une raison simple explique ce fait : les textes étaient souvent écrits sur des rouleaux de papyrus, matériau extrêmement fragile.

Le Musée d'Alexandrie, créé vers 300 avant J.-C., était un lieu où les intellectuels de l'époque pouvaient acquérir des connaissances scientifiques, historiques ou littéraires et contribuer à l'avancement des recherches. Les savants qui y travaillaient ont régulièrement écrit des traités synthétisant l'ensemble des connaissances d'un domaine. Entreposés dans la bibliothèque, ces traités ont pu traverser quelques siècles, en particulier grâce aux sauvegardes effectuées par des copistes. Parallèlement à ces documents écrits, il est presque certain que le savoir était également maintenu vivant grâce à un enseignement oral.

Le déclin au IIIe siècle de notre Ère de l'Empire romain, dont l'Égypte faisait partie, rendit les conditions de travail à Alexandrie moins favorables. Le fonctionnement du Musée fut interrompu, et un très grand nombre de manuscrits de la bibliothèque disparurent lors de pillages. La baisse du niveau scientifique fut telle que les traités encore disponibles devinrent difficiles à lire. Alexandrie demeura malgré tout un brillant foyer culturel et quelques érudits continuèrent d'y travailler. Pour sauvegarder les connaissances antiques, ces érudits préparèrent de nouvelles éditions des anciens traités, dans lesquelles ils insérèrent des phrases, parfois même des paragraphes entiers, au milieu du texte d'origine, afin d'apporter des explications complémentaires ou plus détaillées. Puis la situation continua à se dégrader aux IVe et au Ve siècles ; des émeutes éclatèrent, forçant les savants à s'exiler et dispersant les précieux manuscrits [1].

Ces manuscrits ont ensuite eu des aventures différentes. Certains d'entre eux sont parvenus dans les mains des savants de l'Empire arabe (voir le chapitre 4), qui les ont traduits et étudiés à partir du IXe siècle ; quelques copies (sur papier) de ces traductions existent encore aujourd'hui et dorment dans des bibliothèques en Asie. D'autres manuscrits ont été transférés dans les bibliothèques de Constantinople où ils ont à nouveau été recopiés (sur parchemin, plus stable mais beaucoup plus onéreux que le papyrus) ; de là, ils nous sont parvenus après encore quelques péripéties.

Avant de nous parvenir, les œuvres ont donc subi à plusieurs reprises un processus de sélection naturelle : seuls quelques traités importants ont été sauvegardés ; les œuvres mineures et les œuvres antérieures à la création du Musée d'Alexandrie sont pour leur part perdues à jamais. De surcroît, les quelques œuvres qui ont survécu ont été altérées par l'ajout de gloses, par les copies successives et par d'éventuelles traductions.

2.3 Les caractéristiques de la science mathématique grecque

Suite à leurs voyages à travers la mer Méditerranée, les Grecs se sont trouvés confrontés aux techniques mathématiques des Égyptiens et des Mésopotamiens assez tôt dans leur histoire, vraisemblablement vers le VIIIe ou le IXe siècle avant J.-C. Nous ne disposons malheureusement d'aucun document permettant d'étudier les mathématiques des Grecs de cette époque. La plus ancienne œuvre mathématique grecque parvenue jusqu'à nous, les *Éléments* d'Euclide, fut écrite vers 300 avant J.-C. Quatre à cinq siècles séparent donc les premiers contacts des Grecs avec les techniques égyptiennes et babyloniennes de la rédaction des *Éléments*.

Dans ce laps de temps, d'importants changements ont pris place en mathématiques, aussi bien dans le choix des problèmes étudiés que dans les méthodes utilisées ou la manière d'exposer les résultats. Nous nous proposons dans ce paragraphe d'esquisser les caractéristiques générales des mathématiques grecques, en les comparant avec les mathématiques mésopotamiennes que nous avons vues au chapitre précédent.

2.3.1 La méthode déductive

Sur les tablettes mésopotamiennes, on trouve des listes de procédure énoncées sans justification et dans un ordre qui ne reflète pas les liens de dépendance causale. L'organisation des

1. Une victime célèbre de ces émeutes est Hypatie, une des premières mathématiciennes connues, qui fut tuée en 415 par des fanatiques chrétiens. Un autre fait témoignant du mauvais climat de l'époque est que la bibliothèque d'Alexandrie aurait été détruite par un incendie en 391.

Éléments témoigne que les Grecs avaient adopté une approche très différente. En effet, Euclide commence par énoncer l'ensemble des postulats sur lesquels sa théorie mathématique repose, puis il énonce ses résultats sous la forme d'une succession de propositions, ordonnées de sorte que la démonstration d'un résultat ne repose que sur ce qui a été admis ou déjà prouvé.

Pour mener à bien une telle mise en forme de leurs résultats, les mathématiciens grecs sont amenés à s'interroger sur les procédures de démonstration (par voie de synthèse ou d'analyse, par l'absurde, par réduction, etc.), fondant ainsi l'étude de la logique. Ils sont également conduits à étudier les formes d'axiomatisation possibles d'une théorie (c'est-à-dire la recherche des postulats nécessaires à son exposé).

2.3.2 Les objets mathématiques

Pour les scribes des civilisationa antiques, les techniques mathématiques n'étaient que des méthodes de calcul à appliquer sur des grandeurs numériques. Pour les Grecs au contraire, les mathématiques sont l'étude systématique des propriétés d'objets mathématiques.

Voulant étudier les nombres, Euclide explique ainsi que plusieurs propriétés peuvent être examinées :

1. L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.
2. Un nombre est un assemblage composé d'unités.

   ...

6. Le nombre pair est celui qui peut se partager en deux parties égales.
7. Le nombre impair est celui qui ne peut pas se partager en deux parties égales, ou bien celui qui diffère d'une unité du nombre pair.

   ...

11. Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seule.
12. Les nombres premiers entre eux sont ceux qui ont l'unité seule pour commune mesure.

    ...

22. Le nombre parfait est celui qui est égal à ses parties.

De telles définitions, qui permettent de questionner la nature même des nombres, n'auraient aucune pertinence pour un scribe mésopotamien.

Les Grecs s'attachent non seulement à définir des objets mathématiques, mais encore à établir leur existence. Pour cela, ils cherchent à en donner une construction basée exclusivement sur les postulats de la théorie, conformément à leur approche purement déductive. Ainsi la toute première proposition des *Éléments* explique pourquoi les demandes d'Euclide entraînent l'existence des triangles équilatéraux :

> Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

2.3.3 Des énoncés généraux

Un troisième point qui oppose les mathématiques grecques aux méthodes développées à d'autres époques et à d'autres endroits est la généralité avec laquelle les propositions sont énoncées. Sur les tablettes mésopotamiennes figurent des listes d'exemples de situations destinés à servir de modèles et accompagnés de la procédure de résolution adéquate. Au contraire chez Euclide, les énoncés sont généraux et abstraits. Par exemple, la proposition 2 du Livre VII des *Éléments* apporte une réponse au problème de trouver une méthode pour déterminer le plus grand diviseur commun de deux nombres entiers. Dans l'énoncé d'Euclide, aucune valeur numérique n'apparaît explicitement :

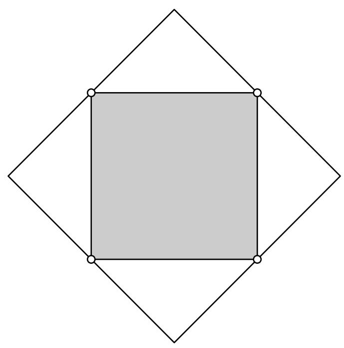
> Deux nombres non premiers entre eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

2.3.4 La prééminence de la géométrie

C'est surtout la géométrie qui fait l'objet des soins des penseurs grecs. En cela encore, leurs préoccupations tranchent avec le caractère essentiellement numérique des mathématiques des scribes mésopotamiens. La plupart des résultats élémentaires sur les angles, le cercle ou les coniques, et la construction des cinq polyèdres réguliers (le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre) sont ainsi à mettre au crédit des Grecs.

Pour stimuler leur réflexion, les géomètres grecs se posaient des problèmes. Dans le catalogue des problèmes particulièrement résistants aux investigations (et donc particulièrement efficaces comme stimulants), trois sujets sont devenus fameux : ce sont la quadrature du cercle, le doublement du cube et la trisection de l'angle. Outre les philosophes grecs, ces trois problèmes ont également passionné les mathématiciens arabes au Moyen-Âge puis les mathématiciens européens à partir de la Renaissance ; le statut de ces problèmes a été complètement clarifié au XIXe siècle. Expliquons de quoi il s'agit.

Dans le problème de la duplication du cube, on se donne un cube (plus exactement, on se donne son arête), et on demande[2] de construire de manière exacte et par des moyens géométriques (l'arête d') un cube de volume double du cube donné. L'analogue plan de ce problème, à savoir la construction d'un carré d'aire double d'un carré donné, est pour sa part facile à résoudre : il suffit de prendre pour côté du grand carré la diagonale du carré donné (c'est la figure du *Ménon* de Platon).



Dans le problème de la quadrature du cercle, on se donne un cercle et on demande de construire de façon exacte et par des moyens géométriques le côté d'un carré ayant même aire que le cercle. De manière plus générale, faire la quadrature d'une surface (c'est-à-dire d'une région du plan bornée par des lignes courbes), c'est construire par des moyens géométriques une surface rectiligne (c'est-à-dire une région du plan bornée par des segments de droite) qui a exactement même aire que la surface donnée.

2. La légende veut que l'oracle du temple d'Apollon dans l'île de Délos ait demandé aux habitants de construire un autel de volume double de l'autel existant.

Enfin, le problème de la trisection de l'angle consiste à construire un angle qui vaut le tiers d'un angle donné. Là encore, la construction doit être géométrique et exacte. Pour certains angles comme l'angle droit, la trisection est possible ; en revanche, aucune construction du tiers de l'angle du triangle équilatéral ne peut être effectuée à l'aide seulement de la règle et du compas.

2.3.5 Résumé

Le tableau suivant résume les principales différences que nous avons constatées.

Mathématiques mésopotamiennes	Mathématiques grecques
Les mathématiques mésopotamiennes sont concrètes et orientées vers les procédés de calcul. Les énoncés et les solutions des problèmes sont exposés sur des exemples numériques.	Les mathématiques grecques sont abstraites et essentiellement géométriques. Les énoncés ont une portée générale.
Les tablettes mésopotamiennes sont constituées de listes de cas-modèles ou d'exemples-types classés selon leur apparence.	Dans les traités grecs, on trouve une suite de propositions ordonnées de sorte qu'il soit possible de les démontrer successivement à partir de postulats explicitement admis.
Les arguments justifiant le bon fonctionnement des méthodes utilisées n'étaient pas conservés. Seules les procédures à suivre étaient transcrites, sous la forme d'une liste d'instructions à exécuter.	Les Grecs indiquent la démonstration de toutes les propositions qu'ils énoncent. Quand la proposition est un problème d'existence, la démonstration prend la forme d'une construction.
	Les Grecs s'intéressent à des objets mathématiques. L'existence et les propriétés de ces objets sont mises en question et méthodiquement explorées.

2.4 Les philosophes grecs

Les changements dans la nature des mathématiques résumées dans le tableau précédent s'intègrent dans un cadre plus vaste. De fait, c'est toute la conception du monde que les penseurs grecs bouleversent. Pour comprendre leurs motivations, il nous faut dire un mot sur ces penseurs qui se disent « philosophes » et sur leur place dans la société grecque.

Nous avons vu au chapitre précédent que les scribes mésopotamiens étaient des hauts fonctionnaires, formés pour le service du pouvoir selon un programme d'enseignement figé. La situation est toute autre en Grèce entre le VI^{e} et le IV^{e} siècle avant J.-C. En effet, les philosophes grecs sont des personnes désireuses de se vouer en toute liberté à la spéculation intellectuelle. Elles se regroupent spontanément autour d'un maître prestigieux afin de suivre son enseignement et de participer à l'élaboration de sa doctrine. Au sein de ce système, la découverte des résultats (mathématiques ou autres) est portée au crédit du maître, contribuant ainsi à la renommée de son école. Au départ du maître, les disciples prennent le relais ou se dispersent. Des discussions houleuses et d'interminables querelles opposent les philosophes des différentes écoles, entraînant ainsi une mise en concurrence des différentes doctrines et une émulation.

Ces philosophes développent l'idée que le monde peut s'expliquer sans faire intervenir en permanence des dieux. On peut au contraire accéder à la vérité et à la justice par le raisonnement, en partant de grands principes. Ce point de vue apparaît dans trois domaines de la pensée grecque :

- Dans les textes mathématiques, l'idée de rationalité entraîne la nécessité de fournir des démonstrations pour chaque proposition énoncée. Au delà de cette exigence, elle demande l'étude des procédures de démonstration et des formes d'axiomatisation.
- Dans le discours philosophique, elle permet la construction de doctrines naturelles, juridiques, politiques ou morales basées sur des concepts reconnus nécessaires et des méthodes validées sur le plan de la logique et de la rigueur.
- Enfin l'idée de rationalité rend possible le fonctionnement des institutions démocratiques, en donnant sens aux argumentations et aux plaidoiries des orateurs, nécessaires à la vie sociale, politique et judiciaire de la cité.

Les doctrines des philosophes grecs visent à être des systèmes cohérents d'explication du monde. En tant que connaissances développées sur une base exclusivement logique, les mathématiques sont un terrain d'essai privilégié pour l'élaboration de ces doctrines [3].

On peut également faire un parallèle entre l'intérêt que portent les mathématiciens grecs à l'étude des objets mathématiques et le développement des doctrines naturelles par les philosophes. Platon par exemple développe l'idée que le monde apparent, trompeur et incompréhensible, est le reflet d'un monde vrai, le monde des Idées, qui est accessible à la raison humaine. Dans ce monde des Idées existent des objets Idéaux, dont les prototypes sont les êtres mathématiques. De manière plus concrète, les élèves de l'école de Platon (l'Académie) développent l'idée que le mouvement des corps célestes, et en premier lieu celui des « astres errants » (les planètes), peut s'expliquer par un modèle géométrique constitué de sphères animées d'un mouvement de rotation uniforme et s'entraînant les unes les autres.

Les philosophes sont une infime minorité de la population grecque, pas toujours bien vue d'ailleurs, car leurs doctrines attaquent frontalement les vieilles croyances religieuses fondées sur la mythologie. L'approche rationnelle ne convaint pas toujours non plus, notamment en médecine où, faute d'être fondée sur des observations suffisamment précises (aucune dissection n'est pratiquée avant la fondation d'Alexandrie), elle ne fait guère mieux que les méthodes traditionnelles.

Les historiens modernes considèrent généralement que l'existence d'une couche sociale aisée et oisive, la liberté de pensée accordée par le pouvoir politique démocratique, et la nécessité pour les citoyens grecs de se former à la rhétorique sont trois facteurs ayant favorisé la floraison de ces écoles philosophiques entre le VI^e et le IV^e siècle avant J.-C.

2.5 La genèse des mathématiques grecques

Il nous a été relativement facile de dresser une liste de différences entre les mathématiques archaïques des Mésopotamiens et des Égyptiens et celles contenues dans les *Éléments* d'Euclide. Il est par contre beaucoup plus difficile de retracer l'évolution des mathématiques durant les trois siècles pendant lesquels ces progrès ont été réalisés, entre 600 et 300 avant J.-C.

En effet, les textes en notre possession ne constituent qu'une multitude de témoignages fragmentaires, souvent écrits longtemps après les événements qu'ils rapportent. Ainsi la prin-

3. C'est là le sens qu'il faut donner à l'inscription que Platon a paraît-il fait porter au frontispice de son école de philosophie : « Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre ».

cipale source accessible aujourd'hui racontant la genèse des *Éléments* est le *Commentaire sur Euclide* de Proclus, écrit au V^{e} siècle après J.-C. Il est évident que Proclus a basé son travail sur des traités aujourd'hui disparus ; un de ceux-ci pourrait être l'*Histoire de la géométrie* d'Eudème de Rhodes, un ouvrage écrit vers 300 avant J.-C. Il n'est toutefois pas clair que l'ouvrage d'Eudème existait encore sous sa forme complète à l'époque de Proclus ; ce dernier a donc peut-être été contraint de travailler avec des extraits, des citations ou des résumés. De plus, l'*Histoire de la géométrie* elle-même n'était certainement pas une source absolument sûre puisqu'elle a été écrite deux siècles après les travaux des premiers géomètres grecs. Tout ceci nous fait comprendre la principale difficulté à laquelle les historiens se trouvent confrontés lorsqu'il cherchent à retracer les débuts de l'histoire des mathématiques grecques. Il leur faut émettre des hypothèses pouvant expliquer les changements constatés, confronter ces hypothèses aux textes existants, et tenir compte du biais que les auteurs antiques ont introduit dans leur narration des événements. En tout état de cause, il n'est généralement pas possible d'attribuer avec certitude les premières découvertes mathématiques des Grecs à leurs véritables auteurs.

Dans ce paragraphe, nous allons nous borner à indiquer les grandes lignes de l'histoire des mathématiques grecques jusqu'à Euclide telles qu'elles sont aujourd'hui comprises, sans rentrer dans les détails des arguments des historiens.

2.5.1 Thalès, ou les origines de la géométrie

Thalès est le plus ancien géomètre grec dont le nom soit parvenu jusqu'à nous. Il a vécu au début du VI^{e} siècle avant J.-C. Son nom est mentionné dans des écrits d'Hérodote, de Platon, d'Aristote, de Pline, de Diogène Laërce et de Proclus. Hérodote nous le présente comme un ingénieur, un astronome et un conseiller politique.

Dans son *Commentaire sur Euclide*, Proclus dit de Thalès la chose suivante [4] :

> Or, de même que chez les Phéniciens, du fait du commerce maritime et des contrats, débuta la connaissance précise des nombres, de même aussi chez les Égyptiens a été découverte la géométrie pour la raison susdite. Thalès, après s'être rendu en Égypte, transporta en Grèce cette étude et, s'il trouva lui-même de nombreux résultats, il mit ses successeurs sur la voie de beaucoup d'autres, usant d'approches tantôt plus universelles, tantôt plus empiriques.

Ce témoignage indique que la science grecque n'est pas sortie tout droit de l'esprit de quelques génies créateurs, mais qu'elle a progressivement évolué à partir d'un savoir plus ancien, d'origine égyptienne ou/et mésopotamienne. Le mot « universel » indique par ailleurs que Thalès cherche à comprendre les figures géométriques grâce à des arguments ayant une portée quelque peu générale. Un témoignage d'Aristote, qui présente Thalès comme un esprit qui tente d'expliquer les raisons de la réussite de procédés pratiques, va dans le même sens.

Proclus poursuit en attribuant quelques résultats géométriques à Thalès, dont l'énoncé suivant (proposition 26 du Livre I des *Éléments* d'Euclide) :

> Si deux triangles ont deux angles égaux, chacun à chacun, et un côté égal à un côté (...), ils auront les autres côtés égaux, chacun à chacun, et l'angle restant égal à l'angle restant.

4. Le choix des textes cités dans ce paragraphe et leur traduction proviennent de l'ouvrage de Maurice Caveing, *La figure et le nombre*, Lille : Presses Universitaires du Septentrion, 1997.

puis écrit qu'Eudème considérait que Thalès avait découvert ce résultat en examinant un procédé qui permettait de mesurer la distance à un point inaccessible, à savoir un bateau en pleine mer. Le procédé en question n'est pas connu, mais il semble certain que la motivation pour l'énoncé général vient du problème de géométrie pratique.

Le résultat qu'on appelle en France « théorème de Thalès » n'est peut-être pas dû à Thalès. Partout ailleurs dans le monde, le résultat appelé « théorème de Thalès » affirme que si un triangle est inclus dans un cercle de sorte qu'un des côtés soit un diamètre du cercle, alors le triangle est rectangle, l'angle droit étant opposé au côté en question. Les analyses des historiens modernes donnent du crédit à cette attribution, dont l'origine remonte à un texte de Diogène Laërce :

> Pamphila dit que Thalès, ayant appris des Égyptiens l'art du géomètre, fut le premier qui inscrivit dans un cercle un triangle qui fût rectangle, et qu'il sacrifia un bœuf. Il y en a cependant qui disent que c'est Pythagore, parmi lesquels Apollodore le calculateur.

2.5.2 Les pythagoriciens

Pythagore est l'autre personnage important des débuts des mathématiques grecques. Il a vécu à la fin du VI^{e} et au début du V^{e} siècle avant J.-C. Après avoir étudié auprès de Thalès, il a émigré à Crotone, en Italie du sud. Là, il a fondé une secte religieuse, philosophique et politique, dont les membres pratiquaient des rites secrets [5] et partageaient leurs biens matériels et leurs découvertes scientifiques. Selon Aristote, la doctrine philosophique prônée par les premiers pythagoriciens était que les nombres étaient à la base de l'univers, plus précisément que « toute chose est Nombre ». Passons sur ces anecdotes, bien qu'elles ne soient peut-être pas sans importance.

Eudème leur attribue la notion de somme d'angles, ainsi que le résultat que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits. Cette attribution montre que la notion d'angle, inconnue des Égyptiens et des Mésopotamiens, est acceptée et manipulée par les mathématiciens grecs dès le début du V^{e} siècle avant J.-C. ; l'angle droit apparaît comme l'angle de référence, l'étalon de mesure.

Les pythagoriciens ont également étudié les figures géométriques régulières. Ils ont notamment découvert comment construire à la règle et au compas le pentagone régulier [6]. Ils sont aussi à l'origine d'une méthode appelée *application des aires*, qui traduit géométriquement la théorie des équations du second degré et permettait aux anciens Grecs de disposer d'un outil ayant quelques-unes des fonctionnalités de notre géométrie analytique moderne.

Enfin les pythagoriciens ont posé les premiers jalons d'une théorie des nombres élémentaire, qui étudiait par exemple les propriétés des nombres pairs et impairs. Nous leur devons la notion de nombre parfait [7], et peut-être aussi les premières bases d'une arithmétique des « nombres figurés » [8] qui sera reprise et certainement déformée par des « néopythagoriciens » du I^{er} siècle

5. Le sacrifice du bœuf auquel Diogène Laërce fait allusion dans le texte sur Thalès est probablement une erreur de l'auteur du texte : cela ressemble plutôt à un rite pythagoricien. Ceci dit, la tradition veut aussi que les pythagoriciens aient été végétariens.

6. Le pentagramme, ou pentagone étoilé, devint l'emblème des pythagoriciens.

7. Un nombre est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs, autres que lui-même ; ainsi $6 = 1+2+3$ et $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ sont des nombres parfaits.

8. Le lecteur souhaitant avoir un aperçu de cette arithmétique archaïque est renvoyé à l'ouvrage d'Amy Dahan-Dalmédico et Jeanne Peiffer, *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales*, Points Sciences S49, Paris : Seuil, 1986, pp. 46–49.

de notre Ère, tel Nicomaque de Gérase.

Les sources dont nous disposons ne permettent pas de dire quand, par qui, ou comment le résultat appelé aujourd'hui « théorème de Pythagore » fut démontré pour la première fois. La tradition grecque attribue ce résultat à Pythagore ; cependant les Mésopotamiens connaissaient également le fait mathématique, puisqu'ils l'avaient utilisé dans plusieurs de leurs procédures.

2.5.3 L'école de Chio

Le mathématicien le plus important de cette école est Hippocrate. Il était également un très bon astronome puisqu'il a décrit avec précision la comète de Halley lors de son passage en 466 avant J.-C., indiquant notamment que sa queue pointait dans la direction opposée à l'emplacement du soleil.

Proclus nous dit qu'Hippocrate a écrit des ouvrages de mathématiques, dont le premier traité ayant pour but de mettre en forme les bases de la géométrie :

> Hippocrate de Chio, l'inventeur de la quadrature de la lunule, (...) s'illustra dans la géométrie. Hippocrate fut en effet le premier, de ceux que la tradition mentionne, qui ait composé aussi des éléments.

Hippocrate a cherché à résoudre les problèmes de la duplication du cube et de la quadrature du cercle. Ces tentatives (qui n'ont pas abouti) montrent que ces problèmes stimulaient déjà les recherches des mathématiciens grecs dans la première moitié du V^e siècle avant J.-C. Pour aborder ces problèmes, Hippocrate a mis au point un mode de raisonnement particulier, qui consiste à essayer de se ramener à un problème qu'on espère plus simple. Nous rendons la parole à Proclus :

> La réduction (ou raisonnement apagogique) est le changement d'un problème ou d'un théorème en un autre tel que, s'il est connu ou dès qu'on l'aura obtenu, celui que l'on propose du même coup sera rendu tout-à-fait clair ; ainsi, par exemple, lorsqu'on a cherché la duplication du cube, on a transposé la recherche en une autre, dont elle est une conséquence, à savoir la recherche des deux moyennes, et il ne resta plus qu'à chercher comment pour deux droites données sont trouvées deux moyennes proportionnelles. D'après la tradition, le premier qui effectua la réduction des figures embarrassantes fut Hippocrate de Chio, qui carra aussi la lunule et découvrit bien d'autres choses en géométrie, car il était fort doué, si d'aucuns le furent, pour l'étude des figures.

Nous voyons ainsi que les géomètres grecs se sont très tôt intéressés aux différentes formes de raisonnement qu'il était possible d'utiliser. Nous retrouverons ces problématiques au chapitre 7.

C'est probablement dans l'espoir de parvenir à résoudre la quadrature du cercle qu'Hippocrate de Chio effectua des recherches sur la quadrature des lunules. Les résultats qu'il obtint à cette occasion sont parvenus jusqu'à nous, grâce au témoignage d'Eudème reproduit dans des écrits de Simplicius (vers 490–vers 560 après J.-C.). Ces résultats n'ont pas eu un impact important sur le développement des mathématiques grecques, mais c'est là le plus ancien fragment de mathématiques grecques parvenu jusqu'à nous, et il nous donne à ce titre de précieuses informations sur les connaissances mathématiques acquises à l'époque d'Hippocrate. Son analyse montre ainsi que les *Éléments* d'Hippocrate comportaient très vraisemblablement une démonstration du « théorème de Pythagore ».

2.5.4 La découverte de l'incommensurabilité

Les scribes égyptiens et mésopotamiens ne séparaient pas la géométrie de l'arithmétique. Ils transformaient les problèmes géométriques en problèmes numériques. Le choix d'une unité de mesure suffisait à convertir une longueur, une aire ou un volume en un nombre. Les nombres rationnels (c'est-à-dire les fractions m/n entre deux nombres entiers positifs m et n) étaient suffisants pour une telle opération de mesure ; ils correspondaient au choix de sous-multiples d'une unité. Pour prendre un exemple mésopotamien, il est ainsi équivalent de dire qu'une distance vaut les deux-tiers d'une borne ou bien qu'elle vaut huit coudées, puisqu'une borne égale douze coudées.

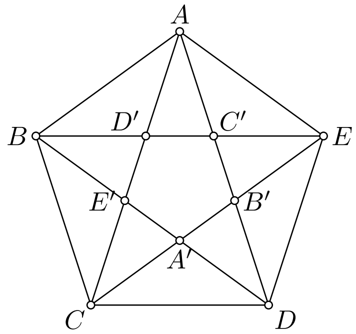
Il ne fait aucun doute que les premiers mathématiciens grecs voyaient les choses de manière analogue, mais il n'est pas possible de fonder toute la géométrie sur ce principe. En effet, on peut trouver des grandeurs de même nature incommensurables entre elles, ce qui par définition signifie qu'il n'existe pas d'unité de mesure dont les deux grandeurs soient des multiples entiers. Autrement dit en employant un langage moderne, deux grandeurs de même nature sont incommensurables si leur rapport est un nombre irrationnel [9]. Ainsi, la longueur du côté et la longueur de la diagonale d'un carré sont des grandeurs incommensurables, puisque le rapport de celle-là à celle-ci est $\sqrt{2}$, dont il est bien connu que c'est un nombre irrationnel. Mais il n'est pas sûr que ce soit sur le carré que les mathématiciens grecs aient observé l'existence de grandeurs incommensurables pour la première fois. En fait, les historiens des sciences ne s'accordent pas sur le nom de l'auteur de la découverte ni sur la méthode qu'il a utilisée ; seule la date, probablement vers 430 avant J.-C., fait l'objet d'un consensus aujourd'hui.

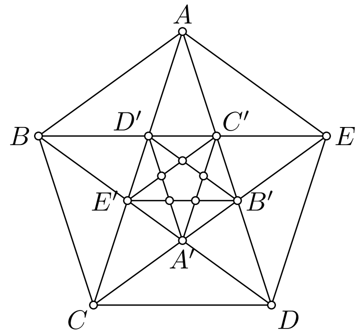
Cette découverte est capitale dans l'histoire des mathématiques grecques. Elle a imposé l'idée que les nombres ne suffisaient pas à représenter les rapports entre deux grandeurs, et par conséquent, qu'il n'était plus possible de baser la géométrie sur l'étude des nombres. La doctrine pythagoricienne selon laquelle « toute chose est Nombre » s'en trouva ruinée. Les mathématiciens grecs vont donc, à partir de cette date, opérer une séparation stricte entre géométrie et arithmétique.

Nous allons maintenant présenter une hypothèse, considérée comme vraisemblable par plusieurs historiens contemporains, ayant trait à la façon dont les Grecs auraient découvert l'existence de grandeurs incommensurables. Pour faciliter la compréhension de notre propos, nous utiliserons un langage moderne. L'histoire commence avec le pentagone régulier, une figure que les pythagoriciens savaient construire de manière exacte. Sur la figure de gauche ci-après, les angles $\widehat{DAC}$, $\widehat{EBD}$, $\widehat{ACE}$, $\widehat{BDA}$ et $\widehat{CEB}$ sont tous égaux entre eux ; nous appellerons α la mesure de cet angle. Les angles $\widehat{AEB}$, $\widehat{ABE}$, $\widehat{BAC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CBD}$, etc. sont égaux entre eux ; nous appellerons β leur mesure. Ainsi les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ACD}$ ont pour mesure $\alpha+\beta$ et l'angle BAE a pour mesure $\alpha+2\beta$. En écrivant que la somme des mesures des angles des triangles ACD et AEB vaut π, on obtient $3\alpha+2\beta=\pi$ et $\alpha+4\beta=\pi$, d'où $\alpha=\beta=\frac{\pi}{5}$. Un rapide calcul basé sur le fait que la somme des mesures des angles dans le triangle $AD'E$ vaille π montre que l'angle $\widehat{AD'E}$ a même mesure que l'angle $\widehat{D'AE}$, à savoir $2\alpha=\frac{2\pi}{5}$. Le triangle AED' est donc isocèle en E, ce qui montre que la longueur de segments comme BC'

9. Si deux grandeurs de même nature A et B sont commensurables, alors elles sont toutes deux des multiples entiers d'une même unité de mesure, disons U, de sorte que l'on peut écrire $A=mU$ et $B=nU$, où m et n sont des nombres entiers, et que $\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$ est bien un nombre rationnel. Si réciproquement deux grandeurs de même nature A et B sont telles que le rapport $\frac{A}{B}$ est un nombre rationnel, disons $\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$ avec m et n entiers, alors A et B sont tous deux des multiples entiers d'une même unité de mesure U ; en effet si l'on prend pour U la $m^{\text{è}}$ partie de A, alors U est aussi égal à la $n^{\text{è}}$ partie de B.

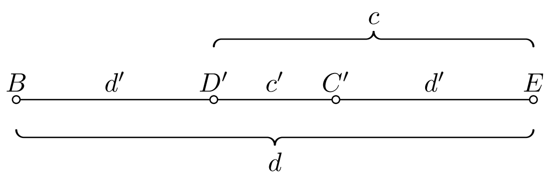
ou $D'E$ est égale au côté du pentagone $ABCDE$. Traçons maintenant les diagonales du petit pentagone $A'B'C'D'E'$, afin d'obtenir la figure de droite. L'angle $\widehat{B'E'A'}$ dans le petit pentagone est égal à l'angle analogue $\widehat{BEA}$ dans le grand pentagone, donc a pour mesure α. Les angles $\widehat{B'E'D}$ et $\widehat{B'DE'}$ sont donc égaux, ce qui montre que le triangle $E'B'D$ est isocèle en B'. Les diagonales du petit pentagone comme $B'E'$ ou $A'C'$ ont donc une longueur égale à celle des segments comme BD' ou $C'E$.





Appelons c et d les longueurs du côté CD et de la diagonale AC du pentagone $ABCDE$ et appelons c' et d' la longueur du côté $C'D'$ et de la diagonale $A'C'$ du pentagone $A'B'C'D'E'$. Sur le segment BE découpé aux points C' et D', nous avons donc les relations :

$$BC' = D'E = c, \quad BD' = C'E = d', \quad C'D' = c', \quad \text{d'où} \quad d' = d - c \quad \text{et} \quad c' = c - d'.$$



Montrons à présent que les longueur c et d sont incommensurables. Supposons qu'il existe une unité de mesure dans laquelle les longueurs c et d aient une mesure entière. Alors $c' = 2c-d$ et $d' = d - c$ ont aussi une mesure entière dans cette unité. De même, les diagonales et les côtés du tout petit pentagone au centre de la figure de droite ont aussi une mesure entière. On peut alors continuer et construire des pentagones de plus en plus petits dont la longueur des côtés et des diagonales sont des multiples entiers de l'unité de mesure. Mais à chaque fois qu'on passe d'un pentagone au pentagone suivant, la longueur du côté diminue d'un facteur au moins deux, puisque $2c' < c' + d' = c$. Si on répéte assez longtemps le processus, on obtient un pentagone dont le côté est plus petit que l'unité de mesure, dont il est pourtant un multiple entier. Cette contradiction patente montre que les longueurs c et d sont incommensurables [10].

Pour que la preuve soit complète, il faut encore établir l'existence du pentagone régulier, ce qui ne peut être fait que par une construction (voir le paragraphe 2.3.2). La construction du pentagone régulier est exposée assez tôt dans les *Éléments* d'Euclide, dès le Livre IV, ce qui montre que le résultat était considéré comme fondamental. Peut-être peut-on voir là un témoignage du rôle de cette figure dans la découverte de l'incommensurabilité.

10. Dire que c et d sont incommensurables, c'est dire que le rapport $\varphi = d/c$ est un nombre irrationnel. Comme φ vaut aussi $\frac{d'}{c'} = \frac{d-c}{2c-d} = \frac{\varphi-1}{2-\varphi}$, on arrive à l'équation $\varphi^2 = \varphi + 1$, d'où $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ce rapport, qu'on appelle aujourd'hui nombre d'or, se retrouve à différents endroits dans le pentagone régulier : $\varphi = \frac{d}{c} = \frac{BE}{BC'} = \frac{BC'}{C'E} = \frac{C'E}{D'C'} = \frac{d'}{c'}$.

2.5.5 Eudoxe

Eudoxe de Cnide fut le chef de file de l'école de Cyzique, une ville située sur la côte sud-ouest de l'Asie mineure. Ce médecin, astronome et mathématicien vécut dans la première moitié du IVe siècle. Son principal apport aux mathématiques a été de mettre au point une théorie des proportions, dont la nécessité s'était faite sentir après la découverte de l'incommensurabilité. Cette théorie décrit les propriétés des « raisons » ; une raison est un objet mathématique capable de représenter le rapport entre deux grandeurs de même nature (deux longueurs, deux aires, deux volumes, etc.), éventuellement incommensurables.

Euclide expose la théorie d'Eudoxe dans le Livre V des *Éléments*. Afin de comprendre en quoi consiste cette théorie, nous allons examiner et commenter quelques-unes des définitions qui y sont données.

Livre V

Définitions

(...)

3. Une raison est une certaine manière d'être entre elles de deux grandeurs homogènes, suivant leur quantité.
4. Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.
5. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux, ou plus petits.

(...)

7. Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.

La notion de grandeur n'est pas définie et doit donc être comprise dans un sens intuitif. Ce peut être une longueur, une aire ou un volume. On suppose toutefois qu'on peut les comparer entre elles et qu'on peut les ajouter ou les soustraire. Il est aussi possible d'en prendre des multiples (deux fois, trois fois, etc.) Pour nous simplifier la vie, nous allons utiliser une notation symbolique, anachronique mais utile : nous noterons A, $2A$, $3A$, etc. les multiples successifs d'une grandeur A, et nous utiliserons les signes $\leq$, $\geq$, $<$ et $>$ pour comparer entre elles les grandeurs.

La définition 3 nous dit que la raison entre deux grandeurs de même nature A et B est la manière dont elles se comparent l'une à l'autre. La définition 4 dit qu'il existe un objet appelé « raison entre A et B » s'il existe des nombres entiers positifs m et n tels que $n\,A > B$ et $m\,B > A$; quand elle existe, nous noterons $A : B$ la raison entre A et B. (On emploie parfois le mot « rapport » au lieu du mot « raison », les deux sont des traductions acceptables du mot grec.)

La définition 7 nous dit qu'on peut comparer entre elles des raisons : si quatre grandeurs A, B, C et D sont données, alors on dit que la raison $A : B$ est plus grande que la raison

$C : D$ s'il existe des nombres entiers positifs m et n tels que

$$nA > mB \qquad \text{et} \qquad nC \leq mD.$$

Si, après avoir choisi une unité de mesure, on identifie les grandeurs A, B, C et D à des nombres (éventuellement irrationnels, ce que les Grecs ne s'autorisaient pas à faire) et les raisons $A : B$ et $C : D$ aux quotients A/B et C/D, alors la définition devient : la raison $A : B$ est plus grande que la raison $C : D$ si il existe un nombre rationnel m/n tel que

$$\frac{A}{B} > \frac{m}{n} \geq \frac{C}{D}.$$

La définition 5 nous dit quand est-ce que deux raisons $A : B$ et $C : D$ sont égales. Elles le sont si pour tous nombres entiers positifs m et n, le résultat de la comparaison de nA à mB (c'est-à-dire plus grand, égal, ou plus petit que) est identique à celui de la comparaison de nC à mD. Identifiant à nouveau les grandeurs A, B, C et D à des nombres et les raisons $A : B$ et $C : D$ aux quotients A/B et C/D, la définition d'Euclide s'interprète ainsi : les raisons $A : B$ et $C : D$ sont dites égales si, pour tout nombre rationnel m/n, les nombres A/B et C/D sont toutes deux soit plus grands, soit égaux, soit plus petits que m/n. Autrement dit, pour toute fraction m/n, les nombres A/B et C/D sont situés sur la droite réelle du même côté par rapport à m/n.

Les nombres rationnels apparaissent ainsi de façon subtile et indirecte dans la théorie des proportions d'Eudoxe, ce qui rend cette dernière assez compliquée à comprendre. Néanmoins, les Grecs s'astreignaient à l'utiliser à chaque fois qu'ils voulaient comparer de manière exacte des grandeurs entre elles, que ce soient des longueurs, des aires ou des volumes.

Par exemple, les Mésopotamiens utilisaient dans leurs calculs le fait que l'aire d'un disque est proportionnelle au carré de sa taille, mesurée par son diamètre ou par sa circonférence. Les premiers mathématiciens grecs connaissaient cette propriété mais ne savaient pas la démontrer. C'est Eudoxe qui, le premier, a su prouver ce théorème. L'énoncé auquel il parvint, reproduit dans la proposition 2 du Livre XII des *Éléments* d'Euclide, fait explicitement intervenir des raisons :

> Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres.

Autrement dit, deux cercles étant donnés, la raison entre leurs aires est égale à la raison entre les carrés de leurs diamètres.

2.6 Les *Éléments* d'Euclide [11]

2.6.1 Euclide

On sait très peu de choses sur Euclide. Proclus nous dit :

> Euclide n'est pas beaucoup plus jeune que ceux-ci [Hermotinus de Colophon et Philippe de Mende]. En rassemblant des éléments, il en a coordonné beaucoup

11. Plusieurs éditions du texte des *Éléments* d'Euclide sont aujourd'hui disponibles. Les Presses Universitaires de France publient une traduction en français augmentée d'un appareil critique très complet par Bernard Vitrac ; l'ensemble des quatre volumes de cette édition est toutefois très onéreux. Le site Web `http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html` propose une traduction en anglais du texte complet des *Éléments* accompagnée de commentaires et de figures manipulables.

> d'Eudoxe, perfectionné beaucoup de Théétète, et a évoqué dans d'irréfutables démonstrations ceux que ses prédécesseurs avaient montré d'une manière relâchée. Cet homme a d'ailleurs vécu sous le premier Ptolémée ; car Archimède, qui survint postérieurement au premier Ptolémée, mentionne Euclide. On dit que Ptolémée demanda un jour à Euclide s'il n'y avait pas une voie plus courte que celle de l'enseignement des *Éléments* pour la géométrie, et qu'il lui répondit qu'il n'existait pas une voie royale en géométrie. Euclide est donc plus récent que les disciples de Platon, mais plus ancien qu'Archimède et qu'Ératosthène, ces derniers étant contemporains, comme Ératosthène le dit quelque part [...]

L'analyse de ce texte, combinée à celle d'une autre source moins fiable, laisse penser qu'Euclide aurait vécu vers 300 avant J.-C., aurait reçu son éducation mathématique auprès des disciples de Platon (à Athènes ?), puis aurait enseigné au Musée d'Alexandrie.

Il est plausible qu'une des premières missions d'Euclide à Alexandrie fut de rédiger des grands traités, dans lesquels il devait consigner les connaissance de son époque. Les *Éléments* constituent l'œuvre majeure d'Euclide et présentent ce que les Grecs considéraient être les connaissances de base et les fondements des mathématiques. Euclide a écrit de nombreux autres ouvrages (sur l'optique, les coniques, la musique, etc.), dont la plupart sont aujourd'hui perdus.

La richesse de ces contributions ont conduit certains historiens à penser qu'Euclide était en fait le nom collectif d'un groupe de mathématiciens ; le manque d'indications biographiques sur Euclide ne permet ni d'accréditer, ni d'invalider cette hypothèse.

2.6.2 Le texte des *Éléments* dans l'histoire

Le manuscrit original d'Euclide est perdu depuis longtemps. Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 2.2, le texte a été altéré dès l'Antiquité par l'ajout de gloses et par des erreurs de copie. Des éditeurs plus scrupuleux de pédagogie que de fidélité à l'original ont ajouté des lemmes, des preuves alternatives et des scholies en vue de faciliter la lecture d'un texte qui semblait de plus en plus difficile.

Plusieurs manuscrits des *Éléments* datant du Moyen-Âge sont parvenus jusqu'à nous. Le plus ancien a été écrit en 888. Ces manuscrits sont discordants. Ce n'est qu'au terme d'un minutieux travail de comparaison des manuscrits et d'analyse textuelle (style, fréquence d'utilisation des mots grecs, etc.) et historique que Johan Ludwig Heiberg (1854–1928) a pu reconstituer à la fin du XIXᵉ siècle un texte que nous croyons aujourd'hui être assez proche du texte d'Euclide. Le travail de Heiberg montre que la plupart des altérations contenues dans les manuscrits ont été effectuées au IIIᵉ siècle après J.-C.

Les *Éléments* ont été édités d'innombrables fois. (On considérait en 1900 que c'était le texte le plus édité après la Bible.) Pas moins de trois traductions en arabe différentes de cette œuvre ont été effectuées au IXᵉ siècle, à l'apogée de l'Empire arabe. Les *Éléments* ont pénétré le monde occidental à partir du XIIᵉ siècle grâce à des traductions en latin basées sur des manuscrits arabes. Le texte reçoit les honneurs de l'imprimerie dès 1482 à Venise et 1486 à Ulm. Des éditions plus fiables, basées sur des manuscrits grecs, sont diffusées en Europe de l'ouest à partir de 1533. Cette abondance de traductions et d'éditions montre que le texte a été très étudié, lu et utilisé.

Les *Éléments* ont servi de manuel d'enseignement depuis l'Antiquité jusqu'au XXᵉ siècle, autant pour la richesse de son contenu que pour sa rédaction claire et précise (voir le paragraphe suivant). Parce qu'il fallait sans cesse l'adapter aux exigences changeantes de la pédagogie, le texte des *Éléments* a évolué, comme si l'œuvre était vivante. Dans la même veine, un détail historique amusant est qu'au II^{e} siècle avant J.-C., Hypsicle, un mathématicien qui travaillait à Alexandrie, a ajouté un quatorzième livre de son cru aux *Éléments* d'Euclide. Un quinzième sera ajouté encore plus tard par un auteur inconnu, mais moins doué.

D'un certain côté, le travail d'Euclide se situait déjà dans cette tradition d'adaptation et de réécriture. En effet pour écrire son œuvre, Euclide s'est appuyé sur les ouvrages que ses prédécesseurs avaient écrits. Nous avons vu au paragraphe 2.5 qu'Hippocrate de Chio avait lui aussi écrit des *Éléments* ; Aristote quant à lui semble avoir basé son enseignement sur les *Éléments* de Theudius (vers 350 avant J.-C.). Le fait que tous ces ouvrages soient connus sous le même nom, à savoir *Éléments*, montre d'ailleurs bien qu'ils étaient destinés au même usage, à savoir l'exposition des bases des mathématiques. Appartenant ainsi à une tradition, les *Éléments* d'Euclide gardent trace des progrès des mathématiques accomplis avant Euclide ; par là, le texte apporte des renseignements précieux aux historiens.

2.6.3 L'organisation des *Éléments*

L'œuvre comporte treize livres (c'est-à-dire treize chapitres), mais pas de préface ni d'introduction. Le Livre I commence par une liste de vingt-trois définitions, cinq « demandes », et cinq « notions communes », puis présente quarante-huit propositions. Les livres suivants ne comportent que des définitions et des propositions.

Il n'y a pas grand-chose à retenir des premières définitions, sauf peut-être qu'une ligne n'est pas constituée de points :

Définitions

1. Un point est ce qui ne peut être divisé en parties.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.

   (...)

15. Un cercle est une figure plane comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence, toutes les droites menées à la circonférence d'un des points placé à l'intérieur de cette figure étant égales entre elles.
16. Ce point se nomme le centre du cercle.

    (...)

24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.

    ...

Dans son *Organon (La Logique)*, Aristote distinguait deux sortes d'hypothèses pour la constitution des sciences : les axiomes et les postulats. Les axiomes sont des conventions intuitives valables pour toutes les sciences. Ensuite chaque science se consacre à son objet en étudiant les conséquences d'un ensemble de postulats. Euclide adopte ce point de vue. Les « notions communes » d'Euclide correspondent aux axiomes d'Aristote. Les « demandes » correspondent quant à elles aux postulats sur lesquels Euclide fait reposer la science de la géométrie.

Demandes

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

Notions communes

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
5. Le tout est plus grand que la partie.

Les trois premières demandes d'Euclide explicitent quelles sont les opérations de construction autorisées dans la théorie : Euclide annonce qu'il va explorer la théorie des figures géométriques « constructibles à la règle et au compas », comme on dit aujourd'hui. La quatrième explique qu'on peut comparer entre eux des angles placés en des points et dans des directions différentes, l'angle droit servant ici d'étalon. Nous dirons deux mots sur la cinquième demande au paragraphe 2.6.4.

Après les définitions, les demandes et les notions communes, Euclide présente les résultats de la théorie sous la forme d'une chaîne déductive de propositions. La première proposition du Livre I, très simple, ne rend pas hommage à la sophistication des résultats présentés dans les *Éléments*. En revanche, elle témoigne de la précision et du style avec lequel l'ouvrage est rédigé :

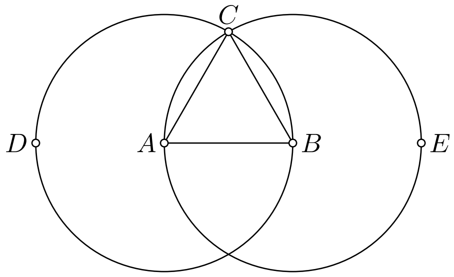
Proposition 1

(Énoncé) Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

(Exposition) Soit AB une droite donnée et finie.

(Détermination) Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.

(Construction) Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BCD (Demande 3). Et, de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence ACE. Et du point C, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A et B les droites CA et CB (Demande 1).



(Démonstration) Car, puisque le point A est le centre du cercle BCD, la droite AC est égale à la droite AB (Définition 15). De plus, puisque le point B est le centre du cercle ACE, la droite BC est égale à la droite BA. Mais on a démontré que la droite CA était égale à la droite AB, donc chacune des droites CA et CB est égale à la droite AB. Or les grandeurs qui sont égales à une même grandeur sont égales entre elles (Notion commune 1). Donc la droite CA est égale à la droite CB. Donc les trois droites CA, AB et BC sont égales entre elles.

(Conclusion) Donc le triangle ABC est équilatéral (Définition 24), et il est construit sur la droite donnée et finie AB. Ce qu'il fallait faire.

Nous avons distingué six étapes dans le texte de cette proposition. Ce découpage est dû à Proclus, qui a observé que ce schéma se retrouvait dans toutes les propositions des *Éléments*. L'énoncé (πρότασις en grec) décrit le problème de façon générale. L'exposition (ἔκθεσις) sert à présenter un exemple du problème à résoudre : les différents éléments du problème sont désignés par des lettres, les propriétés supposées sont rappelées, une figure de la situation est dessinée. La détermination (διορισμός) énonce le but de la démonstration, c'est-à-dire le problème à résoudre pour les objets spécifiés dans l'exposition. L'éventuelle étape de construction (κατασκευή) sert au géomètre à préparer le terrain pour la démonstration (ἀπόδειξις) en introduisant de nouveaux éléments sur la figure. Enfin la conclusion (συμπέρασμα) répète l'énoncé de la proposition désormais prouvée. Ce découpage, souligné par Proclus pour des raisons pédagogiques, conditionne encore de manière plus ou moins consciente notre manière actuelle de rédiger les mathématiques.

Euclide ne suit pas toujours ce modèle idéal à la lettre. Par exemple dans les propositions un peu complexes, l'étape de construction est entremêlée avec l'étape de démonstration, les constructions étant effectuées au fur et à mesure des nécessités du raisonnement. On peut d'ailleurs noter à ce propos que les étapes de la construction sont justifiées aussi soigneusement que les étapes de la démonstration, ce qui illustre à nouveau que l'importance logique que les mathématiciens grecs attribuaient aux constructions (voir le paragraphe 2.3.2).

Signalons enfin que les problèmes résolus dans les propositions peuvent être soit des théorèmes, soit des problèmes de construction. Euclide conclut souvent les premiers par la phrase « ce qu'il fallait démontrer », alors qu'il conclut les seconds par un « ce qu'il fallait faire ». Les deux premières propositions du Livre VII illustrent cette distinction entre théorèmes et problèmes :

Livre VII

Proposition 1

Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsqu'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entre eux.

PROPOSITION 2

> Deux nombres non premiers entre eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

La lisibilité des *Éléments* tient en grande partie à l'adoption par Euclide d'une structure formelle claire : mise en évidence des demandes en tête d'ouvrage, découpage du texte en propositions, structure claire de chaque proposition (rappel des données et du but de la démonstration). Ces qualités ont permis aux *Éléments* d'être utilisés longtemps comme un ouvrage d'enseignement. Aujourd'hui encore, on rédige les mathématiques selon le modèle euclidien. Aujourd'hui encore, faire une construction géométrique signifie n'utiliser que la règle et le compas, conformément aux demandes énoncées par Euclide dans les *Éléments*.

2.6.4 Le contenu mathématique des *Éléments*

Euclide a rassemblé dans les *Éléments* tous les résultats fondamentaux des mathématiques, nécessaires au développement de théories plus avancées. Faisant cela, il reportait à des ouvrages spécialisés le traitement des résultats plus sophistiqués, par exemple l'étude des coniques. Cependant les *Éléments* ne contiennent pas que des résultats faciles.

Voici à présent une présentation rapide du plan des *Éléments*. À côté de chacun des thèmes traités par Euclide, nous avons indiqué le nom du mathématicien ou de l'école philosophique à l'origine des principaux résultats obtenus. En un sens, ce tableau donne un panorama des mathématiques grecques à l'époque d'Euclide aussi bien que de l'histoire des mathématiques grecques avant Euclide.

Livre	Contenu	Origine
I	Géométrie plane des figures rectilignes : construction et propriétés des triangles, parallélisme, théorème de Pythagore	Pythagoriciens
II	« Algèbre géométrique » : égalités d'aires de rectangles et de carrés analogues à des manipulations algébriques simples	Pythagoriciens
III	Géométrie du cercle	Hippocrate de Chio
IV	Inscription et circonscription des polygones réguliers au cercle	Pythagoriciens Hippocrate de Chio
V	Théorie des proportions (rapports entre deux grandeurs de même nature)	Eudoxe
VI	Applications du livre V à la géométrie : figures semblables Application des aires (sorte de résolution géométrique des équations du second degré)	Pythagoriciens
VII VIII IX	Étude des nombres entiers : proportions numériques, nombres premiers, P.G.C.D, P.P.C.M., progressions géométriques	Pythagoriciens Platoniciens
X	Grandeurs incommensurables (étude de ce qui peut être représenté sous la forme $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ avec a et b commensurables)	Théétète

XI	Géométrie dans l'espace : parallélisme, perpendicularité, angles solides, parallélépipèdes, prismes	Platoniciens
XII	Aires et volumes par la méthode d'exhaustion : cercle, pyramides, cônes, ...	Eudoxe
XIII	Construction des cinq polyèdres réguliers	Théétète

Nous avons déjà cité le passage dans lequel Proclus affirme qu'« en rassemblant des éléments, il [Euclide] en a coordonné beaucoup d'Eudoxe, perfectionné beaucoup de Théétète, et a évoqué dans d'irréfutables démonstrations ceux que ses prédécesseurs avaient montré d'une manière relâchée ». Le texte de Proclus indique donc que l'apport d'Euclide est d'avoir réorganisé le savoir mathématique de son époque. Voici deux exemples de cette réorganisation.

Nous avons vu au paragraphe 2.5.5 comment la découverte de l'existence de grandeurs incommensurables avait rendu nécessaire la construction d'une théorie des proportions plus générale que la théorie des rapports de nombres entiers qui permette la comparaison entre eux de rapports de longueurs. Euclide a utilisé ce nouvel outil pour donner une preuve complète de tous les résultats concernant les figures semblables. Pour cela, il a dû changer l'ordre de présentation des propositions : tous les résultats de géométrie plane pouvant être montrés sans la théorie des proportions, en particulier sans la notion de figure semblable, sont exposés dans les Livres I à IV ; la théorie des proportions d'Eudoxe est présentée au Livre V ; les applications de la théorie des proportions à la géométrie sont traitées dans le Livre VI. Durant ce travail de réarrangement, Euclide a notamment découvert une nouvelle démonstration du « théorème de Pythagore » ; cette démonstration rendit le théorème de Pythagore indépendant de la considération de figures semblables, de sorte qu'Euclide put l'inclure dans le Livre I et l'utiliser dans les Livres II à IV.

Un deuxième exemple de réorganisation effectué par Euclide fut de mettre au point une axiomatique convenable pour exposer la science de la géométrie. Voici ce dont il s'agit. Nous avons dit au paragraphe 2.5.2 que les pythagoriciens avaient observé que la somme des angles d'un triangle vaut deux angles droits. Il s'agissait là néanmoins d'une connaissance empirique, car aucune preuve satisfaisante n'était connue avant le travail d'Euclide. Ainsi Aristote écrit dans la seconde moitié du IV^{e} siècle avant J.-C. que toutes les démonstrations du fait en question connues à son époque comportaient un cercle vicieux. Euclide a tranché le problème en introduisant un postulat spécial pour cela, postulat qui fut donc ajouté en cinquième position dans les demandes de la théorie :

> Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

Conscient de la nouveauté qu'il introduisait, Euclide a essayé de démontrer le plus de résultats possibles sans cette cinquième demande. Il a été ainsi conduit à réfléchir à l'arrangement des propositions du Livre I.

Depuis l'époque d'Euclide, beaucoup de mathématiciens ont essayé de s'affranchir de cette cinquième demande, souvent appelé « postulat d'Euclide ». Le but était de montrer que cette cinquième demande était une conséquence des quatre autres. En 1795, John Playfair (1748–1819) montra que le postulat d'Euclide était équivalent à l'énoncé suivant, appelé depuis « postulat des parallèles » :

> Étant donné une droite et un point hors de cette droite, il est possible de tracer exactement une droite passant par ce point et parallèle à la droite.

Puis au milieu du XIXᵉ siècle, Carl Friedrich Gauss (1777–1855), János Bolyai (1802–1860) et Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792–1856) mirent au point la géométrie non-euclidienne, une forme de géométrie satisfaisant aux quatre premières demandes d'Euclide mais pas à la cinquième, puisque dans cette géométrie, la somme des angles d'un triangle est toujours plus petite que deux angles droits. Ils montrèrent que cette nouvelle théorie ne portait pas en elle de contradiction et établirent ainsi l'indépendance de la cinquième demande d'Euclide par rapport aux quatre premières.

Une faiblesse logique a été découverte dans la preuve de la proposition 1 du Livre I des *Éléments* d'Euclide par Zénon de Silon (vers 150–vers 70 avant J.-C.). Dans la situation examinée par Euclide, il y a sur la figure deux cercles de même rayon, et chacun d'entre eux passe par le centre de l'autre. Euclide considère ensuite un point situé sur les deux cercles à la fois. Or rien dans les demandes d'Euclide ne garantit l'existence d'un point d'intersection. Euclide s'est ici reposé sur une observation intuitive.

D'autres incohérences mineures ont été découvertes dans les *Éléments*, par exemple quand Euclide traite de la géométrie dans l'espace au Livre XI. Les reproches sont qu'Euclide n'a pas explicité les postulats aussi soigneusement qu'il l'avait fait pour la géométrie plane. Ceci dit, les *Éléments* d'Euclide comportent extrêmement peu de faiblesses ou d'inconsistances logiques, surtout si l'on tient compte de l'ampleur de l'œuvre.

2.7 La géométrie grecque après Euclide

La géométrie grecque atteint son apogée au IIIᵉ siècle avant J.-C. Vers 300 avant J.-C., Euclide synthétise les connaissances mathématiques de son époque en rédigeant plusieurs traités. À sa suite, Archimède et Apollonius continuent à faire mûrir des théories qui n'étaient pas encore arrivées à leur forme finale.

2.7.1 Archimède

Commençons par Archimède, dont on connaît (une fois n'est pas coutume) assez bien la vie. Archimède est né au début du IIIᵉ siècle avant J.-C. Il a vraisemblablement été étudier auprès d'Euclide ou de ses disciples à Alexandrie, puis est revenu en Sicile à Syracuse, sa ville natale, qui était à l'époque une des plus riches villes de la Grande Grèce. De là, il correspondait avec les mathématiciens d'Alexandrie, dont le bibliothécaire, Érathostène. Archimède était à la fois un ingénieur, un géomètre, et un formidable calculateur (nous en dirons deux mots au chapitre suivant). En tant qu'ingénieur, Archimède a contribué au perfectionnement du dispositif défensif de Syracuse lorsque celle-ci fut assiégée par le général romain Marcellus en 213 avant J.-C. Finalement les Romains vaincront et Archimède sera tué lors du sac de la ville en 212.

En géométrie, Archimède a surtout perfectionné les méthodes d'Eudoxe pour la détermination d'aires et de volumes. Parmi les résultats qu'Archimède a démontré, citons ceux-ci :

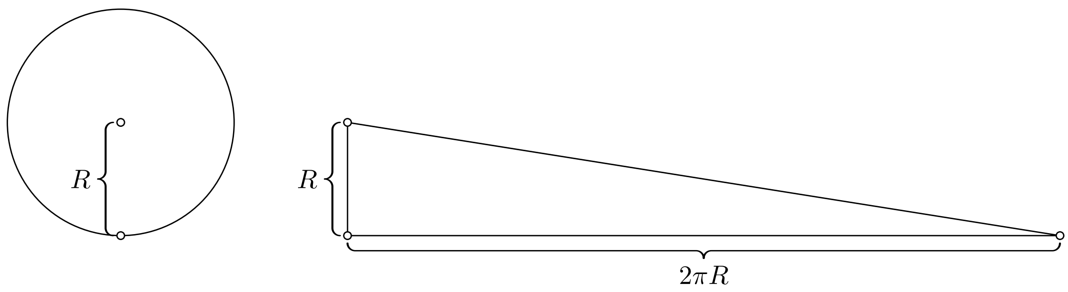
> Tout cercle est égal au triangle rectangle dont un côté de l'angle droit est égal à son rayon, l'autre côté étant égal à son périmètre.
>
> Le périmètre de tout cercle est supérieur au triple du diamètre et l'excède d'une longueur inférieure à la septième partie du diamètre, mais supérieure à dix soixante

et onzièmes.

Un segment quelconque compris entre une droite et une section de cône rectangle [12] est égal à quatre fois le tiers du triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment.

Toute sphère est quadruple du cône qui a une base égale à un grand cercle et une hauteur égale au rayon de la sphère ; le cylindre ayant une base égale à un grand cercle et une hauteur égale à un diamètre de la sphère est plus que la sphère de la moitié.

La première de ces propositions affirme que l'aire d'un cercle est égale à la moitié du produit du rayon par la circonférence.



C'est là un fait évident si nous pensons à nos formules

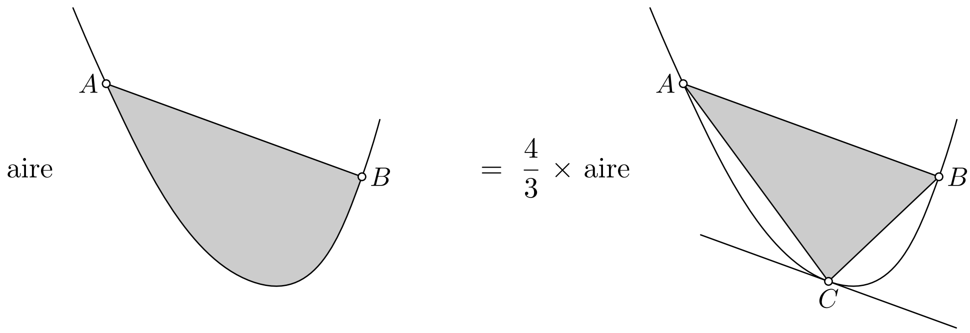
$$\text{circonférence} = 2\pi R \qquad \text{et} \qquad \text{aire} = \pi R^2,$$

où le symbole R désigne le rayon du cercle, mais cette apparente simplicité ne doit pas faire oublier que le lien n'a en fait rien d'évident, puisqu'il s'agit de comparer deux problèmes de nature différentes : d'un côté, un problème de quadrature (la détermination de l'aire délimitée par une ligne courbe), de l'autre, un problème de rectification (détermination de la longueur d'une ligne courbe). La difficulté est de montrer que la constante de proportionnalité entre le diamètre d'un cercle et sa circonférence est la même que celle entre le carré du rayon d'un disque et son aire.

Traduite en termes modernes, la seconde proposition signifie que $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$. Là encore, la précision peut sembler médiocre, mais il s'agit pourtant d'un exploit : Archimède est le premier à démontrer un tel encadrement (les approximations connues avant lui n'étaient ni justifiées, ni accompagnées d'une estimation sur l'erreur commise).

La troisième proposition ci-dessus donne la quadrature d'un segment de parabole, c'est-à-dire compare l'aire du segment de parabole à une aire rectiligne (celle d'un triangle). La figure ci-dessous illustre la situation : deux points A et B ont été choisis sur une parabole, et le segment de parabole est l'espace bordé par le segment AB et la parabole. On appelle C le point en lequel la tangente à la parabole est parallèle à la droite AB. Alors l'aire du segment de parabole vaut quatre fois le tiers de l'aire du triangle ABC.

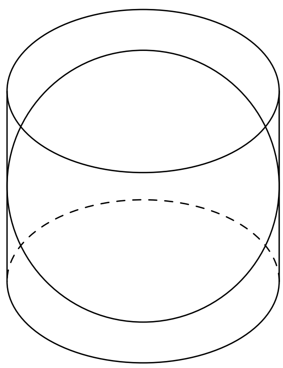
12. Une parabole, en language moderne.



La quatrième proposition est la première détermination exacte du volume de la sphère : Archimède affirme et prouve que le volume du cylindre circonscrit à une sphère est une fois et demie le volume de la sphère. Ce résultat, qu'on pourrait traduire en language moderne par les formules

$$\begin{aligned}\text{volume du cylindre circonscrit} &= \text{aire de la base} \times \text{hauteur}\\ &= \pi R^2 \times 2R\\ &= \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}\pi R^3\\ &= \frac{3}{2} \text{ fois le volume de la sphère de rayon } R,\end{aligned}$$

où R est la rayon de la sphère, relie un problème de quadrature (détermination de l'aire de la base du cylindre) à un problème de cubature (détermination du volume de la sphère).



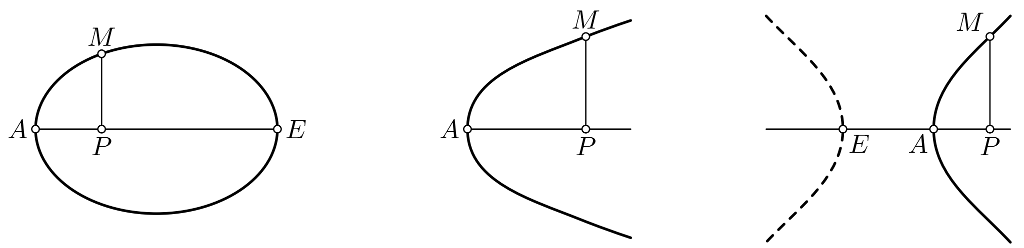
Un point intéressant pour l'historien des sciences est que l'on dispose non seulement du texte des traités dans lesquels Archimède prouve ces résultats, mais aussi d'un texte dans lequel Archimède explique la méthode qui l'a conduit à ces découvertes [13].

2.7.2 Apollonius

Arrêtons-nous ici avec le cas d'Archimède et tournons-nous vers Apollonius. Les historiens estiment généralement que ce dernier a vécu une petite cinquantaine d'années après Archimède,

13. Archimède a utilisé un raisonnement basé sur des considérations de mécanique, mettant en balance les objets géométriques dont il veut comparer les aires ou les volumes. Nous renvoyons aux références pour plus de détails, et notamment au livre de P. Dedron et J. Itard, *Mathématiques et mathématiciens*, Paris : Magnard, 1959.

c'est-à-dire vers la fin du IIIe et au début du IIe siècle avant J.-C. Basé à Alexandrie, Apollonius a écrit plusieurs traités destinés à fournir des outils facilitant la découverte de nouveaux résultats. (Nous reparlerons d'un de ces outils, l'analyse, au chapitre 7.) L'œuvre la plus connue d'Apollonius est son traité en huit livres (seuls les sept premiers sont parvenus jusqu'à nous) sur les sections coniques, c'est-à-dire les figures formées par l'intersection d'un plan et d'un cône à base circulaire. Selon la position relative du plan et du cône, l'intersection peut être une ellipse, une parabole ou une hyperbole. La figure que voici donne l'allure de ces trois types de courbes ainsi qu'une équation les définissant (le rapport λ et la longueur ℓ sont des paramètres) :



$MP^2 = \lambda \cdot PA \cdot PE$ — ellipse

$MP^2 = \ell \cdot PA$ — parabole

$MP^2 = \lambda \cdot PA \cdot PE$ — hyperbole

L'étude de ces sections coniques avait commencé avant Apollonius ; Euclide avait d'ailleurs écrit un traité de quatre livres sur le sujet. Apollonius met toutefois au point une méthode d'étude plus systématique, qui consiste en gros à définir les coniques par les équations mentionnées sur la figure. Cette méthode lui permet d'obtenir des résultats plus aboutis que ses prédécesseurs, et notamment de déterminer les tangentes à ces courbes et de comprendre les propriétés liées à ce qu'on appelle aujourd'hui les foyers et les diamètres. C'est aussi en référence à cette méthode qu'Apollonius donne à ces courbes les noms d'ellipse, de parabole et d'hyperbole : la parabole (du grec παραβολή, comparaison) correspond à l'équation $MP^2 = \ell PA$; dans l'ellipse (du grec ἔλλειψις, manque), le carré MP^2 est plus petit que le produit $\lambda \cdot PA \cdot AE$, avec un manque $\lambda \cdot PA^2$; c'est le contraire dans l'hyperbole (du grec ὑπερβολή, excès), où MP^2 surpasse $\lambda \cdot PA \cdot AE$ de l'excès $\lambda\, PA^2$.

Les *Coniques* d'Apollonius sont considérées comme étant le sommet de la géométrie grecque, à cause de l'élégance des résultats qui y sont présentés, de la subtilité des preuves, et de la complexité du sujet traité.

2.7.3 Le déclin des mathématiques grecques

Pendant les siècles qui suivent, les études mathématiques à Alexandrie s'éloignent de cette géométrie abstraite et théorique. Les progrès suivants concernent davantage les applications de la géométrie, notamment à l'astronomie. À partir du IIIe siècle après J.-C., la situation se dégrade de plus en plus pour les scientifiques à Alexandrie. Il ne reste plus que très peu de mathématiciens en activité. La géométrie codifiée dans les *Éléments* n'est plus étudiée que dans ses parties les plus élémentaires. Les érudits intéressés par les mathématiques se tournent plutôt vers des œuvres moins sophistiquées, telle l'*Introduction à l'arithmétique* de Nicomaque, écrite vers la fin du Ier siècle après J.-C., qui présente une théorie des nombres très rudimentaire [14]. Les grandes mathématiques grecques ne subsistent que sous une forme écrite et par les travaux d'édition de commentateurs comme Pappus (première moitié du IVe siècle après J.-C.), Theon et Hypatie (deuxième moitié du IVe siècle et début du Ve) ou Proclus (milieu du Ve siècle). Elles ne retrouveront vie qu'entre les mains des savants de langue arabe à partir du IXe siècle.

14. L'ouvrage de Nicomaque s'inspire de l'arithmétique des nombres figurés des pythagoriciens. Les lecteurs désirant avoir un aperçu de son contenu peuvent consulter la biographie de Nicomaque sur le site `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/`. Malgré sa pauvreté, cet ouvrage, ou plus exactement sa traduction en latin par Boèce (vers 480–524), servira de base à l'enseignement de l'arithmétique dans les universités scolastiques de l'Europe médiévale.

Chapitre 3

La géométrie pratique, l'astronomie et les problèmes arithmétiques chez les anciens Grecs

Résumé et objectifs du chapitre

Nous commençons ce chapitre en décrivant la manière dont les Grecs écrivaient les nombres. Puis nous donnons quelques exemples de textes écrits par ou pour les arpenteurs du monde hellénistique ; nous constatons que par leur forme procédurale et numérique, ces textes présentent des points communs avec ceux des anciens Égyptiens et Mésopotamiens.

Nous nous tournons ensuite vers l'astronomie : les spéculations théoriques issues de la science des philosophes, judicieusement combinées aux techniques calculatoires et aux connaissances des Mésopotamiens, ont permis à Ptolémée d'écrire un grand traité, l'*Almageste*, qui fera référence jusqu'à la fin du Moyen-Âge. C'est dans cet ouvrage que l'on trouve la première table trigonométrique qui nous est parvenue.

Enfin, nous présentons les *Arithmétiques* de Diophante. Cet ouvrage propose d'étudier des problèmes portant sur la recherche de nombres rationnels soumis à diverses conditions. Il s'agit là d'une thématique nouvelle, ou du moins totalement indépendante de la géométrie des *Éléments* que nous avons étudiée au chapitre précédent.

3.1 Le système de numération des Grecs

Nous avons vu au chapitre 1 que les Mésopotamiens avaient développé des techniques de calcul arithmétique très performantes, basées sur l'utilisation d'un système de numération positionnel en base soixante. Par comparaison, le système grec semble malcommode. Son principe repose sur l'utilisation de la base dix. Chacun des nombres de un à neuf est désigné par un symbole, en fait une lettre de l'alphabet surmontée d'une ligne. De même, dix, vingt, trente, etc., quatre-vingt-dix, cent, deux cents, trois cents, etc., neuf cents, sont désignés chacun par une lettre surlignée. Les Grecs pouvaient ainsi écrire les nombres de un à neuf cent quatre-vingt-dix neuf avec au plus trois symboles. Voici la liste des lettres utilisées à cet effet :

Grec	Moderne	Grec	Moderne	Grec	Moderne
$\overline{\alpha}$	1	$\overline{\iota}$	10	$\overline{\rho}$	100
$\overline{\beta}$	2	$\overline{\varkappa}$	20	$\overline{\sigma}$	200
$\overline{\gamma}$	3	$\overline{\lambda}$	30	$\overline{\tau}$	300
$\overline{\delta}$	4	$\overline{\mu}$	40	$\overline{\upsilon}$	400
$\overline{\varepsilon}$	5	$\overline{\nu}$	50	$\overline{\varphi}$	500
$\overline{\text{ϛ}}$	6	$\overline{\xi}$	60	$\overline{\chi}$	600
$\overline{\zeta}$	7	$\overline{o}$	70	$\overline{\psi}$	700
$\overline{\eta}$	8	$\overline{\pi}$	80	$\overline{\omega}$	800
$\overline{\vartheta}$	9	$\overline{\text{ϟ}}$	90	$\overline{\text{ϡ}}$	900

Ainsi, pour écrire 327, les Grecs écrivaient $\overline{\tau\varkappa\zeta}$. Au delà de mille, les Grecs avaient deux astuces. D'une part, il désignaient les nombres mille, deux mille, trois mille, etc., neuf mille, par les symboles $\overline{͵\alpha}$, $\overline{͵\beta}$, $\overline{͵\gamma}$, etc., $\overline{͵\vartheta}$. Puis, pour les nombres plus grands que dix mille, ils utilisaient les symboles $\overset{\mathrm{o}}{\mathrm{M}}$ pour désigner les unités (μονας en grec, c'est-à-dire MONAΣ en majuscules) et $\overset{\Upsilon}{\mathrm{M}}$ pour les dizaines de milliers (μυριας, c'est-à-dire MΥΡΙΑΣ en majuscules), de sorte que par exemple 75 290 304, lu 7529 0304, s'écrivait $\overset{\Upsilon}{\mathrm{M}}\,\overline{͵\zeta\varphi\varkappa\vartheta}\,\overset{\mathrm{o}}{\mathrm{M}}\,\overline{\tau\delta}$.

Les inconvénients d'un tel système sont clairs : il faut apprendre des tables de multiplication séparées pour multiplier par 3 (c'est-à-dire par $\overline{\gamma}$), par 30 (c'est-à-dire par $\overline{\lambda}$) ou par 300 (c'est-à-dire par $\overline{\tau}$). C'est pourtant avec ce système malcommode qu'Archimède a obtenu l'encadrement $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$, ce qui prouve la formidable virtuosité de ce mathématicien.

3.2 La géométrie pratique des ingénieurs et des arpenteurs

Le chapitre précédent a montré qu'entre le VI^{e} et le IV^{e} siècle avant J.-C., les philosophes grecs changent la nature des mathématiques, en insistant pour que les résultats soient démontrés (dans un cadre axiomatique à partir du IV^{e} siècle), en étudiant plus systématiquement des objets, en concentrant leur réflexion sur des problèmes, et en mettant au point une méthode de rédaction capable d'énoncer des propositions générales. Ces changements se produisent dans le cadre d'une nouvelle science, la géométrie, indépendante de toute considération numérique. Mais les Grecs, et plus généralement les savants du monde hellénistique, disposent également de techniques mathématiques moins savantes mais capables de fournir rapidement des réponses à des problèmes concrets et pratiques.

3.2.1 Présence de procédures

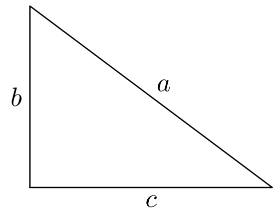
Il existait dans le monde grec des problèmes présentés de la même manière que ce que nous avons pu observer chez les Mésopotamiens. L'exemple que voici [1] figure sur un papyrus datant probablement du deuxième siècle après J.-C. et écrit en langue grecque :

> Si l'on a un triangle rectangle dont la hauteur et l'hypoténuse jointes font 8 pieds, et la base est 4 pieds, et que nous désirions rechercher la hauteur et l'hypoténuse séparément. Nous [les] trouverons ainsi. Les 4 par eux-mêmes font 16. Divise[-les] par les 8, cela fait 2. Soustrais les 2 des 8, il reste 6, dont la moitié est 3. La hauteur sera 3. Ensuite, soustrais les 3 des 8, il reste 5. L'hypoténuse sera donc de 5 pieds.

1. Cet exemple est tiré de l'ouvrage *Une introduction à l'histoire de l'algèbre* par Jacques Sesiano, Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 1999.

Dans ce problème, on demande de trouver la hauteur b et l'hypoténuse a d'un triangle rectangle dont on connaît la base $c = 4$ ainsi que la longueur $a + b = 8$. Il s'agit d'utiliser la relation de Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$, et les étapes du calcul que l'auteur du papyrus invite à accomplir correspondent à nos formules modernes

$$b = \frac{1}{2}\left((a+b) - \frac{c^2}{a+b}\right)$$
$$a = (a+b) - b$$



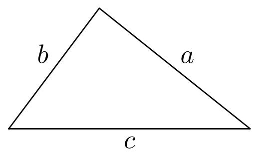
Le problème en lui-même n'a pas un intérêt gigantesque, mais la manière dont il est rédigé montre bien que les vieilles traditions procédurales et numériques survivent concurremment à la science géométrique.

3.2.2 Héron d'Alexandrie

Héron d'Alexandrie était à la fois un géomètre, un arpenteur et un ingénieur. On pense qu'il a vécu au Ier siècle de notre Ère. Les aléas de l'histoire font qu'une partie de ses œuvres nous sont parvenues, notamment un ouvrage de géométrie appliquée intitulé *Les Métriques*, dont un manuscrit fut retrouvé en 1896 à Constantinople.

Parfois, Héron traite la géométrie de la même manière que les géomètres grecs. Par exemple dans le Livre I des *Métriques*, Héron propose une méthode pour calculer l'aire d'un triangle en fonction des seules longueurs des côtés et démontre sa validité. Appelant a, b et c les longueurs des côtés du triangle et $p = (a + b + c)/2$ son demi-périmètre, la méthode de Héron est équivalente à la formule moderne

$$\text{aire} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



Parfois au contraire, Héron se contente d'énoncer des procédures sur des exemples numériques. Voici par exemple la manière dont il décrit un procédé pratique pour trouver une bonne approximation de $\sqrt[3]{100}$:

> Prenez les nombres cubes les plus voisins de 100 par excès et par défaut : ce sont 125 et 64. Ainsi 125 privé de 100 valent 25 et 100 privé de 64 font 36.
>
> Multipliez 5 par 36, cela donne 180. Ajoutez 100, faisant 280. [Divisez 180 par 280], ce qui donne 9/14. Ajoutez au côté du plus petit cube, il vient $4 + \frac{9}{14}$. C'est, aussi près que possible, le côté cubique de 100 unités.

L'approximation est excellente compte tenu de la rapidité du calcul, puisque $\sqrt[3]{100} = 4,6416...$ tandis que $4 + \frac{9}{14} = 4,6444...$ Mais Héron ne donne aucun argument qui explique ou justifie cette efficacité.

3.3 La naissance d'une astronomie scientifique

3.3.1 Une (très) brève histoire de l'astronomie ancienne

Les Mésopotamiens ont cherché à développer une véritable astronomie à partir du VII^{e} siècle avant J.-C. Vers le V^{e} siècle, ils ont imaginé de repérer la position de la lune et des planètes dans le ciel en mesurant les angles que, vus de la Terre, ces astres faisaient avec les étoiles. Pour mesurer ces angles, ils ont choisi l'angle du triangle équilatéral comme unité, puis l'ont subdivisé en soixante degrés, suivant le principe à la base de leur système de numération. Ils ont collecté dans des tables les résultats d'observations sur de très longues périodes. En repérant les régularités dans ces données, ils ont mis en évidence que plusieurs périodes gouvernaient la répétition des phénomènes astronomiques. Ils ont alors pu mettre au point des procédures numériques capables de prédire avec précision la position des planètes dans le ciel. Ces procédures numériques n'avaient en revanche aucune valeur explicative.

Les mathématiciens-philosophes grecs se sont également très tôt intéressés à l'astronomie. Au IV^{e} siècle avant J.-C., Eudoxe chercha à construire un modèle géométrique capable de donner des explications de nature théorique au mouvement régulier mais compliqué des planètes. Partant du principe (peut-être d'origine pythagoricienne) que la sphère est une forme parfaite, Eudoxe conçut l'idée que les astres étaient liés à des sphères centrées autour de la Terre et animées d'un mouvement de rotation uniforme les unes par rapport aux autres. Le modèle d'Eudoxe comportant vingt-sept sphères, il aurait fallu déterminer avec précision un grand nombre de paramètres afin de pouvoir l'utiliser pour faire des prédictions précises. Le modèle d'Eudoxe n'était donc qu'une pure théorie spéculative. D'autres tentatives analogues eurent lieu à l'Académie (l'école de Platon).

Progressivement, les méthodes et les résultats des astronomes grecs se perfectionnèrent. L'astronome Hipparque (II^{e} siècle avant J.-C.) mesura avec précision la durée de l'année ; il découvrit aussi le phénomène de la précession, c'est-à-dire le fait que l'axe de rotation de la Terre oscille lentement (on sait aujourd'hui que sa direction bouge selon une période de 26 000 ans). Hipparque n'aurait pu faire ces deux travaux s'il n'avait pu utiliser les anciennes observations des Mésopotamiens. Plusieurs d'historiens considèrent que Hipparque fut un des premiers astronomes grecs à utiliser les modèles géométriques à base de sphères en rotation pour fabriquer des tables astronomiques, jetant ainsi un pont entre l'astronomie théorique et spéculative de ses prédécesseurs grecs et l'astronomie heuristique et prédictive des Mésopotamiens.

Les œuvres d'Hipparque ne nous sont pas parvenues. Vers le milieu du II^{e} siècle après J.-C., l'astronome le plus célèbre de l'Antiquité, l'alexandrin Claude Ptolémée, écrivit *La composition mathématique*, également appelée *La grande syntaxe*, ouvrage aujourd'hui connu sous son nom arabe, l'*Almageste*. Ce vaste ouvrage en treize livres surclassa par sa précision et ses qualités pédagogiques les traités d'astronomie plus anciens. Les ouvrages de Hipparque sombrèrent dans l'oubli et ne furent donc pas conservés. l'*Almageste*, traduit et édité de nombreuses fois, servit de base aux astronomes de l'empire islamique et aux astronomes européens pendant le Moyen-Âge et la Renaissance. Ce n'est qu'au XVII^{e} siècle que l'ouvrage devint caduc, quand un modèle rendant mieux compte des observations fut proposé à la suite des travaux de Copernic, Brahe, Kepler et Galilée.

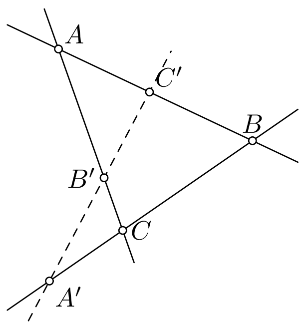
Dans l'*Almageste*, Ptolémée présente un modèle géométrique capable de rendre compte et de prévoir le mouvement du soleil (notamment les dates des équinoxes et des solstices), de la lune (position en latitude et longitude et vitesse de déplacement, prévision des éclipses) et des planètes (cinq étaient connues à l'époque, plus la Terre). Ptolémée a besoin de méthodes capables de fournir des réponses numériques (en termes de mesures d'angles et d'arcs) pour passer du modèle géométrique aux observations concrètes et consacre les deux premiers livres de l'*Almageste* à ces questions. Nous verrons comment dans le prochain paragraphe.

L'astronomie est une parfaite illustration du fait que les mathématiciens grecs ont su mêler la géométrie théorique des philosophes à un savoir numérique remontant à une tradition plus ancienne. Ainsi les travaux de Ptolémée se situent autant dans la tradition de l'astronomie mésopotamienne que dans celle de la géométrie grecque. À la première, Ptolémée emprunte la mesure des angles en degrés et d'anciennes observations astronomiques remontant au VII^e siècle avant J.-C. À la seconde, Ptolémée doit les modèles astronomiques à base de sphères en rotations et l'étude des triangles sphériques par Menelaus.

3.3.2 Le théorème de Menelaus

Ne pouvant pas estimer facilement la distance des astres à la Terre, les astronomes de l'Antiquité se contentaient de mesurer la direction dans laquelle ils les observaient. Ils les considéraient donc comme des points sur la sphère céleste et essayaient de les repérer les uns par rapport aux autres. Pour mener à bien ce travail, il leur était nécessaire de savoir calculer avec les triangles dessinés sur une sphère. Les philosophes-mathématiciens de la Grèce classique avaient étudié ce problème dès le IV^e siècle avant J.-C., mais comme d'habitude, les traités de cette époque ne nous sont pas parvenus.

Le plus complet des traités de géométrie sphérique arrivé jusqu'à nous est *Les sphériques*, un ouvrage écrit par le mathématicien et astronome alexandrin Menelaus vers 100 après J.-C. Ce qu'on appelle aujourd'hui « théorème de Menelaus » est le résultat de géométrie élémentaire plane suivant. On se donne un triangle ABC ; une droite vient couper les trois côtés du triangle en les points A', B' et C'. Dans ces conditions, on peut écrire une égalité faisant intervenir les rapports des longueurs présentes sur la figure :

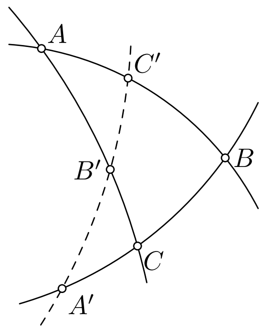


$$\frac{A'B}{A'C}\,\frac{B'C}{B'A}\,\frac{C'A}{C'B} = 1.$$

Cette propriété était vraisemblablement connue bien avant Menelaus, car ce dernier le cite sans démonstration dans *Les sphériques.*

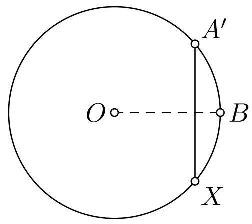
Quoi qu'il en soit, le principal sujet qu'aborde Menelaus dans son ouvrage est l'étude des triangles sphériques, c'est-à-dire des triangles tracés sur une sphère dont les côtés sont des arcs de grands cercles [2]. Le théorème que Menelaus a découvert concerne un triangle sphérique ABC dont les trois côtés sont coupés en A', B' et C' par un arc de grand cercle. On a alors l'égalité :

2. On appelle grand cercle d'une sphère tout cercle obtenu en coupant cette sphère par un plan passant par son centre. Ainsi, l'équateur et les méridiens de la Terre sont des grands cercles. En revanche, les tropiques ou les cercles polaires sont des cercles plus petits que l'équateur ; ce ne sont pas des grands cercles.



$$\frac{\text{corde } (2\,\widehat{A'B})}{\text{corde } (2\,\widehat{A'C})}\;\frac{\text{corde } (2\,\widehat{B'C})}{\text{corde } (2\,\widehat{B'A})}\;\frac{\text{corde } (2\,\widehat{C'A})}{\text{corde } (2\,\widehat{C'B})} = 1.$$

Ici, un arc comme $\widehat{A'B}$ peut être vu soit comme une longueur d'arc de grand cercle, soit comme un angle mesuré à partir du centre de la sphère. Dans la formule de Menelaus apparaissent des quantités comme « corde $(2\,\widehat{A'B})$ » ; cette notation désigne la longueur du segment $A'X$ (voir la figure ci-dessous), étant entendu que le point X est choisi sur le grand cercle de sorte que l'arc $\widehat{A'X}$ soit le double de l'arc $\widehat{A'B}$.



Il est aisé d'exprimer la corde du double d'un arc de grand cercle à l'aide du sinus de l'angle mesuré au centre de la sphère. De fait, si l'on appelle O le centre et R le rayon de la sphère, on a la relation

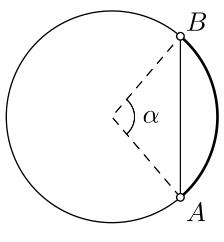
$$\text{corde } (2\,\widehat{A'B}) = 2R \times \sin \widehat{A'OB},$$

ce qui permet de traduire l'énoncé du théorème de Menelaus en langage moderne :

$$\frac{\sin \widehat{A'OB}}{\sin \widehat{A'OC}}\;\frac{\sin \widehat{B'OC}}{\sin \widehat{B'OA}}\;\frac{\sin \widehat{C'OA}}{\sin \widehat{C'OB}} = 1.$$

3.3.3 La première table trigonométrique

Pour pouvoir utiliser le théorème de Menelaus, il faut savoir passer de l'angle au centre α donnant la mesure de l'arc $\widehat{AB}$ à la corde de cet arc :



$$\text{corde } (\,\widehat{AB}\,) = 2R \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Au début de l'*Almageste*, Ptolémée construit une table donnant la valeur de la corde de $\widehat{AB}$ en fonction de α pour un cercle de rayon $R = 60$. Cette table se présente sous la forme suivante :

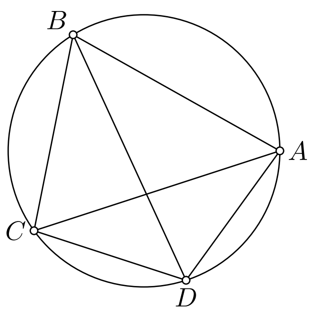
ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ								
ΠΕΡΙΦΕ-ΡΕΙΩΝ		ΕΥΘΕΙΩΝ			ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ			
Μοιρῶν		Μ	Π	Δ	Μ	Π	Δ	Τ
õ	ς’’	õ	λα	κε	õ	α	β	ν
α	õ	α	β	ν	õ	α	β	ν
α	ς’’	α	λδ	ιε	õ	α	β	ν
β	õ	β	ε	μ	õ	α	β	ν
β	ς’’	β	λζ	δ	õ	α	β	μη
γ	õ	γ	η	κη	õ	α	β	μη

soit, après traduction des mots et des nombres :

TABLES DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE								
ARCS		CORDES			SOIXANTIÈMES			
deg.	min.	part.	prim.	secon.	part.	prim.	secon.	tierces
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
2	0	2	5	40	0	1	2	50
2	30	2	37	4	0	1	2	48
3	0	3	8	28	0	1	2	48

Les arcs sont donnés par les angles au centre du cercle ; ceux-ci, mesurés en degrés et minutes, prennent des valeurs variant de demi-degré en demi-degré. Les valeurs des cordes sont données dans le système de numération en base soixante cher aux Mésopotamiens ; ainsi, la corde d'un arc de 1° vaut $1^{\mathrm{p}}2'50''$, c'est-à-dire $1+\frac{2}{60}+\frac{50}{60^2}=1,0472$.... La troisième colonne de la table de Ptolémée, intitulée « Soixantièmes », donne l'accroissement de la corde quand l'arc augmente d'une minute ; elle sert à calculer par interpolation les valeurs des cordes pour des arcs dont la mesure en degrés n'est pas un nombre demi-entier.

Nous n'allons pas expliquer la méthode suivie par Ptolémée pour calculer cette table de cordes[3]. Nous mentionnerons seulement le fait qu'il obtient des relations entre les cordes de différents arcs en démontrant puis en faisant usage du résultat de géométrie élémentaire que voici, appelé depuis « théorème de Ptolémée » : si un quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle, avec les quatre sommets dans cet ordre, alors on a la relation $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.



3. Le lecteur intéressé pourra assouvir sa curiosité en lisant par exemple le chapitre XVI du livre de Pierre Dedron et Jean Itard, *Mathématiques et mathématiciens*, Paris : Magnard, 1959.

3.4 Les problèmes arithmétiques de Diophante

3.4.1 L'homme et son œuvre

On ne dispose quasiment aujourd'hui d'aucun renseignement précis sur la vie de Diophante. Les seules indications fiables dont on dispose sont que Diophante cite Hypsicle (II^e siècle avant J.-C.) et que Theon (IV^e siècle après J.-C.) cite Diophante. Cela laisse un intervalle de cinq cents ans. Les mathématiques dont s'occupait Diophante étant indépendantes de toute la tradition géométrique grecque, il n'est pas non plus possible de situer Diophante en replaçant ses travaux au sein du flot historique de l'évolution des idées mathématiques. Malgré toutes ces incertitudes, les historiens estiment que Diophante a travaillé à Alexandrie quelque part entre le I^{er} et le III^e siècle après J.-C.

L'œuvre majeure de Diophante est un recueil de problèmes, intitulé les *Arithmétiques*. Chacun des problèmes consiste à trouver des nombres satisfaisant à des conditions fixées à l'avance. (Les nombres dont s'occupe Diophante sont les nombres rationnels positifs, quotients de deux entiers positifs.) Les *Arithmétiques* s'inscrivent donc dans la même tradition historique que les jeux arithmétiques présents sur certaines des tablettes mésopotamiennes (voir le paragraphe 1.7).

L'ouvrage de Diophante comportait initialement treize livres. Au moins les sept premiers livres ont été traduits en arabe, mais ces traductions ne sont pas parvenues jusqu'en Europe occidentale au Moyen-Âge. Ce n'est qu'au début de la Renaissance, en 1464 pour être précis, que les mathématiciens européens ont pris connaissance de l'existence des *Arithmétiques*, quand des manuscrits en grec de six des treize livres ont été retrouvés à Venise. On a longtemps cru que seuls ces six livres avaient survécu, mais des manuscrits contenant des traductions en arabe de quatre des livres manquants ont été découverts à la fin des années 1960 dans une bibliothèque iranienne. On connaît ainsi aujourd'hui dix des treize livres des *Arithmétiques*.

3.4.2 Lecture d'un problème

Commençons par étudier le problème 27 du Livre I :

> Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.
>
> Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres.
>
> Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités et que leur produit forme 96 unités.
>
> Que l'excédent des nombres soit 2 inconnues. Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 inconnue, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 inconnues. En conséquence, posons que le plus grand nombre est 1 inconnue augmenté des 10 unités qui sont la moitié de la somme des nombres ; donc le plus petit nombre sera 10 unités moins 1 inconnue, et il s'établit que la somme est 20 unités, et que leur excédent est 2 inconnues. Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est 100 unités

moins 1 carré d'inconnue ; ce que nous égalons à 96 unités, et l'inconnue devient 2 unités.

En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités, le plus petit sera 8 unités, et ces nombres satisfont à la proposition.

Le Livre I des *Arithmétiques* présente des problèmes élémentaires. Ici, il s'agit de trouver deux nombres dont la somme est 20 et dont le produit est 96. La méthode pour résoudre ce genre de problème était déjà connue des Mésopotamiens, mais une évolution s'est produite.

Une première manifestation de ce changement réside dans le fait que le problème est énoncé de façon générale ; ce n'est que dans un deuxième temps que des valeurs numériques particulières sont précisées. Il s'agit ici de trouver deux nombres a et b dont on connaît la somme $s = a + b$ et le produit $p = ab$; ce n'est que dans le troisième alinéa que Diophante dit qu'il va traiter l'exemple $s = 20$ et $p = 96$.

Un deuxième changement est que Diophante indique les conditions sous lesquelles le problème est résoluble. Par opposition, les Mésopotamiens choisissaient les valeurs numériques dans leurs problèmes de sorte qu'il existe toujours une solution. Dans le cas présent, les deux nombres a et b solutions du problème général sont donnés par les formules modernes

$$\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad \text{et} \quad \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p},$$

de sorte que le problème admet une solution donnée par des nombres rationnels si et seulement si $(s/2)^2 - p$ est le carré d'un nombre rationnel. C'est ce que Diophante énonce en ces termes : « il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres ».

La plus grosse nouveauté réside toutefois dans la manière de présenter la solution. Les Mésopotamiens se bornaient à fournir une liste d'instructions à exécuter, sans justification explicite. Diophante, lui, explique comment mettre en œuvre une véritable stratégie. Il utilise pour cela un nombre inconnu auxiliaire, qu'il appelle ἀριθμὸς ἄλογος, littéralement « nombre non-dit », que nous avons traduit par « inconnue » ci-dessus, et que nous noterons x pour simplifier. Dans le problème que nous étudions, Diophante suggère de poser $2x$ égal à la différence entre les deux nombres cherchés : « que l'excédent des nombres soit 2 inconnues ». La somme des deux nombres cherchés étant 20, le plus grand d'entre eux est alors $a = 10 + x$ et le plus petit est $b = 10 - x$. Le produit ab devant être 96, il vient $100 - x^2 = 96$, d'où $x^2 = 4$ puis $x = 2$. Cette analyse suggère donc d'essayer de prendre $a = 10 + x = 12$ et $b = 10 - x = 8$, et l'on vérifie aisément que ces deux nombres forment bien une solution au problème proposé.

Toutes ces nouveautés se reflètent dans la structure du texte de Diophante. Le texte du problème comporte en effet cinq parties, que nous avons mises en évidence en découpant le texte en cinq alinéas. Il y a d'abord l'énoncé général (πρότασις en grec) du problème. Ensuite, Diophante mentionne une limitation (διορισμός), c'est-à-dire une condition sur les données de base rendant possible le problème. Vient ensuite l'étape d'exposition (ἔκθεσις), dans laquelle Diophante spécifie les valeurs numériques des nombres mentionnés dans le problème, valeurs sur lesquelles il va expliquer sa méthode de résolution. Vient ensuite l'analyse du problème (ἀνάλυσις), dans laquelle Diophante exprime les nombres cherchés en fonction de l'inconnue, traduit les conditions du problème en une équation, puis résout cette équation. Enfin dans l'étape de synthèse (σύνθεσις), Diophante propose des valeurs numériques formant une solution au problème posé, valeurs que son analyse a suggérées.

Tous les problèmes que Diophante propose dans les *Arithmétiques* sont présentés selon ce schéma. (L'étape de limitation est toutefois omise si le problème admet toujours une solution, quels que soient les nombres donnés.) On retrouve ici l'influence de la science géométrique : le problème est énoncé de façon générale, puis un exemple est présenté (ici sous forme numérique), et la résolution du problème est menée sur cet exemple.

Les démonstrations de Diophante comportent deux étapes, une analyse suivie d'une synthèse. Nous reviendrons sur cette opposition entre analyse et synthèse au paragraphe 7.2.2, mais pour l'heure, nous allons essayer de comprendre en quoi consiste l'analyse de Diophante.

3.4.3 L'analyse diophantienne : l'invention de l'inconnue

L'innovation principale dans la méthode de Diophante est l'introduction du « nombre non-dit », de cette inconnue à partir de laquelle Diophante exprime les nombres cherchés. Nous avons vu au paragraphe précédent un premier exemple de l'utilisation de cette inconnue, en voici à présent un deuxième, plus sophistiqué : le problème 8 du Livre II. Pour simplifier la lecture du texte de Diophante, nous y avons substitué le symbole x à l'expression « nombre non-dit ».

> Partager un carré proposé en deux carrés.
>
> Soit proposé de partager 16 en deux carrés.
>
> Soit posé pour la racine du premier x, et pour la racine du second un nombre quelconque de x moins autant d'unités que vaut la racine du nombre à partager. Soit ceci $2x - 4$. Donc, l'un des carrés sera x^2, l'autre $4x^2 + 16 - 16x$. Je veux encore que leur somme soit égale à 16. Ainsi, $5x^2 + 16 - 16x = 16$; d'où il vient que $x = 16/5$.
>
> La racine du premier sera 16/5, et lui-même 256/25. La racine du second sera 12/5, et lui-même 144/25. La preuve est évidente.

Étant donné un nombre carré c^2, le problème est ici de déterminer deux nombres carrés a^2 et b^2 tels que $a^2 + b^2 = c^2$. L'exemple numérique sur lequel Diophante présente sa méthode est le cas $c^2 = 16$. Diophante suggère de chercher a sous la forme $a = x$ et b sous la forme $b = mx - c$, où m est un nombre arbitraire : il écrit en effet

> Soit posé pour la racine du premier x, et pour la racine du second un nombre quelconque de x moins autant d'unités que vaut la racine du nombre à partager.

Diophante continue ses explications sur l'exemple $m = 2$, ce qui laisse $b = 2x - 4$ et $b^2 = 4x^2 - 16x + 16$. La condition $a^2 + b^2 = c^2$ entraîne alors l'équation $5x^2 - 16x + 16 = 16$, d'où $5x^2 = 16x$ et $x = 16/5$. Cette analyse suggère d'essayer $a = 16/5$ et $b = 12/5$, nombres dont on vérifie facilement que leurs carrés $a^2 = 256/25$ et $b^2 = 144/25$ ont 16 pour somme.

La méthode de Diophante consiste donc à exprimer les nombres cherchés en fonction de l'inconnue de manière astucieuse. Diophante donne au lecteur ce conseil à la fin de la préface des *Arithmétiques* :

> Applique cela avec adresse aux données des propositions, et, autant que possible, jusqu'à ce qu'il reste une seule expression égale à une seule expression.

Autrement dit, Diophante recommande de représenter les nombres cherchés en fonction de l'inconnue de telle manière que les conditions du problème se traduisent par une équation de la forme $ax^m = bx^n$ (en notation moderne), facile à résoudre. Diophante a réussi à faire cela dans les deux problèmes que nous avons examinés : dans le problème 27 du Livre I, il est parvenu à l'équation $x^2 = 4$; dans le problème 8 du Livre II, il est arrivé à l'équation $5x^2 = 16x$.

Pour pouvoir ramener les conditions du problème à une telle équation normalisée, il faut savoir manipuler les équations. À ce sujet, Diophante a expliqué dans la préface que si des termes apparaissent dans les deux membres d'une équation, alors on peut les supprimer de part et d'autre ; et qu'en présence d'une soustraction, on doit faire passer les termes soustraits dans l'autre membre de l'équation en les y ajoutant. Dans les mots de Diophante, cela donne :

> Si (...) certaines expressions sont égales à des expressions identiques, (...) il faudra retrancher de part et d'autre les semblables des semblables. (...) Si des expressions négatives se présentent de quelque manière, soit d'une part, soit de part et d'autre, il faudra ajouter ces expressions négatives de part et d'autre, jusqu'à ce que les expressions deviennent positives de part et d'autre.

Ainsi la méthode d'analyse de Diophante comporte en définitive trois ingrédients : une mise en équation astucieuse, une méthode pour manipuler les équations, et une méthode pour les résoudre.

3.4.4 Les notations de Diophante

Dans les traductions des textes de Diophante présentées dans les paragraphes précédents apparaissent des expressions comme $5x^2+16-16x$. De telles formules reflètent l'existence d'une notation abrégée chez Diophante, qui écrit « Δ^{Υ} ἄρα ε̄ $\overset{\circ}{\mathrm{M}}$ ιϛ̄ ⋔ ςιϛ̄ » et non pas « quatre carrés d'inconnues plus seize unités moins seize inconnues » en toutes lettres. Les nombres quatre et seize sont écrits δ̄ et ιϛ̄, conformément à ce que nous avons vu au paragraphe 3.1. Les symboles $\overset{\circ}{\mathrm{M}}$, ς et Δ^{Υ} sont des abréviations pour les mots grecs μονας, ἄριθμός et δύναμις, qui signifient respectivement unité, inconnue (nombre) et carré [de l'inconnue]. Enfin le symbole ⋔ est le signe de soustraction. On notera d'ailleurs qu'il n'y a pas de signe pour l'addition : le symbole ⋔ est en fait un séparateur entre les termes ajoutés et les termes soustraits, c'est-à-dire que Diophante écrit par exemple $(4x^2+16)-(16x)$ et non pas $4x^2-16x+16$.

Les abréviations de Diophante ne présentent toutefois pas tous les avantages de notre formalisme moderne. Par exemple, elles ne montrent pas clairement le lien entre l'inconnue ς, que nous avons traduit par x, et son carré Δ^{Υ}, que nous avons traduit par x^2. Cela contraint Diophante à ne considérer qu'un seul nombre inconnu à la fois, faute de quoi sa notation deviendrait ambiguë.

Or il aurait parfois été pratique pour Diophante d'avoir une plus grande marge de manœuvre. Par exemple dans le problème 8 du Livre II, Diophante explique qu'il est judicieux de chercher b sous la forme $b = mx - c$, mais il est obligé de poursuivre avec le cas particulier $m = 2$ et $b = 2x - 4$. S'il avait pu garder l'expression $b = mx - c$, ou plutôt $b = mx - 4$ pour son exemple $c^2 = 16$, Diophante serait parvenu à $x = \frac{8m}{m^2+1}$, d'où des expressions $a = \frac{8m}{m^2+1}$ et $b = \frac{4m^2-4}{m^2+1}$ dans lesquelles on peut substituer d'autres valeurs pour m. De même, il aurait été plus élégant de ne pas avoir à présenter la méthode sur des données numériques, mais sur des données littérales. Si Diophante avait dit dans l'exposition du problème 8 du Livre II qu'il voulait partager non pas 16, mais le carré c^2, et s'il avait ensuite pris $b = 2x-c$, il aurait abouti avec sa méthode aux nombres $a = 4c/5$ et $b = 3c/5$, donc au partage $a^2+b^2 = (16c^2/25)+(9c^2/25)$ de c^2.

Un deuxième inconvénient des notations de Diophante est qu'il n'est pas facile de calculer avec les différentes puissances de l'inconnue quand celles-ci sont successivement désignées par des noms comme inconnue (ἄριθμός en grec), carré (δύναμις), cube (κύβος) ou carré-carré (δυναμοδύναμις), et notées par les abréviations ς, Δ^{Υ}, K^{Υ} ou $\Delta^{\Upsilon}\Delta$. Les puissances de l'inverse de l'inconnue ont également un nom, à commencer par l'inverse de l'inconnue lui-même, appelé ἀριθμοστόν et désigné par l'abréviation ϛ$^{\chi}$. Pour pouvoir calculer avec ce language, Diophante indique dans la préface des *Arithmétiques* les règles utiles, comme par exemple

> l'inverse du carré de l'inconnue multiplié par le cube de l'inconnue donne l'inconnue.

Il apparaît néanmoins que ce fatras est malcommode.

3.4.5 Vue d'ensemble des *Arithmétiques*

Les premiers livres des *Arithmétiques* traitent de problèmes élémentaires souvent connus des Mésopotamiens. Dans les livres suivants, Diophante traite des problèmes plus difficiles et faisant intervenir des degrés élevés, comme cet exemple tiré du Livre IV :

> Trouver deux quantités, l'une cubique et l'autre carrée, telles que la somme et la différence du cube du cube et du carré du carré fassent des carrés.

En language symbolique, il s'agit de trouver un cube a^3 et un carré b^2 tels que les deux nombres $(a^3)^3 + (b^2)^2$ et $(a^3)^3 - (b^2)^2$ soient des carrés de nombres rationnels.

L'ordre dans lequel les problèmes sont présentés au long des treize livres est réfléchi. Ainsi les problèmes sont souvent groupés en séries, comme le montre l'extrait suivant du Livre II :

PROBLÈME 8

> Partager un carré proposé en deux carrés.

PROBLÈME 9

> Partager un nombre donné, qui est somme de deux carrés, en deux autres carrés.

PROBLÈME 10

> Trouver deux nombres carrés de différence donnée.

Les *Éléments* d'Euclide adoptent un mode de présentation axiomatique : les postulats de base de la théorie sont présentés en tête d'ouvrage et les propositions se succèdent le long d'une chaîne déductive. L'organisation des *Arithmétiques* n'est pas aussi élaborée, peut-être parce que la théorie que Diophante expose n'était pas encore mûre pour cela. Cependant on trouve parfois chez Diophante des liens de dépendance causale entre différents problèmes. Par exemple dans son exposé de la solution au premier problème du Livre V, Diophante est conduit à chercher deux nombres m et n tels que $\frac{m^2-1}{1-n^2} = \frac{4}{3}$; cette question étant un cas particulier du problème 19 du Livre II, Diophante adopte sans plus d'explication la solution $m = \frac{9}{7}$, $n = \frac{5}{7}$.

Tous les problèmes mentionnés par Diophante dans les *Arithmétiques* ont une solution, autrement dit, Diophante évite de parler de problèmes impossibles. Nous avons vu que dans le problème 8 du Livre II, Diophante s'intéresse à décomposer le carré d'un nombre rationnel en la somme de deux autres nombres carrés. Diophante a certainement aussi essayé de traiter la question analogue pour les cubes, à savoir décomposer le cube d'un nombre rationnel en la somme de deux autres nombres cubiques. Les tentatives de Diophante en ce sens sont vraisemblablement restées vaines car il s'agit là d'un problème impossible : on sait en effet aujourd'hui que l'équation $a^3 + b^3 = c^3$ n'a pas de solution en nombres rationnels [4]. Aussi Diophante ne parle ni du problème, ni de ses tentatives pour le résoudre.

4. Cette affirmation est un cas particulier du « théorème de Fermat », lequel affirme que l'équation $a^n + b^n = c^n$ n'a pas de solution avec a, b, c, n entiers non-nuls et $n \geq 3$. Pierre de Fermat (1601–1665) n'a en fait pas

3.5 Conclusion

Les mathématiques grecques ne se réduisent pas au bel édifice de la géométrie abstraite, présentée axiomatiquement dans les *Éléments*. Tant chez Héron que chez Diophante, on se trouve en présence d'un recueil de problèmes ou de procédures, et non plus face à un traité exposant de façon synthétique une théorie et ses résultats. Les mathématiques de Héron et de Ptolémée présentent un aspect numérique qui contraste avec l'aspect purement théorique de la géométrie des philosophes. L'influence de la science géométrique se fait toutefois sentir dans la façon dont les mathématiques sont rédigées : présence de démonstrations chez Héron et Ptolémée, volonté de formuler des énoncés généraux chez Diophante.

Diophante inaugure une nouvelle branche des mathématiques grecques, qui n'est pas reliée à la géométrie. Les problèmes qu'il aborde s'inscrivent dans une longue tradition de problèmes arithmétiques, qui remonte aux Mésopotamiens. On voit apparaître chez Diophante une méthode originale de résolution basée sur l'utilisation d'un nombre inconnu auxiliaire.

Enfin, l'exemple du développement de l'astronomie fait clairement apparaître que les savants de langue grecque ont pu profiter des connaissances des Mésopotamiens. Nous n'avons évoqué cela qu'au travers d'un seul fait, mais il est représentatif : Ptolémée utilise des observations astronomiques mésopotamiennes assez anciennes (VIII^{e} siècle avant J.-C.), ce qui le conduit à adopter les conventions des Mésopotamiens pour la mesure des angles (le degré), puis finalement à adopter pour ses calculs un système de numération reposant sur l'utilisation de la base soixante (au moins pour les chiffres après la virgule).

énoncé ce résultat publiquement ; il a mentionné les cas particuliers $n = 3$ et 4 dans une note manuscrite en marge de son exemplaire de l'ouvrage de Diophante. Le cas $n = 3$ du théorème de Fermat a été prouvé par Leonhard Euler (1707–1783) dans la deuxième moitié du XVIII^{e} siècle. Ce n'est qu'en 1994 qu'une preuve du théorème de Fermat valable pour tous les entiers $n \geq 3$ fut trouvée, par le mathématicien anglais Andrews Wiles (1953–).

Chapitre 4

Les mathématiques dans l'Empire arabe du Moyen-Âge

Résumé et objectifs du chapitre

Entre le VII^{e} siècle et le XII^{e} siècle après J.-C., un immense empire se crée sous l'autorité des califes arabes, qui s'étend de l'Espagne aux portes de l'Inde. Son étendue géographique et sa place dans la chronologie mettent cet Empire au contact de trois mondes : l'Empire byzantin, dépositaire d'une science grecque en voie d'être oubliée ; l'Empire sassanide en Perse, héritier des techniques millénaires des Mésopotamiens ; l'Inde enfin. Les savants de l'Empire arabe héritent des connaissances de ces trois mondes et élaborent à partir de là une science originale.

Après avoir décrit les circonstances dans lesquelles l'activité scientifique a pris son essor dans les premiers siècles d'existence de l'empire, nous proposons un rapide survol des principaux progrès réalisés en mathématiques par les savants arabes. Nous nous concentrons ensuite sur l'algèbre, en cherchant à comprendre pourquoi le petit traité d'al-Khwārizmī a constitué un réel progrès malgré son caractère très élémentaire, puis en esquissant dans ses grandes lignes les développements auxquels la théorie naissante a donné lieu.

4.1 Cadre historique

Au I^{er} siècle après J.-C., le monde méditerranéen est dans le giron de l'Empire romain. Malgré les persécutions dont sont victimes les fidèles, le Christianisme se répand dans l'empire au cours des quatre premiers siècles de notre Ère. Au V^{e} siècle, la partie occidentale de l'Empire romain se désagrège, et le pouvoir passe aux mains des Barbares venus d'Europe centrale. L'Empire romain d'Orient (comprenant la Grèce, la Turquie, le Proche-Orient, l'Égypte et la Lybie actuels) survit aux attaques. Après être devenu byzantin (c'est-à-dire être redevenu grec) en 610, il se voit attaqué au sud-est par les Perses de l'Empire sassanide, qui veulent conquérir l'Égypte et la Palestine. La guerre affaiblit le pouvoir des deux empires. Sur place, les populations souhaitent d'autant moins être dirigés par les Byzantins que des querelles théologiques séparent les Chrétiens monophysites, majoritaires dans ces régions, du dogme orthodoxe qui prévaut à Byzance.

Cette situation permet l'émergence d'un nouvel empire, uni autour d'une nouvelle religion : l'Islam. Au début du VII^{e} siècle, l'Arabie est un désert peuplé de nomades incultes et qui ont des croyances polythéistes. Le prophète Muhammad (Mahomet), qui a reçu la révélation de l'existence d'un Dieu unique, cherche à convertir la population à ses croyances. En l'espace de dix ans, entre le moment où il s'installe à Médine en 622 et celui où il revient à la Mecque à la tête d'une armée, il a converti dix mille hommes, assez pour pouvoir prendre le pouvoir politique. Il meurt en 632, mais ses successeurs poursuivent sa tâche et étendent le territoire d'influence de la nouvelle religion : en l'espace de trente ans, les quatre premiers « califes » (c'est-à-dire les remplaçants du Prophète) conquièrent la Mésopotamie, la Syrie, la Palestine et l'Égypte. Se montrant tolérants vis-à-vis des Juifs et des Chrétiens (les autres religions monothéistes présentes dans la région), les Musulmans gagnent facilement la confiance des populations locales.

Entre 661 et 750, la dynastie des Omeyyades règne sur l'empire à partir de Damas, prise comme capitale. Les califes assoient et consolident leur pouvoir en réutilisant les structures administratives mises en place par les Perses et les Byzantins. L'expansion de l'empire continue. A l'ouest, les armées musulmanes conquièrent le Maghreb et progressent en Espagne, profitant de querelles au sein du pouvoir wisigoth ; leur avancée en Europe occidentale s'arrête aux Pyrénées, après les combats contre les armées du duc Eudes et de Charles Martel vers 720–730. A l'est, le territoire s'étend à présent jusqu'aux rives de l'Indus.

En 750, un coup d'état amène une nouvelle dynastie, les Abbassides, au pouvoir. Le rôle politique de l'élite perse est renforcé. Une nouvelle ville, Bagdad, est fondée en 762 pour servir de capitale à l'Empire arabe. Le contrôle du commerce entre le monde méditerranéen et l'Orient assure une immense richesse aux puissants.

L'empire commence à se morceler à la fin du IX^e siècle. Plusieurs clans revendiquent le Califat : l'Égypte, l'Afrique du Nord et l'Espagne deviennent des califats indépendants du pouvoir de Bagdad. Des révoltes d'esclaves éclatent. Les Chrétiens reconquièrent l'Espagne et la Sicile au XI^e siècle. En 1055, un coup d'état permet à une famille princière d'origine turque et convertie à l'Islam de prendre possession du pouvoir politique, tout en laissant au calife ses fonctions de chef religieux. Les offensives mongoles du XIII^e siècle achèveront de détruire l'Empire arabe.

Ce récit historique, simplifié à l'extrême pour rester bref, a pour but principal de montrer l'étendue géographique des territoires régis par cet empire. Dans ces territoires, l'arabe devient la langue officielle, ce qui facilite les échanges de connaissances, mais en dehors de cette unité linguistique, il faut garder en mémoire que l'Empire arabe n'est pas un monde uniforme. L'empire n'est cimenté que par la foi religieuse des dirigeants, et les décisions même importantes sont souvent prises localement par les sultans. Les savants que nous évoquons dans ce chapitre proviennent de différentes régions de l'empire et vivent à différentes époques ; ils n'appartiennent pas tous à la même tradition scientifique. Plutôt que de parler de « la science arabe » en général, expression qui laisse croire que la science s'est développée uniformément et de façon cohérente dans tout l'empire, il serait plus juste de parler de science rédigée en langue arabe à l'époque de l'Empire islamique.

4.2 L'essor de la science dans l'Empire arabe

Les conquérants du VII^e et du VIII^e siècle sont conscients d'arriver au contact de civilisations culturellement très riches. Ils veulent apprendre ces connaissances nouvelles pour eux.

Au début du VII^e siècle, le pouvoir byzantin avait persécuté les populations du Proche-

Orient pour des questions d'orthodoxie religieuse, causant l'exil (notamment vers la Perse) d'un grand nombre de savants. Grâce entre autres à leur tolérance en matière religieuse, les Musulmans obtiennent beaucoup plus facilement la coopération des savants présents sur les territoires conquis. Les premières connaissances scientifiques des Musulmans proviennent ainsi de la science perse et de ce qui s'était conservé de la science grecque au Proche-Orient.

Petit à petit, le pouvoir politique acquiert une puissance, une stabilité et une richesse qui permettent le développement de l'activité scientifique. Un mécénat scientifique se met en place dans la deuxième moitié du VIII^{e} siècle. Des savants étrangers sont invités, des bibliothèques sont créées, l'étude de la science commence à s'organiser. Les traités disponibles, souvent écrits en syriaque ou en perse, commencent à être traduits en arabe, dont l'usage s'est répandu dans la population. Grâce à leur contact direct avec les Indiens, les Musulmans profitent des connaissances orientales : vers la fin du VIII^{e} siècle, ils apprennent la technique du papier (inventé plusieurs siècles plus tôt par les Chinois) et l'usage du système de numération positionnel décimal (mis au point vers le VI^{e} siècle par les Chinois ou les Indiens, on ne sait pas exactement où).

Vers 820, le calife al-Mamun fonde à Bagdad la *Maison de la Sagesse*, un lieu où les savants de son empire peuvent travailler ensemble en étant déchargés des soucis matériels. Cette institution est en quelque sorte le pendant médiéval de ce qu'était le Musée d'Alexandrie pendant l'Antiquité. Les savants arabes se mettent à la recherche des traités des grands philosophes et scientifiques grecs (Galien, Aristote, Euclide, Apollonius, Archimède, Ptolémée). Les textes les plus prisés font l'objet de soins spéciaux : afin d'améliorer les traductions existantes, des recherches sont menées pour trouver et acheter les meilleurs manuscrits grecs. Le savoir grec, que plus aucun savant byzantin ne maîtrise, est ainsi revitalisé.

À la fin du IX^{e} siècle, ayant assimilé les connaissances des civilisations qui les avaient précédés, les savants de l'Empire arabe commencent à produire une science originale et neuve. Grâce à la générosité des mécènes, l'activité scientifique se maintiendra jusqu'au XIII^{e} siècle.

4.3 Un rôle de relais dans l'histoire des sciences

Les savants arabes héritent donc des connaissances des sciences grecque, perse et indienne. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'à son tour, l'Europe occidentale héritera au XII^{e} siècle des connaissances arabes. Du point de vue de l'histoire des sciences, les savants de l'Empire arabe ont donc préservé la science grecque, l'ont enrichi en la mêlant à des connaissances d'origine orientale, et ont transmis le résultat à l'Europe occidentale. Peut-on dire pour autant que leur apport se limite à ce rôle de relais ?

L'étude des apports de la civilisation médiévale arabe a longtemps été négligée par les historiens des mathématiques. Au XIX^{e} siècle par exemple, on considèrait souvent que les savants arabes n'avaient fait que compiler et traduire les traités scientifiques grecs, perses et indiens sans faire eux-mêmes accomplir de progrès aux mathématiques. D'ailleurs au XIX^{e} siècle, seul l'historien allemand Franz Woepcke (1826-1864) s'intéressait aux manuscrits mathématiques arabes ; la plupart de ses confrères consacraient leurs travaux aux sciences européennes. Cet point de vue change dans les années 1960, époque à partir de laquelle plusieurs historiens des sciences se mettent à étudier les manuscrits scientifiques arabes médiévaux conservés dans les bibliothèques orientales. Il est aujourd'hui établi que les savants de l'Empire arabe ont su créer une science originale et riche, bien supérieure à tout ce que le Moyen-Âge européen a pu produire. En revanche, l'impact des travaux des savants arabes sur le développement ultérieur de la science n'est pas encore parfaitement compris.

Nous allons à présent présenter un panorama des progrès accomplis en mathématiques par les savants de cette civilisation arabe, puis nous étudierons plus en détail le cas de l'algèbre.

4.4 De nouveaux domaines de recherche en mathématiques

L'étude des traités d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius a amené les mathématiciens de langue arabe à prolonger les recherches des géomètres grecs. Ils ont ainsi redonné vie à une tradition orale éteinte, s'intéressant notamment à des problèmes de construction géométrique, à la détermination des volumes des paraboloïdes (dans la lignée des travaux d'Archimède), et à prouver que la cinquième demande d'Euclide était conséquence des quatre premières (voir le paragraphe 2.6.4). Malgré l'abondance et la qualité de leurs travaux, ils n'ont toutefois rien produit qui ait révolutionné la géométrie. Ils ont en revanche apporté beaucoup à d'autres domaines des mathématiques.

4.4.1 Le « calcul indien »

Un premier apport important est la popularisation au début du IX^{e} siècle de l'usage du système de numération positionnelle décimale. Ce système, qui avait été mis au point en Inde, permet d'effectuer les calculs arithmétiques de manière simple et sûre. Les commerçants arabes sont à la fois les grands bénéficiaires de cette nouvelle technique et aussi ceux qui, par l'utilisation fréquente qu'ils en font, en favorisent la promotion et la popularisation au sein de la société. De nombreux petits ouvrages didactiques sont écrits à l'attention des marchands. Nous verrons au paragraphe 5.4.2 que l'histoire se répétera : c'est parce que les marchands européens auront besoin de savoir calculer efficacement que le système de numération positionnel décimal se répandra en Europe à la fin du Moyen-Âge.

Un des premiers ouvrages sur la question, en tout cas un des plus anciens parmi ceux qui nous sont parvenus, est le *Kitāb al-jam'wal tafrīq bi ḥisāb al-Hind (Livre sur l'addition et la soustraction d'après la méthode des Indiens).* L'auteur est Muhammad ibn Musa al-Khwārizmī (vers 780–vers 850), un des premiers pensionnaires de la Maison de la Sagesse originaire de la province du Khwārizm, au sud de la mer d'Aral. Nous retrouverons ce personnage important au paragraphe 4.5. Signalons simplement que cet ouvrage du début du IX^{e} siècle, que nous ne connaissons que par une traduction latine réalisée au XII^{e} siècle, expose les règles permettant le calcul des opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division, duplication, dédoublement, extraction de racine carrée) sur les nombres entiers dans la représentation en base dix. La clarté de l'exposé d'al-Khwārizmī et l'aspect mécanique des règles du calcul ont beaucoup séduit les Européens du bas Moyen-Âge : le système de numération fut ainsi appelé « algorisme », mot formé à partir du nom d'al-Khwārizmī, et qui sera plus tard orthographié « algorithme » par analogie avec les mots d'origine grecque.

Les méthodes enseignées par al-Khwārizmī reposent sur l'utilisation d'une « table à poussière », analogue à un petit tableau d'écolier, sur lequel on peut écrire puis effacer les résultats intermédiaires au fur et à mesure de l'exécution du calcul. L'usage du papier se généralise cependant bientôt, et de nouvelles dispositions pratiques pour le calcul sont mises au point, qui permettent de conserver les résultats intermédiaires et donc de vérifier le calcul, ou de l'interrompre pour le reprendre ensuite. Dans son ouvrage *Kitāb al-fuṣūl fi-l-ḥisāb al-Hindī (Livre sur les chapitres de l'arithmétique indienne)* écrit au milieu du X^{e} siècle à Damas, Abu l-Ḥasan al-Uqlīdīsī vante les mérites de la nouvelle technique :

> Beaucoup de scribes devront l'utiliser [la méthode indienne] parce qu'elle est facile, rapide, et nécessite peu de précaution, peu de temps pour obtenir la réponse. Le scribe n'est pas tenu de conserver son cœur occupé au travail qu'il a entre les mains, au point que s'il parle, cela ne gâtera pas son travail ; et s'il le quitte et s'occupe à quelque chose d'autre, quand il revient, il le trouvera le même et pourra continuer à procéder, s'épargnant ainsi le souci de le mémoriser et de garder le cœur occupé avec lui.

4.4.2 La trigonométrie et l'astronomie

Aux paragraphes 3.3.2 et 3.3.3, nous avons vu que les Grecs avaient mis au point les premières techniques trigonométriques afin de pouvoir effectuer des calculs pour l'astronomie. Les savants de l'Empire arabe, qui accordaient une grande importance à l'astronomie au point d'avoir effectué plusieurs traductions de l'*Almageste*, ont acquis ces techniques puis ont cherché à les améliorer afin de rendre les calculs plus rapides et plus précis.

Un premier progrès fut de diversifier les lignes trigonométriques. Nous avons vu que la seule quantité tabulée dans l'*Almageste* est la corde dans un cercle de rayon 60, donnée en fonction de l'angle au centre α. Avec des notations modernes, la quantité tabulée est

$$\text{corde}\ \alpha = 2 \times 60 \times \sin\frac{\alpha}{2}.$$

La pratique du calcul montre qu'il est souvent nécessaire de connaître la quantité

$$\frac{1}{2} \times \text{corde}\ (2\alpha) = 60 \times \sin\alpha$$

(on le voit par exemple dans l'énoncé du théorème de Menelaus, voir le paragraphe 3.3.2). Il est par conséquent plus commode de disposer d'une table de sinus que d'une table de cordes. Cette idée est en fait d'origine indienne : l'astronomie scientifique et la trigonométrie s'était en effet propagée depuis la Grèce dans le monde oriental jusqu'en Inde. Les astronomes arabes reprennent cette idée ; en outre, ils inventent d'autres quantités utiles pour les calculs, comme le cosinus, la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante. En termes modernes, ces lignes trigonométriques auxiliaires s'écrivent

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha), \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Les savants arabes entreprennent également de tabuler ces lignes auxiliaires. La grande utilité d'une table de tangentes par exemple est qu'elle rend instantanée la détermination d'un angle α à partir de sa tangente $t = \tan\alpha$, alors que si l'on ne dispose que d'une table de sinus, il faut utiliser la formule

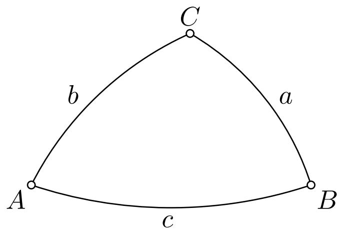
$$\sin\alpha = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

ce qui rallonge considérablement les calculs. Le temps perdu à la confection des tables est alors rapidement rattrapé, car la confection d'une seule table astronomique nécessite habituellement d'effectuer plusieurs milliers de fois le même genre de calcul. De plus, l'utilisation de tables fiables diminue le risque d'erreur de calcul.

Un deuxième progrès effectué par les savants de l'Empire arabe fut d'améliorer la précision des tables trigonométriques. La table de l'*Almageste* de Ptolémée donnait les cordes avec deux chiffres sexagésimaux après la virgule et pour des angles au centre du cercle variant de demi-degré en demi-degré. Au début du XI^e siècle, al-Bīrūnī donne la valeur du sinus des angles toutes les quinze minutes d'arc avec une précision de quatre chiffres sexagésimaux (c'est-à-dire sept chiffres décimaux) après la virgule. Un astronome du début du XV^e siècle, Ulūgh Beg, donne même des tables pour toutes les lignes trigonométriques avec cinq chiffres sexagésimaux exacts toutes les minutes d'arc ! Avec de tels outils (et aussi grâce à leurs excellents observatoires), les astronomes arabes arrivent aisément à confectionner des tables astronomiques qui surpassent largement en précision l'œuvre de Ptolémée.

Les progrès ne s'arrêtent pas à ces détails techniques, mais sont aussi de nature théorique. Pour calculer les valeurs numériques des longueurs d'arcs des triangles sphériques, Ptolémée s'appuyait exclusivement sur le théorème de Menelaus, dont l'usage est malcommode puisqu'il fait intervenir six cordes (ou six sinus). Au X^e siècle, Abū'l-Wafā' découvre la relation appelée aujourd'hui « théorème des sinus », qui ne fait intervenir que quatre sinus. Pour un triangle sphérique ABC, si l'on désigne par les lettres A, B et C les angles au sommet du triangle sphérique (A est donc l'angle que font entre eux les arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{AC}$), et si l'on note par les lettres a, b et c les angles sous lesquels on voit du centre de la sphère les arcs $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ et $\widehat{AB}$, alors le « théorème des sinus » affirme que

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$



L'intérêt de ce résultat est qu'il réduit le nombre d'étapes de calcul nécessaires, un avantage important pour les astronomes qui doivent se livrer à des calculs répétitifs.

Grâce à ces avancées, les savants de l'Empire arabe ont grandement contribué à donner sa forme actuelle à la trigonométrie. Ce sont également aux qui sont les auteurs des plus anciens traités connus consacrés à cette discipline, tel le *Kitāb maqālīd ʻilm al-hay'a (Livre des clés de l'astronomie)* écrit par al-Bīrunī au début du XI^e siècle. La trigonométrie apparaît même comme une branche des mathématiques totalement autonome dans le *Kitāb fī ash-Shakl al-qaṭṭāʻ (Livre sur la figure sécante)*, que Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī écrit au XIII^e siècle.

4.4.3 La combinatoire

On trouve également dans l'œuvre des savants arabes des balbutiements d'analyse combinatoire. Au XIII^e siècle en effet, ibn Munʻim construit ce qu'on appelle aujourd'hui le triangle de Pascal pour calculer les nombres de combinaisons C_n^k. Une des motivations de l'étude d'ibn Munʻim était de dénombrer les mots qu'il est possible d'écrire en arabe, en tenant compte des contraintes rythmiques de la poésie. Le travail d'ibn Munʻim resta cependant sans suite : à cette époque de déclin de l'Empire arabe, l'activité scientifique tournait au ralenti.

4.5 Al-Khwārizmī et la naissance de l'algèbre

Le principal apport des savants arabes aux mathématiques fut toutefois de développer (certains historiens disent même créer) l'algèbre.

4.5.1 L'*Abrégé du calcul* d'al-Khwārizmī

Vers 820–830, al-Khwārizmī, personnage que nous avons déjà rencontré au paragraphe 4.4.1, écrit son *Kitāb al-muẖtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala (Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison)*. La préface indique que l'ouvrage a un but pédagogique et expose des méthodes servant à résoudre des problèmes concrets [1] :

> J'ai rédigé, dans le domaine du calcul par la restauration, un abrégé englobant les plus fines et les plus nobles opérations du calcul dont les hommes ont besoin pour la répartition de leurs héritages et de leurs donations, pour leurs partages et pour leurs jugements, pour leurs transactions commerciales et pour toutes les opérations qu'ils ont entre eux, relatives à l'arpentage, à la répartition des eaux de rivière, à l'architecture ainsi qu'à d'autres aspects. (...)

L'ouvrage se présente selon le plan suivant :

Tome I : Théorie des équations

1. Rappels sur le système de numération positionnelle décimale, définition des objets fondamentaux de la théorie, les six équations canoniques.
2. Procédures pour résoudre chacune des six équations, avec leurs justifications géométriques.
3. Comment algébriser un problème et se ramener à une des six équations canoniques grâce aux opérations de restauration et de comparaison.
4. Comment étendre les opérations arithmétiques aux objets de l'algèbre.
5. Exercices.

Tome II : Mesures géométriques

Tome III : Applications

4.5.2 La théorie des équations d'al-Khwārizmī

Dans le tome I de son ouvrage, al-Khwārizmī explique comment mettre un problème en équation et comment résoudre une équation. L'étape de mise en équation consiste à demander l'égalité entre deux quantités. Reprenons la lecture de la préface de l'*Abrégé du calcul* :

> J'ai découvert que les nombres dont on a besoin dans le calcul par la restauration et la comparaison sont de trois types : ce sont les racines, les carrés et le nombre seul, non rapporté à une racine ni à un carré. Parmi eux, la racine est toute chose — parmi un, les nombres qui lui sont supérieurs et les fractions qui lui sont inférieures — qui est multipliée par elle-même. Le carré est tout ce qui résulte de la racine multipliée par elle-même. Le nombre seul est tout ce qui est exprimé comme nombre sans rapport à une racine ni à un carré.

Les objets qui peuvent donc intervenir dans les équations sont donc les nombres (al-Khwārizmī utilise le mot arabe *dirham*), la racine (aussi appelée chose, *say* en arabe, qui est donc l'analogue de notre inconnue, et que nous noterons x pour faciliter notre compréhension du texte) et le carré (également appelé bien, *māl* en arabe, et que nous noterons x^2). Autrement dit, les

1. La traduction est celle d'Ahmed Djebbar, dans *Une histoire de la science arabe*, Points Sciences S144, Paris : Seuil, 2001.

expressions considérées par al-Khwārizmī sont des sommes ou des différences entre des quantités qui sont des multiples de l'unité, de la chose et du carré ; avec une notation moderne, ce sont les quantités de la forme $\pm ax^2 \pm bx \pm c$, où a, b et c sont des nombres positifs (les nombres négatifs ne sont pas connus à cette époque). Les équations qu'al-Khwārizmī étudie sont donc des égalités de la forme

$$\pm ax^2 \pm bx \pm c = \pm a'x^2 \pm b'x \pm c'.$$

La première étape de la méthode de résolution consiste à utiliser les opérations de restauration (*jabr* en arabe) et de comparaison (*muqābala* en arabe) pour mettre l'équation sous une forme canonique. L'opération de restauration consiste à ajouter dans les deux membres de l'équation les termes soustraits, de sorte qu'il n'y ait plus que des additions. L'opération de comparaison consiste à ôter une même quantité présente dans les deux membres. En utilisant ces deux opérations, on peut transformer l'équation et la mettre sous une des six formes canoniques suivantes :

1. Les carrés sont égaux aux racines (avec une notation moderne, ce sont les équations de la forme $ax^2 = bx$).
2. Les carrés sont égaux aux nombres ($ax^2 = c$).
3. Les racines sont égales à un nombre ($bx = c$).
4. Les carrés et les racines sont égaux à un nombre ($ax^2 + bx = c$).
5. Les carrés et les nombres sont égaux aux racines ($ax^2 + c = bx$).
6. Les racines et les nombres sont égaux aux carrés ($bx + c = ax^2$).

Autrement dit, et pour adopter un langage moderne, al-Khwārizmī ne considère que les équations du second degré et classe ces dernières en six types distincts selon les signes des coefficients. (On notera toutefois que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est absente : les nombres a, b et c et la chose x étant des quantités tangibles, donc positives, leur somme ne peut pas être égale à rien.)

L'objet du chapitre 3 de l'ouvrage d'al-Khwārizmī est d'expliquer comment on peut ramener toute équation à une des six formes canoniques.

Dans le chapitre 2, al-Khwārizmī explique comment résoudre chacune des six équations canoniques. Pour chaque type, la procédure de résolution est expliquée en toute généralité et sur un exemple numérique, puis sa validité est prouvée par un argument géométrique (al-Khwārizmī utilise le mot « démonstration »).

Prenons l'exemple de la cinquième forme canonique : « les carrés et les nombres sont égaux aux racines ». Nous écrivons aujourd'hui cette équation sous la forme symbolique $x^2 + c = bx$, où b et c sont ce qu'al-Khwārizmī appelle « le nombre de racines » et « le nombre qui est avec le carré ». Il y a deux solutions positives, à savoir $\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$, à condition toutefois que $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > c$. Voilà ce qu'al-Khwārizmī écrit [2] :

> Quant aux carrés et au nombre qui égalent des racines, c'est comme quand tu dis : un carré et vingt et un en nombre égalent dix de ses racines. Cela vaut pour tout bien qui est tel que si on lui ajoute vingt et un dirhams, la somme qui en résulte est égale à dix racines de ce bien.
>
> La méthode de résolution consiste en ceci : prends la moitié des racines, cela fera cinq ; tu la multiplies par elle-même, cela fera vingt-cinq ; tu retranches les vingt

2. Cette traduction est tirée de l'ouvrage *Mathématiques au fil des âges*, par le groupe IREM Épistémologie et Histoire, textes choisis par Jean Dhombres et al., Paris : Gauthier-Villars et Bordas, 1987, p. 96.

> et un dont on a dit qu'ils étaient avec les carrés, il restera quatre ; tu prends sa racine qui est deux ; tu la retranches de la moitié des racines qui est cinq. Il restera trois et c'est la racine du carré que tu voulais et le carré est neuf.
>
> Ce cas [le cinquième cas] se résout à la fois par l'accroissement et par la diminution. (...) Sache aussi que dans ce cas, si ayant pris la moitié des racines et les ayant multipliées par elles-mêmes, le résultat est inférieur aux dirhams qui sont avec le carré, le problème est alors impossible. S'il est égal aux dirhams eux-mêmes, la racine du carré est alors égale, exactement, à la moitié des racines, sans accroissement ni diminution.

Dans le premier alinéa, al-Khwārizmī énonce le problème et l'illustre par un exemple numérique, à savoir $x^2 + 21 = 10x$. Dans le second alinéa, il décrit la procédure de résolution : si l'on traduit en écriture symbolique la suite des opérations à effectuer, on trouve que la solution est donnée par la formule $\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$, ce qui donne 3 dans l'exemple numérique proposé. Dans le troisième alinéa enfin, al-Khwārizmī mentionne l'existence de la deuxième solution $\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ (« ce cas se résout à la fois par l'accroissement et par la diminution ») et indique que si la quantité $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ est plus petite que c, alors le problème est impossible.

Dans le chapitre 4, al-Khwārizmī explique comment étendre les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication aux objets de l'algèbre. Il indique par exemple comment développer les expressions qu'aujourd'hui nous écrivons sous la forme $(ax + b)(cx + d)$.

Pour clore le tome I, al-Khwārizmī propose une liste d'exercices permettant d'illustrer la théorie. Un genre de question assez courant est donné par les « problèmes des dix » : il s'agit de partager le nombre 10 en deux parties selon certaines conditions. En voici un exemple :

> J'ai partagé dix en deux parties. J'ai multiplié l'une des parts par l'autre. Après ceci, j'ai multiplié l'une des deux par elle-même, et le résultat de cette multiplication par elle-même est quatre fois autant que celui d'une part par l'autre.

La mise en équation consiste à prendre comme inconnue x la part que l'on multiplie par elle-même ; l'autre part est alors $10 - x$ et l'équation s'écrit $x^2 = 4x(10 - x)$. Les règles du calcul mentionnées dans le chapitre 4 de l'*Abrégé du calcul* permettent d'écrire cette équation sous la forme $x^2 = 40x - 4x^2$. (On notera toutefois ici qu'al-Khwārizmī n'utilise aucun symbolisme et écrit donc en toutes lettres que « le carré est égal à quarante choses moins quatre carrés ».) Par restauration, on se ramène à l'équation $5x^2 = 40x$. Puis par une opération de simplification supplémentaire appelée *hatt*, on arrive à $x^2 = 8x$. C'est une équation du premier type, pour laquelle la procédure de résolution est donnée au chapitre 2. On trouve que la chose x vaut 8, et les deux parts sont donc 8 et 2.

4.5.3 L'apport d'al-Khwārizmī

Il est temps de résumer ce que nous venons de voir. Du point de vue de la sophistication mathématique, le traité d'al-Khwārizmī est plutôt pauvre puisqu'il se limite aux équations du second degré. De plus, l'ouvrage n'utilise aucun symbolisme : tout est écrit en mots, les nombres sont même écrits en toutes lettres. Bref l'ouvrage semble être un retour en arrière si on le compare aux *Arithmétiques* de Diophante. Pourtant pour beaucoup d'historiens, cet ouvrage constitue l'acte de naissance de l'algèbre. Le mot « algèbre » lui-même vient d'ailleurs du mot arabe « al-jabr » apparaissant dans le titre du traité d'al-Khwārizmī.

La nouveauté principale dans le traité d'al-Khwārizmī est que dans son organisation, il est plus proche de nos traités actuels que ne l'est celui de Diophante. En effet Al-Khwārizmī présente d'abord la théorie, incarnée par des objets (racine, carré) et un vocabulaire (opérations de restauration et de comparaison) spécifiques ; il en donne ensuite les applications. Son exposé est centré autour de la notion d'équation, notion qu'il étudie de façon systématique grâce à sa classification en six formes canoniques. Enfin al-Khwārizmī introduit une forme particulière de calcul en étendant explicitement le champ d'application des opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication) aux objets de la théorie.

En faisant cela, il ouvre la voie aux recherches futures. Comme nous le verrons aux paragraphes 4.6 et 5.4.3, les progrès accomplis par les successeurs d'al-Khwārizmī s'articuleront autour de ces deux axes : étude systématique d'équations (il s'agira surtout des équations du troisième degré) et extension du domaine d'action des opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division et extraction de racines) à d'autres objets que les nombres.

Interrogeons-nous à présent sur les sources auxquelles a puisé al-Khwārizmī. L'*Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* s'inscrit clairement dans une tradition régionale vieille de vingt-cinq siècles de recherche de méthodes permettant la résolution de problèmes concrets d'arithmétique. Le fait que la solution des équations soit présentée sur un mode procédural reflète l'influence encore présente des techniques des anciens Mésopotamiens. Toutefois la volonté de démontrer la validité de ces procédures trahit des préoccupations d'origine grecque. Enfin, le côté mécanique qu'apporte l'usage systématique des opérations de restauration et de comparaison traduit l'amour des savants arabes pour les présentations limpides et bien organisées. En somme, cet *Abrégé du calcul* est un exemple de la façon dont les savants arabes ont combiné différentes sources entre elles, en leur ajoutant le produit de leur réflexion propre.

Pour finir, dressons une liste de différences entre le traité d'al-Khwārizmī et les *Arithmétiques* de Diophante. Les deux ouvrages utilisent les concepts d'inconnue et d'équation, mais pas de la même manière. Al-Khwārizmī place ces concepts au centre de la théorie et articule le plan de son ouvrage autour d'eux. Au contraire, ces concepts sont cachés chez Diophante : leur manipulation est expliquée dans l'introduction des *Arithmétiques* ; ils ne figurent jamais dans les énoncés des problèmes et ne sont qu'un outil qui en permet la résolution. Deuxième différence notable : l'ouvrage d'al-Khwārizmī est méthodique (classification des objets, des opérations, des types d'équations, ...) et élémentaire (on n'y trouve que les équations du second degré), alors que les *Arithmétiques* sont un ouvrage savant (présence de problèmes donnant lieu à des équations de degré élevé) et pas systématique (Diophante fait l'impasse sur les problèmes dont il ne connait pas la solution). Une troisième différence est la présence d'arguments géométriques chez al-Khwārizmī, alors que Diophante évite toute référence à la géométrie, ce qui ne passe pas inaperçu dans le contexte des mathématiques grecques. Dans le même ordre d'idée, nous avions observé au paragraphe 3.4.2 que Diophante ne considérait que des nombres rationnels, conséquence de la séparation stricte opérée par les Grecs entre arithmétique et géométrie ; en revanche, al-Khwārizmī utilise de temps en temps les grandeurs irrationnelles[3]. L'inconnue d'al-Khwārizmī semble ainsi être davantage considérée comme un objet à part entière, puisqu'elle peut représenter un nombre entier, rationnel ou irrationnel, voire une grandeur géométrique. Quatrième point, déjà mentionné : al-Khwārizmī n'utilise aucun symbolisme, alors que Diophante a des abréviations pour l'inconnue, son carré, son cube,

3. Al-Khwārizmī appelle ces grandeurs *gidr asamm*, c'est-à-dire racine muette ou aveugle. Au XII^{e} siècle, Gérard de Crémone traduira cette expression en latin par *radix surda*, c'est-à-dire racine muette ou sourde. L'expression « nombres sourds » sera couramment utilisée pour désigner les nombres irrationnels jusqu'au XVIII^{e} siècle.

le signe moins, etc. Enfin, alors que les problèmes de Diophante sont abstraits et gratuits, al-Khwārizmī a doté son *Abrégé du calcul* d'un troisième tome entièrement dédié aux applications pratiques, dans lesquels les nombres représentent par exemple des sommes d'argent. Quoi qu'il en soit, il est très vraisemblable qu'Al-Khwārizmī n'a pas connu l'œuvre de Diophante : on estime que cette dernière n'a été traduite en arabe qu'au X$^{\text{e}}$ siècle.

4.6 Le développement de l'algèbre arabe

Après avoir mis au monde cette théorie des équations, les savants arabes vont la faire progresser, posant ainsi des jalons importants dans le développement de l'algèbre.

4.6.1 Abū Kāmil

En Égypte, environ un siècle après le travail d'al-Khwārizmī, le mathématicien Abū Kāmil (mort en 930) poursuit les recherches. Lui aussi est l'auteur d'un *Livre sur le calcul par la restauration et la comparaison*. La filiation avec le travail d'al-Khwārizmī est évidente, puisqu'Abū Kāmil donne lui aussi un exposé de la théorie des équations du second degré. Toutefois Abū Kāmil se montre plus savant que son prédécesseur : il appuie explicitement ses preuves géométriques du bon fonctionnement des procédures sur des propositions tirées du Livre II des *Éléments* d'Euclide. Par contraste, les justifications d'al-Khwārizmī ressemblent à un bricolage astucieux mais moins sûr.

Dans l'œuvre d'al-Khwārizmī figuraient un grand nombre de problèmes arithmétiques ; nous avons cité plus haut un exemple de « problème des dix ». Abū Kāmil prolonge cette tradition en instituant un nouveau genre, les « problèmes d'oiseaux ». Dans un tel problème, on donne le prix à la pièce de diverses espèces de volatiles (prix d'un canard, d'un pigeon, d'une alouette, etc.) et on affirme avoir dépensé une certaine somme pour acheter un certain nombre d'oiseaux ; on demande alors de trouver, espèce par espèce, le nombre de bestioles achetées. Un tel problème a en général plusieurs solutions, et Abū Kāmil s'amuse à en compter le nombre. Pour cela, il est conduit à manipuler plusieurs grandeurs inconnues simultanément. Dans son language entièrement rhétorique, les différentes inconnues sont désignés par différents mots : à côté de la chose (*say*), l'inconnue d'al-Khwārizmī, on trouve des dénominations comme *dīnar*, *fals* ou *khātam*.

La grande originalité dans le travail d'Abū Kāmil est de développer le calcul sur les irrationnels. Il montre ainsi comment utiliser les opérations arithmétiques ($+$, $-$, $\times$, $/$, $\sqrt{\ }$) sur les expressions comportant des irrationnels et obtient plusieurs résultats généraux, comme un équivalent de notre formule moderne

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2}}.$$

Ce résultat n'a en soi rien d'extraordinaire (énoncé dans un language un peu différent, il figure dans le Livre X des *Éléments* d'Euclide). La nouveauté tient surtout au fait qu'Abū Kāmil s'intéresse à des équations dont les coefficients sont des irrationnels. C'est là le signe qu'Abū Kāmil accorde autant de légitimité à ces quantités irrationnelles qu'aux nombres.

Il était toutefois difficile de progresser dans un tel domaine sans un formalisme adapté : pour écrire en toutes lettres et sans ambiguïté le nombre

$$17+\frac{27}{39}+\sqrt{315+\frac{885}{1521}}+\sqrt{451+\frac{1029}{1521}+\sqrt{395\,130+\frac{2\,057\,670}{2\,313\,441}}-\sqrt{31\,558+\frac{282}{1521}}},$$

Abū Kāmil doit torturer la langue arabe [4]. La difficulté est suffisante pour qu'aucun mathématicien arabe ne reprenne par la suite le flambeau d'Abū Kāmil sur ces questions.

4.6.2 Extension du domaine du calcul algébrique

Plus tard, l'algèbre arabe se scinde en deux courants. D'un côté, al-Karajī (mort vers 1023) puis al-Samaw'al (mort vers 1175) prolongent les opérations arithmétiques aux expressions faisant intervenir les choses, les carrés, les cubes, etc., créant ainsi le calcul sur les polynômes. Faute de disposer d'un formalisme adapté, al-Samaw'al est obligé d'écrire en toutes lettres des expressions comme « 25 cubo-cubes 9 carré-carrés 84 carrés 64 unités 100 parties de carré 64 parties de carré-carré moins 30 carré-cubes 40 cubes 116 choses 48 parties de choses 96 parties de cube » [5] pour désigner ce que nous noterions aujourd'hui

$$25x^6 - 30x^5 + 9x^4 - 40x^3 + 84x^2 - 116x + 64 - \frac{48}{x} + \frac{100}{x^2} - \frac{96}{x^3} + \frac{64}{x^4}.$$

Pour faciliter les calculs sur ces polynômes, al-Samaw'al adopte un système d'écriture avec des tableaux, dans lequel la position de la colonne correspond à l'exposant m du monôme considéré x^m. Pour notre exemple, il écrit ainsi

cubo-cubes	carré-cubes	carré-carrés	cubes	carrés	choses	unités	parties de chose	parties de carré	parties de cube	parties de carré-carré
25	moins 30	9	moins 40	84	moins 116	64	moins 48	100	moins 96	64

Cette disposition lui permet d'effectuer de façon visuelle les opérations arithmétiques sur les polynômes : en effet la loi $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, à la base du calcul d'un produit de polynômes, se traduit alors en termes de décalages dans le tableau. C'est beaucoup plus simple que les explications de Diophante (voir la fin du paragraphe 3.4.4).

Al-Samaw'al observe ensuite une grande analogie entre le calcul sur ces expressions et le calcul arithmétique sur les nombres avec le système de numération positionnel décimal. Ainsi la méthode qui permet de calculer, chiffre après chiffre, le quotient de deux nombres peut être utilisée pour calculer, terme après terme, le quotient issu de deux polynômes. Al-Samaw'al calcule ainsi la division [6] :

$$(20x^2 + 30x)/(6x^2 + 12) = (3 + \frac{1}{3}) + 5\frac{1}{x} - (6 + \frac{2}{3})\frac{1}{x^2} - 10\frac{1}{x^3} + (13 + \frac{1}{3})\frac{1}{x^4} + \cdots$$

Pour vérifier cette division, il faut multiplier le membre de droite par $6x^2 + 12$; on trouve $20x^2 + 30x$ plus quelque chose en $\frac{1}{x^n}$, avec n aussi grand que l'on veut si l'on poursuit la division assez loin.

Cette analogie entre nombres et polynômes permet à al-Samaw'al de comprendre qu'il y a un sens à prolonger le calcul du quotient de deux nombres au-delà des unités. Complétant ces idées, al-Kāshī (mort en 1429) met au point le calcul sur les nombres fractionnaires décimaux, c'est-à-dire sur les nombres écrits dans le système de numération positionnel décimal avec des

4. Cet exemple est tiré du livre *Une introduction à l'histoire de l'algèbre* par Jacques Sesiano, Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 1999.

5. Cet exemple est tiré du livre déjà cité *Mathématiques au fil des âges*, p. 98.

6. Il s'agit d'une « division selon les puissances décroissantes ». On procède comme pour la division euclidienne des polynômes, à ceci près qu'on ne s'arrête pas quand on arrive au point où le degré du reste est plus petit que le degré du diviseur.

chiffres après la virgule. Un des exploits qui ont rendu al-Kāshī célèbre est d'avoir calculé la valeur de 2π avec neuf chiffres sexagésimaux après la virgule, puis de l'avoir traduite en base dix, obtenant ainsi seize chiffres décimaux après la virgule (cela représente un progrès considérable par rapport à l'approximation avec six chiffres après la virgule obtenue par les Chinois au Vᵉ siècle après J.-C.).

4.6.3 Vers une théorie géométrique des équations

Le second courant de recherche concerne les rapports entretenus par l'algèbre et la géométrie. La solution des équations du second degré étant connue, l'étape suivante était de chercher une procédure permettant de résoudre les équations du troisième degré. Les savants arabes n'ont semble-t-il jamais trouvé la solution complète à ce problème.

Toutefois le grand savant et poète perse 'Umar al-Khayyāmī (mort en 1131) obtient quelques résultats par une approche géométrique. Il commence par classifier les équations du troisième degré en quatorze formes canoniques, analogues des six formes canoniques d'al-Khwārizmī pour les équations du second degré. Puis pour chacune de ces formes, al-Khayyāmī définit deux coniques et montre que le(s) point(s) où ces coniques se coupent donnent la (les) solution(s) à l'équation. L'idée de chercher la solution à un problème comme point d'intersection de deux coniques n'est pas neuve, puisque les Grecs l'avaient exploitée dans leur étude des problèmes de la trisection d'un angle ou de la duplication du cube. La nouveauté dans le travail d'al-Khayyāmī est son côté systématique.

Un siècle plus tard, Sharaf al-Dīn al-Ṭusi (mort en 1213) complète ces résultats en discutant précisément le nombre de racines (positives) des équations en fonction des coefficients (il montre par exemple que l'équation $x^3 + d = cx$ a zéro, une ou deux racines positives selon que $27d^2$ est plus grand, égal, ou plus petit que $4c^3$) et en décrivant une méthode qui permet le calcul numérique approché des racines.

4.7 Conclusion

L'Empire arabe a joué un double rôle de relais dans l'histoire des mathématiques. Un rôle de relais temporel, en permettant la transmission des connaissances entre le mondre grec de l'Antiquité et l'Europe occidentale du bas Moyen-Âge, et un rôle d'intermédiaire géographique, en assemblant ensemble les savoirs grecs, perses et indiens.

Les savants de cet empire ont également produit une science originale, contribuant de manière significative au développement des mathématiques. De manière très schématique, on peut dire qu'ils ont perfectionné les techniques du calcul :

- La numération positionnelle décimale rend possible une popularisation du calcul arithmétique, utile pour les activités commerciales.
- Les algébristes arabes ont systématisé l'usage des opérations arithmétiques, qui s'appliquent désormais uniformément à plusieurs types d'objets (nombres, expressions irrationnelles, expressions polynomiales, nombres fractionnaires décimaux avec des chiffres après la virgule).
- Les astronomes arabes ont amélioré la précision des tables de trigonométrie et mis au point des procédés de calcul plus efficaces que ceux contenus dans l'*Almageste*.

L'aspect systématique de ces travaux et la recherche d'une précision allant largement au-delà des besoins pratiques montrent qu'il s'agit ici d'une science, c'est-à-dire autant d'un savoir développé pour lui-même que de techniques imaginées en vue de leurs applications.

Chapitre 5

Les mathématiques de l'Europe médiévale

Résumé et objectifs du chapitre

Les derniers siècles du Moyen-Âge sont une période de transition pour l'Europe. Elle ne participe pas au progrès de la science, mais elle réussit à s'approprier une partie significative des connaissances grecques et arabes. Ce chapitre explique les conditions dans lesquelles ce transfert de connaissances a eu lieu.

À cette époque et en ces lieux, deux groupes de personnes ont une activité liée aux mathématiques : les membres de l'université médiévale et les maîtres de calcul au service de la communauté marchande. Nous présentons ces deux classes de personnes en indiquant leurs positions sociales et leurs centres d'intérêt en mathématiques. Nous mettons en évidence le rôle de ces maîtres de calcul dans le fait marquant de l'époque, qui est la popularisation de l'usage des chiffres arabes.

5.1 Contexte historique

Du VI^{e} au X^{e} siècle, l'Europe est dans une phase de turbulences. Les tribus germaniques ont envahi la partie occidentale de l'Empire Romain dès le V^{e} siècle. A quelques exceptions près (Clovis, Charles Martel, Charlemagne), les rois ont un pouvoir très limité. Les guerres et les invasions se succèdent. Les armées de l'Empire arabe conquièrent la péninsule ibérique au VII^{e} siècle et la Sicile au IX^{e} siècle ; ils disposent aussi d'un pied-à-terre en Provence. Les Vikings entament de leur côté une série d'incursions à la toute fin du VIII^{e} siècle ; ils s'installent en Grande-Bretagne au IX^{e} siècle et ne renoncent à leurs pillages sur l'actuel territoire français qu'en échange de la Normandie au début du X^{e} siècle.

Le haut Moyen-Âge (période qui va du VII^{e} au X^{e} siècle) est donc en Europe une période de désordre politique et de récession économique. Alors que les sciences fleurissent dans l'Empire arabe, l'Europe ne dispose plus que de quelques bribes de la science grecque : quelques manuscrits grecs dans les possessions de l'Empire byzantin en Italie du sud et quelques copies de l'œuvre de Boèce (vers 480–524) préservées précieusement dans les monastères. En ce qui concerne les mathématiques, le trésor est très mince et se limite aux parties les plus élémentaires des *Éléments* d'Euclide et à l'*Introduction à l'arithmétique* de Nicomaque.

Vers la fin du X^{e} siècle, le continent connaît une accalmie sur le plan politique grâce à l'émergence d'états durables, soudés par les relations de vassalité que les seigneurs locaux entretiennent avec leurs suzerains. De son côté, l'Église catholique se réforme en profondeur au XI^{e} siècle : l'autorité du pape (alias l'évêque de Rome) sur les autres évêques est réaffirmée (au prix du schisme avec l'Église orthodoxe) ; l'indépendance de l'Église vis-à-vis des dirigeants politiques est promulguée ; une moralité notamment financière est imposée aux membres de l'Église.

Parallèlement à ces changements, l'Europe de l'ouest connaît un essor considérable. La population européenne fait plus que doubler entre la fin du X^{e} siècle et le début du XIV^{e}. L'invention de la charrue à soc dissymétrique et du collier rigide font progresser les rendements agricoles. L'utilisation plus fréquente des moulins à eau et la mise au point de nouvelles techniques du travail du fer permettent d'améliorer la fabrication de l'outillage et la qualité des armes. Le territoire s'étend vers l'est aux dépens des peuples slaves et vers le sud aux dépens des Byzantins et des Musulmans. La Sicile repasse sous contrôle chrétien en 1091. La reconquête de l'Espagne commence à la fin du XI^{e} siècle et est achevée au début du XIII^{e} siècle.

L'Église fait son possible pour que les membres du clergé soient instruits. Cela commence par de petites écoles au sein des monastères, où l'on apprend la lecture, l'écriture et la dialectique, toutes choses nécessaires pour une religion du Livre mais aussi pour mieux évangéliser la population. Puis, à mesure que l'urbanisation progresse, les étudiants et leurs maîtres s'installent en dehors des enceintes religieuses et se regroupent en corporation. Petit à petit, ces groupes de personnes gagnent en indépendance, notamment grâce au soutien de la Papauté. Les universités naissent de là à partir de la fin du XII^{e} siècle ; leur existence est officialisée par des privilèges accordés par le pouvoir.

5.2 Les transferts de la science arabe à l'Europe

Dès la fin du X^{e} siècle, quelques contacts isolés ont lieu entre la civilisation européenne chrétienne et l'Empire arabe aux abords des régions frontalières.

Un des plus anciens documents connus démontrant l'existence de ces contacts est un manuscrit écrit en latin en 976 dans le nord de l'Espagne et utilisant la numération positionnelle décimale et les chiffres arabes. Un autre exemple bien connu est celui de l'évêque et futur pape Gerbert d'Aurillac (vers 940–1003). Il voyage en Catalogne, y noue des contacts et rapporte un astrolabe de son voyage ; plus tard, il demande à ses correspondants espagnols de lui faire parvenir un ouvrage intitulé *De multiplicatione et divisione (Sur la multiplication et la division).* Autre figure célèbre, le voyageur, savant et marchand Constantin l'Africain, né à Tunis, se convertit au christianisme et gagne l'Italie à la fin du XI^{e} siècle. Il amène avec lui de nombreux manuscrits contenant des traités médicaux grecs et arabes, qu'il traduit en latin. Les textes ramenés par Constantin seront largement diffusés et serviront de base à la médecine européenne pendant plusieurs siècles.

Les territoires conquis sur les Arabes à partir de la fin du XI^{e} siècle apportent aux Chrétiens des manuscrits scientifiques et des populations capables de les déchiffrer. Par exemple, la ville espagnole de Tolède, conquise en 1085, devient un grand centre de traduction sous l'impulsion de l'évêque local. Des érudits venus de toute l'Europe y accourent au XII^{e} siècle pour étudier et traduire les manuscrits scientifiques arabes. La traduction se fait en deux temps, de l'arabe en une langue vulgaire, puis de cette langue au latin. La première étape est réalisée grâce au concours de la population locale (des Juifs ou des Mozarabes, c'est-à-dire des Chrétiens de culture et de langue arabe). L'équipe de Gérard de Crémone, le plus prolifique des traducteurs, traduit ainsi plus de quatre-vingts ouvrages, couvrant toutes les disciplines scientifiques. En mathématiques, les œuvres traduites sont les grands traités grecs (*Éléments* et *Données* d'Euclide, *Coniques* d'Apollonius, *Almageste* de Ptolémée), plusieurs ouvrages d'Archimède, ainsi que le traité d'algèbre d'al-Khwārizmī. En revanche, l'œuvre de Diophante, pourtant connue des Arabes, demeurera inconnue des Européens jusqu'à la fin du XVI^{e} siècle, et les travaux d'al-Khayyāmī et de Sharaf al-Dīn al-Ṭusi resteront oubliés plus longtemps encore.

La traduction systématique des manuscrits retrouvés dans les territoires conquis est le mécanisme de transfert de connaissances le mieux documenté, car il laisse de nombreux vestiges. C'est aussi celui qui apporte le plus de connaissances scientifiques à l'Europe. Mais il n'est pas le seul : des contacts culturels et commerciaux ont toujours eu lieu entre l'Europe du sud et l'Afrique du nord, permettant une diffusion des traditions et des techniques. Nous avons parlé plus haut du cas de Constantin, nous verrons au paragraphe 5.4.1 celui de Fibonacci.

5.3 Les progrès au sein de l'université médiévale

Au sein des universités, les membres instruits du clergé catholique réfléchissent aux problèmes que soulèvent le dogme chrétien. Au sein de la société médiévale européenne, la théologie a le rang de science, comme le confirme une bulle du pape Grégoire IX (vers 1145–1241). Cette distinction a des origines politiques : la théologie, en trouvant les moyens d'exhalter la grandeur de Dieu, permet à l'Église de développer la foi chrétienne et d'asseoir son pouvoir. Les universités, soumises à la papauté et à elle seule, ont pour mission de développer cette science.

Avec l'arrivée des traductions des traités arabes, les universitaires se trouvent confrontés à l'énorme masse de connaissances contenue dans les traités philosophiques d'Aristote, comprenant notamment la logique, la physique, la botanique, la zoologie, etc. Au texte d'Aristote proprement dit s'ajoutent les commentaires des savants grecs et arabes qui ont étudié l'œuvre d'Aristote, tels les philosophes et médecins Avicenne (980–1037) et Averroès (1126–1198). Le problème qui se pose alors aux universitaires est d'étudier la compatibilité des doctrines aristotéliciennes avec l'Écriture Sainte. Pour ce travail, le fleuron des mathématiques grecques, à savoir les œuvres d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius sont peu utiles et donc peu étudiées, bien qu'elles aient été traduites en latin. Les savants orientent plutôt leurs recherches en direction de la cinématique (étude du mouvement, dans la lignée de la physique d'Aristote) et de l'astronomie (et donc de la géométrie du cercle, nécessaire à son étude).

Reflétant ces préoccupations, le cursus universitaire ne propose pas d'enseignement des mathématiques à un niveau avancé. L'étude de la géométrie se limite à celle des premiers livres des *Éléments* et l'arithmétique est maintenue à un niveau encore plus bas, à savoir l'arithmétique des nombres figurés de Nicomaque.

Il y a toutefois au sein de l'université médiévale des savants capables d'apporter des contributions originales aux mathématiques, tel Nicole Oresme (1323–1382) à Paris. Ces universitaires sont toutefois en trop petit nombre pour que leurs contributions soient amplifiées par leurs successeurs et puissent ainsi être développées et avoir un impact. C'est au sein d'un autre milieu que les recherches sont les plus actives.

5.4 La popularisation du calcul arithmétique

Les transferts de connaissance du monde arabe vers l'Occident chrétien ont emprunté plusieurs voies. Nous avons vu que les grands traités scientifiques en arabe retrouvés après la reconquête des territoires en Europe du sud ont été traduits en latin et que le savoir qu'ils contenaient a été assimilé par les membres de l'université. Parallèlement, les échanges commerciaux incessants entre les deux bords de la mer Méditerranée maintenaient le contact entre les deux civilisations. Des connaissances ont aussi été échangées grâce à ces contacts.

5.4.1 Fibonacci

Leonardo Pisano (Léonard de Pise), dit Fibonacci, est une figure emblématique pour cet aspect de l'histoire. Il est le fils d'un diplomate, qui représentait à Bejaia (Algérie) les marchands de Pise. Fibonacci suit son père dans ses voyages et apprend ainsi les mathématiques utilisées en Afrique du nord. Vers 1200, il retourne à Pise et rédige des livres exposant ses connaissances mathématiques. Son *Liber abaci (Livre du calcul)*, achevé en 1202, connaît une large diffusion. Il s'agit d'un ouvrage d'arithmétique élémentaire expliquant l'utilisation du système de numération positionnel décimal pour le calcul des quatre opérations de base et les applications de cette technique pour le commerce. L'influence du monde islamique est ici très nette, car ainsi que nous l'avons signalé au paragraphe 4.4.1, de nombreux ouvrages analogues avaient été écrits en arabe, le plus souvent à l'attention des marchands. Une particularité du *Liber abaci* est qu'il fait la part belle aux problèmes d'arithmétique amusante, notamment à ceux qui se traduisent par un système d'équations linéaires (qui peuvent éventuellement ne pas avoir de solution, ou en avoir plusieurs) [1].

Fibonacci écrit également un traité de géométrie pratique, qui est lui aussi bien diffusé. Les autres ouvrages de Fibonacci sont beaucoup plus originaux d'un point de vue mathématique ; mais écrits pour prouver à la cour du roi de Sicile l'habileté mathématique de leur auteur et dépourvus d'applications pratiques, ils ne sont pour ainsi dire pas diffusés et n'ont aucun impact sur le développement des mathématiques. Il ne seront étudiés sérieusement qu'au milieu du XIX^e siècle, quand Baldassare Boncompagni (1821–1894) donnera une traduction des œuvres complètes de Fibonacci.

5.4.2 Les besoins du commerce

À partir du XIIIe siècle, l'Italie devient la plaque tournante du commerce international entre l'Europe, l'Orient et l'Afrique du nord. L'Europe exporte ses draps et ses métaux et importe des épices, la soie, les teintures, du cuir, de l'or, etc. De riches familles créent de grandes compagnies commerciales à Florence, Gênes et Sienne.

L'activité commerciale nécessite de savoir calculer efficacement. Il faut notamment tenir les comptes, répartir les profits et les pertes d'une affaire au prorata de la participation des différents associés, et régler les problèmes de monnaie, de change et de crédit. À l'activité commerciale s'ajoutent en outre des activités bancaires et d'assurance, surtout après les dégâts causés au milieu du XIVe siècle par la guerre de Cent Ans et la grande épidémie de peste noire.

1. C'est dans le *Liber abaci* que l'on trouve le problème des lapins qui, se reproduisant tous les mois, voient leur nombre augmenter selon la suite (u_n) définie par récurrence par $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Fibonacci ne parle toutefois pas de suite (le concept général est plus tardif) et ne fait que calculer les premiers termes de (u_n). L'expression « suite de Fibonacci » est due à un mathématicien du XIXe siècle, Édouard Lucas (1842–1891), qui en a étudié les propriétés.

Les enfants des marchands reçoivent une éducation adaptée à cette activité. Des écoles de calcul sont créées : par exemple à Florence, une vingtaine de telles écoles accueillent plus de mille élèves du XIV^{e} au XVI^{e} siècle, un nombre impressionnant pour une ville qui a moins de cent mille habitants. Les enfants des plus riches familles ont même leur précepteur particulier. Les meilleurs des professeurs de calcul, ou « maîtres d'abaque », sont des personnages estimés dans leur ville et comptent parmi les plus riches de la classe moyenne.

Outre leur enseignement, les maîtres d'abaques écrivent des ouvrages, qui reprennent les notions abordées en cours. Il peut s'agir de traités destinés à servir de référence au marchand qui l'a acquis, ou bien d'un livre permettant à son auteur de montrer publiquement son talent d'enseignant et son habileté de calculateur. Ces traités suivent tous le même plan, inspiré du *Liber abaci* de Fibonacci. L'auteur commence par exposer les règles permettant d'effectuer les opérations arithmétiques de base : écriture avec les chiffres arabes, quatre opérations arithmétiques, manipulation des fractions, extraction des racines carrées. Puis il continue en expliquant comment ces techniques permettent de résoudre les problèmes pratiques qui se posent aux marchands. Des méthodes simples comme la règle de trois sont expliquées sur de nombreux exemples, par exemple pour calculer comment les gains et les pertes réalisés par une société doivent être répartis entre les associés. Le maniement des fractions est pour sa part très utile pour tout ce qui est calcul avec les monnaies, car le système de subdivision monétaire est compliqué : une livre vaut 20 sous, tandis qu'un sou vaut 12 deniers. La pluralité des monnaies existantes (chaque ville et chaque duché peut frapper sa monnaie) ne simplifie du reste pas les choses. Le caractère pédagogique de l'ouvrage est renforcé par la présence de nombreux conseils expliquant comment simplifier au mieux les calculs délicats.

De tels traités d'arithmétique à l'usage des marchands se multiplient en Italie à partir du milieu du XIV^{e} siècle ; parmi les auteurs, on trouve un certain Piero della Francesca (1416–1492) : le plus grand peintre du *quattrocento* italien est aussi un mathématicien. Le phénomène se reproduit dans d'autres villes d'Europe à partir du milieu du XV^{e} siècle. Ainsi un dénommé Johann Certain écrit en français son *Kadran aux marchans* en 1485 dans le but de donner un « guide, enseignement et declaracion a tous marchans de bien savoir compter ». L'imprimerie arrive alors ; vers 1480, des traités d'arithmétique marchande sont imprimés en Italie et en Allemagne.

La plupart de ces hommes ne font pas accomplir de réels progrès aux mathématiques, mais par leur enseignement, ils répandent l'utilisation du calcul en Europe. Grâce à eux, l'usage du système de numération positionnel basé sur les chiffres arabes et des opérations posées sur papier remplace celui des chiffres romains et de l'abaque. En étudiant les dispositions les plus commodes pour la conduite des opérations, ils fixent les règles du calcul arithmétique (multiplication, division, preuve par neuf, « règle de trois » par le « produit en croix ») que nous utilisons encore aujourd'hui.

5.4.3 De l'arithmétique marchande à l'algèbre

Le dernier chapitre du *Liber abaci* de Fibonacci, intitulé « La géométrie et les questions d'algèbre » comprend non seulement quelques exemples de procédures géométriques pour déterminer les aires et les volumes, ce qui est utile pour déterminer les quantités de marchandise, mais aussi toute la théorie des équations du second degré développée par al-Khwārizmī. À l'instar de ce dernier, Fibonacci classe les équations du second degré en six types, donne la méthode de résolution pour chacun des types, justifie la méthode par un argument de nature géométrique, ne dispose d'aucun formalisme, et ne s'intéresse qu'aux racines strictement positives des équations (voir le paragraphe 4.5).

Un grand nombre d'auteurs de traités d'arithmétique marchande suivent cette démarche et ajoutent un chapitre d'algèbre à leur traité. Petit à petit, le matériau évolue. Le degré des équations considérées augmente, quitte à devoir allonger la liste des types d'équations possibles. Les possibilités de simplification des équations sont au début mal comprises. Ainsi le traité intitulé *Summa* écrit en 1463 par un certain Maître Benedetto de Florence présente les procédures de résolution pour trente-six types d'équations, qui comprennent entre autres les formes suivantes (en notation moderne) [2] :

$$\begin{aligned} x^2 + c &= bx, \\ x^3 + cx &= bx^2, \\ x^4 + cx^2 &= bx^3, \\ x^5 + cx^3 &= bx^4, \\ x^6 + cx^4 &= bx^5. \end{aligned}$$

Cette évolution en amène une autre : les justifications géométriques des procédures de résolution, qui ne peuvent pas être utilisées pour des équations de degré plus grand que 3, sont progressivement abandonnées.

2. Cet exemple est tiré du texte *Calcul, algèbre et marchandise* de Paul Benoît, dans *Éléments d'histoire des sciences*, sous la direction de Michel Serres, Paris : Bordas, 1989 ; texte réédité par Larousse, 1997.

Chapitre 6

Les mathématiques à la Renaissance

Résumé et objectifs du chapitre

Au XVI^{e} siècle en Europe de l'ouest, les mathématiques sont abordées selon plusieurs angles : les recherches issues de la tradition algébrique médiévale sont poursuivies ; un regain d'intérêt pour la géométrie grecque accompagne le mouvement humaniste de la Renaissance ; enfin des personnes marient géométrie et arithmétique pour forger des outils mathématiques qui permettent de perfectionner l'astronomie et d'améliorer les techniques nécessaires à la conquête des océans.

La première partie de ce chapitre a pour but de donner une présentation générale des travaux menés et des résultats obtenus. La deuxième partie offre un examen plus détaillé des progrès réalisés par les algébristes européens (au premier rang desquels les Italiens) : création d'un symbolisme, résolution de l'équation du troisième degré, invention des nombres complexes.

6.1 Différentes visions des mathématiques à la Renaissance

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'en Europe de l'ouest, dans les derniers siècles du Moyen-Âge, deux groupes de personnes ont une activité liée aux mathématiques. D'un côté, les universitaires, dont la formation mathématique se limite essentiellement aux premiers livres des *Éléments* d'Euclide et à l'arithmétique de Nicomaque, étudient surtout les questions de cinématique, de logique, d'astronomie et de trigonométrie à travers les ouvrages d'Aristote et de Ptolémée et en relation avec la théologie. De l'autre côté, les maîtres de calcul vivent en enseignant l'usage des nombres et leur manipulation avec le système de numération positionnel décimal aux marchands impliqués dans le commerce international ; ils consignent leur savoir dans des traités d'arithmétique marchande.

Ce système bipolaire laisse progressivement place à partir du milieu du XV^{e} siècle (un peu plus tôt en Italie) à une situation beaucoup plus riche et ouverte. En fait, c'est tout le contexte social, économique, culturel et scientifique qui change en Europe vers cette date. Un des éléments les plus importants de ce changement est le début de la conquête des océans, à la suite des expéditions de Christophe Colomb, Vasco de Gama et Magellan. Autre point notable, le commerce international, contrôlé par les marchands italiens à la fin du Moyen-Âge, se développe dans toute l'Europe, créant ainsi un afflux de richesses qui favorise l'épanouissement des arts, des sciences et des techniques. L'invention de l'imprimerie vers 1440 rend quant à elle la diffusion des connaissances moins problématique. La Renaissance enfin est aussi l'époque de l'Humanisme et de la Réforme protestante, mouvements qui n'ont toutefois qu'une faible influence sur le développement des mathématiques.

En ce qui concerne les mathématiques, les efforts se portent dans plusieurs directions. On ne peut toutefois pas parler à cette époque d'une communauté de mathématiciens cherchant ensemble à faire avancer plusieurs sujets de leur discipline. Au contraire, plusieurs groupes de personnes coexistent ; chaque groupe explore sa voie et possède son propre style de faire des mathématiques, avec des points de vue différents concernant le choix des problèmes jugés importants, les méthodes autorisées pour leur résolution, la manière dont les résultats doivent être rédigés et présentés, et l'intérêt de publier les inventions. À la fin du XVI^e^ siècle, on peut ainsi distinguer au moins cinq catégories de personnes ayant à pratiquer régulièrement les mathématiques : les algébristes, les géomètres humanistes, les mathématiciens appliqués, les astronomes et les artistes [1].

Une des raisons d'un tel éclatement réside dans le fait que le système d'enseignement supérieur de l'époque n'est pas en position de jouer le rôle d'une autorité normative. Au XVI^e^ siècle en effet, les universités enseignent les mathématiques au même niveau élémentaire qu'au bas Moyen-Âge. (Ce n'est qu'au XVII^e^ siècle que les premières chaires de mathématiques dans les universités seront créées ; elles le seront en Angleterre, en 1619 à Oxford et en 1664 à Cambridge.) Si un débutant souhaite apprendre des mathématiques à un niveau plus avancé, il doit faire appel à un tuteur privé ou à un collègue plus expérimenté, lequel lui apprend une façon particulière d'appréhender les mathématiques.

Nous allons maintenant passer en revue chacune des catégories de « praticiens des mathématiques » énumérées ci-dessus, en indiquant les progrès réalisés et en caractérisant leurs approches.

6.1.1 Les algébristes

Les algébristes sont les successeurs des auteurs des arithmétiques marchandes. Ils s'intéressent surtout à améliorer les méthodes permettant de résoudre les problèmes arithmétiques. Leurs prédécesseurs avaient cherché les méthodes et les dispositions les plus efficaces pour conduire les opérations arithmétiques sur les nombres écrits en base dix et sur les fractions. Comme nous le verrons au paragraphe 6.2, les algébristes du XVI^e^ siècle améliorent progressivement le système de notation algébrique, découvrent la procédure de résolution des équations du troisième degré, et inventent les nombres complexes. En revanche, ils ne s'interrogent pas sur les principes servant de fondement logique à leurs travaux et n'essaient pas de donner une présentation axiomatique de leurs résultats. Pour eux, les mathématiques servent à résoudre des problèmes et ne consistent pas à démontrer rigoureusement des théorèmes. Ainsi les ouvrages qu'ils écrivent comportent presque toujours une longue liste de problèmes d'application qui sont énoncées de façon concrète avec des données numériques explicites.

Les algébristes affirment l'importance pratique de leur discipline, bien que la plupart des problèmes qu'ils abordent soient des exercices d'entraînement sans utilité directe. De fait, l'une des sources de revenu de ces mathématiciens est qu'ils servent d'experts en calcul auprès des marchands : les problèmes les plus compliqués auxquels ces derniers sont confrontés réclament

1. L'existence de plusieurs groupes de personnes bien formés se retrouve du reste dans le vocabulaire. Ainsi les algébristes allemands considèrent être des *Rechenmeister*, des maîtres de calcul. Les géomètres humanistes pensent qu'ils sont des *geometrae*. Le mot de *mathematicus* quant à lui désigne au XVI^e^ siècle un astronome ou un astrologue : ainsi, Johannes Kepler (1571–1630) fut mathématicien de la cour de l'empereur Rudolf et Galileo Galilei (1564–1642) fut mathématicien et philosophe du grand-duc de Toscane.

les services d'un spécialiste en résolution de problèmes arithmétiques. Cette situation provoque un comportement assez curieux dans la manière dont les algébristes publient leurs résultats. D'un côté, publier est une forme de publicité, qui leur permet de parvenir à une certaine notoriété. L'auteur doit pour cela montrer qu'il dispose de méthodes efficaces et compréhensibles, meilleures que celles de ses concurrents. Mais de l'autre côté, les algébristes veulent garder pour eux le profit de leurs découvertes ; or la conservation de l'exclusivité d'une méthode s'accorde mal avec sa publication. La conséquence est que les algébristes hésitent à publier toutes leurs connaissances. Nous raconterons une anecdote qui illustre bien ce comportement au paragraphe 6.2.2.

6.1.2 Les géomètres humanistes

À la Renaissance, un mouvement de pensée appelé « humanisme » met à l'honneur l'étude des cultures antiques (grecque et romaine). Ce mouvement touche l'art (Léonard de Vinci, Michel-Ange, Raphaël,...), la littérature (Machiavel, Bramante, Ronsard,...), l'architecture (Brunelleschi), les sciences, etc. Le pape, le roi de France et les princes italiens encouragent financièrement ce mouvement en passant des commandes aux artistes et en subventionnant de petits cercles littéraires ou scientifiques qui prennent le nom d'Académie, du nom de l'école fondée à Athènes par Platon. Un trait amusant de ce mouvement est que les humanistes adoptent des noms à consonance grecque ou latine : l'Allemand Johann Müller (1436–1476), originaire de Königsberg, se fait ainsi appeler Regiomontanus, tandis que son compatriote Wilhelm Holzmann (1532–1576) choisit de changer son nom en Xylander.

Pour les mathématiques, une conséquence de cette mode est la remise au goût du jour de l'étude de la géométrie grecque classique. Ainsi Federigo Commandino (1509–1575) prépare d'excellentes traductions en latin des œuvres d'Euclide, Archimède, Apollonius, Héron, Ptolémée et Pappus, entre autres. Trois qualités distinguent le travail de Commandino et font que ses traductions sont meilleures et plus fidèles que celles qui étaient jusqu'alors disponibles. D'abord, il part de manuscrits en langue grecque [2]. Ensuite, Commandino possède non seulement une maîtrise parfaite du grec et du latin, mais aussi des talents de mathématicien, ce qui lui permet de démêler des passages que les copistes avaient rendus obscurs au fil des siècles. Enfin, Commandino va au delà d'un simple travail de traduction, puisqu'il accompagne les textes de commentaires étendus qui expliquent certains passages délicats ou confus et qui mettent en relief les liens entre les différentes œuvres.

Le but principal de Commandino et des autres géomètres humanistes de la Renaissance est de restaurer les traités grecs dans leur état original et d'en donner une traduction dans un latin raffiné. Du reste, il ne s'agit pas seulement de remettre en état les rares traités pour lequel des manuscrits sont disponibles, mais de reconstruire tout le savoir grec, y compris les ouvrages qui ont disparu à la fin de l'Antiquité mais dont l'existence est mentionnée ailleurs. Commandino écrit ainsi un traité dans lequel il démontre des résultats qu'Archimède utilise mais qui ne figurent pas dans les travaux grecs qui nous sont parvenus.

Pour ces géomètres humanistes, la philosophie de Platon et d'Aristote délimite le champ de l'activité mathématique. À leurs yeux, l'arithmétique est strictement séparée de la géométrie ;

2. De tels manuscrits, copies des éditions originales réalisées dans l'Antiquité, avaient été conservés dans les bibliothèques de l'Empire byzantin. À la fin du Moyen-Âge, quelques-uns de ces manuscrits sont amenés en Italie ; c'est ainsi que pour la première fois, des manuscrits des *Arithmétiques* de Diophante et de la *Collection Mathématique* de Pappus parviennent en Europe occidentale. La prise de Constantinople par les Ottomans en 1453 met fin à cette forme d'échange de connaissances entre le monde oriental et le monde occidental.

la géométrie est la science mathématique reine, car ses démonstrations sont supérieures ; enfin il convient de présenter les résultats de façon synthétique et déductive, de préférence selon la méthode axiomatique. Ces contraintes bornent leur activité : n'accordant d'intérêt qu'à ce qui rentre dans le cadre de la mathématique grecque, les géomètres humanistes ignorent les progrès contemporains en algèbre. En ce qui concerne la présentation enfin, les géomètres accordent plus d'importance à l'élégance du style et à la rigueur qu'à la nouveauté des résultats et à l'efficacité des méthodes.

6.1.3 Les mathématiciens appliqués

Les mathématiciens de cette catégorie sont surtout des Britanniques et des habitants des Pays-Bas. Les problèmes à l'origine de leurs travaux sont de nature pratique : développement de techniques de navigation efficaces, mise au point de cartes précises, conception de ports ou de fortifications. Par exemple, à partir du moment où les Européens commencent la conquête des océans, il leur faut savoir dresser et utiliser des cartes couvrant entièrement les océans. À cette échelle, on ne peut plus négliger le caractère sphérique de la Terre, et il faut trouver un moyen de passer du globe terrestre à la surface plane d'une carte. La projection de Mercator (1512–1594) est mise au point afin que la trajectoire des bateaux gardant un cap constant (par rapport à la direction donnée par le compas du navire) soit représentée par une droite sur la carte. Pendant encore trois siècles, les problèmes liés à la navigation sur les océans stimuleront le développement des techniques [3].

À l'instar des géomètres humanistes, les mathématiciens appliqués puisent leurs problèmes et leurs méthodes de base à la source grecque, mais ils s'intéressent autant aux traités pratiques comme la *Cosmographie* de Ptolémée, les *Sphériques* de Theodosius ou l'ouvrage *Sur les figures sphériques* de Menelaus qu'aux grands traités géométriques d'Apollonius ou de Pappus. Par ailleurs, les mathématiciens appliqués n'ont pas les scrupules des géomètres classiques et n'hésitent pas à poursuivre leurs études au-delà de l'apport grec. Ils adoptent souvent le mode de présentation déductif des Grecs anciens, mais ne partagent pas avec les humanistes l'amour des langues anciennes et rédigent soit en langue vernaculaire, soit dans un latin moins soutenu que celui de Commandino.

Les mathématiciens appliqués mélangent librement le vieux matériel grec avec celui contenu dans les textes arabes et les traités algébriques. Ayant des visées pratiques, ils n'hésitent pas à violer les canons de la philosophie grecque pour réaliser leurs buts. Ainsi ils mélangent arithmétique et géométrie pour calculer des tables utilisables par les navigateurs et les ingénieurs : la géométrie fournit des théorèmes exacts, que l'on transcrit ensuite avec l'outil arithmétique. Le Néerlandais Simon Stevin (1548–1620) et l'Écossais John Napier (1550–1617) popularisent ainsi l'usage des nombres fractionnaires décimaux, c'est-à-dire l'écriture des nombres non-entiers en utilisant des chiffres décimaux après la virgule.

Une invention importante des mathématiciens appliqués est celle des logarithmes par Napier et, de façon indépendante, par le Suisse Jost Bürgi (1552–1632). Elle remplace le calcul des multiplications, des divisions et des extractions de racine par celui d'additions, de soustractions et de division par deux, ce qui permet d'accélérer les calculs sur des nombres qui ont de nombreux chiffres. C'est dans ce cadre d'ailleurs que Napier utilise son système d'écriture pour les nombres fractionnaires, car il lui permet de dresser la première table de logarithmes avec cinq décimales exactes. L'Anglais Henry Briggs (1561–1630) complète ce travail en publiant en

3. Pour plus de détails, le lecteur est renvoyé à l'ouvrage *Du scribe au savant : les porteurs du savoir de l'Antiquité à la révolution industrielle* cité en bibliographie, p. 148 et suivantes.

1624 une table donnant la valeur avec quatorze décimales exactes des logarithmes des entiers entre 1 et 20000. On observe dans le travail de Napier un mélange entre des idées géométriques (Napier considère des points se mouvant sur une droite) et des calculs arithmétiques (usage des nombres décimaux).

Les mathématiciens appliqués partagent donc avec les algébristes une vision pratique des mathématiques, tournée vers la résolution des problèmes. Ils acceptent qu'un calcul tienne lieu de preuve. Le but n'est pas d'atteindre une grande rigueur théorique, mais de disposer d'une technique fiable. Une approche opératoire des mathématiques est ainsi mise en avant, approche qui va jusqu'à la recherche d'outils pratiques et de dispositifs mécaniques, comme le compas proportionnel de Galilée [4] ou la règle à calculer de Gunter et Wingate.

Pour résumer, l'attitude de ces mathématiciens appliqués (comme nous les avons appelés) vis-à-vis de leur science est intermédiaire entre celle des géomètres humanistes et celle des algébristes : ils reconnaissent le modèle grec, mais n'hésitent pas à en dévier. Ils ont une vision pratique des mathématiques et mettent au point des dispositifs mécaniques, mais adoptent un mode de présentation déductif. Ils mélangent calcul arithmétique et géométrie. Enfin, ils publient assez volontiers leurs découvertes mathématiques, comme le font les géomètres humanistes, mais à l'image des algébristes, ils cherchent à conserver le profit des techniques qu'ils inventent ; c'est d'ailleurs sous leur impulsion que les privilèges royaux, ancêtres des brevets, sont créés.

6.1.4 Les astronomes

En ce qui concerne l'astronomie, nous nous bornerons à signaler les noms de trois grands savants.

Nicolas Copernic (1473–1543) comprend vers 1514 que le modèle héliocentrique (c'est-à-dire basé sur l'hypothèse que les planètes tournent autour du soleil) est plus satisfaisant que le modèle géocentrique (dans lequel on suppose que les planètes et le soleil tournent autour de la Terre). Il souhaite dès cet instant publier un aperçu complet de ses idées, mais le projet ne voit le jour qu'en 1541 avec la publication du livre *De revolutionibus orbium coelestium.* Afin d'éviter à ce livre d'être condamné par l'Église catholique, la théorie héliocentrique n'est présentée que comme une hypothèse mathématique.

Johannes Kepler (1571–1630) essaie de mettre en accord les observations de son maître Tycho Brahe avec un modèle héliocentrique. Vers l'année 1605, il comprend que les planètes parcourent des orbites elliptiques dont le soleil est un des foyers (première loi de Kepler) et détermine la loi de leur mouvement sur cette orbite (deuxième loi de Kepler). Astronome au service de l'empereur Rudolf, Kepler calcule de nombreuses tables astronomiques. À la recherche d'une harmonie céleste, il essaie de trouver la raison qui permettrait d'expliquer les rapports entre les tailles des orbites des six planètes connues à l'époque. C'est au hasard de ces recherches un peu mystiques qu'il découvre en 1619 sa troisième loi, qui relie la taille de l'orbite d'une planète à sa période de révolution autour du soleil. Vivant en territoire protestant, Kepler peut développer sa théorie héliocentrique sans rencontrer trop d'opposition de la part de l'Église ; il est toutefois excommunié por les Luthériens orthodoxes en 1612.

Galileo Galilei (1564–1642) observa les satellites de Jupiter, les anneaux de Saturne et les phases de Venus à l'aide de sa lunette astronomique. Il se persuada ainsi de la justesse de la théorie de Copernic. En 1616, Galilée affirma que la théorie de Copernic n'était pas seulement

4. Pour plus de renseignements, consulter le site Web
`http://galileo.imss.firenze.it/museo/4/eiv06.html`.

un artifice mathématique, mais était la réalité physique. Ce point de vue causa à Galilée des ennuis avec l'Église : dans un premier temps, l'Inquisition déclara la doctrine copernicienne comme contraire aux enseignements de l'Écriture Sainte ; puis, après que Galilée a récidivé en publiant en 1632 son *Dialogue concernant les deux principaux systèmes du monde*, elle condamna Galilée à la prison à vie pour hérésie.

6.1.5 Les artistes

Les artistes de la Renaissance ont pour objectif principal de donner une représentation de la réalité la plus fidèle possible. Par exemple Alberti (1404–1472), della Francesca (1420–1492) et Dürer (1471–1528) utilisent la géométrie pour mieux rendre la perspective et les proportions. En peinture, les artistes mettent au point la technique des lignes de fuite pour déterminer le point de la toile où se rencontrent les projections de deux droites parallèles dans l'espace. Les travaux des opticiens sur les lentilles et sur le fonctionnement de l'œil participent de la même tradition.

Bien qu'ayant une activité mathématique fondée sur la géométrie d'Euclide, ces personnes ne se considèrent pas (et sont pas considérées) comme des mathématiciens. D'ailleurs, presque aucun livre mathématique de l'époque ne mentionne le nom de Dürer.

6.2 L'algèbre à la Renaissance

6.2.1 L'établissement d'un symbolisme

Nous avons vu dans le paragraphe 5.4.3 que les traités d'arithmétique marchande des professeurs de calcul du Moyen-Âge comportaient souvent un chapitre d'algèbre dédié à l'exposition de la solution des équations du deuxième degré et à l'exploration du problème pour les équations de degré supérieur.

L'algèbre du XIVe et de la plus grande partie du XVe siècle est rhétorique, comme chez Fibonacci. Aucun symbolisme n'est utilisé. Ainsi Maître Benedetto de Florence écrit « le carré plus 21 unités valent 10 choses » et non pas $x^2 + 21 = 10x$.

Des systèmes d'abréviations commencent toutefois à se mettre en place vers la deuxième moitié du XVe siècle. Ainsi un manuscrit toscan de cette époque propose de désigner la chose (c'est-à-dire l'inconnue x) par la lettre C, abréviation du mot toscan *cosa*, le carré (notre x^2) par la lettre Z comme *zenso*, et le cube (notre x^3) par la lettre Q comme *qubo*. Ensuite, la combinaison de mots *zenso di qubo*, abrégée en ZQ, sert à désigner $\big(x^3\big)^2 = x^6$; l'abréviation ZZZ sert à désigner $\big(\big(x^2\big)^2\big)^2 = x^8$; alors que CZZ est $x\big(x^2\big)^2 = x^5$. Avec ce système, une expression comme « 3 unités plus 12 carrés » s'abrège en $3\overline{p}Z12$.

Ce système, pas encore très commode, est progressivement amélioré afin de permettre l'écriture et la manipulation efficace d'expressions plus compliquées et plus longues. Un exemple remarquable est le cas du *Triparty*, un manuscrit écrit en 1484 par un dénommé Nicolas Chuquet (1445–1488). On trouve deux améliorations notables dans le *Triparty*. D'une part, Chuquet utilise un système de parenthésage, qui permet par exemple de distinguer facilement $\sqrt{14+\sqrt{180}}$ et $\sqrt{14}+\sqrt{180}$: le premier est noté $R^2\underline{14\,\overline{p}\,R^2 180}$, alors que le second est noté $R^2 14\,\overline{p}\,R^2 180$. D'autre part, Chuquet introduit une notation exponentielle pour les puissances de l'inconnue ; c'est ainsi qu'il écrit $3^0\overline{p}12^2$ pour notre $3 + 12x^2$. Le grand atout de cette notation exponentielle est qu'elle facilite les calculs : pour effectuer une multiplication, il suffit d'ajouter les exposants, comme l'indique notre formule moderne $x^m x^n = x^{m+n}$.

Les idées de Chuquet ne s'imposent toutefois pas tout de suite, peut-être en partie parce que son manuscrit n'est pas imprimé, et donc *a fortiori* pas diffusé à grande échelle. Il faudra attendre la publication en 1572 de l'*Algebra* de Rafael Bombelli pour que des idées analogues se répandent.

De nombreuses notations algébriques sont imaginées à la Renaissance. Par exemple, l'Allemand Michael Stifel (1487–1567) emploie les symboles $+$, $-$ et $\surd$ pour désigner les opérations d'addition, de soustraction et d'extraction de racine et popularise ces notations dans son ouvrage *Arithmetica integra* publié in 1544. Autre exemple : le signe $=$ apparaît pour la première fois en 1557 dans un ouvrage de Robert Recorde (1510–1558). Recorde justifie son choix en disant que « rien d'autre [que les deux lignes du signe =] ne peuvent être davantage égales » [5]. Le symbole $=$ ne fut toutefois pas immédiatement adopté de façon universelle, puisque l'abréviation *ae* (raccourci du mot latin *aequal*) et le symbole : : resteront employés jusqu'à la fin du XVII[e] siècle.

À ce stade, le symbolisme est toutefois plus un système d'abréviations qu'un véritable formalisme. Les expressions que les algébristes de la Renaissance manipulent sont de nature essentiellement numérique et ne comportent généralement qu'une seule inconnue. Les algébristes ne représentent pas les données connues d'un problème de façon symbolique. Ils n'écrivent ainsi pas la solution de l'équation $x^2 = bx + c$ sous forme d'une vraie formule comme $x = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 + 4c})$. Au contraire, ils présentent leurs procédures de résolution des équations en mots et sur des exemples numériques, comme le faisaient leurs prédécesseurs arabes et du Moyen-Âge.

6.2.2 La résolution de l'équation du troisième degré

Nous avons vu au paragraphe 5.4.3 que les maîtres de calcul italiens de la fin du Moyen-Âge se sont intéressés aux équations de degré supérieur à deux. Leurs efforts trouvent un aboutissement à la Renaissance, quand Scipione dal Ferro (1465–1526), un professeur à l'université de Bologne, invente dans les années 1500 un algorithme permettant de résoudre les équations du troisième degré. Del Ferro n'ébruite pas sa découverte, mais sur son lit de mort, il révèle la solution du « problème du cube et de la chose » (c'est-à-dire la solution des équations de la forme $x^3 + px = q$) à son disciple Antonio Maria Fior.

Fort de cette connaissance, ce dernier décide en 1535 d'affronter en concours Niccolo Fontana (1499–1557) dit Tartaglia (le bègue), un mathématicien ayant une certaine réputation. Chacun des candidats dispose de quelques jours pour répondre à trente questions choisies par son adversaire. Tous les problèmes que Fior pose à son challenger se ramènent à la résolution d'une équation du type $x^3 + px = q$; dans l'autre sens, Tartaglia pose des questions variées à Fior. À force de recherches, Tartaglia trouve la procédure de résolution générale des équations du troisième degré avant le dénouement du concours et résout alors tous les problèmes que Fior lui a posés. De son côté Fior, mathématicien plutôt médiocre, ne vient pas à bout des problèmes qui lui ont été soumis. Tartaglia remporte le concours et les honneurs (mais décline prudemment le banquet que Fior veut lui offrir...)

Le bruit se met alors à courir que l'équation du troisième degré est résolue. Gerolamo Cardano (1501–1576), professeur renommé de mathématiques et de médecine établi à Milan, souhaite inclure la méthode dans le livre de calcul arithmétique qu'il est en train d'écrire. Il écrit dans ce but à Tartaglia, mais ce dernier refuse, préférant écrire lui-même le premier

5. Because noe 2 thynges, can be moare equalle (en anglais dans le texte).

ouvrage exposant ce résultat. Après tractations, Tartaglia accepte de se rendre à Milan à l'invitation de Cardan et lui dévoile la procédure pour résoudre trois formes particulières de l'équation du troisième degré, à savoir $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$ et $x^3 + q = px$. En retour, Cardan promet sur la Bible de ne pas publier la méthode sans l'autorisation de Tartaglia.

Cardan tente alors de mieux comprendre les indications que Tartaglia lui a données. Il entreprend une étude systématique de l'équation du troisième degré et cherche notamment à montrer que les procédures de Tartaglia conduisent au bon résultat. Au cours de ce travail, il tombe sur le fait curieux suivant : dans le cas de l'équation $x^3 = 15x + 4$, la méthode de Tartaglia conduit à la solution $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, alors que $x = 4$ est clairement solution. Cardan écrit à Tartaglia pour avoir son avis sur la question, mais Tartaglia ne sait pas ou ne veut pas répondre et cherche à égarer Cardan sur de fausses pistes.

Impatienté et ayant eu vent de l'histoire entre dal Ferro et Fior, Cardan se rend alors à Bologne. En examinant un carnet de notes de dal Ferro, Cardan constate que Tartaglia n'a pas été le premier à découvrir la procédure de résolution des équations du troisième degré. Il s'estime alors délivré de sa promesse à Tartaglia. Considérant que son travail de clarification mérite d'être publié, il décide de rédiger un grand traité d'algèbre, l'*Ars magna sive de regulis algebraicis (La grande science, ou pour mieux dire, des lois algébriques)*, dans lequel il incorpore la résolution des équations du quatrième degré que venait de découvrir son élève Lodovico Ferrari (1522–1565). Cardan ne néglige pas d'expliquer les circonstances historiques de la découverte et cite le nom de tous les protagonistes. L'ouvrage est publié en 1545.

S'estimant floué, Tartaglia proteste et parvient à salir la réputation de Cardan. Ferrari prend alors la défense de son maître et propose que Tartaglia et lui s'affrontent publiquement lors d'un concours mathématique. L'espoir d'obtenir un poste à l'université de Brescia en cas de succès conduit Tartaglia à accepter ce défi. Les choses prenant toutefois mauvaise tournure, Tartaglia abandonne le concours, perdant alors une partie de sa réputation et l'emploi convoité.

Expliquons le principe de résolution des équations de la forme

$$x^3 = px + q. \tag{1}$$

Admettons que nous connaissions deux nombres a et b tels que [6]

$$3ab = p \quad \text{et} \quad a^3 + b^3 = q. \tag{2}$$

Alors

$$(a + b)^3 = 3ab(a + b) + (a^3 + b^3) = p(a + b) + q,$$

ce qui montre que le nombre $x = a + b$ est solution de (1). Il suffit donc de résoudre (2) pour avoir une solution de (1).

Mais il est facile de trouver les deux nombres $u = a^3$ et $v = b^3$, puisqu'on connaît leur somme et leur produit :

$$u + v = a^3 + b^3 = q \quad \text{et} \quad uv = (ab)^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3. \tag{3}$$

6. Ici, nous utilisons librement la notation algébrique moderne qui fait intervenir des indéterminées p et q et des inconnues auxiliaires a et b. Cette commodité n'est pas connue de Cardan, qui doit tout expliquer par des mots.

Si la quantité $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ est positive, alors la solution de (3) est donnée (à l'échange de u et v près) par

$$u = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \text{et} \qquad v = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Pour obtenir une solution de (2), il suffit alors d'extraire des racines cubiques de u et de v,

$$a = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad \text{et} \qquad b = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

et alors la quantité $a + b$ est une solution de (1) [7].

Dans le cas de l'équation $x^3 = 15x + 4$, la méthode de Cardan conduit à l'expression $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, alors que $x = 4$ est clairement solution. C'est cette observation qui avait tracassé Cardan, comme nous l'avons dit plus haut.

6.2.3 L'invention des nombres complexes

L'*Ars magna* de Cardan a une grande influence, mais il est très difficile à lire. Il est d'ailleurs écrit en latin, ce qui montre qu'il s'adresse à un public savant. Au milieu des années 1550, un ingénieur romain du nom de Rafael Bombelli (1526-1572) se décide à écrire un traité afin d'exposer la solution de l'équation du troisième degré de façon compréhensible pour un large public. Cet ouvrage, intitulé *Algebra*, et auquel Bombelli travaillera jusqu'à sa mort, connaîtra une large diffusion. Il est aujourd'hui considéré comme étant le sommet de l'algèbre italienne à la Renaissance.

L'*Algebra* s'inscrit dans la lignée de la plupart des autres traités d'algèbre de l'époque, comme ceux de Chuquet, de Stifel ou de Recorde mentionnés à titre d'exemples au paragraphe 6.2.1. Bombelli se veut bon pédagogue et expose l'algèbre depuis ses fondements. Compte tenu du public visé, il écrit en italien. Un autre détail qui facilite la lecture du texte de Bombelli est l'adoption de notations judicieuses : à l'instar de Chuquet, il utilise une notation exponentielle pour désigner les puissances successives de l'inconnue et met au point un système de parenthésage. Le tableau suivant présente quelques exemples des notations utilisées par Bombelli. (On peut noter les différences entre le manuscrit et le texte imprimé : souligner tout une expression était trop difficile pour les imprimeurs de l'époque !)

Notation moderne	Notations du manuscrit	Notations imprimées
$x^3 = 32x + 24$	$\overset{\overset{3}{\smile}}{1}\ a\ \overset{\overset{1}{\smile}}{32}\ p.\ \overset{\overset{0}{\smile}}{24}$	$\overset{\overset{3}{\smile}}{1}$ Eguale à $\overset{\overset{1}{\smile}}{32}$ p. $\overset{\overset{0}{\smile}}{24}$
$x^3 + 6x^2 - 3x$	$\overset{\overset{3}{\smile}}{1}\ p.\ \overset{\overset{2}{\smile}}{6}\ m.\ \overset{\overset{1}{\smile}}{3}$	$\overset{\overset{3}{\smile}}{1}$ p. $\overset{\overset{2}{\smile}}{6}$ m. $\overset{\overset{1}{\smile}}{3}$
$\sqrt{4 + \sqrt{6}}$	$\mathscr{R}\lfloor \underline{4\,p.\,\mathscr{R}\,6} \rfloor$	R.q. L 4 p. R.q. 6⅃
$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$	$\mathscr{R}^3 \lfloor \underline{2\,p.\,\mathscr{R}\lfloor \underline{0\,m.\,121} \rfloor} \rfloor$	R.c. L 2p. R.q. L 0 m. 121 ⅃⅃

7. Ici, nos hypothèses nous assurent que u et v sont des nombres réels positifs. On peut donc en extraire la racine cubique ordinaire, obtenant ainsi les deux nombres réels positifs a et b. Mais u et v ont également des racines cubiques complexes : si l'on pose comme de coutume $j = e^{i2\pi/3}$, alors a, ja et j^2a sont des racines cubiques de u et b, jb et j^2b sont des racines cubiques de v. Le système (2) a ainsi non pas une, mais trois solutions, à savoir les couples (a, b), (ja, j^2b) et (j^2a, jb) (en fait six solutions si l'on tient compte de la possibilité d'échanger a et b). Cela nous donne les trois racines de l'équation (1) : $a + b$, $ja + j^2b$ et $j^2a + jb$.

Outre ces notations très commodes, utilisées pour la première fois dans un ouvrage imprimé, l'*Algebra* de Bombelli présente deux nouveautés. La première est l'incorporation par Bombelli dans son ouvrage de plus d'une centaine de problèmes tirés des *Arithmétiques* de Diophante, dont les manuscrits retrouvés un siècle plus tôt à Venise par Regiomontanus venaient d'être transférés dans la bibliothèque du Vatican, tout près de la résidence de Bombelli. La seconde nouveauté, la plus importante pour le développement futur des mathématiques, est que Bombelli apporte une explication au phénomène observé par Cardan sur le cas particulier de l'équation $x^3 = 15x + 4$, à savoir que la formule $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ donnée par la méthode de Cardan-Tartaglia-dal Ferro représente la solution évidente $x = 4$.

Afin d'apporter une solution à ce problème, Bombelli introduit (selon ses propres mots) « une autre sorte de racine cubique très différente de la précédente, qui provient du chapitre sur le cube égal une chose et un nombre ». Ces nombres, ni positifs ni négatifs, sont appelés « più di meno » et « meno di meno ». Ce sont nos nombres imaginaires actuels. Bombelli écrit par exemple 2 *p. di m.* 3 pour notre $2+3i$ et 2 *m. di m.* 3 pour notre $2-3i$. Bombelli présente les règles de multiplication pour ces nouveaux nombres et donne de nombreux exemples montrant comment étendre les quatre opérations arithmétiques à ces nombres. Revenant au problème posé par $x^3 = 15x + 4$, Bombelli cherche à écrire

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = p + \sqrt{-q}$$

avec p et q entiers. En mettant au cube cette égalité, il vient

$$2 + \sqrt{-121} = \left(p + \sqrt{-q}\right)^3 = (p^3 - 3pq) + (3p^2 - q)\sqrt{-q},$$

de sorte qu'il suffit d'avoir

$$2 = p^3 - 3pq \qquad \text{et} \qquad \sqrt{-121} = (3p^2 - q)\sqrt{-q}. \tag{$*$}$$

Il vient alors

$$2 - \sqrt{-121} = (p^3 - 3pq) - (3p^2 - q)\sqrt{-q} = \left(p - \sqrt{-q}\right)^3,$$

d'où

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = p - \sqrt{-q}.$$

En faisant le produit

$$\left(2 + \sqrt{-121}\right)\left(2 - \sqrt{-121}\right) = \left(p + \sqrt{-q}\right)^3\left(p - \sqrt{-q}\right)^3,$$

on trouve $4 - \left(\sqrt{-121}\right)^2 = \left(p^2 - \left(\sqrt{-q}\right)^2\right)^3$, c'est-à-dire $(p^2 + q)^3 = 125$ puis $p^2 + q = 5$. Cette dernière équation a peu de solutions si l'on suppose, comme le fait Bombelli, que p et q sont des entiers positifs. Après quelques essais, on trouve que $p = 2$ et $q = 1$ est une solution de $(*)$. Bombelli peut alors écrire

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1},$$

et trouve ainsi

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4,$$

ce qui lui fournit l'explication cherchée. Bombelli est alors satisfait de son approche, car il écrit :

> Au début, cette chose me semblait davantage basée sur le sophisme que sur la vérité, mais j'ai cherché jusqu'à ce que j'ai trouvé une preuve.

L'*Algebra* de Bombelli est ainsi l'acte de naissance des nombres complexes. Pourtant les nombres complexes resteront encore longtemps tenus en suspicion. Le point qui pose le plus problème est que ces nouveaux objets mathématiques ne reposent pas sur une expérience intuitive immédiate. Deux siècles plus tard, cette difficulté n'est toujours pas résolue. Ainsi Euler (1707–1783), qui pourtant publie en 1748 la formule $e^{\nu\sqrt{-1}} = \cos\nu + \sqrt{-1}\sin\nu$, écrit en 1770 dans son *Introduction complète à l'algèbre* que

> Puisque tous les nombres qu'on puisse imaginer sont ou bien plus grands ou bien plus petits, ou bien égaux à 0, il est clair que les racines carrées de nombres négatifs ne peuvent être pris en compte parmi les nombres possibles. Et cette circonstance nous conduit au concept de tels nombres, qui par leur nature sont impossibles, et qui sont habituellement appelés *nombres imaginaires*, car ils ne peuvent trouver place que dans l'imagination.

Ce n'est qu'au début du XIX$^{\text{e}}$ siècle que les nombres complexes sont pleinement acceptés, d'une part grâce à l'apparition de modèles permettant de les représenter comme points du plan, ce qui leur donne une existence concrète, et d'autre part grâce aux travaux de Gauss (1777–1855) et de Cauchy (1789–1857) notamment, qui étendent considérablement le champ de la théorie. Mais ceci est une autre histoire...

6.2.4 Premiers pas vers l'acceptation des nombres négatifs

À la fin de la Renaissance, les algébristes européens n'acceptent pas encore pleinement les nombres négatifs :

- Chuquet manipule les nombres négatifs sur les quatre opérations et les emploie comme exposants de l'inconnue. De temps en temps, il accepte les solutions négatives des équations et les interprète comme dette. De temps en temps, il refuse de considérer les solutions négatives des équations.
- Au XVI$^{\text{e}}$ siècle, Stifel en Allemagne et Recorde en Angleterre regroupent les différents cas de l'équation du second degré en un seul $x^2 = bx + c$ (« des carrés égalent des choses plus un nombre ») et doivent pour cela accepter d'utiliser des coefficients b et c éventuellement négatifs. En revanche, ils n'acceptent pas les racines négatives des équations.
- Cardan sépare les équations du second et du troisième degré en différents cas selon les signes des coefficients, mais accepte parfois les racines « fictives ». Considérant par exemple l'équation $x^3 + q = px$, il observe qu'elle a toujours une racine négative, disons $-t$, où t est l'unique solution positive de l'équation $x^3 = px + q$, et qu'elle a zéro, une ou deux racines positives selon que $\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}$ est plus petit, égal, ou plus grand que q. Quand il y a deux racines positives, disons r et s, alors $t = r + s$.
- Bombelli refuse de prendre en considération les racines négatives des équations, mais accepte que l'équation $x^2 + 20 = 8x$ ait les deux racines « sophistiques » $4 + 2i$ et $4 - 2i$.

Chapitre 7

La naissance de la géométrie analytique

Résumé et objectifs du chapitre

Le changement majeur qui se produit au sein des mathématiques au cours du XVII^{e} siècle est l'introduction des méthodes algébriques au sein de la géométrie. Dans ce chapitre, nous présentons la première étape de cette révolution, à savoir l'invention de la géométrie analytique. Nous expliquons quelles préoccupations d'ordre méthodologique motivaient les créateurs de la nouvelle théorie et justifions ainsi la dénomination de géométrie analytique. Nous décrivons les transformations que Viète fait subir à l'algèbre afin qu'elle puisse servir d'aide à la géométrie. Enfin nous étudions le livre de Descartes sur la géométrie analytique pour discuter l'impact sur la géométrie de la nouvelle théorie.

7.1 Introduction

Au cours du XVI^{e} siècle, les mathématiques se présentent sous plusieurs saveurs différentes. L'algèbre est une méthode pour mettre en équation et résoudre des problèmes arithmétiques, dont les données sont spécifiées numériquement. La géométrie a retrouvé l'aspect bien poli qu'elle avait du temps des anciens Grecs. La partie la moins théorique de la géométrie et les techniques du calcul arithmétique s'allient et donnent naissance à des méthodes utiles à la résolution de problèmes pratiques, comme l'invention de la projection de Mercator permettant la confection de cartes utiles à la navigation sur les océans (voir le paragraphe 6.1.3).

Entre les années 1590 et 1630, plusieurs mathématiciens comprennent que la démarche algébrique, consistant à manipuler une donnée inconnue comme si elle était connue afin d'obtenir une équation puis à résoudre cette équation, convient non seulement à la résolution des problèmes arithmétiques mais également à l'étude des questions géométriques. Le fruit de leur réflexion va affecter les deux disciplines, algèbre et géométrie. En algèbre, l'innovation principale va consister à accepter qu'au cours de la mise en équation, toutes les grandeurs intervenant dans le problème soient représentées symboliquement, qu'elles soient données ou inconnues. Dès lors, l'algèbre va cesser d'être l'étude d'équations purement numériques et va devenir la manipulation de formules faisant intervenir plusieurs grandeurs indéterminées. En géométrie, la méthode « d'analyse algébrique » va désormais concurrencer l'utilisation de théorèmes démontrés par « voie de synthèse » (nous expliquerons ces désignations plus loin).

C'est en 1637 que ce courant de recherche parvient à maturité, avec l'apparition de deux ouvrages qui marquent la naissance de la géométrie analytique : d'une part la publication d'un livre intitulé *La Géométrie* dont l'auteur est René Descartes (1596–1650) ; d'autre part la circulation à Paris d'un manuscrit intitulé *Ad locos planos et solidos isagoge (Introduction aux lieux plans et solides)* et écrit par Pierre de Fermat (1601–1665). Nous examinerons l'ouvrage de Descartes au paragraphe 7.4. Avant cela, nous devons présenter le contexte mathématique qui a motivé les réflexions de Descartes.

7.2 Réflexions sur les mathématiques grecques

7.2.1 À la recherche des « vraies » mathématiques

Les géomètres humanistes de la Renaissance, éblouis par la beauté des résultats consignés dans les grands traités grecs, se demandent comment leurs lointains prédécesseurs avaient pu les découvrir. Une chose semble certaine : les mathématiciens grecs ne rédigeaient pas les mathématiques de la même manière qu'ils les trouvaient. Dans les années 1580–1640, plusieurs mathématiciens européens ont ainsi le sentiment que les Grecs disposaient d'une approche facilitant la découverte des résultats mathématiques. Descartes écrit par exemple dans l'appendice à la règle IV de ses *Règles pour la direction de l'esprit* (1628) :

> Mais quand après cela je réfléchissais, d'où donc résultait que les premiers inventeurs de la Philosophie jadis refusaient d'admettre à l'étude de la sagesse quiconque ignorant des Mathématiques, comme si cela devait être vu comme la plus facile et la plus nécessaire discipline devant être étudiée et préparée pour la pratique par l'esprit des autres sciences majeures, je soupçonnais franchement qu'ils connaissaient des mathématiques très différentes des mathématiques ordinaires de notre époque. (...) Et en vérité certains vestiges de ces vraies mathématiques sont de mon point de vue visibles chez Pappus et Diophante.

7.2.2 L'analyse grecque

Dans le texte ci-dessus, Descartes fait référence au livre 7 de la *Collection mathématique* de Pappus. Au début de ce livre, Pappus explique que les Grecs disposaient d'une méthode appelée analyse permettant de trouver la solution des problèmes de géométrie et révèle l'existence d'un corpus, le *Domaine de l'analyse*, qui avait été rédigé pour faciliter la mise en œuvre de cette méthode. Pappus commence ainsi son livre :

> Pris dans son ensemble, le *Domaine de l'analyse* est une ressource spéciale qui fut préparée, après que les *Éléments ordinaires* eussent été écrits, pour ceux qui veulent acquérir le pouvoir en géométrie de résoudre les problèmes qu'on leur pose ; et il est seul utile pour cela. Il a été écrit par trois hommes : Euclide l'homme des *Éléments*, Apollonius de Perge, et Aristaeus l'Ancien, et son approche est par l'analyse et la synthèse.

Pappus poursuit en expliquant le fonctionnement de cette méthode d'analyse :

> L'analyse est le chemin qui part de ce que l'on cherche, comme si cela était déjà connu, qui en explore les conséquences, pour arriver à quelque chose qui est établi par la synthèse. C'est-à-dire, en analyse nous supposons ce qui est cherché comme si on y était parvenu, et nous cherchons la chose dont cela découle, et à nouveau

> ce qui vient avant cela, jusqu'à ce qu'en reculant ainsi nous parvenions à une chose déjà connue, ou une chose qui ait le statut d'un principe premier. Nous appelons ce genre de méthode « analyse », comme pour dire « réduction à l'envers ». En synthèse, par renversement, nous supposons que ce qui a été obtenu en dernier dans l'analyse a déjà été atteint, et, replaçant maintenant les choses dans l'ordre naturel, en mettant d'abord ce qui auparavant venait après, et les ajustant les unes aux autres, nous atteignons la fin de la construction de ce qui était cherché. C'est ce que nous appelons « synthèse ».

Dans ce texte, Pappus oppose l'« analyse » et la « synthèse ». La synthèse est la méthode normalement suivie dans la rédaction des propositions. On part des objets décrits dans l'énoncé puis on procède par une suite d'étapes déductives, justifiées par l'utilisation d'axiomes et de propositions déjà prouvées, afin de parvenir au résultat désiré. Les théorèmes et les problèmes des *Éléments* d'Euclide suivent ce modèle de rédaction.

La synthèse est très satisfaisante comme méthode de rédaction, mais n'est d'aucun secours quand il s'agit de découvrir la solution à un problème. Souvent en effet, on ne comprend l'utilité des premières étapes d'une démonstration qu'à la fin de celle-ci. Autrement dit, les étapes qui, du point de vue logique, doivent être expliquées en premier, sont très éloignées du but visé et par conséquent difficiles à trouver. La méthode d'analyse a pour but de faciliter la découverte de la voie qui mène à la solution. Plutôt que de partir seulement des hypothèses formulées dans l'énoncé du problème en se dirigeant à l'aveuglette, on essaie de marcher à reculons en partant du résultat cherché : on va ainsi constater que pour arriver au résultat voulu, il suffit de parvenir à tel autre, et que cet autre résultat sera lui-même établi si tel problème est résolu, etc. La recherche se fait ainsi, selon les mots de Pappus, par une suite de « réductions » (voir le paragraphe 2.5.3).

Les mots « analyse » et « synthèse » ont longtemps été employés en mathématiques pour distinguer ces différentes étapes dans un raisonnement. Pendant l'analyse, on cherche à décortiquer le problème, à comprendre les relations entre les différents éléments qu'il comporte, et à trouver un chemin qui relie les hypothèses d'un problème au résultat cherché. Pendant la synthèse, on réorganise les résultats que l'analyse a permis de découvrir en rétablissant l'ordre logique dans lequel ils dépendent les uns des autres. La rédaction finale d'un texte, effectuée par voie de synthèse, ne garde ainsi généralement pas trace de la façon dont les résultats ont été trouvés. De ce point de vue, les *Arithmétiques* de Diophante constituent une exception, puisque l'étape d'analyse est explicitement décrite pour chacune des propositions (voir le paragraphe 3.4.2).

Le mot synthèse a aujourd'hui pratiquement disparu du vocabulaire mathématique, et le mot analyse a changé de sens, puisqu'il désigne désormais, d'après le dictionnaire, « la partie des sciences mathématiques qui étudie les fonctions, les limites, les dérivées et les primitives ». Néanmoins les modes de raisonnement d'analyse et de synthèse restent couramment utilisés de façon plus ou moins consciente.

7.2.3 Le *Domaine de l'analyse*

La méthode analytique consiste à essayer de ramener une situation nouvelle à un problème déjà étudié. Pour cela, il est très utile d'une part de connaître les constructions géométriques et les transformations qu'il est possible de faire sur une figure quand certains éléments sont donnés et d'autre part d'avoir une sorte de catalogue de problèmes pouvant servir de modèles.

Les douze traités que constituaient le *Domaine de l'analyse* avaient pour but de présenter tous les résultats permettant aux géomètres de mettre commodément en œuvre la méthode. Les trois quarts de ces traités n'ont pas survécu à la fin de l'Antiquité, mais nous pouvons toutefois nous faire une idée de leur contenu grâce à la description qu'en donne Pappus dans le livre 7 de la *Collection mathématique*. Pappus y présente les uns après les autres chacun de ces traités, en indiquant le thème général, en expliquant des lemmes intermédiaires destinés à faciliter la compréhension des traités originaux, et allant même jusqu'à mentionner pour chaque traité le nombre de définitions, de lemmes et de propositions !

Les deux premiers traités du *Domaine de l'analyse* sont des ouvrages généralistes, les *Données* et les *Porismes* d'Euclide. Viennent ensuite cinq traités d'Apollonius relatifs à des problèmes de détermination et de construction d'un point, intitulés *De la section selon un rapport*, *De la section selon une aire*, *De la section déterminée*, *Des inclinaisons* et *Des contacts*. Les quatre traités suivants traitent de problèmes de lieux, c'est-à-dire de problèmes dont la solution n'est plus un seul point, mais toute une courbe : il s'agit des *Lieux plans* d'Apollonius (problèmes dont la solution est une droite ou un cercle), des *Lieux solides* d'Aristaeus (problèmes dont la solution est une conique), des *Lieux sur les surfaces* d'Euclide et de *Sur les moyennes* d'Eratosthène. Le dernier livre que Pappus range dans le *Domaine de l'analyse* est *Les coniques* d'Apollonius, choix étrange mais peut-être justifié par son utilité pour l'étude de l'ouvrage d'Aristaeus.

Parmi ces traités, seuls les *Données* et les *Porismes* d'Euclide et les *Coniques* d'Apollonius existent encore à la Renaissance. Nous avons vu au paragraphe 6.1.2 que le but principal des géomètres humanistes de la Renaissance était de reconstituer le savoir mathématique grec. Des efforts sont donc faits pour tenter de restituer les ouvrages manquants à partir de la description qu'en donne Pappus : François Viète (1540–1603) travaille sur *Des contacts* vers 1600 ; Marino Ghetaldi (1566–1626) planche sur *Des inclinaisons* en 1607 ; Willebrord Snell (1580–1626) travaille sur *De la section selon une aire* et *De la section déterminée* dans les années 1607–1608 [1]. Ces travaux réglaient donc le cas des traités relatifs aux problèmes de construction d'un point. Le travail de restitution semblait en revanche beaucoup plus difficile pour les traités portant sur les problèmes de lieux.

7.3 L'art analytique de François Viète

Retrouver la méthode analytique des Grecs et restituer les traités perdus du *Domaine de l'analyse*, telles étaient deux des tâches que les géomètres des années 1580–1640 devaient accomplir. François Viète (1540–1603), un conseiller des rois de France Henri III et Henry IV, comprend que les méthodes algébriques peuvent servir de substitut à l'analyse perdue des Grecs. À la fin de sa vie, il entreprend d'expliquer (en latin) sa méthode dans une série de traités, connus collectivement sous le nom *L'art analytique*. Ainsi l'*Introduction à l'art analytique* et les *Zététiques* sont publiés en 1591 et 1593 ; les ouvrages *Premières notes sur le calcul sur les espèces*, *Résolution variée*, *Reconnaissance et correction des équations* et *Dernières notes sur le calcul sur les espèces* ne seront publiés qu'après la mort de leur auteur.

1. Un détail amusant dans cette histoire est que les mathématiciens de la fin de la Renaissance utilisent des noms d'emprunt lorsqu'ils essaient de restituer les traités perdus d'Apollonius. Ainsi Viète signe son ouvrage sous le nom d'Apollonius Gallus — l'Apollonius de la Gaule, tandis que Snell, originaire des Pays-Bas, adopte le nom d'Apollonius Batavius.

7.3.1 L'*Introduction à l'art analytique*

Viète explique le but et le fonctionnement de sa méthode dans son *In artem analyticam isagoge (Introduction à l'art analytique)*. Dans le chapitre I, il commence par réexpliquer le principe de la méthode analytique grecque, utilisant presque les mêmes mots que Pappus :

> Il y a en mathématiques une voie pour chercher la vérité dont il est dit qu'elle a été découverte par Platon, et qui est appelée Analyse par Théon et définie par lui comme la Supposition de la chose cherchée comme si elle était accordée et [l'arrivée] par les conséquences à une chose accordée comme vraie. À l'opposé de ceci est la Synthèse, [qui part] de la supposition des choses accordées [et arrive] par les conséquences au but et à la compréhension de la chose cherchée.

Mais Viète abandonne rapidement le cadre de la géométrie grecque et concentre sa réflexion sur la manipulation algébrique des grandeurs. Le chapitre IV, intitulé « Des règles du calcul sur les espèces », expose la principale nouveauté de l'ouvrage :

> Le calcul numérique est celui qui est réalisé par les nombres, le calcul spécieux est celui qui est réalisé par les espèces ou les formes des choses, comme cela est possible par les lettres de l'Alphabet.

L'art analytique de Viète est donc une nouvelle algèbre : elle ne se limite pas à la manipulation de nombres accompagnés d'une quantité numérique inconnue, mais affronte d'entrée de jeu le problème du calcul avec des grandeurs non numériques représentées par des lettres. Dans la suite du chapitre, Viète présente les quatre opérations que l'on peut faire, à savoir l'addition, notée $+$, la soustraction, notée $-$, la multiplication, désignée par le mot IN ou SUB, et la division, désignée par un trait de fraction. Viète donne aussi quelques règles de calcul, expliquant par exemple que si on soustrait $B-D$ de A, le résultat est $A-B+D$, et que si l'on multiplie $A-B$ par $D-G$, le résultat est A in D, moins A in G, moins B in G, plus B in G.

Les notation de Viète comprennent également un système de parenthésage semblable à celui de Chuquet et de Bombelli, ainsi que la notation $\sqrt{}$ pour les racines carrées. En revanche, Viète n'utilise pas les exposants pour désigner les puissances d'une grandeur. Ainsi le carré d'une grandeur A est désigné par A quadratum ou A q., son cube par A cubus ou A c., les puissances suivantes étant A qq., A qc., A cc., A qqc., A qcc., etc. Une autre particularité de Viète est que pour lui, toute grandeur possède un genre, c'est-à-dire une dimension : elle peut être une longueur, un plan (autrement dit une aire) ou un solide (autrement dit un volume) ; pour les dimensions supérieures, Viète utilise les termes de plan-plan, plan-solide, solide-solide, etc. Le genre d'une grandeur est indiqué dans la notation : la somme du cube d'une longueur A et d'un volume B est ainsi notée A cubus $+$ B solidus.

Dans les chapitres V à VII, Viète explique comment son art analytique peut être utilisé pour résoudre des problèmes géométriques, par exemple pour déterminer une grandeur comme une longueur, une aire ou un volume. Il faut considérer toutes les grandeurs présentes dans l'énoncé du problème, aussi bien les grandeurs données que les grandeurs cherchées, puis il faut traduire les conditions du problème en une égalité. Ceci fait, il faut simplifier puis résoudre l'équation obtenue afin d'exprimer les grandeurs cherchées en fonction des grandeurs données. Pour faciliter le procédé, Viète recommande de désigner les inconnues par des voyelles et les données par des consonnes. Voici le texte de Viète :

> Qu'aussi bien les grandeurs cherchées que les grandeurs données soient rendues semblables et comparées selon la condition de la question, en ajoutant, soustrayant, multipliant et divisant, tout en observant constamment la loi des homogènes. Il

> est manifeste qu'ainsi il sera finalement trouvé quelque chose égal à la grandeur cherchée ou à une puissance à laquelle elle sera élevée, ce quelque chose étant fait totalement à partir des grandeurs données, ou bien à partir des grandeurs données et de la grandeur inconnue cherchée, ou des puissances de cette dernière.
>
> Or afin que ceci soit aidé par l'art, il est nécessaire que les grandeurs données soient distinguées des inconnues cherchées par un signe constant, perpetuel et bien apparent, comme on peut le faire en désignant les grandeurs requises par la lettre A, ou une autre voyelle E, I, O, U, Y, et les données par les lettres B, C, D, ou quelque autre des consonnes.

La démarche présente un vague parallélisme avec la méthode d'analyse des anciens Grecs : en mettant au même niveau les grandeurs cherchées et les grandeurs données, on part de ce qu'on cherche à connaître. Pour reprendre les mots de Pappus (voir p. 96), on « [suppose] ce qui est cherché comme si on y était parvenu ». En fait, c'est toute la démarche algébrique de mise en équation qui est ainsi comparée à la méthode d'analyse grecque. Le mot « analyse » sera d'ailleurs utilisé en lieu et place du mot « algèbre » tout au long des XVII[e] et XVIII[e] siècles.

Dans la suite de l'*Introduction à l'art analytique*, Viète explique encore plusieurs procédés permettant de transformer les équations. L'antithèse par exemple consiste à faire passer un terme d'un membre d'une équation à l'autre membre en changeant son signe. L'hypobibasme (sic !) consiste à diviser les deux membres d'une équation par une même puissance d'une grandeur, lorsque celle-ci est présente dans tous les termes des deux membres. L'analogie consiste à transformer une proportion de la forme « A est à B comme C est à D » en une égalité A in D égale B in C.

7.3.2 Le programme de Viète

L'utilisation de lettres dans le calcul algébrique facilite la perception des relations que des problèmes différents entretiennent ; si par exemple deux problèmes conduisent à la même équation, c'est qu'ils ont un lien. C'est pour pouvoir observer et exploiter systématiquement ces relations que Viète écrit l'ensemble des traités formant *L'art analytique*. Certains de ces traités rassemblent des méthodes permettant de passer d'une équation à une autre ; d'autres constituent des recueils de problèmes-types dont la résolution peut et doit servir de modèle. *L'art analytique* est donc destiné à jouer pour la méthode de Viète le rôle que le *Domaine de l'analyse* jouait pour la méthode analytique des géomètres grecs.

Pour donner un exemple, citons l'énoncé du théorème VIII du chapitre IX du *De la correction des équations* :

> Si D in A quad. $+B$ in D in $A-A$ cubo, est égal à B cubo [alors] : $\overline{B+D}$ in $A-$ A quad., est égal à B quadrato.

Autrement dit, Viète affirme ici que l'égalité $DA^2 + BDA - A^3 = B^3$ entraîne l'égalité $(B + D)A - A^2 = B^2$.

7.3.3 Les *Zététiques*

Quand on y regarde de plus près, on s'aperçoit que Pappus n'est pas la seule source grecque dont Viète s'est inspiré. En effet dans le traité intitulé *Les Zététiques* [2], Viète présente

2. Dans la terminologie de Viète, le Zététique est la partie de l'art analytique chargée de la mise en équation des problèmes.

des problèmes du même genre de ceux que Diophante avait traités dans les *Arithmétiques* (voir le paragraphe 3.4). L'inspiration va même au-delà d'une simple variation sur le thème, car 23 des 82 problèmes présentés dans les *Zététiques* reprennnent directement des énoncés traités par Diophante. Voici à titre d'exemple le problème 17 du second livre des *Zététiques* (pour en faciliter la lecture, nous avons modernisé les notations de Viète) :

> Étant données la différence des côtés, et la différence des cubes : trouver les côtés.
>
> Soit donnée B la différence des côtés. Quant à la différence des cubes, D solide. Il faut trouver les côtés.
>
> Soit E la somme des côtés, alors $E+B$ sera le double du plus grand côté, et $E-B$ sera le double du plus petit côté. Mais la différence de leurs cubes est $6BE^2+2B^3$, qui est par conséquent égal à $8D$ solide. Ainsi $\frac{4D\text{ sol.}-B^3}{3B} = E^2$. Mais quand un carré est donné, le côté l'est aussi ; et quand la différence de [deux] côtés et la somme des [deux] mêmes [côtés] sont données, les [deux] côtés sont donnés.
>
> Ainsi donc la différence des côtés et la différence des cubes étant données, la somme des côtés peut être trouvée. C'est un fait que
>
> *Quatre fois la différence des cubes, moins le cube de la différence des côtés, étant appliqué au triple de la différence des côtés, donne le carré de la somme des côtés.*

Dans ce problème, Viète demande de trouver deux nombres (les « côtés »), disons x et y avec $x > y$, dont on connaît la différence $x-y$ ainsi que la différence des cubes x^3-y^3. Ainsi les deux nombres $B = x-y$ et $D = x^3-y^3$ sont supposés donnés. Viète appelle alors E la somme $x+y$ des deux nombres, puis écrit que $E+B = 2x$ et $E-B = 2y$, puis calcule

$$8D = 8(x^3-y^3) = (2x)^3-(2y)^3 = (E+B)^3-(E-B)^3 = 6BE^2+2B^3,$$

puis il en déduit la valeur de E^2, à savoir $E^2 = \frac{4D-B^3}{3B}$. Ainsi E^2, puis E et enfin $x = (E+B)/2$ et $y = (E-B)/2$ peuvent être déterminés à partir des données de l'énoncé, ce qui résout le problème posé.

On observera dans ce texte que Viète adopte un découpage euclidien de sa proposition (voir le paragraphe 2.6.3) : on trouve en effet successivement l'énoncé, l'exposition, la détermination, la construction-démonstration, et la conclusion.

La nouveauté du travail de Viète ressort particulièrement clairement quand on le compare avec l'œuvre de Diophante. En effet dans l'exposition de ses problèmes, Viète désigne les grandeurs données par des lettres (les consonnes B et D dans l'exemple ci-dessus), tandis que Diophante se servait de l'exposition pour spécifier les valeurs numériques des nombres donnés utilisées dans la résolution. Viète a parfaitement conscience des avantages de sa méthode, car il écrit à la fin du chapitre V de l'*Introduction à l'art analytique* :

> D'autre part c'est Diophante qui, le plus subtilement de tous, a exploité le Zététique dans les livres qu'il a rédigés au sujet de la chose Arithmétique. Mais comme il a donné sa leçon par les nombres et non par les espèces (dont il s'est pourtant servi), il faut davantage admirer sa subtilité et son ingéniosité : tandis que les choses apparaissent plus subtiles et plus confuses dans le calcul des nombres, elles sont immédiatement plus familières et plus naturelles dans le calcul sur les espèces.

Ce que Viète dit ici, c'est que le fait d'utiliser des lettres clarifie les calculs et permet de mieux suivre la démarche. Le point à comprendre est que quand on utilise des nombres, on effectue les opérations arithmétiques au fur et à mesure qu'on avance dans la résolution du problème, ce qui cache la route suivie. En revanche quand on utilise des lettres, on garde automatiquement la trace de toutes les étapes de calcul et de raisonnement.

7.3.4 Résumé de l'apport de Viète

Viète comprend qu'un certain nombre de problèmes géométriques peuvent être résolus grâce à des calculs algébriques. Sa méthode transforme l'algèbre, en cela que le calcul qu'il met au point ne porte pas sur les nombres, mais sur des lettres symbolisant des grandeurs numériques ou géométriques. Les quantités inconnues d'un problème sont ainsi traitées de la même manière que les grandeurs données, ce qui permet à Viète de revendiquer pour son calcul le nom de méthode (ou d'art) analytique. Viète utilise notamment sa méthode pour revisiter les *Arithmétiques* de Diophante.

La méthode de Viète offre plusieurs avantages. D'abord la résolution des problèmes d'arithmétique du genre de ceux traités par Diophante est plus facile à suivre quand les données sont représentées par des lettres plutôt que par des nombres. Ensuite la mise en place d'une théorie des équations permet de déceler les liens qui unissent des problèmes à première vue différents.

Malgré leur exceptionnelle importance, les travaux de Viète se diffusent assez mal dans le milieu mathématique. Christopher Clavius (1538–1612), un des pédagogues les plus réputés de son époque, écrit en 1608 un traité d'algèbre qui ne prend pas en compte les progrès effectués par Viète. Le nom de Viète est connu à Paris dans les années 1620–1630, mais les savants parisiens n'utilisent pas son formalisme et ne contribuent pas à l'avancée du programme de recherche qu'il a inspiré. Les idées de Viète se diffusent un peu mieux en Angleterre : Thomas Harriot (1560–1621), avec lequel Viète avait entretenu une correspondance, écrit à la fin de sa vie un traité d'algèbre qui combine les idées de Viète avec les siennes ; et en 1631, William Oughtred (1574–1660) reprend dans son livre *Clavis mathematicae (Les clés des mathématiques)* toutes les idées du chapitre V de l'*Introduction à l'art analytique*.

Viète aura toutefois un successeur exceptionnel : Fermat. Nous avons vu au paragraphe 7.2.3 que Viète avait tenté une restitution du traité *Des contacts* d'Apollonius, qui est un recueil de problèmes demandant la construction de points. Les problèmes de lieux posent beaucoup plus de problèmes aux mathématiciens du début du XVII^e siècle. Fermat réussit à comprendre comment il est possible d'utiliser l'algèbre de Viète pour étudier de telles questions et découvre ainsi le lien entre équations reliant deux variables inconnues et courbes dans le plan. Ce lien est perçu à la même époque par Descartes, et c'est la contribution de ce dernier que nous allons maintenant examiner.

7.4 La méthode de Descartes

René Descartes (1596–1650) est désormais surtout connu pour ses travaux en philosophie, mais a également apporté quelques contributions aux mathématiques (on parle par exemple de « repère cartésien »), à la physique (loi de Snell-Descartes en optique) et à la médecine (Descartes donna une description correcte des connexions nerveuses des yeux au cerveau).

Issu d'un milieu aisé, il reçoit une bonne éducation dans un collège jésuite et y étudie les textes classiques grecs, donc Aristote, Euclide, Archimède et Apollonius, ainsi que les traités de calcul arithmétique de Christopher Clavius, un pédagogue renommé des années 1600–1620. Descartes semble séduit dès cette époque par le caractère sûr de la démarche mathématique. Racontant sa jeunesse au début de son *Discours de la Méthode* (1637), il écrit :

> Je me plaisois surtout aux mathématiques, à cause de la certitude et de l'évidence de leurs raisons : mais je ne remarquois point encore leur vrai usage ; et, pensant qu'elles ne servoient qu'aux arts mécaniques, je m'étonnois de ce que leurs fondements étant si fermes et si solides, on n'avoit rien bâti dessus de plus relevé.

Après avoir voyagé en Europe, Descartes décide en 1628 de s'installer aux Pays-Bas. Sa fortune personnelle lui permet de ne pas exercer de métier. Il entame alors des recherches scientifiques. Vers 1635, il rédige quelques-uns de ses résultats. Descartes est particulièrement fier de la méthode qu'il a suivi, dont il pense qu'elle lui a permis de rendre ses idées claires et justes. Il la met en avant dans son ouvrage, qu'il intitule *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, et relègue ses idées scientifiques dans trois « appendices » intitulés *La Dioptrique*, *Les Météores* et *La Géométrie*, appendices qui constituent en fait le plus gros de l'ouvrage. Descartes, dont l'ambition est de faire avancer la philosophie aussi bien que les sciences, espère que ces trois appendices seront appréciés par leurs lecteurs et assureront la publicité de sa méthode. Il écrit ainsi dans une lettre :

> J'ai essayé dans ma *Dioptrique* et mes *Météores* de montrer que ma Méthode est meilleure que l'ordinaire, et dans ma *Géométrie*, je l'ai démontré.

7.4.1 *La Géométrie* de René Descartes

Nous avons vu au début de ce chapitre (paragraphe 7.2.1) que Descartes pensait que les traités des anciens Grecs ne reflétaient pas leur manière de faire des mathématiques et qu'il serait souhaitable de retrouver leurs « vraies mathématiques ». Dans la suite du texte que nous avions cité (*Règles pour la direction de l'esprit*, appendice à la règle IV), Descartes trouve pertinente l'idée que l'algèbre, convenablement reformulée, peut servir de substitut à ces vraies mathématiques :

> Finalement, il y a eu quelques hommes les plus habiles, qui se sont efforcés dans ce siècle de faire ressusciter [les vraies mathématiques] : car cela semble ne pas être autre chose que cet art, qui est appelé par le nom barbare d'Algèbre, si l'on pouvait le dégager de la multitude des nombres et des figures inexplicables qui l'obscurcissent, de sorte qu'il ne lui manque plus l'évidence et la simplicité que nous supposons devoir être dans la vraie mathématique.

Neuf ans plus tard, Descartes répète sa pensée dans la seconde partie du *Discours de la Méthode* :

> J'avois un peu étudié, étant plus jeune, entre les parties de la philosophie, à la logique, et, entre les mathématiques, à l'analyse des géomètres et à l'algèbre, trois arts ou sciences qui sembloient devoir contribuer quelque chose à mon dessein. Mais, en les examinant, je pris garde que, pour la logique, ses syllogismes et la plupart de ses autres instructions servent plutôt à expliquer à autrui les choses qu'on sait (...) qu'à les apprendre. Puis, pour l'analyse des anciens et l'algèbre des modernes, outre qu'elles ne s'étendent qu'à des matières fort abstraites, et qui ne semblent d'aucun usage, la première est toujours si astreinte à la considération des figures, qu'elle ne peut exercer l'entendement sans fatiguer beaucoup l'imagination ; et on s'est tellement assujetti en la dernière à certaines règles et à certains chiffres, qu'on en a fait un art confus et obscur qui embarrasse l'esprit, au lieu d'une science qui le cultive.

Descartes s'assigne donc trois tâches : trouver une méthode qui permette de faire des découvertes mathématiques (au contraire de la logique qui ne sert qu'« à expliquer à autrui les choses qu'on sait ») ; clarifier la géométrie à l'aide de l'algèbre afin de ne plus être dépendant des figures ; débarrasser l'algèbre des nombres qui l'encombrent. On retrouve à peu près la même problématique que chez Viète[3].

La Géométrie est un petit ouvrage d'une centaine de pages comprenant trois Livres. Voici son plan :

Livre premier

Des problèmes qu'on peut construire sans y employer
que des cercles et des lignes droites.

Livre second

De la nature des lignes courbes.

Livre troisième

De la construction des problèmes solides ou plus que solides.

7.4.2 L'algèbre des lignes

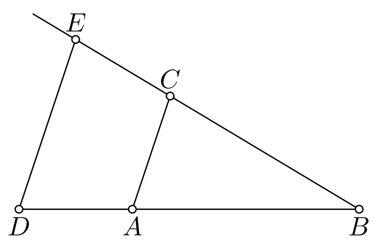
Dans le Livre premier, Descartes explique les principes de sa méthode pour traiter les problèmes de géométrie. La première phrase de l'ouvrage est :

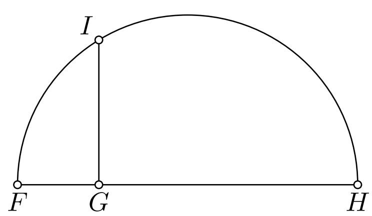
> Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connoître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.

Pour Descartes, tous les problèmes de géométrie peuvent donc être réduits à des questions de longueurs de segments. Dans ce contexte, Descartes s'attache d'abord à montrer comment les opérations de l'algèbre (c'est-à-dire les quatre opérations arithmétiques et les extractions de racine) agissent sur les longueurs de segments. Il lui sera ensuite possible d'utiliser les ressources de l'algèbre comme un outil d'étude en géométrie, capable de manipuler les longueurs de segments sans avoir besoin d'examiner en permanence la figure.

Par exemple pour réaliser le produit de deux longueurs BD et BC, Descartes se donne un segment BA de longueur unité[4] et trace la figure de gauche ci-après, sur laquelle les droites DE et CA sont parallèles ; le produit cherché BD fois BC est alors BE.

Pour prendre la racine carrée d'une longueur GH, Descartes ajoute au segment GH un segment FG de longueur unité, trace le cercle de diamètre FH, et élève depuis le point G une ligne droite GI jusqu'au cercle, perpendiculairement à la droite FH (figure de droite ci-après). La longueur GI est la racine cherchée.





3. Bien que Descartes ait réfléchi à ces questions presque quarante ans après Viète, il semble qu'il n'ait pas eu directement connaissance des travaux de ce dernier avant que *La Géométrie* ne soit publiée.

4. L'utilisation d'un tel segment de longueur unité permet à Descartes de considérer qu'un produit de deux longueurs est une longueur et non pas une aire. Cela simplifie la situation (il n'y a plus qu'un seul type d'objet, les longueurs) et donne plus de souplesse (par comparaison, Viète précise en permanence la dimension des grandeurs qu'il manipule).

L'étape suivante consiste à trouver une notation adéquate pour ces opérations. Descartes préconise d'utiliser des lettres comme a, b, etc. L'addition de deux longueurs a et b, qui s'obtient en mettant les segments bout-à-bout est notée $a+b$. La soustraction, le produit, le quotient, la racine carrée et la racine cubique sont notées $a-b$, ab, $\frac{a}{b}$, $\sqrt{a}$ et $\sqrt{\mathrm{C.}\ a}$. Descartes utilise la notation exponentielle pour les puissances successives : a, a^2, a^3, etc. Ceci fait, Descartes explique le cœur de sa méthode :

> Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons, ce qui se nomme une équation ; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles équations qu'on a supposé de lignes qui étoient inconnues. Ou bien, s'il ne s'en trouve pas tant, et que nonobstant on n'omette rien de ce qui est désiré en la question, cela témoigne qu'elle n'est pas entièrement déterminée. Et lors on peut prendre à discrétion des lignes connues pour toutes les inconnues auxquelles ne correspond aucune équation.

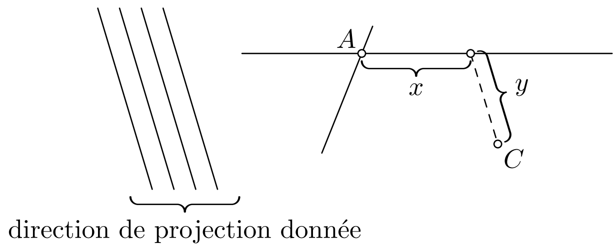
L'idée de donner un nom à toutes les longueurs, aussi bien celles qui sont données que les inconnues, rappelle évidemment l'art analytique de Viète. (Il y a toutefois une petite différence dans les notations : Descartes désigne les données connues par les premières lettres de l'alphabet a, b, c et les inconnues par les dernières x, y, z.) La grosse nouveauté par rapport à Viète réside dans les deux dernières phrases : s'il y a plus d'inconnues que d'équations, alors le problème n'a pas qu'un nombre fini de solutions, mais au contraire on peut fixer arbitrairement quelques-unes des grandeurs inconnues. Par cette phrase, Descartes exprime sa compréhension du fait qu'une équation à deux inconnues correspond à une courbe.

La démarche qu'aujourd'hui nous suivons quand nous voulons résoudre un problème de lieu géométrique par la géométrie analytique suit les préceptes que Descartes énonce ici. On commence par prendre un point M qu'on suppose être solution du problème, et on appelle (x, y) ses coordonnées, qui sont des longueurs de segments inconnues mais nécessaires à la construction de M. Ensuite, on nomme les autres longueurs présentes sur la figure ; par exemple on se donne les coordonnées des autres points utiles au problème. Enfin on écrit les équations qui traduisent les conditions requises. La seule amélioration notable depuis Descartes est qu'aujourd'hui, on utilise de façon systématique un système de coordonnées, alors que Descartes ne dispose pas de la notion explicite de repère [5].

La fin du livre premier de *La Géométrie* a pour but d'illustrer par un exemple l'efficacité de la méthode. Descartes y aborde l'étude du « problème de Pappus ». Il s'agit d'un problème de lieu, dont Descartes trouve l'énoncé dans le livre 7 de la *Collection mathématique* de Pappus. Ce dernier précise de surcroît qu'aucun des grands géomètres grecs de l'Antiquité n'a réussi à résoudre le problème en toute généralité. Ce problème constitue une aubaine pour Descartes, qui saisit là l'occasion de montrer la supériorité de sa méthode mathématique, et donc celle de sa méthode philosophique.

5. La terminologie « repère cartésien » que nous utilisons aujourd'hui n'est donc pas pleinement justifiée, puisque ce n'est pas Descartes qui a dégagé le concept basé sur l'existence de deux axes de coordonnées. Le mot « coordonnée » quant à lui est employé pour la première fois par Leibniz en 1692.

La technique que Descartes utilise dans sa solution au problème de Pappus revient à choisir un axe de coordonnées (et non pas deux axes de coordonnées comme aujourd'hui) et une direction de projection. La position du point C cherché est alors définie par les deux longueurs x et y indiquées sur la figure ci-dessous.



Par la méthode de Descartes, le lieu des points C cherchés dans le problème de Pappus est donné par une équation liant x et y. À chaque valeur de y correspond une ou plusieurs possibilités pour x ; quand y varie, le point C varie et prend plusieurs positions sur une courbe. L'équation elle-même ne dépend que des données du problème.

De plus, dans les cas du problème de Pappus « à quatre ou à cinq droites », l'équation en x et y qui exprime le lieu cherché est du second degré en x. Alors à chaque fois qu'on se donne une valeur pour y, la valeur de x est donnée par une équation du second degré, disons $x^2 = \pm ax \pm b$, où les coefficients a et b dépendent des données du problème de Pappus et de y. La solution de cette équation s'écrit explicitement par les formules bien connues en fonction des coefficients a et b, formules qui ne font intervenir que les opérations de l'algèbre, à savoir l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction de racine carrée. Or nous avons vu plus haut que pour Descartes, ces opérations sont des constructions géométriques effectuables à la règle et au compas. Ceci entraîne qu'il est possible de construire des points solutions du problème de Pappus à la règle et au compas. En d'autres termes, les calculs algébriques ayant menés à l'équation $x^2 = \pm ax \pm b$ et à sa résolution correspondent à des constructions géométriques ; mais l'algèbre permet de faire ces constructions sans y penser, sans qu'il soit nécessaire de se concentrer pour ajouter des éléments auxiliaires sur une figure. L'algèbre remplace donc le raisonnement géométrique.

7.4.3 Courbes et équations

Dans le Livre second, Descartes entreprend une classification des courbes. Descartes adopte le point de vue selon lequel la géométrie est la construction effective de lieux. Quand l'analyse d'un problème mène à une équation reliant deux inconnues, alors le lieu cherché est une courbe. La construction de points sur cette courbe nécessite souvent d'autres courbes. Descartes pense que la bonne méthode est d'ordonner les courbes, en partant de la plus simple et en allant vers la plus compliquée, de sorte que la construction de points sur une courbe puisse se faire en utilisant des courbes de complexité moindre.

Pour Descartes, les courbes les plus simples sont les droites et les cercles. À l'aide de ces deux courbes, on peut produire sur les longueurs de lignes les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division, et d'extraction de racine carrée. Ces opérations sont suffisantes pour résoudre les équations du second degré. Donc en n'utilisant que des droites et des cercles, on peut construire des points sur les coniques, qui sont les courbes dont l'équation est du deuxième degré. De même, on peut obtenir géométriquement les solutions de n'importe quelle équation du troisième degré en déterminant le point d'intersection de deux coniques bien choisies[6]. Donc les coniques permettent à leur tour de déterminer des points sur les courbes données par une équation du troisième (et aussi du quatrième) degré. Descartes affirme (sans preuve) qu'on peut continuer et obtenir ainsi une classification complète en terme de complexité. On sait aujourd'hui que cette affirmation est erronée.

Un autre thème important du Livre second de *La Géométrie* est que Descartes perçoit que l'équation d'une courbe non seulement permet de la construire point par point, mais qu'en plus elle permet de déterminer les tangentes et les normales à cette courbe. Nous examinerons au paragraphe 8.6.1 le procédé que Descartes met au point.

7.4.4 La théorie des équations de Descartes

Les problèmes examinés dans le Livre second (construction géométrique de points sur une courbe d'équation donnée et détermination de tangentes) ont besoin d'un outil algébrique performant pour leur résolution. Pour que la géométrie analytique soit une méthode universelle, applicable à tous les problèmes de la géométrie, il faut de plus que cet outil propose des résultats généraux. Descartes propose à cette fin une théorie des équations dans le Livre troisième de *La Géométrie*.

Le premier résultat contenu dans ce livre affirme qu'une équation en une variable a un nombre de racines égal à son degré. Descartes écrit ainsi :

> Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité.

Descartes entreprend d'expliquer ce résultat par un exemple. Il explique qu'on obtient l'équation dont les racines sont 2, 3 et 4 en multipliant entre elles les équations $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$ et $x - 4 = 0$, de sorte que l'on trouve $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$. Les racines négatives sont prises en compte, pas exactement en tant que nombres négatifs (Descartes ne veut manipuler que des longueurs, donc des nombres positifs) mais en tant que

> racines [qui] sont fausses ou moindres que rien ; comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'un quantité qui soit 5, on a
>
> $$x + 5 = 0,$$
>
> qui, étant multiplié par
>
> $$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,$$
>
> fait
>
> $$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$
>
> pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vraies qui sont 2, 3, 4, et une fausse qui est 5.

Descartes sait également que dans certains cas, une équation de degré n a moins de n racines. Il écrit ainsi :

> Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune

6. Cette méthode avait déjà été étudiée par des mathématiciens arabes, voir le paragraphe 4.6.3.

quantité qui corresponde à celles qu'on imagine ; comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0,$$

il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2.

Mais Descartes ne pousse pas plus loin les investigations sur la nature de ces racines imaginaires. Bien que postérieur à Bombelli, Descartes n'utilise pas les nombres complexes (voir le paragraphe 6.2.3).

Dans ce Livre troisième, on trouve aussi les formules générales pour les racines de l'équation du troisième degré $z^3 = -pz + q$ (Descartes mentionne à leur sujet que « Cardan [en] attribue l'invention à un nommé Scipio Ferreus ») ainsi que la méthode pour résoudre les équations du quatrième degré.

7.5 Conclusion

La géométrie analytique est inventée à peu près simultanément par Descartes et Fermat vers 1635. Cette invention trouve son origine dans des réflexions méthodologiques sur les mathématiques, réflexions elles-mêmes liées à la réception des mathématiques grecques.

Les mathématiciens européens de la fin de la Renaissance connaissent l'existence d'une méthode utilisée par les anciens géomètres grecs et appelée par eux analyse. Les traités grecs permettant la mise en œuvre de cette méthode avaient malheureusement été perdus à la fin de l'Antiquité. Les mathématiciens européens constatent que la méthodologie algébrique, qui permet grâce à la notion d'inconnue de placer dans le calcul les grandeurs cherchées sur le même plan que les grandeurs données, peut servir de substitut à cette méthode d'analyse. C'est la raison pour laquelle l'introduction des méthodes algébriques en géométrie est appelée « géométrie analytique ».

Le mariage entre algèbre et géométrie profite aux deux disciplines. D'une part, l'algèbre est transformée de façon à permettre la manipulation d'expressions comportant des grandeurs symboliques, une tâche plus générale que la simple étude des procédés de résolution d'équations numériques. Pour que l'algèbre puisse jouer son rôle d'outil universel, il convient également de développer une théorie générale des équations. Du côté de la géométrie à présent, les problèmes d'existence et de construction peuvent être désormais traités de façon systématique grâce à l'algèbre. L'algèbre permet par ailleurs une meilleure organisation des connaissances géométriques : la présence d'une même équation dans deux problèmes différents révèle un lien caché ; les courbes peuvent être classées de la plus simple à la plus complexe simplement en examinant le degré des équations qui les définissent.

La découverte du lien entre courbes dans le plan et équations en deux variables est importante à deux titres. Le premier est que l'équation contient beaucoup d'information sur la courbe : non seulement elle décrit la position des points de la courbe, mais elle permet aussi de déterminer les tangentes, la convexité, etc. Descartes et Fermat ont conscience de cela, puisque chacun des deux met au point une méthode pour déterminer les tangentes à une courbe à partir de son équation. La deuxième raison est que grâce aux équations, il devient possible de considérer de nombreuses nouvelles courbes. L'étude de ces courbes va alimenter la réflexion des mathématiciens dans les années 1640–1680, accompagnant ainsi la création du calcul infinitésimal.

Chapitre 8

Les origines du calcul infinitésimal

Résumé et objectifs du chapitre

Ce chapitre expose quelques-unes des méthodes que les mathématiciens employaient dans les deux premiers tiers du XVII^{e} siècle pour étudier les questions qui, aujourd'hui, sont du ressort du calcul différentiel et intégral. Il montre les progrès que l'utilisation du calcul algébrique a permis d'accomplir et souligne le caractère dispersé et non systématique des méthodes.

8.1 Introduction

Au début du XVII^{e} siècle, l'attention se porte sur des problèmes de géométrie qui n'avaient pas été étudiés de façon systématique par les géomètres grecs de l'Antiquité. Parmi ces problèmes se trouvent la détermination des tangentes à une courbe, les problèmes de rectification (détermination de la longueur des courbes), de quadrature (détermination de l'aire des surfaces) et de cubature (détermination du volume des solides), la recherche des centres de gravité des lignes, des surfaces et des solides, et l'étude des questions de cinématique (c'est-à-dire l'étude du mouvement).

Les Grecs de l'Antiquité s'étaient déjà intéressés à ces questions. Ainsi Archimède avait effectué la quadrature de plusieurs surfaces et la cubature de quelques volumes (voir le paragraphe 2.7.1). Chemin faisant, Archimède avait déterminé les centres de gravité de ces figures. Il avait également déterminé les tangentes à une figure plane appelée aujourd'hui « spirale d'Archimède ». De son côté, Apollonius avait fait l'étude complète des tangentes aux coniques (voir le paragraphe 2.7.2).

Au début du XVII^{e} siècle, les mathématiciens européens se mettent à examiner de nouvelles figures géométriques, obtenues par des constructions variées. Par exemple, la géométrie analytique inventée dans les années 1630 par Descartes et Fermat permet de définir de nombreuses nouvelles courbes. Les méthodes des anciens Grecs montrent leurs limites sur ces nouveaux exemples. En revanche, les ressources du calcul algébrique permettent aux mathématiciens européens du XVII^{e} siècle de résoudre les problèmes que ces nouvelles figures suggèrent. Les premiers résultats sont obtenus par des raisonnements *ad hoc*, spécifiques au problème étudié, puis progressivement, des méthodes générales sont mises au point. Nous dresserons un bilan de la situation dans le paragraphe 8.8.

8.2 Les conditions de travail des mathématiciens au XVII^e siècle

Avant d'aborder l'étude des différentes méthodes mises au point au cours du XVII^e siècle, il nous faut dire quelques mots sur la situation des savants à l'époque.

Au XVII^e siècle en Europe, il n'y a pas de système établi d'enseignement supérieur ou de recherche, et les savants ne sont pas rémunérés pour leurs contributions aux progrès de la science. Ceux d'entre eux qui ne disposent pas d'une fortune personnelle doivent donc faire coexister leur activité scientifique avec une activité professionnelle. Cette contrainte fait qu'il n'y a qu'une poignée de mathématiciens actifs dans toute l'Europe, de sorte que le milieu scientifique est très fragile. Ainsi la disparition en 1647 des deux plus importants disciples de Galilée, Bonaventura Cavalieri (1598–1647) et Evangelista Torricelli (1608–1647), laisse l'Italie sans mathématicien. La France occupe le haut de l'affiche dans les années 1640–1650 avec des personnes comme Descartes, Fermat, Blaise Pascal (1623–1662) ou Gilles Personne de Roberval (1602–1675) ; mais la relève n'est pas assurée, ce qui fait que l'activité mathématique décline brutalement en France à la fin des années 1650. À cette même date, un professeur à l'université de Leyden (Pays-Bas), Frans van Schooten (1615–1660), rassemble autour de lui une petite équipe de jeunes mathématiciens qui perfectionnent les méthodes de Descartes ; mais la plupart des élèves de van Schooten, happés par d'autres occupations, ne poursuivent pas longtemps leurs recherches. Seul Christiaan Huygens (1629–1695), le plus brillant des élèves de van Schooten, fera une carrière scientifique, aidé en cela par sa nomination comme pensionnaire de l'Académie Royale des Sciences à Paris lors de la création de cette dernière en 1666. (Nous reviendrons sur les Académies des sciences au paragraphe 10.1, quand nous parlerons du XVIII^e siècle.)

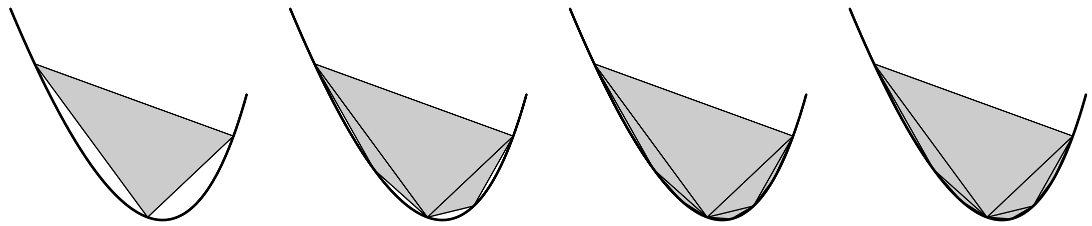
Un autre point, lié au précédent, est qu'aucune structure n'est en place pour faciliter la communication entre savants. Les éditeurs capables de publier un ouvrage de mathématiques sont peu nombreux et demandent souvent que les auteurs contribuent aux frais d'impression ; de plus, il est généralement difficile de se procurer les rares livres édités. La plupart des échanges scientifiques se font par correspondance privée entre les savants, ou par communication orale, le bouche à oreille en quelque sorte. Quelques personnages jouent un rôle central dans l'organisation des échanges épistolaires en servant de relais entre les différents savants : c'est le cas de Marin Mersenne (1588–1648) en France dans la première moitié du XVII^e siècle et de John Collins (1625–1683) et Henry Oldenburg (1615–1677) en Angleterre dans la seconde moitié du XVII^e. Mersenne, qui est en contact avec la plupart des savants français de son époque, comme Descartes, Fermat, Roberval et Étienne Pascal, ainsi qu'avec des savants étrangers comme Galilée et Torricelli, transmet à ses correspondants des copies des manuscrits qu'on lui envoie, selon les demandes qui lui sont faites. Mais malgré les efforts de Mersenne, il apparaît clairement que l'absence d'un bon système de communication entre savants fait que le développement des mathématiques à cette époque est plutôt irrégulier. En fait, plusieurs des méthodes mises au point sont mal diffusées et n'ont que peu d'influence malgré leur efficacité et leur élégance. De plus, cette situation génère un bon nombre de conflits de priorité et d'accusations de plagiat, c'est-à-dire d'utilisation de résultats d'autrui sans mention de leur source.

Enfin, les mathématiciens du XVII^e siècle estiment généralement plus important de savoir trouver la solution d'un problème que d'arriver à en donner une preuve parfaite. Dans bien des écrits, les résultats sont présentés sous forme de défi. Les auteurs de ces résultats cachent souvent leurs méthodes, soit pour conserver leur avance sur leurs concurrents, soit pour masquer leur manque de rigueur. Les malentendus qui résultent de cette pratique est une source fréquente de querelles entre les savants.

8.3 L'héritage grec

8.3.1 Problèmes de quadratures

Nous avons mentionné dans le paragraphe 2.7.1 qu'Archimède était parvenu à réaliser la quadrature des segments de paraboles. Dans le traité *Quadrature de la parabole*, Archimède s'emploie à écrire une preuve parfaitement rigoureuse de son résultat, dans le cadre d'un système axiomatique complètement explicité. Cette preuve, qui exige de connaître par avance le résultat auquel on veut arriver, est relativement longue[1]. Appelant S l'aire du segment de parabole et T l'aire du triangle (voir la figure p. 45), Archimède commence par construire dans le segment de parabole une suite de polygones de plus en plus gros, qui finissent par remplir le segment de parabole, et dont les aires sont successivement T, $\left(1+\frac{1}{4}\right)T$, $\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)T$, ...



aire en grisé = T $\qquad \left(1+\frac{1}{4}\right)T \qquad \left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)T \qquad \left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)T$

Ces aires sont donc plus petites que $\frac{4}{3}T$ mais s'en approchent de plus en plus puisque

$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{64}+\cdots=\tfrac{4}{3}.$$

À ce stade, Archimède utilise un double raisonnement par l'absurde. Si l'on suppose que $S>\frac{4}{3}T$, alors comme les polygones finissent par remplir le segment de parabole d'aire S, les aires de ces polygones deviennent de plus en plus proches de S, donc finissent par dépasser $\frac{4}{3}T$, ce qui n'est pas le cas. Si l'on suppose que $S<\frac{4}{3}T$, alors comme les aires des polygones deviennent de plus en plus proches de $\frac{4}{3}T$, elles finissent par dépasser S, ce qui est impossible puisque les polygones sont inscrits dans le segment de parabole d'aire S. Ces impossibilités prouvent l'égalité $S=\frac{4}{3}T$.

Cette méthode de preuve, basée sur le remplissage d'une figure curviligne d'aire inconnue par des figures rectilignes d'aires connues, fut baptisée « méthode d'exhaustion » (du latin *exhaurere*, épuiser) par Grégoire de Saint-Vincent (1584–1667). La mise en œuvre de cette méthode est lourde : d'une part, il faut s'assurer que les polygones remplissent complètement la figure curviligne dont on cherche la quadrature (la méthode usuelle est de prouver par un argument géométrique que l'aire omise est divisée par un facteur au moins deux à chaque itération) ; d'autre part, l'absence d'un concept adéquat de limite rend nécessaire le recours au raisonnement par l'absurde. Les mathématiciens du XVII^e siècle reprochent enfin à la méthode d'exhaustion de n'être qu'une méthode d'exposition de preuve, inadaptée à la découverte de nouveaux résultats.

1. Nous renvoyons les lecteurs intéressés par davantage de détails concernant la preuve d'Archimède à l'ouvrage *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales* cité en bibliographie, p. 170 et suivantes.

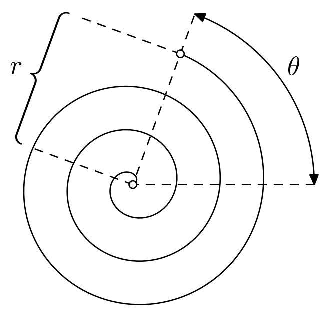
Dans son traité, Archimède explique aussi la méthode qui l'a amené à sa découverte. Il s'agit de considérations de mécanique. Plus précisément, Archimède découpe la parabole en trapèzes très fins et met par la pensée ceux-ci en balance avec des petites tranches du triangle, les deux figures étant placées aux deux extrémités d'un levier imaginaire. Cette approche n'est pas rigoureuse car Archimède n'essaie pas de faire rentrer l'idée d'un découpage en morceaux de plus en plus fins dans un cadre axiomatique précis, mais elle est proche de l'esprit des mathématiciens de la fin du XVI^{e} et du début du XVII^{e} siècle. En effet, elle fait appel à des dispositifs mécaniques, très à la mode à cette époque, et semble prometteuse pour la découverte de nouveaux résultats. Quand les mathématiciens européens du début du XVII^{e} siècle intéressés par les problèmes de quadrature se tournent vers l'œuvre d'Archimède, ils sont donc naturellement amenés à essayer de rendre plus commodément maniable l'idée de découper les surfaces et les solides en morceaux infiniment petits.

8.3.2 Problèmes de tangentes

Les géomètres de la Grèce antique ont peu abordé la question de la détermination des tangentes à une courbe. Il semble y avoir plusieurs raisons à cela.

D'une part, leur définition des tangentes était assez restrictive et peu propice aux généralisations. Par exemple, Euclide définit une tangente à un cercle comme étant « une droite, qui touche ce cercle, et qui étant prolongée ne le recoupe pas ». Cette définition fonctionne pour les cercles, elle marche aussi pour les coniques, mais elle n'est par contre pas généralisable à toutes les courbes : une droite tangente à une spirale par exemple recoupe cette dernière en plusieurs points. Au contraire, notre définition moderne, qui décrit une tangente à une courbe comme la limite des directions des cordes menées entre deux points de la courbe se rapprochant l'un de l'autre, s'adapte à un grand nombre de situations. Mais notre définition moderne n'est pas compatible avec le savoir des anciens Grecs qui, nous l'avons déjà dit, ne disposaient pas d'un concept adéquat de limite.

D'autre part, les Grecs se sont intéressés à relativement peu de courbes et n'ont donc pas eu l'occasion de chercher une méthode générale permettant la détermination des tangentes. Hormis le cercle et les coniques, ils n'ont en effet considéré que quelques courbes particulières construites spécialement pour la résolution de certains problèmes. Un exemple de telle courbe est fourni par la spirale d'Archimède (figure ci-dessous) : cette courbe, pour laquelle la distance r d'un point au centre est proportionnelle à l'angle θ formé par le rayon avec une droite de référence, semble avoir été inventée pour apporter une solution aux problèmes du genre de la trisection de l'angle : en effet, elle permet de traduire des rapports de longueurs en rapports d'angles et vice-versa. La méthode utilisée par Archimède pour étudier les tangentes à cette spirale ne peut pas s'adapter à d'autres courbes.

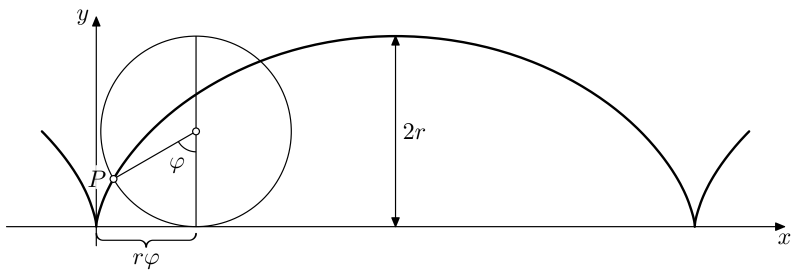


Les mathématiciens du XVII^e siècle avaient donc essentiellement tout à inventer en ce qui concernait les questions liées aux tangentes.

8.4 De nouvelles figures géométriques

Les mathématiciens du XVII^e siècle inventent un grand nombre de nouvelles figures géométriques, qui suggèrent de nouveaux problèmes et qui fournissent des exemples sur lesquels l'efficacité des méthodes conçues pour traiter les questions de quadrature, de rectification, de tangentes, etc. est testée.

L'intérêt de l'époque pour les dispositifs mécaniques, visible par ailleurs dans les travaux de Galilée sur la chute libre des corps, met à la mode les courbes et les surfaces engendrées par un mouvement. Un des procédés imaginés consiste à faire tourner une courbe autour d'un axe, pour obtenir des surfaces dites de révolution. Un autre exemple est fourni par la cycloïde, c'est-à-dire la trajectoire d'un point fixé à la circonférence d'un cercle lorsque ce dernier roule sur une droite – en termes concrets, c'est la trajectoire d'une valve P sur une roue de bicyclette.



La représentation paramétrique moderne de la cycloïde est donnée par

$$\begin{cases} x(\varphi) = r(\varphi - \sin\varphi) \\ y(\varphi) = r(1 - \cos\varphi). \end{cases}$$

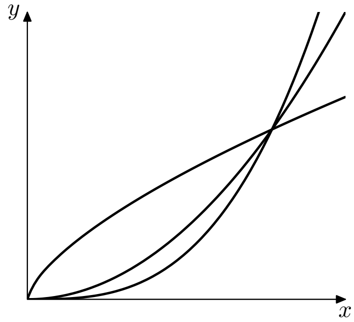
Une autre idée, qui donne elle aussi naissance à de nouvelles courbes, est de faire se couper deux surfaces. Voici encore une autre possibilité utilisée à l'époque : on dessine sur la surface d'un cylindre une figure, en utilisant le fait que le cylindre soit un objet à trois dimensions, puis on fait rouler le cylindre sur un plan et on contemple la marque faite sur le plan par la figure. En fait, ces idées traduisent également le fait que le language mathématique de l'époque n'était pas assez riche pour décrire toutes les situations imaginées. Il est en effet aujourd'hui assez facile de décrire la cycloïde à l'aide d'une représentation paramétrique, mais à l'époque, la notion de fonction (et *a fortiori* de fonction trigonométrique) n'existait pas.

La principale source de nouveaux exemples de courbes provient toutefois de la géométrie analytique. Grâce à la méthode que lui et Descartes ont inventé, Fermat peut par exemple définir des « paraboles supérieures » et des « hyperboles supérieures ». Ce sont les courbes dont nous écririons aujourd'hui l'équation sous la forme $(y/b) = (x/a)^\alpha$, où a et b sont deux unités de longueur et où l'exposant α est un nombre rationnel. Le cas $\alpha = 2$ correspond à la parabole ordinaire et le cas $\alpha = -1$ correspond à l'hyperbole ordinaire. Les mathématiciens de la première moitié du XVII^e siècle, faute d'être habitués à utiliser les exposants fractionnaires ou négatifs, présentent toutefois de manière séparée les différents cas possibles de l'équation

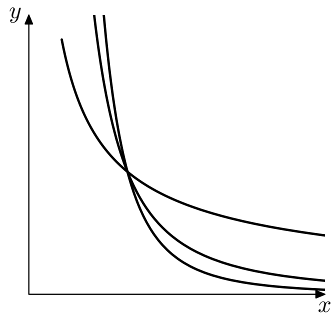
$(y/b) = (x/a)^\alpha$ en distinguant les formes suivantes :

$$(y/b)^n = (x/a)^m \qquad \text{si } \alpha = \frac{m}{n} \quad \text{avec } m,\, n \text{ entiers positifs} \quad \text{(paraboles supérieures)},$$

$$(y/b)^n = (a/x)^m \qquad \text{si } \alpha = -\frac{m}{n} \quad \text{avec } m,\, n \text{ entiers positifs} \quad \text{(hyperboles supérieures)}.$$



$$y/b = (x/a)^2$$
$$y/b = (x/a)^3$$
$$(y/b)^3 = (x/a)^2$$



$$y/b = (a/x)^2$$
$$y/b = (a/x)^3$$
$$(y/b)^3 = (a/x)^2$$

Toutes ces nouvelles courbes posent de nouvelles questions. Les mathématiciens du XVII^{e} siècle essaient par exemple de déterminer la longueur de ces courbes, ainsi que l'aire qu'elles délimitent ou encore le volume à l'intérieur des surfaces de révolution engendrées par la rotation de ces courbes. La cycloïde est une courbe qui fascine à cette époque (et qui est également source de bien des querelles — elle est même appelée l'« Hélène des géomètres » en référence à l'héroïne de l'*Iliade*) : les tangentes à cette courbe sont déterminées par Descartes et Roberval, sa quadrature est effectuée par Roberval, et sa rectification est trouvée en 1658 par le mathématicien anglais Christopher Wren (1632–1723). Motivés par ces exemples, les mathématiciens du XVII^{e} siècle cherchent donc des méthodes pour résoudre ces nouveaux problèmes. Il y a évidemment un grand intérêt pour trouver des méthodes générales, capables de s'adapter au plus grand nombre de situations possibles.

8.5 Méthodes de quadratures

8.5.1 La théorie des indivisibles

Les mathématiciens du début du XVII^{e} siècle intéressés par les problèmes de quadrature ressentent l'obligation de calquer leur manière de rédiger sur le modèle des anciens Grecs comme une contrainte qui freine les progrès. L'idée émerge alors, selon laquelle il est plus simple d'utiliser librement des quantités infiniment petites. Les astronomes Kepler et Galilée furent parmi les premiers promoteurs de cette idée. Dans son *Dialogue concernant les deux grands systèmes du monde* de 1632, Galilée proclame par exemple que

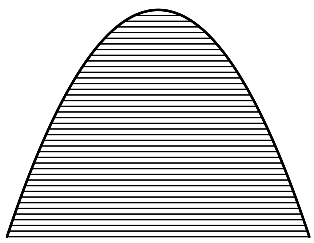
> Il est vrai et nécessaire qu'une ligne soit constituée de points, et que le continuum soit constitué d'indivisibles.

Faisant cela, il s'éloigne du point de vue des philosophes grecs, selon lequel des points sans grandeur mis bout à bout ne pouvaient pas former une ligne. (Euclide par exemple ne définit pas une ligne droite comme un ensemble de points, mais comme « ce qui n'a pas de largeur ».)

Un élève de Galilée, Cavalieri, essaie de transformer cette idée en une théorie plus systématique. Ses deux livres *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota (Géométrie, promue d'une nouvelle manière par les indivisibles du continuum)* (1635) et *Exercitationes geometricae sex (Six exercices géométriques)* (1647) reçoivent une large publicité et exercent une influence durable durant tout le XVII[e] siècle. Ils deviennent rapidement la source la plus citée en matière de quadrature, si l'on excepte les traités d'Archimède.

Bien que son concept d'indivisibles soit relativement naïf, Cavalieri parvient à développer des techniques assez puissantes pour séduire un grand nombre de mathématiciens de l'époque. Voici ce dont il s'agit.

Pour Cavalieri, une surface plane consiste en un nombre indéfini de lignes droites parallèles. Une ligne variable appelée règle se déplace, en restant toujours parallèle à elle-même, et découpe la surface en lignes, qui sont vues comme les éléments indivisibles constituant la totalité de la figure.

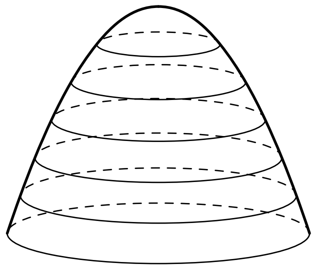


L'objectif de Cavalieri est de pouvoir comparer deux figures planes en comparant leurs éléments indivisibles. Un résultat de base de la théorie de Cavalieri s'énonce, avec des notations modernes, de la façon suivante. On contemple deux figures planes F_1 et F_2, et on les considère comme formées de leurs éléments indivisibles. Si les longueurs ℓ_1 et ℓ_2 des segments formant ces éléments indivisibles sont toujours deux à deux égales ($\ell_1 = \ell_2$), alors les aires des figures sont égales.

De manière plus générale, le rapport entre les aires de deux figures est, d'après Cavalieri, égal au rapport entre la longueur totale de leurs lignes indivisibles :

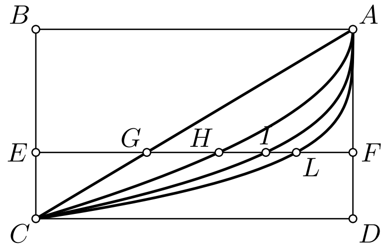
$$\frac{\text{aire } F_1}{\text{aire } F_2} = \frac{\text{somme des longueurs } \ell_1}{\text{somme des longueurs } \ell_2}.$$

Cavalieri étend également sa méthode aux volumes, qu'il mesure en les coupant par des plans parallèles les uns aux autres.



Utilisant des résultats de ce genre comme fondement, Cavalieri échafaude une théorie. Un des progrès qu'il fait est de calculer l'aire sous les paraboles supérieures. Construisant les courbes AGC, AHC, AIC, ALC de sorte que

$$\begin{aligned} FG/AB &= AF/AD \\ FH/AB &= (AF/AD)^2 \\ FI/AB &= (AF/AD)^3 \\ FL/AB &= (AF/AD)^4, \end{aligned}$$



Cavalieri parvient à montrer que si [2]

> Nous appelons (...) $AGCD$ le premier espace diagonal du parallélogramme BD, la figure trilinéaire $AHCD$ le second, $AICD$ le troisième, $ALCD$ le quatrième, etc. Alors je dis que le parallélogramme BD est deux fois le premier, trois fois le second, quatre fois le troisième, cinq fois le quatrième, etc.

Autrement dit, les aires des surfaces curvilignes $AGCD$, $AHCD$, $AICD$ et $ALCD$ valent respectivement la moitié, le tiers, le quart et le cinquième de celle du parallélogramme $ABCD$.

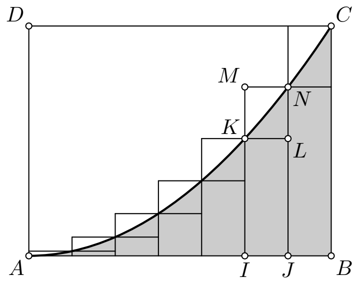
Le raisonnement de Cavalieri est assez complexe. Pour montrer le cas de l'aire de $AICD$ par exemple, il doit comparer la somme des longueurs des segments FI au quart de la somme des longueurs FE, ou encore, comparer la somme des cubes des longueurs FG au quart de la somme des cubes des longueurs FE. Pour parvenir à ce résultat, Cavalieri effectue un calcul assez astucieux, mais difficile à comprendre. Les difficultés viennent d'une part de l'absence de toute notation algébrique dans le texte de Cavalieri, et d'autre part de l'utilisation du concept ambigu de « tous les cubes du triangle ACD », expression que nous avons traduit abusivement par « somme des cubes des longueurs FG ». Cette ambiguïté fera naître plusieurs critiques sur le travail de Cavalieri. Ce dernier est d'ailleurs conscient des difficultés logiques de son approche puisqu'il reconnaît la nécessité d'utiliser la méthode d'exhaustion pour rédiger des preuves rigoureuses.

8.5.2 L'école française

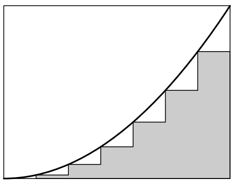
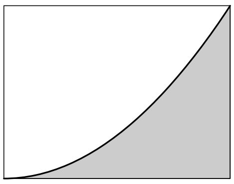
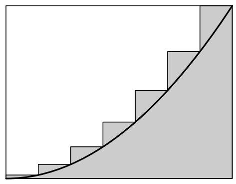
La détermination des aires sous les « paraboles supérieures » était, nous l'avons dit, un problème d'actualité dans les années 1630. En 1636, Roberval et Fermat parviennent au même résultat que Cavalieri. Ils considèrent un entier positif k et deux longueurs $AB = a$ et $BC = b$, et s'intéressent à la courbe d'équation $y/b = (x/a)^k$. (Sur la figure ci-dessous, le point C a

2. Pour le texte complet, voir l'ouvrage *A Source Book in Mathematics* par D. J. Struik, Harvard University Press, 1969, p. 210 et suivantes.

pour coordonnées (a, b) et est donc sur la courbe.) Roberval et Fermat cherchent à déterminer l'aire située sous la courbe (en grisé sur la figure).



Pour faire cela, ils partagent le segment AB en n sous-intervalles égaux de longueur a/n (on a choisi $n = 7$ pour faire la figure) et encadrent l'aire cherchée entre des sommes d'aires de rectangles inscrits et circonscrits, de la façon suivante :

aire  $<$ aire  $<$ aire  .

Il reste à évaluer les deux aires en escalier. Les rectangles circonscrits à la parabole, analogues à $IJNM$, sont de largeur a/n et ont pour hauteurs successives $b \times \left(\frac{1}{n}\right)^k$, $b \times \left(\frac{2}{n}\right)^k$, $b \times \left(\frac{3}{n}\right)^k$, ..., $b \times \left(\frac{n}{n}\right)^k$. L'aire de la figure de droite est donc $ab \times \left(1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k\right)/n^{k+1}$. On calcule tout aussi aisément l'aire des rectangles du genre $IJLK$ et donc l'aire de la figure de gauche. Finalement l'encadrement s'écrit

$$ab\,\frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k}{n^{k+1}} < \text{ aire sous la courbe } < ab\,\frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}. \tag{1}$$

Parvenus à ce point, Roberval et Fermat doivent évaluer la somme $1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$. Roberval rappelle alors la valeur de la somme des premiers nombres, puis calcule celle des premiers carrés, des premiers cubes, etc.

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \cdots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \\
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Après ces essais pour les petites valeurs de k, Roberval affirme qu'il sait montrer l'encadrement

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k + n^k. \tag{2}$$

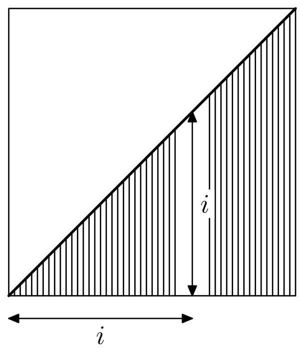
On compare alors (1) et (2), et on constate que l'aire sous la courbe et $ab/(k+1)$ sont toutes deux encadrées par les deux membres extrêmes de l'inégalité (1). Comme la différence entre ces deux membres, qui vaut ab/n, peut être rendue arbitrairement petite en prenant n assez grand, on en déduit que l'aire sous la courbe vaut $ab/(k+1)$, c'est-à-dire $1/(k+1)$ fois l'aire du rectangle $ABCD$. (Nous avons ici un peu modernisé l'argument de Roberval.) Cet énoncé généralise donc à toutes les valeurs de k le résultat de Cavalieri mentionné dans le paragraphe précédent.

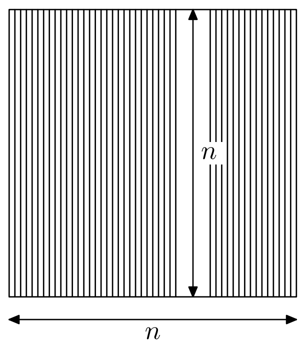
Roberval, Fermat ainsi que les autres mathématiciens français de l'époque (parmi lesquels Étienne Pascal (1588–1651), le père de Blaise) obtiennent de nombreux autres résultats du même genre. Roberval effectue par exemple la quadrature de la cycloïde (il montre que l'aire sous l'arche de la cycloïde est le triple de celle du cercle qui l'engendre, voir le paragraphe 8.4 pour la définition de la courbe) et détermine les volumes de divers solides obtenus en faisant tourner autour d'un axe des segments de parabole ou d'hyperbole. Fermat quant à lui met au point en 1658 une méthode qui permet d'effectuer la quadrature des paraboles et des hyperboles supérieures de manière plus simple que celle expliquée ci-dessus, puisqu'elle ne nécessite pas d'estimer les sommes $1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$.

Roberval et Fermat ne publient pas leur travaux. Pour Roberval, il s'agit de conserver l'exclusivité de ses méthodes : le poste que Roberval occupe au Collège Royal depuis 1634 est remis au concours tous les trois ans, et Roberval a besoin de garder un avantage sur ses concurrents. Les raisons de l'attitude de Fermat sont moins claires. D'après l'historien Michael Mahoney, Fermat n'aurait trouvé du plaisir en mathématiques que dans la résolution de nouveaux problèmes et de défis ; il n'aurait pas été disposé à investir du temps dans la rédaction de preuves rigoureuses.

8.5.3 Wallis

L'œuvre majeure de John Wallis (1616–1703) est son *Arithmetica infinitorum (L'arithmétique des infinis)*, publiée en 1656. Wallis cherche à comprendre les travaux de Cavalieri. Il a entendu parler des méthodes du géomètre italien mais n'a pas pu se procurer ses ouvrages. Il réutilise l'idée de comparer l'aire de deux surfaces en comparant la somme des longueurs des lignes qui constituent ces surfaces, en précisant qu'il faut supposer que les lignes soient uniformément espacées, comme si elles avaient toutes une même petite épaisseur. Ainsi outillé, Wallis compare l'aire d'un triangle avec l'aire du rectangle dont il est la moitié en comparant la somme des longueurs des lignes du triangle à la somme des longueurs des lignes du rectangle.





Considérons d'abord que le triangle est formé d'un nombre fini n de lignes. Ces lignes étant régulièrement espacées, leurs longueurs forment une progression arithmétique, disons 0, 1, 2, 3, ..., n (à multiplication par une constante près). Les longueurs des lignes qui forment le rectangle sont toutes égales à la plus grande longueur des lignes du triangle, c'est-à-dire n (à la multiplication par la même constante près). Le rapport entre la longueur totale des lignes formant le triangle et celle des lignes formant le rectangle est donc

$$\frac{0+1+2+3+\cdots+n}{n+n+n+n+\cdots+n},$$

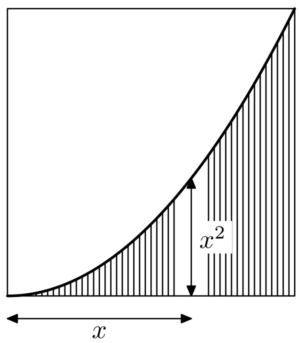
et Wallis calcule que ce rapport vaut $\frac{1}{2}$, indépendamment de la valeur de n. Le rapport entre l'aire du triangle et l'aire du rectangle vaut donc $\frac{1}{2}$.

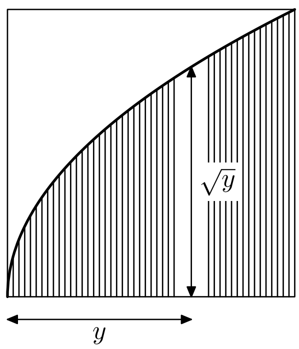
Wallis cherche ensuite à comparer l'aire sous la parabole $y/b = (x/a)^2$ (figure de gauche ci-après) et l'aire du rectangle qui la contient. Pour cela, il lui faut, selon le même principe, calculer la valeur de

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^2+n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2}.$$

Cette somme vaut $\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$ pour tout nombre entier n fini. Le rapport entre l'aire sous la parabole et l'aire du rectangle s'obtient alors lorsque les lignes deviennent infiniment minces, autrement dit lorsque le nombre n de lignes devient infini (Wallis introduit d'ailleurs ici le symbole ∞). Dans ce cas limite $n = \infty$, le rapport vaut $\frac{1}{3}$, c'est-à-dire que l'aire sous la parabole est le tiers de l'aire du rectangle complet.

En prenant le complément de cette aire dans le rectangle, on en déduit que l'aire sous la courbe $x/a = \sqrt{y/b}$ (figure de droite ci-dessous) est les deux tiers de l'aire du rectangle.





Wallis comprend ainsi qu'il y a un sens à écrire que

$$\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n}+\cdots+\sqrt{n}} \to \frac{2}{3} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$$

pour n infini. Wallis observe alors que le schéma général qu'il a observé pour plusieurs valeurs de k entières

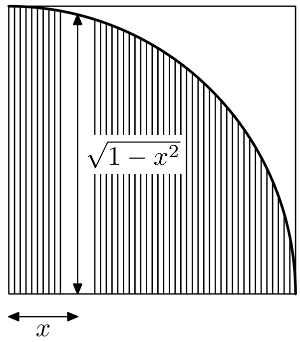
$$\frac{0^k+1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^k+n^k+n^k+n^k+\cdots+n^k} \to \frac{1}{1+k} \qquad (*)$$

reste valable pour l'exposant $k = 1/2$ si l'on écrit $\sqrt{n} = n^{1/2}$. Des considérations analogues mènent aux notations $\sqrt[3]{n} = n^{1/3}$ ou $n^0 = 1$. Wallis énonce alors que le résultat $(*)$ est valable pour toute valeur de k, entière ou fractionnaire, en écrivant :

> Si nous prenons une série infinie de quantités, partant d'une valeur ou de zéro, croissant continûment dans le rapport de n'importe quelle puissance, entière ou fractionnaire, alors le rapport du total à une série formée d'autant de nombres égaux à la plus grande quantité est un divisé par l'indice de la puissance plus un.

Encouragé par ce succès, Wallis tente d'aborder le problème de la quadrature du cercle par une méthode analogue. La figure ci-dessous le conduit à essayer d'estimer la valeur du rapport

$$\frac{\sqrt{n^2-0}+\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-9}+\cdots+\sqrt{n^2-n^2}}{n+n+n+\cdots+n}$$



avec n infini. Wallis choisit d'attaquer ce problème en le généralisant, plus précisément en calculant la valeur du rapport

$$\frac{(n^2-0)^k+(n^2-1)^k+(n^2-4)^k+(n^2-9)^k+\cdots+(n^2-n^2)^k}{n^{2k}+n^{2k}+n^{2k}+\cdots+n^{2k}}$$

pour n infini et pour différentes valeurs de k. Grâce à $(*)$, Wallis peut calculer les valeurs pour k entier, puis parvient à estimer la valeur pour $k = 1/2$ sous la forme d'un produit infini par une interpolation astucieuse [3]. Il parvient ainsi à la formule suivante :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times\cdots}{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times\cdots}.$$

8.6 Méthodes de tangentes

Après avoir examiné dans le paragraphe précédent les problèmes de quadrature, qui sont le prototype des questions qu'aujourd'hui on traite à l'aide du calcul intégral, nous examinons à présent les questions de détermination de tangentes à une courbe, qui sont de nos jours du ressort du calcul différentiel.

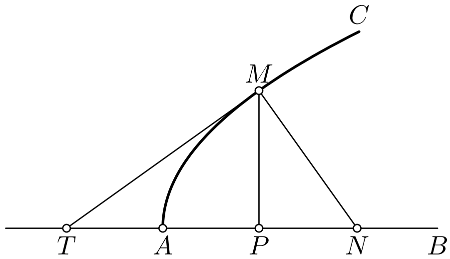
Nous avons vu au paragraphe 8.4 que les mathématiciens de la première moitié du XVII$^{\text{e}}$ siècle inventent plusieurs méthodes permettant de construire de nouvelles courbes. Certaines courbes sont fabriquées à partir du mouvement de dispositifs mécaniques ; d'autres sont définies par une équation reliant deux longueurs variables, en accord avec les principes de la géométrie analytique. Pour toutes ces courbes nouvelles se pose le problème de la détermination des tangentes. Des méthodes générales sont recherchées. En ce qui concerne les courbes décrites par un mouvement, les recherches se dirigent en direction de l'utilisation de la notion intuitive de « vitesse instantanée », avec notamment les travaux de Roberval et de Torricelli. De leur côté, les inventeurs de la géométrie analytique, Fermat et Descartes, comprennent qu'il est possible de déterminer les tangentes à une courbe directement à partir de son équation ; chacun des deux invente sa méthode pour y parvenir.

Nous ferons l'impasse sur la méthode de Fermat, bien qu'elle conduise en fin de compte à des calculs beaucoup plus simples que celle de Descartes. La principale source des difficultés auxquelles nous serions confrontés si nous nous engagions dans l'étude des textes de Fermat est

3. Le lecteur intéressé trouvera des détails sur la construction de Wallis dans le pargraphe 12.2.4 du livre de V. Katz, *A History of mathematics*, New York : Addison-Wesley, 1998.

que ces textes sont rédigés de façon très concise, voire même parfois sommaire. Par exemple, le premier texte que Fermat écrit au début des années 1630 pour présenter sa méthode des tangentes est tellement mal rédigé que Descartes rejette la méthode de Fermat, affirmant non sans mauvaise foi que « la méthode de Fermat se trompe toujours » et que Fermat « a découvert sa règle à tâtons, du moins sans en percevoir clairement ses principes » [4]. Un autre point délicat pour le lecteur moderne est que Fermat utilise un concept un peu étrange, qu'il nomme *adégalité* mais qu'il ne définit pas avec précision [5]. Le lecteur intéressé par davantage de détails sur la vie et l'œuvre de Fermat est invité à consulter le livre de Michael Mahoney indiqué en bibliographie ; nous nous bornerons pour notre part à affirmer que Pierre de Fermat fut (avec Descartes) le plus grand mathématicien de son époque et que ses travaux concernent aussi bien l'application de l'algèbre à la géométrie que la théorie des nombres, dont il fut le précurseur.

Avant de nous lancer dans la description de trois méthodes permettant de déterminer des tangentes, nous devons introduire le vocabulaire utilisé à cette époque. Sur la figure ci-dessous, on a représenté la courbe AMC et un « diamètre » AB. Le segment PM s'appelle « ordonnée ». La tangente et la normale à la courbe issues du point M sont les segments MT et MN, respectivement. La « sous-tangente » est le segment PT et la « sous-normale » est le segment PN. Les mots comme « ordonnée », « tangente », « sous-normale », etc. désignent aussi parfois la longueur des segments en question.



8.6.1 Une méthode algébrique : la méthode de Descartes

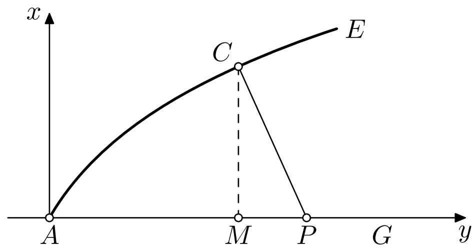
Dans son ouvrage *La Géométrie* datant de 1637, Descartes explique l'importance de savoir trouver les normales à une courbe :

4. Cette critique, d'autant plus sévère qu'elle émane de l'auteur du *Discours de la méthode*, provoque une réaction de la part de Fermat, réaction qui prend la forme d'un traité intitulé *Ad eamdem methodum de maximis et minimis (Sur la même méthode des maxima et des minima)* (1638), dans lequel Fermat explique le cheminement des idées qui l'ont conduit à sa méthode et répond point par point aux critiques de Descartes. Fermat résout également le défi que lui pose Descartes d'utiliser sa méthode « pour trouver les contingentes, par exemple, de la ligne courbe BDN, que [Descartes] suppose être telle qu'en quelque lieu de la circonférence qu'on prenne le point B, ayant tiré la perpendiculaire BC, les deux cubes des deux lignes BC et CD soient ensemble égaux au parallélépipède des deux mêmes lignes BC et CD et de la ligne donnée P », c'est-à-dire en termes modernes de trouver les tangentes à la courbe d'équation $x^3 + y^3 = pxy$, où p est une longueur donnée à l'avance. Le conflit entre Descartes et Fermat, qui trouve ses racines dans les inimitiés que Descartes voue aux mathématiciens parisiens avec lesquels Fermat est en contact, est finalement arbitré par Girard Desargues (1591–1661) qui, estimant que le malentendu est en partie dû au manque de clarté dans la rédaction de Fermat, conclut prudemment que « M. des Cartes a raison, et M. de Fermat n'a pas tort ».

5. Il semble en fait que la statut que Fermat accorde à ce terme évolue au cours du temps. Au début, l'adégalité n'est pour Fermat qu'une règle de calcul destinée à cacher la vraie justification de sa méthode. Puis progressivement le concept prend corps et acquiert une signification proche de celle d'un accroissement infiniment petit.

> C'est pourquoi je croirai avoir mis ici tout ce qui est requis pour les éléments des lignes courbes, lorsque j'aurai généralement donné la façon de tirer des lignes droites qui tombent à angles droits sur tels de leurs points qu'on voudra choisir. Et j'ose dire que c'est ceci le problème le plus utile et le plus général, non seulement que je sache, mais même que j'aie jamais désiré de savoir en géométrie.

Descartes considère une courbe CE et une droite AG. Il repère un point C du plan en appelant x et y les longueurs CM et MA respectivement (voir la figure). Descartes suppose que la courbe CE est définie « par quelque équation qui explique le rapport qui est entre x et y ».



Descartes se donne à présent un point C sur la courbe et se fixe comme objectif de trouver la normale en C à la courbe CE. Plus précisément, Descartes cherche à déterminer l'intersection de cette normale avec la droite AG. Pour cela, il choisit un point P sur la droite AG et il pose $PC = s$ et $PA = v$. L'équation du cercle de centre P et de rayon $s = PC$ est alors

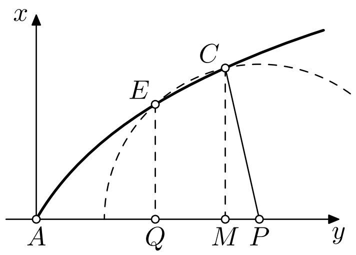
$$x^2 + (v - y)^2 = s^2. \tag{$*$}$$

On peut donc obtenir l'ordonnée x d'un point de ce cercle à partir de son abscisse y et réciproquement :

$$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2} \qquad \text{ou} \qquad y = v + \sqrt{s^2 - x^2}.$$

Si l'on substitue la première de ces expressions dans l'équation qui définit la courbe, on trouve une équation $\mathscr{E}$ portant sur l'inconnue y dont les solutions sont les abscisses des points d'intersection du cercle avec la courbe. De même, si l'on substitue la seconde de ces expressions dans l'équation de la courbe, on tombe sur une équation $\mathscr{F}$ portant sur l'inconnue x dont les solutions sont les ordonnées des points d'intersection du cercle avec la courbe. Après avoir donné trois exemples d'un tel calcul, Descartes poursuit ainsi :

> Or après qu'on a trouvé une telle équation, au lieu de s'en servir pour connoître les quantités x ou y, qui sont déjà données, puisque le point C est donné, on la doit employer à trouver v ou s, qui déterminent le point P qui est demandé. Et à cet effet il faut considérer que si ce point P est tel qu'on le désire, le cercle dont il sera le centre, et qui passera par le point C, y touchera la ligne courbe CE sans la couper ; mais que si ce point P est tant soit peu plus proche ou plus éloigné du point A qu'il ne doit, ce cercle coupera la courbe, non seulement au point C, mais aussi en quelque autre. Puis il faut aussi considérer que lorsque ce cercle coupe la ligne courbe CE, l'équation par laquelle on cherche la quantité x ou y, ou quelque autre semblable, en supposant PA et PC d'être connues, contient nécessairement deux racines qui sont inégales.



Dans ce texte, Descartes rappelle que le point C est donné, c'est-à-dire que son ordonnée CM et son abscisse MA sont données. Descartes nous dit alors que si le point P est un point proche mais différent du pied de la normale en C à la courbe, alors le cercle coupe la courbe non seulement au point C, mais aussi en un deuxième point E proche de C, de sorte que l'équation $\mathscr{E}$ possède deux solutions, à savoir les abscisses QA et MA des points E et C, et que l'équation $\mathscr{F}$ possède deux solutions, à savoir les ordonnées EQ et CM de ces mêmes points. *A contrario*, si MA est une racine double de l'équation $\mathscr{E}$, ou si CM est une racine double de l'équation $\mathscr{F}$, alors le point E est confondu avec le point C, de sorte que le cercle est tangent à la courbe et que P est le pied de la normale en C à la courbe.

Pour résumer, la méthode de Descartes est la suivante. On se donne le point C par ses coordonnées. On prend des grandeurs inconnues s et v satisfaisant à $(*)$ et on établit les équations $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$. Enfin on cherche s et v par la condition que l'abscisse de C est racine double de $\mathscr{E}$ ou que l'ordonnée de C est racine double de $\mathscr{F}$.

Pour pouvoir utiliser cette méthode, il faut être capable de dire si une équation $\mathscr{E}$, portant sur une inconnue y, possède une grandeur donnée e comme racine double. Descartes nous dit :

> Il faut considérer que lorsqu'il y a deux racines égales en une équation, elle a nécessairement la même forme que si on multiplie par soi-même la quantité qu'on y suppose inconnue, moins la quantité connue qui lui est égale, et qu'après cela, si cette dernière somme n'a pas tant de dimensions que la précédente, on la multiplie par une autre somme qui en ait autant qu'il lui en manque, afin qu'il puisse y avoir séparément équation entre chacun des termes de l'une et chacun des termes de l'autre.

On peut traduire ce passage en langage moderne en disant que si $R(y)$ est un polynôme en la variable y et si e est un nombre, alors e est une racine double de l'équation $R(y) = 0$ si et seulement s'il existe un polynôme $S(y)$ tel que $R(y) = (y - e)^2 S(y)$.

Pour illustrer sa méthode, Descartes prend l'exemple d'une ellipse « dont le côté droit est r et dont le traversant est q ». Un théorème d'Apollonius montre alors immédiatement que l'équation de cette ellipse est $x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$. Descartes cherche le pied P de la normale au point C d'abscisse e et d'ordonnée $\sqrt{re(1 - \frac{e}{q})}$. Il forme alors l'équation $\mathscr{E}$:

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r} = 0.$$

Pour que l'abscisse e de C soit racine double de cette équation, il faut que cette équation coïncide avec $(y - e)^2 = 0$, ce qui se traduit par les deux égalités

$$\frac{qry - 2qvy}{q - r} = -2ey \qquad \text{et} \qquad \frac{qv^2 - qs^2}{q - r} = e^2.$$

La première égalité nous donne la valeur $v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, ce qui permet de placer P.

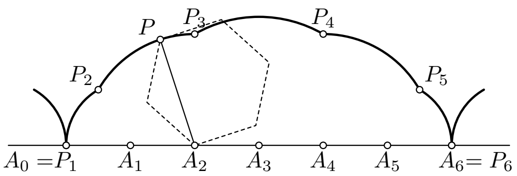
8.6.2 Méthodes cinématiques

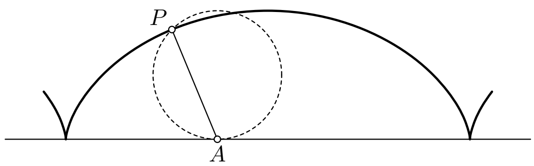
La méthode de Descartes expliquée dans le paragraphe précédent n'est valable que pour les courbes définies par une relation polynomiale entre les deux coordonnées x et y. La cycloïde ne rentre pas dans ce cadre-là, puisque son équation

$$(\arccos(1 - y/r) - x/r)^2 + (1 - y/r)^2 = 1$$

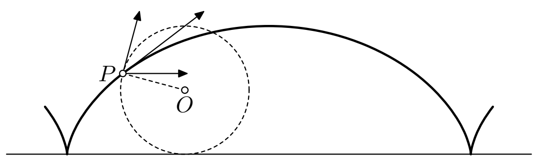
fait intervenir une fonction trigonométrique. Pour traiter le cas de courbes de ce type, Descartes et Roberval se servent de méthodes de nature cinématique. Les explications de Descartes sont particulièrement claires.

Descartes considère un polygone roulant sur une droite. Lors de ce mouvement, chaque sommet de ce polygone suit une trajectoire comme celle dessinée sur la figure à gauche ci-dessous. Cette trajectoire est constituée d'une suite P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, ... d'arcs de cercles de centres successifs A_1, A_2, A_3, ... En un point P situé disons sur l'arc P_2P_3, la normale à la trajectoire est dirigée vers le point A_2. Considérant alors qu'un cercle peut être regardé comme un polygone fait de « cent mil millions » de côtés, Descartes passe intuitivement à la limite et conclut que la normale en un point P de la cycloïde pointe vers le point A de contact entre la ligne de base et le cercle dont le mouvement engendre la cycloïde.





Roberval privilégie un point de vue plus mécanique. Il considère que le mouvement du point P sur la cycloïde est composé du mouvement de rotation du cercle autour de son centre O et du mouvement de translation de O. Les deux mouvements ayant lieu à la même vitesse, la tangente en P à la cycloïde est bissectrice de la droite horizontale et de la tangente au cercle.



Cette approche cinématique est également suivie en Italie par un disciple de Galilée, Torricelli, avec lequel Roberval est en contact épistolaire.

8.6.3 Les règles de Hudde

L'ouvrage de Descartes, *La Géométrie*, a le grand avantage pour l'époque de proposer une théorie plutôt complète : géométrie analytique, classification et construction des courbes, détermination des tangentes (ou plus exactement des normales) à une courbe, théorie des équations. Ces qualités assurent une bonne publicité à l'ouvrage et séduisent un jeune Hollandais, van Schooten, que Descartes avait rencontré dès la fin des années 1630 à Leyde. Après un voyage d'études à Paris, van Schooten se voit offrir une chaire de professeur de mécanique à l'université de Leyde. Afin d'améliorer l'accès à un matériel qu'il juge important, van

Schooten publie en 1649 une traduction de *La Géométrie* en latin, la langue d'échange scientifique de l'époque, augmentée de quelques commentaires et de notes explicatives. Van Schooten s'arrange pour fédérer autour de lui une petite équipe d'étudiants avec laquelle il cherche à développer les nouvelles méthodes en mathématiques.

En 1657 ou 1658, un des disciples de van Schooten, Johann Hudde (1629–1704), met au point des règles facilitant la détermination des tangentes. Ces règles, qui peuvent paraître étranges quand on les voit pour la première fois, sont en fait très proches de nos règles modernes pour calculer la dérivée d'un polynôme. L'origine des idées de Hudde n'est pas très claire ; il est possible qu'il ait trouvé son inspiration dans la méthode des tangentes de Fermat (voir le début du paragraphe 8.6).

La première des règles de Hudde est un critère qui donne une condition nécessaire pour qu'un polynôme ait une racine double, chose dont nous avons vu l'utilité pour la mise en œuvre de la méthode de Descartes. Hudde affirme :

> Si dans une équation, deux racines sont égales, et si [cette équation] est multipliée par une progression arithmétique, c'est-à-dire le premier terme par le premier terme de la progression, le second par le second terme de la progression, etc. ; je dis que l'équation trouvée en faisant la somme de ces produits doit avoir une racine en commun avec l'équation de départ.

Cette règle se traduit comme suit en notations modernes. Soit $f(x)$ un polynôme en x, disons

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Considérons une progression arithmétique, disons

$$p,\ p+q,\ p+2q,\ \ldots,\ p+nq.$$

Hudde nous demande de faire le produit de chaque terme de l'équation avec le terme correspondant de la progression, ce qui donne

$$pa_0,\ (p+q)a_1x,\ (p+2q)a_2x^2,\ \ldots,\ (p+nq)a_nx^n.$$

La somme de tous ces termes est

$$g(x) = pa_0 + (p+q)a_1x + (p+2q)a_2x^2 + \cdots + (p+nq)a_nx^n.$$

Hudde affirme qu'avec ces hypothèses, $f(x)$ possède une racine double seulement si $f(x)$ et $g(x)$ ont une racine commune.

L'explication moderne de cette règle est simple : on observe en effet que

$$g(x) = pf(x) + qxf'(x).$$

Dès lors, si α est une racine double de $f(x)$, alors $f(x)$ est de la forme $(x-\alpha)^2h(x)$, de sorte qu'en utilisant la règle pour dériver un produit, il vient

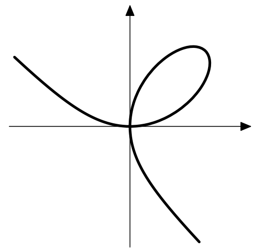
$$\begin{aligned} g(x) &= p\,(x-\alpha)^2h(x) + qx\big[2(x-\alpha)h(x) + (x-\alpha)^2h'(x)\big] \\ &= (x-\alpha)\big[p\,(x-\alpha)h(x) + 2qxh(x) + qx(x-\alpha)h'(x)\big], \end{aligned}$$

ce qui montre que $g(x)$ a lui aussi α comme racine.

Même à l'aide de cette règle, la méthode de Descartes pour déterminer les normales à une courbe conduit généralement à des calculs compliqués. Hudde propose alors une autre règle de calcul qui fournit les tangentes à une courbe directement à partir de son équation. Il explique comment procéder dans une lettre à son maître van Schooten datée de 1659 :

> Mettez tous les termes d'un côté. Supprimez x, y des diviseurs. Ordonnez en puissances décroissantes de y et multipliez par le terme correspondant de n'importe quelle progression arithmétique. Répétez ce procédé pour les termes contenant x. Divisez la somme des premiers produits par celle des seconds. Multipliez le quotient par $-x$. Cela donne la sous-tangente.

Afin d'illustrer la règle de Hudde, traitons l'exemple du « trèfle de Descartes », c'est-à-dire la courbe d'équation $x^3 + y^3 = pxy$ (voir la note 4 p. 121).



Dans notre calcul, nous utiliserons la progression arithmétique 3, 2, 1, 0, mais n'importe quelle autre progression arithmétique conviendrait aussi bien. La première étape de la règle de Hudde consiste à ordonner l'équation selon les puissances décroissantes de y :

$$1 \cdot y^3 + 0 \cdot y^2 - px \cdot y^1 + x^3 \cdot y^0 = 0.$$

Ensuite, on multiplie chacun des termes de cette équation par le terme correspondant de la progression arithmétique, et on fait la somme des termes obtenus :

$$3 \cdot 1 \cdot y^3 + 2 \cdot 0 \cdot y^2 - 1 \cdot px \cdot y^1 + 0 \cdot x^3 \cdot y^0,$$

soit $3y^3 - pxy$. On procède de manière analogue pour la deuxième coordonnée x, en utilisant la même progression arithmétique. Le résultat est $3x^3 - pxy$. La règle de Hudde nous dit que l'on trouvera la sous-tangente au point de coordonnées (x, y) en prenant le quotient de la première expression, $3y^3 - pxy$, par la seconde, $3x^3 - pxy$, et en multipliant le tout par $-x$. Ainsi, pour le trèfle de Descartes,

$$\text{sous-tangente} = -x \cdot \frac{3y^3 - pxy}{3x^3 - pxy}.$$

Nous avons justifié plus haut la règle de Hudde concernant la recherche des racines doubles à l'aide d'un calcul de dérivées ; nous pourrions de même justifier la deuxième règle ci-dessus concernant la détermination de la sous-tangente à l'aide du concept moderne de dérivée partielle. Nous ne le ferons pas : l'intérêt des règles de Hudde ne réside pas dans leur contenu mathématique, mais dans le fait qu'elles témoignent des recherches menées dans les années 1650 en vue d'obtenir des méthodes performantes et universelles pour résoudre les problèmes de tangentes. Dans le cas des courbes données par une équation polynomiale en les coordonnées, les règles de Hudde résolvent complètement la question en réduisant la réponse à l'utilisation d'un algorithme.

Signalons enfin que la règle concernant le calcul des sous-tangentes avait été découverte quelques années avant Hudde par René François de Sluse (1622–1685), un mathématicien et homme d'Église de la principauté de Liège (dans les Pays-Bas à l'époque). Il semble cependant que les travaux de Hudde aient été indépendants de ceux de Sluse ; du reste, les travaux de

Sluse ne seront publiés que dans les années 1670, longtemps après la publication des travaux de Hudde.

À la fin des années 1650, van Schooten décide d'éditer à nouveau *La Géométrie* de Descartes. Dans cette nouvelle mouture, qui paraît en 1659–1661, le texte de Descartes est accompagné de nombreux compléments. Van Schooten y expose les règles de Hudde, ainsi que d'autres travaux effectués par ses disciples, comme par exemple la rectification de la parabole semi-cubique par van Heuraet (voir le paragraphe 8.7.1).

8.7 Établissement de liens entre différents problèmes

8.7.1 La rectification de la parabole semi-cubique

Nous avons vu au paragraphe 8.5 que le travail accompli par plusieurs mathématiciens dans les années 1630–1640 avait permis de comprendre le principe général du calcul de l'aire sous les courbes de la forme $(y/b) = (x/a)^\alpha$, où a et b sont des longueurs et où α est un nombre rationnel. Autrement dit, les mathématiciens commençaient à comprendre les principes permettant de traiter les problèmes de quadrature.

Les problèmes de rectification des arcs de courbe, c'est-à-dire la détermination de leur longueur, avaient en revanche la réputation d'être beaucoup plus difficiles. Dans l'Antiquité, Aristote avait ainsi affirmé qu'il n'était pas possible de comparer les rapports entre les lignes courbes et les lignes droites. Deux mille ans plus tard, Descartes reprend à son compte l'affirmation d'Aristote en affirmant dans *La Géométrie* que « la proportion qui est entre les [lignes] droites et les [lignes] courbes n'[est] pas connue, et même, je crois, ne le [peut] être par les hommes ».

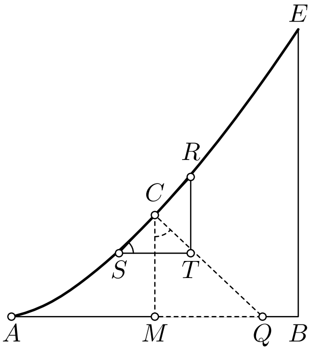
Mais en 1658, Wren effectue la rectification de la cycloïde, et dans les deux années qui suivent, trois autres mathématiciens effectuent la rectification de la « parabole semi-cubique », c'est-à-dire la courbe d'équation $ay^2 = x^3$, où a est une longueur fixée. Ces trois mathématiciens sont le Français Fermat, l'Anglais William Neil (1637–1670), et le Néerlandais élève de van Schooten Hendrik van Heuraet (1633–1670). C'est ce dernier qui donne l'explication la plus convaincante, dans une lettre qu'il adresse à son maître et que ce dernier reproduit dans sa deuxième édition en latin de *La Géométrie*.

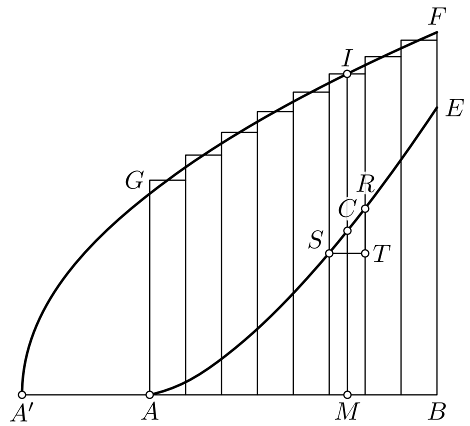
Le principe suivi par van Heuraet est le suivant. On appelle ACE la parabole semi-cubique (figure de gauche ci-dessous), on appelle Q le pied de la normale issue de C, et on pose $AM = x$, $MC = y$. La méthode de Descartes pour calculer la sous-normale QM donne $QM = 3x^2/2a$, d'où

$$CQ^2 = CM^2 + QM^2 = x^3/a + 9x^4/4a^2.$$

Maintenant, si SR est la tangente en C, et si ST et TR sont tracées parallèlement à MQ et MC respectivement, alors les triangles rectangles STR et CMQ sont semblables, de sorte que

$$\frac{ST}{SR} = \frac{MC}{CQ} = \frac{y}{\sqrt{x^3/a + 9x^4/4a^2}} = \sqrt{\frac{x^3/a}{x^3/a + 9x^4/4a^2}} = \frac{a/3}{\sqrt{a^2/9 + ax/4}}.$$





Van Heuraet construit alors une deuxième courbe GIF, en plaçant le point I sur la droite MC de sorte que $MI = \sqrt{a^2/9 + ax/4}$. Il vient alors $\frac{ST}{SR} = \frac{a/3}{MI}$, d'où $ST \cdot MI = \frac{a}{3}SR$. Mais la courbe ACE peut être approchée par une courbe polygonale dont les côtés sont des petits segments tels SR, et la surface $AGFB$ peut être approchée par une union de petits rectangles analogues à celui de hauteur MI et de largeur ST. En faisant la somme d'égalités analogues à $ST \cdot MI = \frac{a}{3}\,SR$, on trouve que l'aire $AGFB$ sous la courbe GIF est égale à $a/3$ fois la longueur de la ligne courbe ACE. Or la courbe GIF est une parabole, dont on sait effectuer la quadrature depuis l'Antiquité (voir le paragraphe 2.7.1). Tous calculs faits, on trouve que la longueur de la parabole semi-cubique ACE entre le sommet A et le point E de coordonnées $(x, \sqrt{x^3/a})$ est

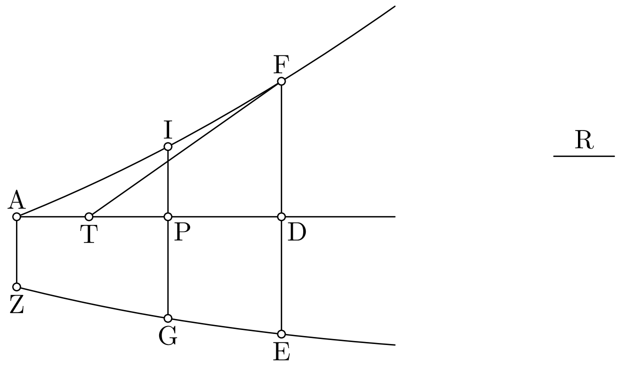
$$\frac{8a}{27}\left[\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^{3/2} - 1\right].$$

8.7.2 Le lien entre tangentes et quadratures

En 1668, le mathématicien anglais James Gregory (1638–1675) généralise la méthode de Neil et de van Heuraet et prouve par une démonstration rigoureuse qu'il est possible de ramener le calcul de la longueur d'une courbe quelconque à celui de l'aire sous une autre courbe. Gregory se pose également la question inverse : étant donnée une courbe, peut-on trouver une autre courbe dont la longueur d'arc est égale à l'aire sous la première courbe ? La solution que Gregory apporte à ce problème utilise une troisième courbe, définie de sorte que le point d'abscisse x ait une ordonnée égale à l'aire sous la première courbe, mesurée de l'origine jusqu'à l'abscisse x.

Le mathématicien Isaac Barrow (1630–1677), anglais lui aussi, écrit des énoncés encore plus proches de notre théorème fondamental. La proposition 11 de la X^e leçon des *Lectiones Geometricae (Cours géométriques)* (1670) affirme en effet la chose suivante.

> Soit ZGE une courbe dont l'axe est AD. On suppose que les ordonnées appliquées à cet axe, AZ, PG, DE, croissent continuellement depuis l'ordonnée initiale AZ. Soit enfin AIF une courbe telle que si une ligne droite EDF est tirée perpendiculairement à AD, coupant les courbes aux points E et F, et AD en D, le rectangle contenu par DF et une longueur donnée R est égal à l'espace intercepté $ADEZ$. On suppose aussi que $DE : DF = R : DT$ et on joint FT. Alors TF sera tangent à AIF.



Le texte de cette proposition signifie la chose suivante. On part d'une courbe ZGE et on construit une deuxième courbe AIF de sorte que les ordonnées des points de cette courbe soient égales, à la multiplication par une longueur R fixée à l'avance près, aux aires contenues sous la première courbe ZGE. Par exemple R fois l'ordonnée DF est égal à l'aire curviligne $ADEZ$, et R fois PI est égal à l'aire curviligne $APGZ$. Barrow nous dit qu'alors, les ordonnées de la courbe ZGE permettent de trouver les tangentes à la courbe AIF : plus précisément, la pente de la tangente en F à la courbe AIF est DE/R. (La formulation de Barrow est un peu différente, en cela qu'il explique comment trouver la sous-tangente DT, mais le résultat est le même.) Un autre point intéressant est que la preuve par Barrow de cette proposition est rédigée à la manière des géomètres grecs de l'Antiquité, sans faire appel à des méthodes algébriques ou cinématiques ou à des infinitésimaux ; la notion de tangente utilisée par Barrow est celle des Grecs (voir le paragraphe 8.3.2).

Plus loin dans le cours de Barrow, la proposition 19 donne la relation inverse. Barrow part d'une courbe et construit à partir d'elle une deuxième courbe dont les points ont pour ordonnées les pentes des tangentes à la première courbe. La conclusion est qu'alors les ordonnées de la première courbe donnent les aires sous la deuxième courbe.

Ces énoncés montrent que Barrow voit le lien de réciprocité entre le problème de la détermination des tangentes et celui du calcul des aires. Cependant Barrow ne comprend pas que ce résultat peut jouer un rôle fondamental s'il est utilisé de façon systématique. D'ailleurs, Barrow ne met pas ces propositions en avant car elles se trouvent noyées au milieu d'autres résultats.

8.8 Bilan : la situation en 1660

Entre 1600 et 1660, les mathématiciens européens se mettent à utiliser de plus en plus le langage et le formalisme du calcul algébrique en géométrie. Les notations mises en place par Descartes et promues par van Schooten se répandent largement.

Les mathématiciens du XVII^e^ siècle comprennent que les problèmes de rectification, de quadrature, de cubature, et de détermination de tangentes ne sont pas inaccessibles. Des méthodes de plus en plus générales sont conçues, qui permettent de répondre à ces questions. Ainsi en 1660, la détermination des tangentes à une courbe algébrique (c'est-à-dire donnée par une équation polynomiale) est réduite à une procédure, et l'on connaît également l'aire sous les courbes d'équation $y = \lambda x^{\alpha}$, où α peut être un entier positif ou négatif, ou même un nombre rationnel.

L'application de ces méthodes se heurte cependant parfois à des obstacles ; par exemple, la présence d'une racine carrée cause une grande gêne, aussi bien dans les problèmes de tangentes que dans les questions de quadrature (c'est la présence d'une racine carrée dans l'équation $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ du cercle de rayon R qui rend impossible la quadrature du cercle).

Les preuves des anciens Grecs, au premier rang desquels Archimède, sont appréciées pour leur rigueur et admirées pour leur élégance, mais les mathématiciens du XVII$^{\text{e}}$ siècle estiment qu'elles sont trop complexes pour pouvoir servir de base à leurs investigations. Ils cherchent plutôt des méthodes faisant intervenir des procédés algébriques (méthode des tangentes de Descartes, règle de Hudde), des quantités « indivisibles » ou infiniment petites (dans les méthodes de quadrature et de rectification), ou des idées de cinématique.

Des méthodes pour transformer un problème en un autre commencent à être découvertes. Il est ainsi montré que les problèmes de rectification peuvent se ramener à des problèmes de quadrature. La relation de réciprocité qu'ont entre elles les questions de quadrature (c'est-à-dire en termes modernes le calcul d'une fonction primitive) et les problèmes de tangentes (c'est-à-dire un calcul de dérivée) commence à être perçue, tant par une approche cinématique (par des gens comme Torricelli et Barrow) que par une approche inspirée par l'étude des problèmes de rectification (avec Gregory). Toutefois, les preuves du théorème fondamental n'apparaissent sous forme publiée qu'en 1668 et 1670.

Chapitre 9

La création du calcul infinitésimal

Résumé et objectifs du chapitre

Vers 1670, Newton et Leibniz inventent indépendamment l'un de l'autre un calcul infinitésimal, qui est l'ancêtre direct de l'analyse mathématique moderne. Ce chapitre explique la nouveauté de cette invention et décrit la réception de la théorie. L'étude d'un exemple permet de voir comment les concepts du calcul infinitésimal sont compris et manipulés à une époque où la notion de fonction n'existe pas.

9.1 Une nouvelle théorie

Entre les années 1620 et 1660, plusieurs méthodes sont mises au point pour résoudre les problèmes liés à l'étude des figures curvilignes : détermination des tangentes à une courbe, problèmes de rectification ou de quadrature, recherche des centres de gravités, etc. Les travaux de Descartes, dont le philosophe français était pourtant si fier, sont dépassés à peine trente ans après avoir été rédigés. Dans bien des cas, les méthodes nouvellement mises au point reposent sur la manipulation par le calcul de quantités infiniment petites.

Des règles permettant de trouver les tangentes à n'importe quelle courbe algébrique ont été trouvées et publiées vers 1660. Ces règles constituent une procédure efficace mais dénuée de vertu explicative. Bien qu'elles ne soient utilisables que quand la courbe est donnée par une équation polynomiale en les deux coordonnées, le sentiment général vers 1660 est que le problème de la détermination des tangentes à une courbe donnée est résolu. Les mathématiciens se penchent alors sur les « problèmes inverses des tangentes » : ils se donnent une loi des tangentes et cherchent une courbe y satisfaisant.

Différents travaux effectués dans les années 1630–1650 ont permis de connaître l'aire sous « les paraboles et les hyperboles supérieures », c'est-à-dire en langage moderne les courbes d'équation $y = \lambda x^\alpha$, pour tout nombre α rationnel positif ou négatif. Par additivité, l'aire sous les courbes d'équation de la forme $y = \lambda_1 x^{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n x^{\alpha_n}$ est donc connue. Malgré ces résultats partiels, aucune méthode vraiment génerale pour la résolution des problèmes de quadrature n'est connue en 1660.

Vers 1660, les mathématiciens commencent à clarifier les liens entre les différents problèmes. Ils s'aperçoivent par exemple qu'on peut transformer un problème de rectification en un problème de quadrature. La relation de réciprocité entre les questions de tangentes et les problèmes de quadrature est perçue à la fin des années 1660 : quadrature et rectification sont des cas particuliers de problèmes inverses des tangentes.

À ce stade du développement des mathématiques, vers 1660 donc, plusieurs problèmes apparaissent. Il faudrait inventer des méthodes plus générales, capables de contourner les obstacles causés par exemple par la présence de racines carrées dans les équations. Il faudrait comprendre pourquoi les règles qui donnent les tangentes à une courbe fonctionnent. Il faudrait mettre au point une stratégie générale qui permette de systématiser la recherche des liens entre les différents problèmes inverses des tangentes, voire de classifier ces problèmes et de les résoudre.

Il est traditionnel d'attribuer la découverte de réponses à ces questions à Newton et à Leibniz. Entre 1665 et 1685, indépendamment l'un de l'autre, ces deux hommes réussissent à organiser en une théorie unifiée les méthodes inventées par leurs prédécesseurs pour l'étude des lignes courbes et à transcrire les arguments géométriques utilisés jusqu'alors en des règles de calcul. Plus précisément, les deux hommes :

- développent des concepts (fluentes et fluxions pour Newton, différentielles et intégrales pour Leibniz) permettant de manipuler commodément les variations infinitésimales des grandeurs liées aux courbes ;
- mettent au point des notations et des règles de calcul permettant de manier ces concepts ;
- utilisent ces concepts pour traiter les questions de détermination de tangentes, effectuer des rectifications et des quadratures, et obtenir d'autres résultats inédits.

Pour ces raisons, on considère que Newton et Leibniz sont les créateurs du calcul infinitésimal.

Le calcul infinitésimal ne commence pas avec Newton ou Leibniz, et ne finit pas non plus avec eux. Il convient néanmoins de bien mettre en évidence leurs immenses apports. D'un côté donc Newton, qui fait le lien entre les méthodes cinématiques et les méthodes infinitésimales, entre les mathématiques et la physique (le calcul des fluxions et la théorie de l'attraction universelle sont frère et sœur l'un de l'autre). De l'autre Leibniz, qui développe un système de notation symbolique très efficace. C'est en utilisant ce système de notation que les successeurs de Leibniz, au premier rang desquels les frères Jacob et Johann Bernoulli, vont donner à la théorie ses premiers grands succès, en montrant notamment comment le calcul de Leibniz permet de résoudre et de relier les uns aux autres un grand nombre de problèmes inverses des tangentes.

Les plans des deux premières parties du chapitre, consacrées à Newton et à Leibniz, sont parallèles : après avoir expliqué quelques éléments biographiques, nous présentons les travaux de ces mathématiciens en insistant sur les concepts, les notations et les règles de calcul qu'ils ont mis au point et les utilisations qu'ils ont faites de leur invention. Cela fait, nous comparons entre elles les théories de Newton et Leibniz. Puis nous expliquons quelle fut la réception de ces nouvelles théories par le milieu savant de l'époque. Nous étudions ainsi la solution par Johann Bernoulli du « problème de la chaînette » et observons les particularités propres à la fin du XVIIe siècle dans l'utilisation du calcul infinitésimal. Enfin nous évoquons les circonstances et les conséquences historiques de la querelle de priorité qui éclata entre Newton et Leibniz vers 1700.

9.2 Isaac Newton (1642–1727)

9.2.1 Biographie

Passons rapidement sur l'enfance de Newton — pas très heureuse, mais pas pauvre non plus. En 1661, Newton entre à l'université de Cambridge pour faire ses études. Vers 1664, Newton prend connaissance des mathématiques de son temps : il lit Euclide, les *Clavis ma-*

thematicae de Oughtred (un ouvrage d'arithmétique et d'algèbre dont nous avons parlé au paragraphe 7.3.4), *La Géométrie* de Descartes (dans la deuxième édition de van Schooten, laquelle présente les progrès effectués par Hudde et van Heuraet), les œuvres complètes de Viète (également éditées par van Schooten), les *Arithmetica Infinitorum* de Wallis.

En 1665 et 1666, l'université ferme ses portes pour cause d'épidémie. Newton retourne dans son Lincolnshire natal et travaille seul à ses recherches. Il fait ses principales découvertes en mathématiques (calcul des fluxions et des séries) et en optique (théorie des couleurs). De retour à Cambridge, Newton présente ses résultats à Barrow, alors titulaire de la chaire de mathématiques de l'université de Cambridge. Ce dernier, impressionné, recommande alors Newton auprès de ses collègues et l'introduit dans la communauté scientifique. C'est ainsi qu'en 1669, Newton succède à Barrow comme professeur de mathématiques à Cambridge.

En 1672, Newton est nommé membre de la Royal Society pour son invention du télescope à réflexion. Cette même année, il rédige sa théorie sur la lumière et les couleurs et la communique à la Royal Society. Entre 1673 et 1683, les cours que Newton professe à l'université de Cambridge sont consacrés à l'arithmétique et à l'algèbre ; à partir de 1684, ses cours traitent de mécanique. Avec les encouragements de Halley, un astronome réputé, Newton se lance dans la rédaction des *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Principes mathématiques de la philosophie naturelle)*, monographie dans laquelle il expose sa théorie de la gravitation universelle. L'ouvrage, publié en 1687, est le sommet de la pensée newtonienne.

En 1693, Newton souffre d'une dépression nerveuse (c'est déjà la seconde en fait). Il cesse toute activité scientifique et quitte l'université de Cambridge en 1695. Couvert de gloire, Newton reçoit alors des charges honorifiques : il devient directeur de la Monnaie en 1700 et président de la Royal Society en 1703.

Un trait frappant chez Newton est que, par peur des critiques, il ne publie pas ses résultats. Par exemple, pour la publication de son ouvrage le plus génial, les *Principia Mathematica*, Newton attend que la Royal Society évalue favorablement le manuscrit avant d'envoyer ce dernier à l'imprimeur. De même, Newton ne publie sa théorie de l'optique qu'en 1704, après la mort de Hooke, son principal contradicteur dans le domaine. En mathématiques, Newton avait rédigé dès 1667, 1669 et 1671 trois manuscrits au sujet du calcul des fluxions et du calcul des séries, mais il ne les publie qu'en 1693, et encore dans une version très incomplète. Il faut attendre 1736 pour que le manuscrit complet du *Tractatus de Quadratura Curvarum* de 1671 soit publié, de façon posthume (et dans une version traduite et modernisée).

Deux des principales contributions de Newton aux mathématiques sont le calcul sur les séries de puissance et le calcul infinitésimal, qu'il appelle calcul des fluxions. Avant d'examiner ces deux techniques, nous allons regarder rapidement un des tout premiers résultats mathématiques de Newton.

9.2.2 La formule du binôme de Newton

Les coefficients binomiaux C_n^k, qui apparaissent dans le développement des puissances successives de la somme de deux nombres

$$(x+y)^n = \mathrm{C}_n^0 x^0 y^n + \mathrm{C}_n^1 x^1 y^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 x^2 y^{n-2} + \cdots + \mathrm{C}_n^n x^n y^0, \qquad (*)$$

sont connus depuis longtemps. La disposition en tableau de ces coefficients (qu'on appelle aujourd'hui triangle de Pascal) et sa règle de formation avaient été découvertes en Chine et dans le monde arabe au XI$^{\text{e}}$ siècle ; elles étaient connues des mathématiciens européens du XVI$^{\text{e}}$ siècle. Dans son *Traité du triangle arithmétique* publié en 1654, Pascal avait donné une analyse détaillée de ces coefficients[1], obtenant entre autres la relation $C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k$, d'où on déduit facilement $C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$.

D'un autre côté, nous avons vu au paragraphe 8.5.3 que Wallis avait défini les puissances x^k pour un exposant k fractionnaire dans les années 1650 : pour deux entiers positifs m et n, $x^{m/n}$ est la racine $n^{\text{è}}$ de x^m et $x^{-m/n} = 1/x^{m/n}$.

En 1664, Newton lit les *Arithmetica Infinitorum* de Wallis et, au terme d'un cheminement assez long au cours duquel il devine plus qu'il ne démontre, il parvient à la formule

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n} P^{m/n} Q + \frac{m}{n} \frac{m-n}{2n} P^{m/n} Q^2 + \frac{m}{n} \frac{m-n}{2n} \frac{m-2n}{3n} P^{m/n} Q^3 + \cdots$$

Cette formule du binôme est le premier résultat mathématique important de Newton. Aujourd'hui, on l'écrit plutôt sous la forme

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2\cdot 3} x^3 + \cdots$$

où α peut être entier ou non. Ce résultat généralise la formule $(*)$ au cas d'un exposant fractionnaire.

9.2.3 Le calcul sur les séries infinies

Durant l'hiver 1664–65, Newton observe l'analogie entre l'arithmétique des développements décimaux illimités (c'est-à-dire, l'écriture des nombres fractionnaires avec des chiffres après la virgule) et celle des expressions algébriques avec une infinité de termes, qu'il appelle « séries infinies de variables ». Il écrit :

> Les opérations du calcul sur les nombres et sur les variables étant étroitement similaires (...), je suis étonné qu'il ne soit venu à l'idée de personne (si l'on excepte N. Mercator avec sa quadrature de l'hyperbole) d'accommoder la doctrine récemment fondée pour les nombres décimaux de façon semblable pour les variables, d'autant que cela ouvre la voie à des conséquences plus impressionnantes. En effet, puisque cette doctrine en espèces porte la même relation à l'Algèbre que la doctrine des nombres décimaux porte à l'Arithmétique usuelle, les opérations d'Addition, de Soustraction, de Multiplication, de Division et d'Extraction de racine peuvent facilement être appris de cette dernière, à la seule condition que le lecteur soit compétent dans les deux, l'Algèbre et l'Arithmétique, et apprécie la correspondance entre les nombres décimaux et les termes algébriques continués à l'infini. (...)
>
> Et de même que l'avantage des décimaux consiste en ceci, que quand toutes les fractions et les racines ont été réduits à eux, ils revêtent la nature des entiers dans une certaine mesure, de même c'est l'avantage des séries infinies de variables que des classes de termes plus compliqués (...) peuvent être réduits à la classe des termes simples.
>
> *Tractatus de methodis serierum et fluxionum*, 1671.

1. Le traité de Pascal est beaucoup plus abouti que les travaux de ses prédécesseurs. Les déductions logiques sont impeccables, avec des raisonnements par récurrence soigneusement mis en place. De plus, Pascal montre l'utilité des coefficients binomiaux pour les questions de combinatoire et de probabilités élémentaires (ce que Pascal appelle « applications au jeu »).

Ici Newton observe que grâce aux développements décimaux illimités, on peut utiliser les mêmes algorithmes de calcul arithmétique (addition, soustraction, multiplication, division, extraction de racine, etc.) pour tous les nombres, qu'ils soient entiers, rationnels, ou qu'ils contiennent une racine. Autrement dit, l'écriture décimale permet de mettre des nombres tels que

$$452/13 = 34,7692\ldots, \qquad 2+3\sqrt{5} = 8,7082\ldots \qquad \text{ou} \qquad \pi = 3,14159\ldots$$

sur le même plan, bien qu'ils soient de nature différente. De manière analogue, les « séries infinies de variables » de Newton permettent de représenter d'une manière uniforme et propice au calcul toutes les expressions faisant intervenir une variable littérale, même si elles comprennent un quotient ou un symbole de racine. Ainsi, on peut écrire

$$(2+5x+4x^2)/(1+2x) = 2+x+2x^2-4x^3+8x^4-16x^5+\cdots$$

et

$$\sqrt{1+x^2} = 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{16}-\frac{5x^8}{128}+\cdots$$

Mieux encore : les algorithmes permettant d'effectuer les opérations usuelles (quatre opérations arithmétiques et extraction de racines) sur les développement décimaux illimités fonctionnent également avec les « séries infinies de variables ». La première formule ci-dessus peut ainsi être trouvée en effectuant la division selon les puissances croissantes et la seconde peut être obtenue grâce à l'algorithme habituel du calcul des racines carrées.

La formule du binôme, que Newton a obtenue peu de temps auparavant, est utile pour trouver de tels développements. Newton prend le cas $P = c^2$, $Q = x^2/c^2$, $m = 1$ et $n = 2$ comme exemple et obtient

$$\begin{aligned}(c^2+x^2)^{1/2} &= c+\frac{1}{2}\,c\,\frac{x^2}{c^2}+\frac{1\cdot(-1)}{2\cdot 4}\,c\left(\frac{x^2}{c^2}\right)^2+\frac{1(-1)(-3)}{2\cdot 4\cdot 6}\,c\left(\frac{x^2}{c^2}\right)^3+\cdots\\ &= c+\frac{x^2}{2c}-\frac{x^4}{8c^3}+\frac{x^6}{16c^5}+\cdots\end{aligned}$$

Cette formule redonne pour $c = 1$ le développement de $\sqrt{1+x^2}$ obtenu plus haut par extraction de racine.

9.2.4 Le calcul des fluxions

Lecteur des œuvres de Descartes (dans l'édition de van Schooten) et de Wallis, Newton est au courant des problèmes récents en géométrie. Il cherche à comprendre les raisons qui font que les méthodes employées par ses contemporains fonctionnent. Newton a l'idée de regarder les grandeurs géométriques (coordonnées, longueur d'arc, etc.) comme étant engendrées par un mouvement. Il cherche une méthode pour reconstruire ces grandeurs à partir de la connaissance de leur vitesse d'accroissement, de façon analogue au calcul de la distance parcourue par un mobile dont on connaît la vitesse à chaque instant. Newton écrit :

> Je ne considère pas les grandeurs mathématiques comme formées de parties, si petites soient-elles, mais comme décrites d'un mouvement continu. Les lignes sont décrites et engendrées non pas par la juxtaposition de leurs parties, mais par le mouvement continu de points, les surfaces par le mouvement des lignes, les solides par le mouvement des surfaces, les angles par la rotation des côtés, les temps par un flux continu.

> Considérant donc que les grandeurs qui croissent dans des temps égaux sont plus grandes ou plus petites selon qu'elles croissent avec une vitesse plus grande ou plus petite, je cherchais une méthode pour déterminer les grandeurs d'après les vitesses des mouvements ou accroissements qui les engendrent. (...)
>
> *Tractatus de methodis serierum et fluxionum*, 1671.

Newton pose alors deux définitions : il appelle *fluente* (une traduction littérale en français serait « quantité qui s'écoule ») une grandeur variable dans le temps et appelle *fluxion* sa vitesse d'accroissement. Puis il introduit un système de notations : la fluxion d'une fluente x est notée [2] $\dot{x}$. Enfin Newton explique les diverses règles de calcul qui permettent de manipuler ces notions. Une de ces règles décrit comment obtenir une relation liant entre elles les fluxions quand on connaît une relation liant entre elles les fluentes. Newton écrit :

> Arrangez l'équation exprimant la relation donnée selon les dimensions d'une quantité fluente, disons x, et multipliez ses termes par une progression arithmétique et ensuite par $\dot{x}/x$. Effectuez cette opération séparément pour chacune des quantités fluentes et ensuite prenez la somme des produits égale à rien, et vous aurez l'équation cherchée.

Newton donne l'exemple suivant pour expliquer le calcul. On suppose que les fluentes x et y sont liées par la relation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Commençons par la fluente x. Arranger l'équation selon les dimensions de x, c'est ordonner les termes selon les puissances de x ; dans notre cas, c'est écrire

$$(x^3) - (ax^2) + (axy) - (y^3).$$

On choisit ensuite une progression arithmétique, disons 3, 2, 1, 0 et on multiplie les termes de notre équation par ceux de la progression arithmétique. On trouve

$$3(x^3) - 2(ax^2) + 1(axy) - 0(y^3).$$

La multiplication par $\dot{x}/x$ donne

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x}.$$

En faisant la même chose pour y, on trouve (en utilisant la même progression arithmétique)

$$-3y^2\dot{y} + ax\dot{y}.$$

La somme des deux expressions, égalée à zéro, donne la relation cherchée :

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0.$$

La définition que Newton donne du concept de fluente n'est pas autonome, puisqu'elle dépend d'une notion intuitive de vitesse d'accroissement. Newton n'est donc pas en mesure de démontrer la validité de sa règle de calcul, mais essaie toutefois de la justifier à l'aide d'une approche basée sur des quantités infiniment petites. Reprenant l'exemple de la relation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ entre les fluentes x et y, Newton prend un accroissement infinitésimal

2. En fait, cette notation commode n'apparaît chez Newton qu'en 1693. Dans le manuscrit de 1671, les fluxions des quantités v, x, y, z sont désignées par les lettres l, m, n, r, notations qui ne mettent pas en évidence le lien qui unit les fluxions aux fluentes dont elles dérivent.

du temps o. Alors $\dot{x}o$ représente l'accroissement infinitésimal de x et $\dot{y}o$ représente l'accroissement infinitésimal de y. Newton considère un point se mouvant sur la courbe, et qui a pour coordonnées (x, y) au premier instant et $(x+\dot{x}o, y+\dot{y}o)$ à l'instant juste après. La relation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ étant valable à tout temps, elle reste vraie quand on remplace x par $x + \dot{x}o$ et y par $y + \dot{y}o$. Rendons la parole à Newton :

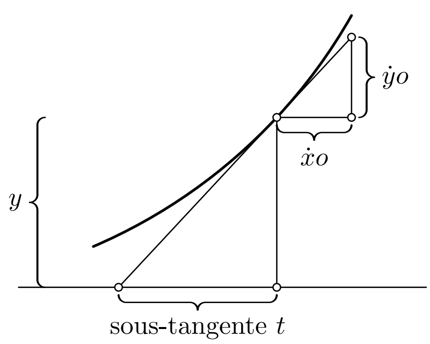
> je substitue $x + \dot{x}o$ pour x et $y + \dot{y}o$ pour y, et j'ai
>
> $$x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2oox + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2oo + axy+ \\ a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{y}\dot{x}oo - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2ooy - \dot{y}^3o^3 = 0.$$
>
> Maintenant j'ai par la supposition $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, j'efface donc ces termes dans l'équation précédente, et ayant divisé par o tous les termes qui restent, j'aurai
>
> $$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 + 3\dot{x}^2ox \\ - a\dot{x}^2o + a\dot{x}\dot{y}o - 3\dot{y}^2oy + \dot{x}^3o^2 - \dot{y}^3o^2 = 0.$$
>
> Mais comme o a dû être supposé infiniment petit (...), les termes qu'il multiplie sont nuls en comparaison des autres, je les rejette donc, et il me reste
>
> $$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0.$$

Newton retrouve donc avec cette approche le résultat que sa règle lui a fourni.

9.2.5 Les applications du calcul des fluxions

Nous pouvons résumer le paragraphe qui précède en disant que Newton crée deux concepts réciproques l'un de l'autre, les notions de fluente et de fluxion, et trouve des notations et des règles de calcul permettant de les manipuler. Ce sont là deux des points dont nous avons décidé au paragraphe 9.1 qu'ils justifient de considérer Newton comme un inventeur du calcul infinitésimal. Il nous faut maintenant indiquer comment Newton utilise son calcul. La tâche nous est facilitée par Newton lui-même qui, mû par le désir de disposer de règles permettant de retrouver facilement tous les résultats qu'il connaît, dresse des listes de méthodes et de formules générales et montre en détail comment les appliquer sur un grand nombre d'exemples.

Pour déterminer les tangentes à une courbe par exemple, Newton s'appuie sur les considérations cinématiques suivantes : si le point de coordonnées (x, y) se déplace sur la courbe, les coordonnées de ce point après un accroissement infinitésimal o du temps seront $(x+\dot{x}o, y+\dot{y}o)$.

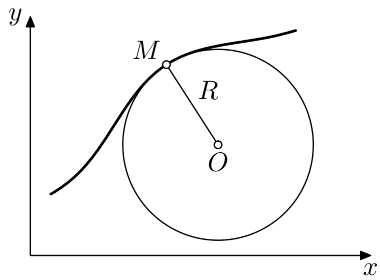


On voit alors sur la figure que le triangle dont les côtés ont pour longueurs $\dot{x}o$ et $\dot{y}o$ est semblable au triangle rectangle formé par la sous-tangente t et l'ordonnée y, d'où l'équation

$$t = y\,\frac{\dot{x}o}{\dot{y}o} = y\,\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\,.$$

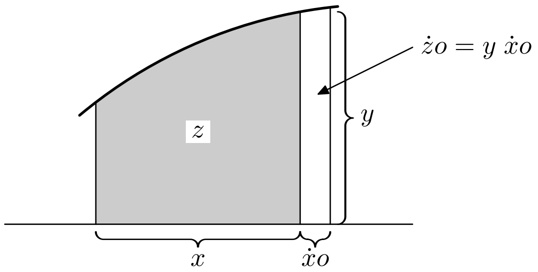
Pour connaître les tangentes à une courbe d'équation connue, il suffit donc d'utiliser le calcul des fluxions pour obtenir la relation qui lie les fluxions $\dot{x}$ et $\dot{y}$, puis d'utiliser la formule ci-dessus pour obtenir la sous-tangente t. Grâce à ce raisonnement, les règles de Hudde (décrites au paragraphe 8.6.3) peuvent être vues comme conséquences des règles de calcul des fluxions (expliquées au paragraphe 9.2.4). Ainsi Newton fournit une justification élégante des règles de Hudde. Il va même plus loin en appliquant sa méthode des tangentes dans d'autres systèmes de coordonnées que le système cartésien (comme le système de coordonnées polaires).

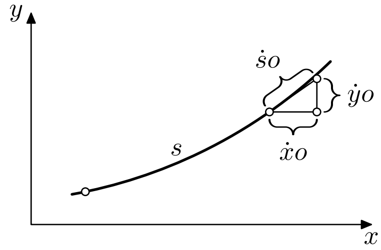
Newton s'intéresse également à la recherche des points d'inflexion d'une courbe, une question qui avait été étudiée avant lui, par Fermat notamment. En revanche, son étude de la « quantité de sinuosité d'une ligne » (ce qu'aujourd'hui on appelle la courbure) est sans précédent. Le problème général est le suivant. On considère une courbe et un point M sur cette courbe. On cherche un point O sur la normale en M à la courbe de sorte que le cercle de centre O et de rayon $R = OM$ colle le plus possible à la courbe. Newton explique comment son calcul des fluxions permet de répondre à ce problème en montrant que si l'on appelle x et y les coordonnées du point de la courbe et si l'on pose $z = \dot{y}/\dot{x}$, alors le rayon de courbure de la courbe au point $M = (x, y)$ est donné par $R = (1 + z^2)^{3/2} \times \dot{x}/\dot{z}$.



Non seulement Newton invente ce problème de toutes pièces, inspiré par la seule lecture de la méthode des tangentes de Descartes et des règles de Hudde (voir les paragraphes 8.6.1 et 8.6.3), mais en plus il montre comment trouver de façon algorithmique les centres et les rayons de courbure.

Newton s'intéresse également aux problèmes de quadrature et de rectification. Il montre que ces deux problèmes conduisent à des « équations fluxionnelles », c'est-à-dire à des relations faisant intervenir des fluentes et leurs fluxions. Ainsi la fluxion de l'aire z sous une courbe jusqu'au point d'abscisse x et d'ordonnée y est donnée par la relation $\dot{z} = y\dot{x}$, et la fluxion de la longueur s de l'arc de courbe jusqu'au même point est donnée par $\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. (La figure de gauche ci-après illustre le fait que, durant un accroissement infinitésimal o du temps, l'accroissement $\dot{z}o$ de l'aire z est égal à l'aire d'une surface assimilable à un rectangle de hauteur y et de base $\dot{x}o$, d'où $\dot{z}o = y\dot{x}o$. La figure de droite indique pour sa part que pendant l'accroissement infinitésimal o du temps, le point parcourt la longueur $\dot{s}o$ en se déplaçant le long de l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs $\dot{x}o$ et $\dot{y}o$.)





À ce stade, Newton est en mesure de traduire dans le langage des fluxions la plupart des problèmes concernant la géométrie des lignes courbes. Cette méthode le conduit soit à une formule explicite, soit à une « équation fluxionnelle ». Les cas les plus simple de telles équations consistent à trouver une fluente dont on connaît la fluxion. Newton ne dispose pas d'une méthode générale, mais il a confectionné dans son traité *Tractatus de quadratura curvarum* une table de fluxions et de fluentes, analogue à nos tables de primitives modernes, qui lui permet d'écrire une solution explicite dans bon nombre de cas. Lorsqu'il se trouve confronté à des équations fluxionnelles plus compliquées, Newton utilise ses « séries infinies de variables ».

Par exemple, Newton est amené à considérer l'équation $\dot{z} = \dot{x}/(1+x)$ pour trouver l'aire z sous l'hyperbole $y = 1/(1+x)$. Développant la fraction en série infinie, Newton écrit

$$\dot{z} = \frac{\dot{x}}{1+x} = \dot{x}(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots),$$

puis, en prenant la fluente $x^{k+1}/(k+1)$ de chacun des termes $\dot{x}\,x^k$, il obtient

$$z = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Or il était connu depuis les travaux de Saint-Vincent que cette aire était liée aux logarithmes. Cela amène donc Newton à la découverte de la formule

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

aujourd'hui appelée formule de Mercator en hommage au savant danois émigré en Angleterre Nicolaus Mercator (1620–1687). Ce dernier découvre cette formule à peu près en même temps que Newton, mais il la publie dès 1668, c'est-à-dire vingt-cinq ans avant la publication des travaux de Newton. Par une méthode analogue basée elle aussi sur le calcul des fluxions, Newton obtient les développements en série du sinus, du cosinus et de l'arc sinus.

9.3 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

9.3.1 Biographie

Après une enfance plutôt studieuse, Leibniz entame dès l'âge de quatorze ans en 1661 des études de philosophie et de droit à l'université de Leipzig. Leibniz se rend à Iéna pendant le semestre d'été 1663 pour étudier les mathématiques, car l'enseignement qu'on en donne à Leipzig est médiocre. Leibniz est séduit par la rigueur logique que permet l'approche déductive en mathématiques. Leibniz commence également à réfléchir à son grand projet en philosophie :

le développement d'un alphabet de la pensée humaine, qui permettrait de représenter les concepts fondamentaux par des symboles et les pensées complexes par des combinaisons de ces symboles. Dans son habilitation de philosophie *Dissertatio de arte combinatoria* soutenue en 1666, Leibniz cherche ainsi à montrer qu'on peut réduire tous les raisonnements et découvertes à des éléments de base tels que nombres, lettres, sons et couleurs. Leibniz devient par ailleurs docteur en droit de l'université d'Altdorf en 1667.

Leibniz commence alors une carrière de diplomate et de conseiller juridique. Il est d'abord au service de l'Archevêque-Électeur de Mayence. Lors d'une mission diplomatique à Paris en 1672, Leibniz fait la connaissance de Huygens, alors pensionnaire à l'Académie Royale des Sciences, lequel lui conseille la lecture des œuvres de Saint-Vincent et lui propose quelques problèmes mathématiques à explorer. Au début de l'année 1673, Leibniz se rend à Londres, toujours pour sa mission diplomatique. Il y rencontre quelques mathématiciens anglais et se rend compte de son retard par rapport aux derniers progrès des mathématiques. Il essaie de se faire connaître en présentant avec un succès mitigé une machine à calculer inachevée aux membres de la Royal Society. De retour à Paris, Leibniz redouble ses efforts et lit les traités de Pascal, Descartes et James Gregory, toujours sur les conseils éclairés de Huygens. Leibniz commence à travailler sur les séries et sur la géométrie des infinitésimaux. En 1674, il informe Oldenburg, le secrétaire de la Royal Society, de son intérêt pour le sujet. Oldenburg lui répond en disant que James Gregory et Newton disposent déjà de méthodes générales, sans autre précision. En 1676, Leibniz finit de mettre au point les notations et les règles de son calcul différentiel.

Le protecteur de Leibniz était mort à la fin de l'année 1672. Leibniz avait pu rester quelque temps encore à Paris, en partie d'ailleurs dans l'espoir d'y devenir pensionnaire de l'Académie Royale des Sciences, mais se résigne finalement à chercher un nouvel employeur. Il entre ainsi en 1676 au service du Duc de Hanovre. Son travail de conseiller de la cour et de bibliothécaire du duc l'amène à effectuer différents travaux ; Leibniz sert également d'ingénieur et d'historien. Malgré ces obligations professionnelles, Leibniz contribue encore aux mathématiques, par exemple en élaborant le calcul arithmétique avec les nombres en base deux et en étudiant un des premiers exemples de ce qui sera plus tard appelé un déterminant. Leibniz retravaille par ailleurs à ses projets philosophiques sur la théorie de la connaissance et sur la place du mal dans un monde créé par un Dieu bon. Leibniz voyage beaucoup ; il rencontre et correspond avec la plupart des érudits que compte l'Europe à cette époque.

Leibniz a souvent œuvré pour la défense de la science. Ainsi en 1682 il soutient la création d'un journal de sciences à Leipzig, les *Acta Eruditorum Lipsiensium (Actes des érudits de Leipzig)*, qui fait contrepoids aux *Philosophical Transactions* éditées à Londres depuis 1665 par la Royal Society. Leibniz y publie d'ailleurs deux articles sur son calcul différentiel et intégral en 1684 et 1686. À partir de 1695, Leibniz essaie de convaincre les souverains des États allemands, d'Autriche et de Russie de fonder des Académies des Sciences.

9.3.2 Le calcul différentiel

En 1672, Huygens avait posé à Leibniz la question de trouver la somme de la série

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10} + \cdots$$

(Les dénominateurs des termes sont les sommes successives des premiers entiers, à savoir 1, $1+2$, $1+2+3$, etc.) Observant que

$$\tfrac{1}{1} = \tfrac{2}{1} - \tfrac{2}{2}, \qquad \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{2} - \tfrac{2}{3}, \qquad \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{4}, \qquad \text{etc.,}$$

Leibniz comprend que

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10} + \cdots = \left(\tfrac{2}{1} - \tfrac{2}{2}\right) + \left(\tfrac{2}{2} - \tfrac{2}{3}\right) + \left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{4}\right) + \left(\tfrac{2}{4} - \tfrac{2}{5}\right) + \cdots$$

et donc que la somme de la série vaut $\frac{2}{1} = 2$.

Dans son habilitation de philosophie de 1666, Leibniz avait étudié quelques suites numériques en formant les différences successives de termes consécutifs. Il reprend cette méthode en 1672 en partant de la suite $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... et obtient alors successivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, ... puisque $\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$, ... Partant alors de la suite $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, ... il obtient par le même procédé $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{60}$, ...

Leibniz dispose alors ces nombres selon un tableau qu'il appelle « triangle harmonique », dans lequel chaque ligne est la suite des différences successives de la ligne précédente.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{7} & & \cdots \\
& \frac{1}{2} & & \boxed{\frac{1}{6}} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \boxed{\frac{1}{42}} & & \frac{1}{56} & & \cdots \\
& & \frac{1}{3} & & \boxed{\frac{1}{12} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{105}} & & & & & & \frac{1}{168} & & \cdots \\
& & & & & & & \cdots
\end{array}$$

Il observe ensuite que chaque somme de termes consécutifs dans la suite des différences est égale à la différence entre deux termes de la suite initiale. Par exemple

$$\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{30} + \tfrac{1}{60} + \tfrac{1}{105} = \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{12}\right) + \left(\tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{20}\right) + \left(\tfrac{1}{20} - \tfrac{1}{30}\right) + \left(\tfrac{1}{30} - \tfrac{1}{42}\right) = \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{42}.$$

Autrement dit, Leibniz associe à une suite $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ la suite des différences successives $(z_1, z_2, z_3, \ldots) = (y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots)$; et il peut retrouver la suite dont il est parti en prenant les sommes partielles $(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (z_1, z_1 + z_2, z_1 + z_2 + z_3, \ldots)$.

Au retour de son voyage d'Angleterre de 1673, Leibniz adapte cette idée au contexte des quantités infinitésimale de la géométrie. De manière plus précise, Leibniz reprend à son compte l'idée de Cavalieri de voir une aire comme une somme de lignes, idée dont il a pris connaissance en lisant les travaux de Saint-Vincent. Semblablement, la pente des tangentes à une courbe est mesurée par la différence de deux ordonnées successives menées à la courbe. Leibniz a alors l'idée de regarder une variable géométrique y (coordonnée d'un point décrivant une courbe, longueur d'arc jusqu'à ce point, etc.) comme une quantité qui prend une suite de valeurs $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ infiniment proches les unes des autres. Avec ce point de vue, on peut alors former la suite des différences successives $(y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots)$. Cette suite de valeurs peut à son tour être vue comme une variable géométrique, que Leibniz appelle « différence » ou « différentielle » de y et note[3] dy. On peut aussi partir d'une variable z

3. Dans ses premiers manuscrits sur le sujet, Leibniz note y/d la différentielle de y. Le raisonnement derrière ce choix est que si y représente une ordonnée, c'est-à-dire une longueur, alors sa différentielle représente la pente de la tangente, c'est-à-dire un nombre sans dimension. Or si le symbole d a la dimension d'une longueur, alors dy a l'homogénéité d'une aire, alors que y/d est un nombre sans dimension. Il convient ainsi d'écrire plutôt y/d que dy pour la différentielle de y. Cependant, écrire une fraction est plus compliqué qu'écrire un produit, et Leibniz se persuade rapidement que la notation dy est tout de même plus commode. Ces hésitations, ainsi que le choix des symboles : d comme *differentia* (différence en français) et $\int$, le S allongé des manuscrits, pour *summa* (somme en français), montrent le soin avec lequel Leibniz choisit sa notation.

dont les valeurs successives forment la suite $(z_1, z_2, z_3, \ldots)$, et prendre la suite des sommes partielles $(z_1, z_1 + z_2, z_1 + z_2 + z_3, \ldots)$. Cette suite constitue les valeurs successives d'une variable, que Leibniz appelle l'« intégrale » de z et note $\int z$.

Leibniz a donc défini deux opérations sur les variables. La différentiation, notée d, associe une variable infiniment petite dy à une variable ordinaire y. L'intégration, notée $\int$, associe une variable infiniment grande $\int y$ à une variable ordinaire y ou une variable ordinaire $\int z$ à une variable infiniment petite z. Leibniz peut alors écrire une première règle de calcul : $\int dy = y$ et $d \int z = z$, pour toutes variables y et z.

Dans un article intitulé *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec fractas, nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus (Nouvelle méthode pour les maxima et les minima, ainsi que pour les tangentes...)* publié en 1684 dans les *Acta Eruditorum*, Leibniz expose les bases de son calcul. Il indique notamment les règles de calcul suivantes, dans lesquelles a et b sont des quantités constantes et x, y et v sont des quantités variables :

(i) $da = 0$ et $d(ax) = a\,dx$.

(ii) $d(x + y) = dx + dy$ et $d(x - y) = dx - dy$.

(iii) $d(xv) = v\,dx + x\,dv$.

(iv) $d(v/y) = (y\,dv - v\,dy)/y^2$.

(v) $d(x^a) = ax^{a-1}\,dx$.

(vi) $d(\sqrt[b]{x^a}) = \frac{a}{b}\,dx\,\sqrt[b]{x^{a-b}}$.

La règle (iii) ci-dessus s'appelle aujourd'hui « règle de Leibniz ».

Leibniz a mis au point ces règles pour traduire par un calcul symbolique des méthodes qui auparavant nécessitaient des arguments géométriques. Il y a notamment été conduit en essayant d'interpréter une transformation géométrique qu'il avait découverte et appelée « transmutation », et qui permettait de transformer un problème de quadrature en un autre. Dans le langage symbolique, cette transformation se traduit par la règle de calcul suivante (dans laquelle x et y sont les coordonnées d'un point situé sur une courbe)

$$\frac{1}{2} \int y\,dx + \frac{1}{2} \int x\,dy = \frac{1}{2}\,xy. \tag{$\dagger$}$$

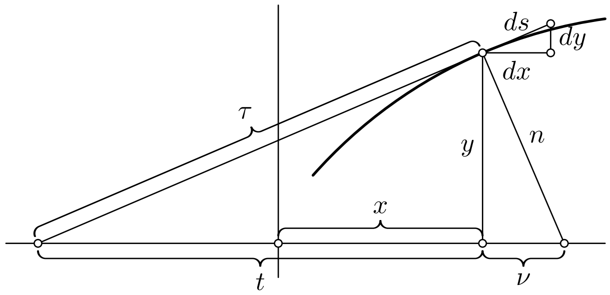
Dans notre langage moderne, cette formule s'interprète de la façon suivante : y est vue comme une fonction f de la variable x, et le quotient dy/dx est la valeur $f'(x)$ de la fonction dérivée f' ; évaluée entre les bornes 0 et a, la formule (†) correspond alors à l'intégration par parties

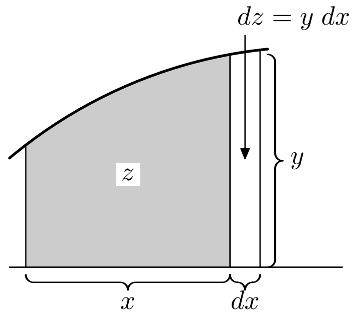
$$\frac{1}{2} \int_0^a f(x)\,dx + \frac{1}{2} \int_0^a xf'(x)\,dx = \frac{1}{2}\,af(a).$$

9.3.3 Les applications du calcul différentiel

Nous venons de voir les concepts, les notations et les règles de calcul forgés par Leibniz. Pour pouvoir pleinement considérer Leibniz comme co-inventeur du calcul infinitésimal, il nous faut indiquer quelles applications il tire de sa théorie. Pour simplifier nos explications, nous adoptons un langage moderne dans ce paragraphe.

Une courbe plane étant donnée, on peut examiner plusieurs quantités dépendant du choix d'un point sur cette courbe : l'abscisse x, l'ordonnée y, la tangente τ, la sous-tangente t, la normale n, la sous-normale ν, l'aire z, la longueur d'arc s. Leibniz considère alors une suite de points infiniment proches les uns des autres sur la courbe. La suite $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ des abscisses de ces points constitue les valeurs successives de la grandeur x et la quantité dx mesure la variation d'abscisse entre deux points consécutifs de la suite. Les grandeurs y, z, s, t, τ, n, ν et leurs différentielles peuvent être interprétées de manière similaire.





Leibniz examine alors ce qu'il appelle le triangle caractéristique. Il s'agit du triangle rectangle infinitésimal dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes de coordonnées et dont l'hypothénuse est le segment joignant deux points consécutifs de la suite de points sur la courbe. Les longueurs des côtés du triangle caractéristique sont dx, dy et ds (figure de gauche ci-dessus). Le théorème de Pythagore appliqué au triangle caractéristique donne la relation $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. Le fait que le triangle caractéristique soit semblable aux deux triangles rectangles de longueurs de côtés t, y et τ d'une part, et y, ν et n d'autre part, conduit aux équations

$$\begin{aligned} t\ dy &= y\ dx & \qquad y\ dy &= \nu\ dx \\ y\ ds &= \tau\ dy & \qquad y\ ds &= n\ dx \end{aligned}$$

qui permettent de déterminer les tangentes et les normales.

Considérons maintenant l'aire z sous la courbe, mesurée jusqu'au point de coordonnées (x, y). La figure de droite ci-dessus montre que l'aire $z + dz$ mesurée jusqu'au point de coordonnées $(x + dx, y + dy)$ excède z de l'aire du rectangle infinitésimal de hauteur y et de base dx. On en déduit l'égalité $dz = y\ dx$.

Pour conclure, voici un exemple d'un résultat inédit obtenu par Leibniz en 1693 à l'aide de son calcul. La courbe est le cercle de rayon 1. Alors la normale n est égale à 1, de sorte que $y\ ds = dx$. La relation $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ entraîne alors $(ds)^2 = (dy)^2 + y^2\ (ds)^2$. Par différentiation, il vient alors

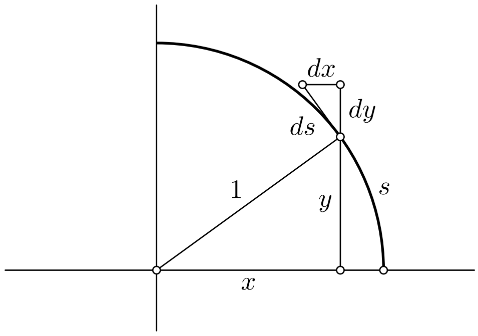
$$d\big((ds)^2\big) = d\big[(dy)^2 + y^2\ (ds)^2\big],$$

avec

$$d\big((ds)^2\big) = 2\ ds\ d(ds)$$

et

$$\begin{aligned} d\big[(dy)^2 + y^2\ (ds)^2\big] &= d\big((dy)^2\big) + d\big(y^2\big)\ (ds)^2 + y^2\ d\big((ds)^2\big) \\ &= 2\ dy\ d(dy) + 2y\ dy\ (ds)^2 + 2y^2\ ds\ d(ds). \end{aligned}$$



Leibniz suppose alors que la suite de points infiniment proches sur la courbe est choisie de sorte que la suite $(s_2 - s_1, s_3 - s_2, s_4 - s_3, \ldots)$ des valeurs prises par ds soit constante. Grâce à ce choix, on a la relation supplémentaire $d(ds) = 0$, et l'équation précédente devient

$$2\ dy\ d(dy) + 2y\ dy\ (ds)^2 = 0.$$

On peut alors simplifier et obtenir la relation[4] $d(dy) + y(ds)^2 = 0$. Leibniz poursuit en recherchant la solution sous forme d'une série $y = s + bs^3 + cs^5 + es^7 + fs^9 + \cdots$, où b, c, e, f, etc. sont des constantes. En différentiant deux fois et en utilisant à nouveau la relation $d(ds) = 0$, Leibniz obtient

$$\begin{aligned} d(dy) &= 6\ bs\ (ds)^2 + 20\ cs^3\ (ds)^2 + 42\ es^5\ (ds)^2 + 72\ fs^7\ (ds)^2 + \cdots \\ y\ (ds)^2 &= s\ (ds)^2 + bs^3\ (ds)^2 + cs^5\ (ds)^2 + es^7\ (ds)^2 + \cdots \end{aligned}$$

En substituant dans la relation $d(dy) + y(ds)^2 = 0$, Leibniz obtient successivement $b = -1/6$, $c = 1/120$, $e = -1/5040$, etc. Leibniz obtient donc ici le développement en série du sinus :

$$\sin s = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \frac{s^7}{7!} + \frac{s^9}{9!} - \cdots$$

résultat que Newton connaissait depuis longtemps mais qu'il n'avait pas publié.

9.4 Comparaison des calculs de Newton et de Leibniz

À la fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle, le calcul infinitésimal se présente sous deux formes. La terminologie, les notations et les règles de calcul de Newton et de Leibniz sont différentes, mais les deux calculs servent le même objectif : encoder les arguments utilisés dans la résolution des problèmes de géométrie infinitésimale dans le langage des symboles, des formules et des calculs algébriques. Le tableau ci-après présente les différences entre les deux versions du calcul[5].

4. Notre langage moderne énonce cette propriété en disant que la fonction y de s définie par $y(s) = \sin s$ vérifie l'équation différentielle $\frac{d^2y}{ds^2} = -y$.

5. Cette comparaison s'inspire du cours d'histoire des mathématiques *The Calculus in the Eighteenth Century II : Techniques and Applications* de la Open University, fascicule « Origins and development of the Calculus 5 » préparé par H. J. M. Bos, Milton Keynes : The Open University Press, 1975.

	Newton (vers 1666)	Leibniz (vers 1675)
Le concept de variable	Pour Newton, les variables changent dans le temps, elles sont considérées comme « fluentes », littéralement « quantités qui s'écoulent ».	Leibniz considère les variables comme des quantités qui varient sur une série de valeurs infiniment proches. Une grandeur est donc vue comme l'assemblage d'une infinité d'éléments infiniment petits.
Les fluxions et les différentielles	Dans l'approche cinématique de Newton, le concept fondamental est celui de vitesse d'accroissement de la variable, ou fluxion.	La différentielle d'une variable s'obtient en formant la suite des différences successives des valeurs qu'elle prend.
Le concept d'intégrale	La méthode de Newton pour trouver l'aire z sous une courbe décrite par le point de coordonnées (x, y) est de résoudre l'équation fluxionnelle $\dot{z} = y\dot{x}$. Il s'agit donc de trouver la fluente z à partir de sa fluxion $y\dot{x}$. Il n'y a pas d'opération d'intégration en tant que telle.	Pour Leibniz, l'intégration est une opération de sommation. Elle est définie indépendamment de la notion de différentielle. Les relations $\int dy = y$ et $d\int z = z$ sont démontrées ; elles sont des conséquences du fait général que former les différences successives et former les sommes partielles d'une suite sont deux opérations réciproques l'une de l'autre. L'aire sous une courbe, mesurée jusqu'au point de coordonnées (x, y), s'exprime par l'intégrale $\int y\,dx$.
Quantités infiniment petites	Newton hésite à utiliser les quantités infiniment petites. Une fluxion n'est pas une quantité infiniment petite mais une vélocité finie.	Leibniz les utilise : si y est une variable ordinaire, alors dy est une variable infiniment petite.
Notations	Newton utilise des points pour les fluxions, mais il utilise rarement un symbole pour l'opération inverse.	Leibniz introduit les symboles d et $\int$, ce qui met en évidence que la différentiation et l'intégration sont des opérations sur les variables. Ces symboles sont faciles à incorporer dans des formules compliquées.
Rôle des figures	Le formalisme de Newton est moins abouti que celui de Leibniz. Newton utilise fréquemment les figures géométriques et complète les résultats du calcul en faisant appel à l'intuition. Le calcul de Newton est condamné à rester relativement proche de la géométrie.	Le symbolisme mis au point par Leibniz permet de manipuler les formules indépendamment d'un support géométrique. Leibniz met l'accent sur les règles d'un calcul formel. Le calcul différentiel de Leibniz repose davantage sur l'algèbre que sur la géométrie. Ce calcul pourra facilement s'émanciper de ses origines géométriques.

9.5 La réception du calcul infinitésimal

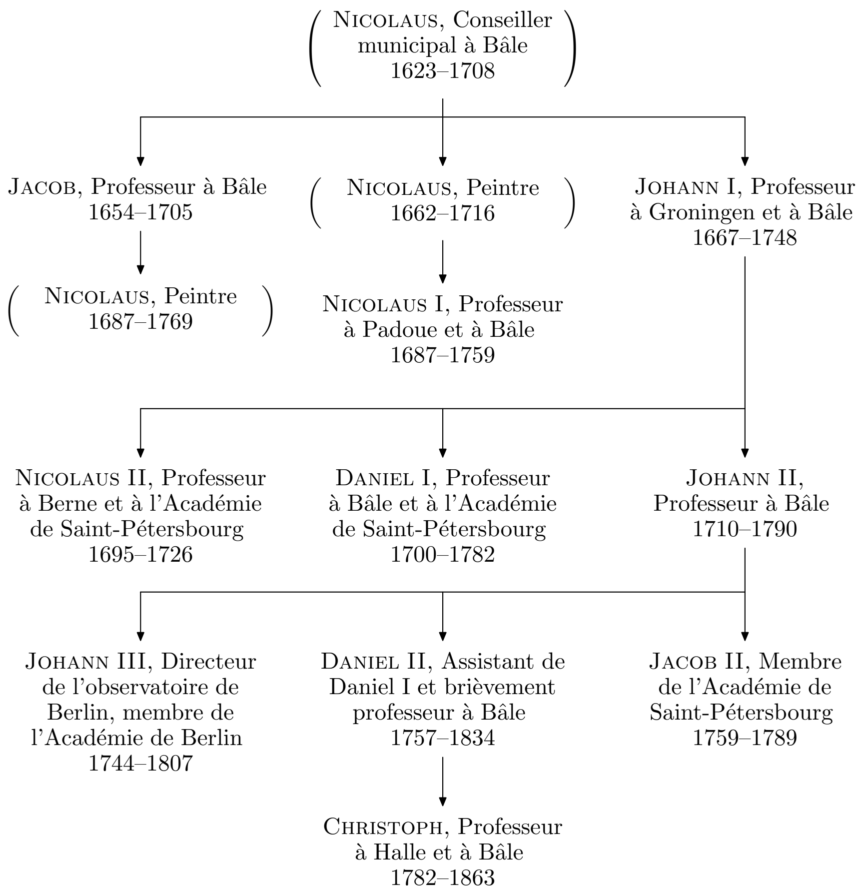
9.5.1 La diffusion du calcul des fluxions

Les idées de Newton ne se diffusèrent pas rapidement dans la communauté scientifique. Le premier livre exposant de manière synthétique le calcul sur les fluxions fut *Methodus incrementorum directa et inversa (Méthodes directes et indirectes de l'incrémentation)*, écrit par Brook Taylor (1685–1731) et publié en 1715. Ce livre contient des innovations importantes ; il explique par exemple la méthode d'intégration par parties et la formule de Taylor. Le traité de Newton *De Methodis Serierum et Fluxionum*, écrit en 1671, ne fut pour sa part publié qu'en 1736, après la mort de son auteur et dans une traduction anglaise.

9.5.2 Les frères Bernoulli, promoteurs du calcul différentiel

Le calcul de Leibniz fut popularisé très rapidement. La principale raison pour cela réside assurément dans le fait que Leibniz a promptement rendu ses résultats publics et qu'il en a assuré la promotion à travers sa correspondance scientifique. Parmi les premiers utilisateurs des méthodes de Leibniz figurent Jacob et Johann Bernoulli, dont les découvertes vont consacrer le succès du calcul leibnizien.

Les Bernoulli sont issus d'une famille protestante qui avait quitté les Pays-Bas à la fin du XVI^{e} siècle pour échapper aux persécutions religieuses et s'était établie à Bâle en 1622. Neuf mathématiciens seront issus de cette famille, chose tout-à-fait exceptionnelle !



Le premier de la famille à s'intéresser aux mathématiques est Jacob. Après des études de philosophie et de droit, il entreprend un long voyage en Europe pour apprendre les mathématiques et l'astronomie et noue des contacts avec les principaux savants français, néerlandais et anglais. Il enseigne la mécanique des solides et des liquides à l'université de Bâle à partir de 1683 et étudie les ouvrages de Descartes, Wallis et Barrow. Quand il devient professeur de mathématiques en 1687, son frère cadet de douze ans, Johann, lui demande de lui enseigner sa science. Les deux frères commencent à travailler ensemble et sont les premiers mathématiciens à essayer sérieusement de comprendre les articles plutôt obscurs que Leibniz a publié dans les *Acta Eruditorum*. Les deux frères obtiennent et publient des résultats remarquables dès le début des années 1690, acquérant ainsi une grande renommée dans le monde savant européen de la fin du XVII^{e} siècle.

Johann voyage alors à Paris. Sa compréhension des méthodes de Leibniz lui ouvre des portes. Le marquis Guillaume de L'Hospital l'engage comme professeur particulier pendant les années 1691–1692. De retour à Bâle, Johann poursuit ses travaux, la collaboration avec son frère se transformant peu à peu en une relation de rivalité farouche. Les contributions de Johann aux mathématiques lui valent une proposition de poste de professeur à Groningen aux Pays-Bas en 1695. Johann et sa famille restent dix ans là-bas. À la mort de Jacob, Johann retourne à Bâle et prend la succession de son frère comme professeur de mathématiques à l'université.

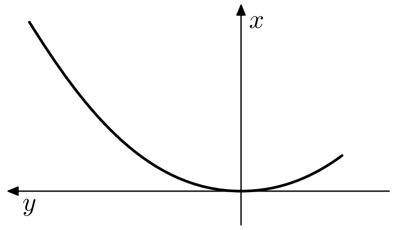
C'est en grande partie grâce aux Bernoulli que le calcul différentiel de Leibniz fut rapidement popularisé à travers l'Europe. Le premier livre présentant une synthèse du sujet est en effet publié en 1696 par l'élève de Johann Bernoulli, le marquis de L'Hospital. L'ouvrage, intitulé *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, est pour l'essentiel une rédaction soignée des cours donnés par Bernoulli. Il présente les définitions des concepts de base et les règles du calcul infinitésimal de Leibniz, ainsi que les applications à la géométrie. L'ouvrage est donc un manuel qui apprend à son lecteur à mettre les problèmes géométriques sous forme d'« équations différentielles », c'est-à-dire d'équations faisant intervenir des variables et leurs différentielles. Johann Bernoulli complète l'exposé de la théorie en publiant en 1742 ses *Lectiones mathematicae de methodo integralium (Leçons mathématiques sur la méthode des intégrales)*, dans lequel il présente différentes méthodes pour résoudre les équations différentielles.

9.5.3 Le problème de la chaînette

Le problème de la chaînette est un exemple assez typique des questions mêlant géométrie et mécanique en vogue dans la deuxième moitié du XVII^{e} siècle. Il s'agit de déterminer la forme que prend une corde ou une chaîne infiniment flexible quand elle pend sous l'effet de son propre poids, suspendue à ses deux extrémités.

En 1638, Galilée avait suggéré que la chaînette était un arc de parabole, mais Joachim Jungius (1587–1657) avait réfuté cette affirmation quelques années plus tard. En 1690, Jacob Bernoulli remit la question sur la table en proposant dans les *Acta Eruditorum Lipsiensum* le problème de trouver la forme de la chaînette. Trois solutions furent envoyées aux éditeurs de la revue : une de Huygens, une de Leibniz, et une de Johann Bernoulli, âgé alors de seulement 24 ans. Pour parvenir au résultat en n'utilisant que des méthodes géométriques classiques, Huygens usa de toute son adresse. En revanche, Leibniz et Bernoulli arrivèrent au résultat de manière plus directe grâce au calcul différentiel. Cet épisode fut le premier grand succès public du calcul infinitésimal et contribua à l'abandon des méthodes géométriques typiques du XVII^{e} siècle.

L'examen de la solution de Johann Bernoulli sera pour nous l'occasion de voir comment le calcul différentiel de Leibniz était concrètement utilisé vers 1700. En menant une analyse des conditions physiques du problème, Bernoulli montre que la courbe satisfait à l'équation $dy/dx = a/s$, où x, y et s sont l'abscisse, l'ordonnée et la longueur d'arc (comptée à partir du sommet) et où a est une constante indiquant que la chaîne est plus ou moins tendue.



Il s'agit alors de trouver la courbe en partant de cette équation $dy/dx = a/s$. Cette dernière s'interprète géométriquement comme le fait que la pente de la tangente au point (x, y) est égale à a/s. On connaît donc la loi des tangentes et on cherche la courbe ; c'est donc un problème inverse des tangentes.

La difficulté de l'équation $dy/dx = a/s$ est que la quantité s ne peut pas s'exprimer facilement en terme des coordonnées x et y, puisque la courbe n'est pas encore connue. Bernoulli effectue alors le calcul suivant (la première égalité a été justifiée au paragraphe 9.3.3) :

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dx)^2 + \frac{a^2}{s^2}\,(dx)^2$$

d'où

$$dx = \frac{s\;ds}{\sqrt{s^2 + a^2}}. \tag{‡}$$

Bernoulli observe alors que $\frac{s\;ds}{\sqrt{s^2+a^2}}$ est la différentielle de $\sqrt{s^2 + a^2} - a$. En appliquant l'opérateur $\int$ aux deux membres de l'équation (‡), on parvient donc à

$$x = \sqrt{s^2 + a^2} - a, \qquad \text{c'est-à-dire à} \quad s = \sqrt{2ax + x^2}.$$

Ainsi Bernoulli peut transformer l'équation de départ $dy/dx = a/s$ en l'équation

$$dy/dx = a/\sqrt{2ax + x^2},$$

plus simple car elle ne fait intervenir que les quantités x et y.

La traduction moderne de cette dernière équation est la suivante : la fonction f telle que la chaînette ait pour équation $y = f(x)$ vérifie

$$f'(x) = \frac{a}{\sqrt{2ax + x^2}}.$$

De nos jours, nous achèverions la résolution du problème en calculant

$$f(x) = \int_0^x \frac{a\;dt}{\sqrt{2at + t^2}} = a\,\ln\Big(a + x + \sqrt{x^2 + 2ax}\,\Big) - a\,\ln a$$

et écririons l'équation de la courbe sous la forme

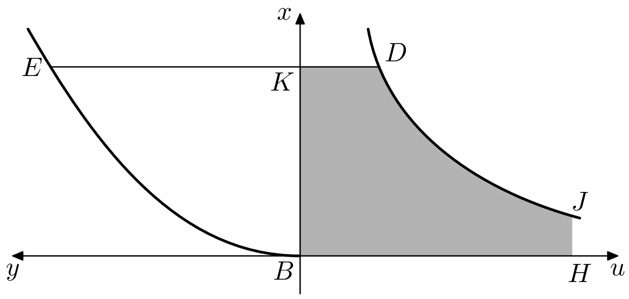
$$y = a\,\ln\Big(a + x + \sqrt{x^2 + 2ax}\,\Big) - a\,\ln a, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad x = \frac{a}{2}\left(e^{y/a} + e^{-y/a}\right) - a.$$

Bernoulli ne peut pas utiliser un tel langage, puisqu'il ne dispose pas de la notion de fonction, donc ne connaît pas les fonctions logarithme et exponentielle. Il n'utilise pas non plus l'écriture

$$\int_0^x \frac{a\,dt}{\sqrt{2at+t^2}}$$

faisant apparaître des bornes d'intégration. Son langage est au contraire géométrique : il construit la courbe DJ d'équation $u = a^2/\sqrt{2ax+x^2}$ puis il considère, pour une abscisse x, le point E tel que $a \times KE = \text{aire }(HBKDJ)$. Bernoulli énonce alors son résultat en disant que le point E est sur la courbe cherchée. Cette affirmation équivaut bien au résultat moderne, puisque l'ordonnée du point E est

$$KE = \frac{1}{a}\,\text{aire}(HBKDJ) = \frac{1}{a}\int_0^x u(t)\,dt = \frac{1}{a}\int_0^x \frac{a^2\,dt}{\sqrt{2at+t^2}}.$$



À travers l'étude de cet exemple, on voit que le calcul infinitésimal possède une forte coloration géométrique à la fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle : les problèmes abordés traitent de courbes, de tangentes et d'aires ; les variables représentent des grandeurs géométriques ; les solutions fournissent une construction géométrique des points répondant au problème. Il n'est pas encore question de donner la solution sous la forme d'une formule faisant intervenir des fonctions transcendantes (logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques, etc.)

9.6 La querelle de priorité entre Newton et Leibniz

Les inventions de Newton et de Leibniz sont voisines l'une de l'autre. Les approches des deux hommes sont différentes, mais il est facile de passer des concepts et des notations de l'un à ceux de l'autre. De plus, les deux théories ont les mêmes applications.

Newton fait ses découvertes en 1665–1666, soit dix ans avant Leibniz, mais ne les rend pas publiques avant 1693. Quand Leibniz commence ses recherches en géométrie des infinitésimaux en 1674, il est au courant que Newton possède une méthode générale (Oldenburg, le secrétaire de la Royal Society, le lui a écrit), mais ne sait pas ce dont il s'agit. À la fin de l'année 1675 Leibniz est en possession des principaux ingrédients de sa théorie et cherche à avoir l'avis de Newton sur le sujet. Il lui écrit par l'intermédiaire d'Oldenburg en lui indiquant quelques-unes de ses découvertes et en lui demandant s'il sait résoudre tous les problèmes inverses des tangentes. Pressé par Oldenburg, Newton répond en insistant sur l'importance et l'étendue de la méthode des séries infinies. Leibniz répond à Newton en lui faisant part de ses résultats sur le sujet ainsi que sur son calcul différentiel. Il profite également d'un bref passage à Londres pour consulter (sous étroite surveillance) les pages du traité *De analysi* de Newton consacrées au calcul des séries. Nous sommes alors fin 1676. Newton écrit une deuxième lettre à Leibniz, mais cette lettre met plus de six mois pour parvenir à son destinataire. (Oldenburg a tardé à la réexpédier afin que la lettre ne se perde pas pendant le déménagement de Leibniz de Paris à Hanovre.) Dans cette deuxième lettre, Newton, apparemment convaincu que Leibniz a plagié en la maquillant son invention du calcul des fluxions, explique qu'il dispose d'une méthode générale pour trouver les tangentes et qu'il est capable de résoudre des problèmes inverses des tangentes, mais n'explique pas ses méthodes. Après cela, Newton ne répond plus aux lettres que lui envoie Leibniz.

En 1684 et 1686 paraissent les articles de Leibniz sur le sujet. Au début des années 1690, le calcul de Leibniz connaît ses premiers succès, grâce en particulier aux travaux des Bernoulli. Le premier livre sur le calcul infinitésimal, à savoir le traité de L'Hospital paru en 1696, expose la version de Leibniz du calcul et ne fait même pas mention du nom de Newton. Le savant anglais devient certainement jaloux du prestige qu'acquiert ainsi Leibniz. La crise éclate en 1711 quand un admirateur de Newton, John Keill, accuse explicitement et publiquement Leibniz de plagiat dans un article qui paraît dans les *Philosophical Transactions*, le journal de la Royal Society à Londres. En réponse aux protestations de Leibniz, la Royal Society charge une commission d'examiner l'affaire. L'enquête est conduite avec partialité et le rapport, écrit par Newton lui-même sous couvert de l'anonymat, conclut à la culpabilité de Leibniz. Leibniz réplique par un pamphlet, dans lequel il met le doigt sur une erreur mineure commise par Newton au sujet des dérivées secondes. Quelques échanges de lettres supplémentaires et l'intervention maladroite de Johann Bernoulli en faveur de Leibniz achèvent d'envenimer la situation.

Cette histoire serait dépourvue d'intérêt si elle n'avait eu une conséquence importante. À la suite de cette querelle, la communauté scientifique européenne se scinde en deux parties : les défenseurs de Newton et ceux de Leibniz. Alors que les mathématiciens britanniques défendent la cause de Newton, les personnes en contact avec les Bernoulli utilisent les méthodes, la terminologie et les notations de Leibniz. En France, Newton n'est généralement pas en faveur, car ses théories physiques, justes, contredisent celles, erronées, formulées par Descartes cinquante ans plus tôt. Pour tirer un bilan grossier de la situation, disons rapidement que le morcellement de la communauté scientifique empêche la bonne propagation des idées et des découvertes au XVIII$^{\text{e}}$ siècle. Les savants anglais prennent ainsi du retard en mathématiques, puisque les progrès les plus rapides sont effectués sur le continent européen ; et sur le continent, l'animosité contre Newton freine la réception de ses théories physiques.

9.7 Conclusion

En inventant le calcul des fluxions, Newton unifie plusieurs approches. Il trouve un cadre conceptuel qui lui permet d'une part de donner des interprétations de différentes méthodes de tangentes inventées précédemment (l'approche de Newton englobe l'approche cinématique de Roberval mentionnée dans le paragraphe 8.6.2 et les règles du calcul des fluxions permettent de comprendre les raisons du bon fonctionnement des règles de Hudde), et d'autre part de relier commodément différentes catégories de problèmes (problèmes de tangentes, de quadrature, de rectification, de courbure, etc.)

En inventant le calcul différentiel, Leibniz cherche les règles d'un calcul capable de traduire en symboles les arguments présents dans les démonstrations géométriques utilisant des quantités infinitésimales. Leibniz constate que les deux constructions géométriques fondamentales sont trouver les tangentes et effectuer une quadrature ; il établit son calcul selon ce modèle en définissant deux opérations de base, la différentiation et l'intégration. Leibniz choisit soigneusement les symboles pour ces deux opérations de façon à parvenir à l'écriture la plus simple et efficace possible.

Les règles du calcul infinitésimal permettent de contourner aisément des obstacles qui nécessitaient des astuces spéciales avec les méthodes précédentes, voire étaient tout bonnement insurmontables. Ainsi le calcul de Leibniz permet de traiter facilement les expressions contenant une racine carrée par exemple. De manière similaire, la théorie des séries infinies permet à Newton de traiter uniformément toutes les expressions, même si elles comportent une racine carrée ou une puissance fractionnaire. Cette théorie des séries infinies est également vue comme un remède à l'impossibilité d'effectuer certaines quadratures ; en l'utilisant, Newton parvient à trouver une expression exacte pour l'aire sous l'hyperbole $y = 1/(1 + x)$, aire qui n'est autre que le logarithme $\ln(1 + x)$.

Nous verrons dans le chapitre suivant que l'impact des inventions de Newton et Leibniz sur le développement ultérieur des mathématiques a été gigantesque, mais déjà nous pouvons appuyer cette affirmation sur l'observation suivante. Aujourd'hui, nous utilisons les concepts de l'analyse (c'est le nom de la branche des mathématiques à laquelle le calcul infinitésimal a donné naissance) pour définir avec précision ce qui touche aux questions d'aires et de tangentes. Les définitions du calcul infinitésimal ont donc finalement été jugées plus fondamentales que les constructions géométriques. Certes deux siècles d'évolution de la pensée mathématique seront encore nécessaires pour arriver à cette situation, mais ce sont Newton et Leibniz qui, à la fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle, ont donné le premier élan à ce mouvement.

Chapitre 10

Le développement de l'analyse au XVIIIe siècle

Résumé et objectifs du chapitre

Les principaux progrès des mathématiques au XVIIIe siècle proviennent de l'exploration des possibilités du nouvel outil que constitue le calcul infinitésimal de Newton et Leibniz. Les résultats obtenus sont si nombreux qu'il n'est pas possible de dresser l'inventaire des progrès effectués dans un cours généraliste. Nous limitons donc notre étude à la question suivante : comment le calcul infinitésimal devient-il au XVIIIe siècle une branche autonome des mathématiques ?

Deux phénomènes ont lieu : d'une part, la manipulation algébrique des formules remplace progressivement l'étude des problèmes géométriques ; d'autre part, le calcul infinitésimal se ramifie en de nombreuses sous-disciplines. Nous étayons ces affirmations par des exemples et indiquons les problèmes qui motivaient les mathématiciens du XVIIIe siècle. Puis nous examinons le concept de fonction qu'Euler met au point afin de pouvoir manipuler les formules. Enfin nous observons que les difficultés conceptuelles concernant les fondements logiques du calcul infinitésimal ne sont ni éludées, ni résolues au cours du XVIIIe siècle.

10.1 La science dans la société des Lumières

Nous laissons le fil de l'histoire du développement du calcul infinitésimal en suspens le temps d'un paragraphe pour présenter la place de la science dans la société européenne au XVIIIe siècle et mentionner les principales évolutions par rapport à la situation du siècle précédent.

Une première différence concerne les méthodes de travail des savants. Au XVIIe siècle, la science était le fruit d'une réflexion privée. Les savants travaillaient de manière isolée et communiquaient entre eux par des lettres ; les ouvrages étaient rares. Au XVIIIe siècle, la science progresse au contraire grâce à des dialogues (coopératifs ou polémiques) entre les savants. Plusieurs nouvelles voies permettent aux idées d'être diffusées de manière publique et rapide. Ainsi les revues savantes se multiplient dans la première moitié du XVIIIe siècle ; leur nombre passe de deux ou trois à la fin du XVIIe siècle à une centaine à la fin du XVIIIe. Parallèlement, les gens curieux de sciences se regroupent localement pour échanger leurs réflexions : des lieux de débat, qui prennent généralement le nom d'académies des sciences, sont ainsi institués un peu partout en Europe, par exemple en France à Lyon en 1701, à Montpellier en 1706, à Bordeaux en 1712, à Toulouse en 1727, etc.

Par ailleurs, la science accède à un statut officiel. À la fin du XVII^{e} siècle et au début du XVIII^{e}, les monarques qui dirigent les nations européennes fondent de grandes académies des sciences : l'Académie Royale des Sciences de Paris est créée en 1666, celle de Vienne voit le jour en 1682, puis viennent celles de Berlin en 1700, d'Espagne en 1713, de Saint-Petersbourg en 1724, de Stockholm en 1739, etc. Les monarques trouvent largement leur compte dans cette entreprise. D'un côté, ils s'attachent ainsi durablement les services, l'expertise et le rayonnement scientifique d'excellents savants ; les académiciens accomplissent en effet diverses tâches techniques et administratives pour le monarque qui les emploie (nous verrons un exemple de cela au paragraphe 10.3.2 avec la biographie d'Euler). D'autre part, les académies encouragent le progrès technique et scientifique, au bénéfice de la nation ; par exemple, elles apportent des ressources financières qui permettent l'édition des premières revues scientifiques, et elles proposent régulièrement des sujets de concours scientifiques dotés de prix attractifs. Les savants tirent également un grand bénéfice de la création des académies. D'une part, être membre d'une académie est une forme de reconnaissance officielle. Mieux encore, le statut de pensionnaire garantit une vie matérielle décente [1], même si parmi les personnes intéressées par les sciences, seul un tout petit nombre réussit à accéder à ce statut privilégié [2]. Enfin, la présence de collègues brillants fournit aux membres des académies un environnement scientifique favorable à leurs travaux.

Enfin le XVIII^{e} siècle est une époque où les savants ont cherché à rassembler et à organiser leurs connaissances. Différents ouvrages proposent une synthèse ambitieuse des connaissances scientifiques : l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert (son titre exact est *Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*) cotoie par exemple l'*Histoire naturelle* de Buffon, publiée en 44 volumes entre 1749 et 1804. De grandes expéditions scientifiques sont par ailleurs entreprises : Maupertuis et Clairaut partent en Laponie en 1736 mesurer l'aplatissement de la Terre, De Bougainville fait un grand voyage de découverte autour du monde dans les années 1760, Pallas fait des voyages pour étudier la flore de Sibérie et de Mongolie entre les années 1768 et 1774, La Pérouse explore le Pacifique dans les années 1780, etc.

Ainsi en quelque sorte la science européenne s'organise au cours du XVIII^{e} siècle. Les revues savantes et les petites académies des sciences de province cimentent la communauté scientifique. Les académies royales donnent un statut officiel et une rémunération aux meilleurs savants et encouragent le progrès scientifique. De vastes ouvrages de synthèse confèrent une valeur universelle aux connaissances rationnelles.

10.2 Du calcul infinitésimal à l'analyse

Nous avons montré à la fin du paragraphe 9.5.3 qu'à sa création, le calcul infinitésimal avait une forte coloration géométrique. À la fin du XVIII^{e} siècle, le calcul infinitésimal sera devenu une branche autonome des mathématiques, l'analyse. Nous allons essayer de comprendre le comment et le pourquoi de cette transformation. Pour cela, nous commençons par examiner

1. L'Angleterre constitue ici une exception. La Royal Society est créée en 1660 non pas par le roi d'Angleterre, mais par les savants britanniques, désireux de se donner un outil facilitant la propagation des connaissances scientifiques. La Royal Society ne reçoit pas de subvention lui permettant d'offrir une pension à ses membres ; en fait, elle dépend financièrement des cotisations de ses membres pour couvrir ses frais de fonctionnement (organisation des séances et acquisition de matériel expérimental).

2. L'Académie Royale des Sciences de Paris par exemple n'accueille que vingt pensionnaires.

les différences entre le calcul infinitésimal de 1700 et l'analyse élémentaire telle qu'elle est enseignée aujourd'hui.

10.2.1 Comparaison entre le calcul infinitésimal de 1700 et l'analyse moderne

Le tableau du paragraphe 9.4 présente les aspects les plus importants des calculs de Newton et de Leibniz. Une comparaison avec notre analyse moderne met en évidence plusieurs différences importantes :

– Le calcul infinitésimal de 1700 porte sur des « variables », qui sont des objets intuitifs sans définition précise. (Newton et Leibniz ont d'ailleurs des approches différentes de cette notion.) Ces variables représentent des grandeurs géométriques : coordonnées d'un point sur une courbe, longueur d'arc, aire sous une courbe, etc. L'analyse moderne étudie quant à elle des fonctions d'une ou plusieurs variables réelles, objets qui n'ont pas de rapport direct avec la géométrie.
– La dérivée d'une fonction est le pendant moderne de la fluxion d'une grandeur ou de la différentielle d'une variable. Le changement de cadre s'accompagne toutefois d'une simplification : la dérivée d'une fonction est une fonction, alors que la différentielle d'une variable ordinaire est une variable infiniment petite et que la fluxion d'une grandeur est une vitesse d'accroissement.
– Enfin, l'analyse moderne propose une définition précise pour la dérivée d'une fonction. Cette définition est basée sur la notion de limite et permet d'atteindre la même précision dans les raisonnements que celle offerte par la géométrie d'Euclide. Par contraste, le calcul de Newton repose sur l'idée intuitive de « vitesse d'accroissement » tandis que celui de Leibniz utilise explicitement le concept non défini de « variable infiniment petite ».

La transformation du calcul infinitésimal en analyse englobe donc deux changements importants : l'adoption de la notion de fonction au XVIII^{e} siècle (suivie de celle de fonction dérivée), puis l'introduction de définitions précises basées sur la notion de limite au XIX^{e} siècle. Nous examinerons au paragraphe 10.3 la manière dont le premier de ces deux changements a pris place.

Nous allons à présent indiquer plusieurs des raisons qui ont contribué à faire de l'analyse une branche indépendante des mathématiques. Il y a des facteurs externes, dictés par le contexte scientifique du XVIII^{e} siècle, mais le progrès vient aussi de l'étude de questions internes à la théorie.

10.2.2 Le rôle stimulant des sciences physiques et mécaniques

Les travaux effectués au XVII^{e} siècle en Italie par les disciples de Galilée, en France par Huygens, en Angleterre par Newton, font progresser les sciences physiques, et particulièrement la mécanique et l'optique. Des savants comme Newton ou les Bernoulli comprennent que le calcul infinitésimal permet de formuler précisément les lois de la mécanique. Les deux disciplines, calcul infinitésimal et mécanique, sont développées conjointement tout au long du XVIII^{e} siècle, sans être séparées par une frontière. Les noms de Daniel Bernoulli, d'Euler, Laplace ou Lagrange sont d'ailleurs associés à l'histoire de la physique presque autant qu'à celle des mathématiques.

Alors que le stock de problèmes traditionnels issus de la géométrie des courbes tend à s'épuiser, l'ouverture de ce nouveau champ d'application suscite l'examen de problèmes inédits, dont la résolution nécessite l'invention de nouvelles méthodes et de nouvelles techniques mathématiques. Petit à petit, les grandeurs physiques prennent la place des grandeurs géométriques dans les formules des mathématiciens, et le calcul infinitésimal devient avant tout le langage naturel pour la formulation des lois de la physique (en mécanique : théorie des oscillations, de l'élasticité, de la gravitation, mécanique des milieux continus ; en optique : recherche des caustiques). Du coup, l'intérêt des mathématiciens se porte davantage sur la manipulation des symboles et des formules. En outre, l'extension du domaine d'application de la théorie en direction de problèmes plus concrets et moins gratuits contribue à la popularisation de la théorie.

10.2.3 L'exploration des possibilités d'un nouvel outil

La puissance du calcul infinitésimal apparaît au grand jour quand les successeurs de Newton et Leibniz clarifient son usage. Les savants européens se mettent alors à explorer les possibilités de ce nouvel outil. Grâce à lui, des résultats mathématiques nouveaux sont rapidement obtenus.

La nouvelle théorie pose elle-même de nouvelles questions. Par exemple, de nombreux problèmes se traduisent par une équation différentielle dans le nouveau langage. La recherche des solutions des équations différentielles devient alors une question importante. Un des premiers résultats non banal dans cette direction est l'invention par Jacob Bernoulli en 1696 de la méthode pour résoudre les équations différentielles de la forme

$$dy = A\, y\, dx + B\, y^n\, dx$$

où A et B sont des expressions polynomiales en la variable x.

Le calcul effectif des séries est également source de questions : Jacob Bernoulli montre ainsi que la somme infinie $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$ a une valeur inférieure à 2, mais ne parvient pas à la calculer. Johann Bernoulli, Leibniz, James Stirling (1692–1770), Abraham de Moivre (1667–1754) se cassent les dents sur le problème. C'est Euler qui parviendra à montrer en 1735 que la somme vaut $\pi^2/6$.

Les progrès effectués au cours du XVIII^e siècle sont incroyablement nombreux. Parfois, une méthode conçue pour résoudre une question précise se développe en une nouvelle sous-discipline à part entière. Ainsi les méthodes mises au point pour étudier les quantités dépendant de plusieurs grandeurs variables sont systématisées et donnent naissance à la théorie des fonctions de plusieurs variables. De même, l'étude des problèmes de recherche d'extrémum, étendue au cas où la quantité à minimiser ou à maximiser dépend non pas du choix d'un point mais du choix d'une courbe, va conduire au calcul des variations.

La méthode des développements en série, initiée par Newton et Leibniz (voir les paragraphes 9.2.3, 9.2.5 et 9.3.3), est une des techniques préférées des mathématiciens du XVIII^e siècle. Elle leur permet d'une part d'obtenir de nouvelles formules, et d'autre part d'élaborer efficacement des tables de logarithmes et des tables trigonométriques, qui elles-mêmes servent dans les problèmes d'ingénierie (construction de navires par exemple), de cartographie ou d'astronomie.

De façon plus générale, les mathématiciens du XVIII^e siècle sont des virtuoses du calcul, capables de jongler avec des expressions contenant une infinité de termes ou de facteurs en extrapolant à ces expressions les règles de calcul connues pour les polynômes. Par exemple, observant que la fonction sinus a pour zéros les points 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, etc., et que $\sin z \approx z$

quand z est petit, Euler n'hésite pas à écrire

$$\begin{aligned}\sin z &= z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\left(1-\frac{z}{3\pi}\right)\left(1+\frac{z}{3\pi}\right)\cdots\\ &= z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{16\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{25\pi^2}\right)\cdots\end{aligned}$$

sans faire une étude sérieuse de la convergence de ces produits infinis.

10.3 L'émergence de la notion de fonction

L'analyse devient au XVIII$^{\text{e}}$ siècle l'art de manipuler des formules compliquées, faisant intervenir des variables et comportant une infinité de termes. Une terminologie adaptée à ces préoccupations est alors adoptée par les mathématiciens : la notion de « fonction ».

10.3.1 Prémices

Leibniz utilise le mot « fonction » pour désigner les quantités géométriques (coordonnées, sous-tangente, etc.) dépendant du choix d'un point sur la courbe : il s'agit là d'une notion assez différente de notre concept moderne. En 1718, Johann Bernoulli définit une fonction comme étant « une grandeur variable formée d'une manière quelconque à partir d'une grandeur variable x et de constantes », puis en 1734, Clairaut et Euler adoptent la notation $f(x)$. Nous allons maintenant voir comment Euler, à la fin des années 1740, met le concept au centre de l'analyse et le développe de façon systématique.

10.3.2 Biographie d'Euler

Leonhard Euler naît en 1707. Son père est pasteur à Riehen, un village tout près de Bâle. Conformément au vœu de son père, Leonhard Euler part en 1720 étudier la théologie et la philosophie à l'université de Bâle. Il suit parallèlement des cours de mathématiques auprès de Johann Bernoulli. Ce dernier, convaincu du potentiel de son élève, persuade le père d'Euler d'autoriser Leonhard à abandonner la théologie et à se consacrer aux mathématiques.

Lorsque Euler finit ses études en 1726, il a déjà écrit son premier article, une petite contribution à un problème mêlant géométrie des courbes et mécanique. En 1727, Euler prend part au concours pour le Grand Prix de l'Académie des Sciences de Paris et termine second, une performance plus qu'honorable pour ce jeune homme de vingt ans. Le décès de Nicolaus Bernoulli, le fils de Johann, crée alors une place vacante à l'Académie de Saint-Petersbourg. Euler est pressenti pour ce poste. À Saint-Petersbourg, il rejoint Daniel Bernoulli, le deuxième fils de Johann, et trouve un environnement scientifique extrêmement favorable. Rattaché au département des sciences physico-mathématiques, il occupe la chaire supérieure de mathématiques à partir de 1733. La tsarine lui demande de travailler à des projets d'ingénierie et de cartographie. En 1740, Euler possède une solide réputation, que lui ont apporté ses déjà nombreux articles et ses deux premières places au Grand Prix de l'Académie des Sciences de Paris en 1738 et 1740. Une cataracte le prive de l'usage de son œil droit vers 1740.

En 1741, uite à des troubles politiques en Russie, Euler accepte l'offre du roi de Prusse Frédéric le Grand de venir à l'Académie des Sciences de Berlin. Il en devient le vice-président, et à ce titre s'acquitte de la gestion administrative de l'observatoire et des jardins botaniques de l'académie. En outre, le roi lui confie des travaux techniques, comme la supervision d'un projet de canal ou la mise en place du système hydraulique dans les jardins du château de Sanssouci à Potsdam. Sur le plan scientifique, Euler écrit entre 1741 et 1766 près de quatre cents articles ainsi que des livres sur des sujets aussi variés que le calcul des variations, le calcul des orbites planétaires, le mouvement de la lune, la mécanique des solides et des fluides, l'artillerie, la ballistique, la navigation, l'analyse, le calcul différentiel...

En 1766, des mésententes éclatent entre Euler et Frédéric le Grand. Euler retourne à Saint-Petersbourg. Il connaît des ennuis de santé de plus en plus grands et devient bientôt complètement aveugle. Euler continue à travailler avec l'aide d'assistants, tel Fuss, un jeune mathématicien suisse invité à l'Académie de Saint-Pétersbourg, qui deviendra le beau petit-fils d'Euler, et qui aide à la publication de deux cent cinquante articles en sept ans.

Euler meurt le 18 septembre 1783. Il laisse derrière lui une œuvre imposante : plus de huit cents articles et une vingtaine de monographies, à quoi il faut ajouter les manuscrits non-publiés et la correspondance. Les œuvres complètes d'Euler occupent plus de soixante-dix volumes, dont trente volumes sont consacrés aux mathématiques. Trois domaines sont au cœur des mathématiques d'Euler : la théorie des nombres, l'analyse et la mécanique rationnelle. Ces deux derniers domaines sont développés conjointement : équations différentielles, calcul des variations et fonctions spéciales servent à la résolution des problèmes de mécanique rationnelle, qui en retour est source de questions.

10.3.3 L'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler

En 1748 apparaissent deux ouvrages didactiques d'introduction aux nouvelles méthodes de calcul. L'un de ces ouvrages est un manuel d'enseignement, l'*Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana (Cours d'analyse à l'usage de la jeunesse italienne)* ; son auteur est Maria Agnesi (1718–1799), une jeune mathématicienne italienne.

Le second ouvrage est l'*Introductio in analysin infinitorum (Introduction à l'analyse des infinis)* d'Euler, qui comprend deux livres. Le premier livre a pour but de présenter les bases algébriques des nouvelles méthodes de calcul, notamment celles qui concernent les séries infinies ou la manipulation de quantités infiniment grandes ou infiniment petites. Le second livre donne les applications de ces méthodes à la géométrie des courbes et des surfaces. En adoptant ce plan, Euler établit une séparation nette entre le calcul avec les infinis et la géométrie. La préface de l'ouvrage confirme ce dessein : Euler explique que l'algèbre est nécessaire à la bonne compréhension de l'« analyse des infinis » et sous-entend que le seul lien qui unit cette théorie à la géométrie se trouve dans les applications qu'on peut y faire [3].

> J'ai vu souvent que les difficultés, qui arrêtent les Commençans, lorsqu'ils se livrent à l'étude du Calcul infinitésimal, viennent en très-grande partie de ce qu'ils veulent s'élever à la connoissance de cette nouvelle branche de l'Analyse, n'ayant encore qu'une teinture assez légère de l'Algèbre commune. (...) C'est pourquoi je ne doute pas que les matières que j'ai rassemblées dans les deux Livres qui composent cet Ouvrage, ne suppléent abondamment à ce défaut. Car non-seulement j'ai fait ensorte de ne rien omettre de ce qu'exige absolument l'Analyse des infinis, & de l'explorer avec plus d'étendue & plus de clarté qu'on ne le fait ordinairement ; mais j'ai de plus résolu un assez bon nombre de questions, qui mettront les Lecteurs à portée

3. Nous présentons le texte d'Euler dans la traduction qu'en a donnée J. B. Labey en 1796. Ce fait explique quelques archaïsmes dans la langue.

de se familiariser insensiblement, & en quelque sorte contre leur attente avec l'idée de l'infini. J'ai aussi traité par les méthodes de l'Algèbre commune plusieurs questions, qui font ordinairement l'objet de l'Analyse infinitésimale, afin de rendre plus sensible & plus frappant l'accord parfait qu'on remarquera dans la suite entre les deux méthodes.

J'ai divisé ce Traité en deux Livres. Le premier embrasse ce qui a rapport à l'Analyse pure. Dans le second, je développe plusieurs questions géométriques, dont la connoissance m'a paru nécessaire ; parce qu'ordinairement en traitant de l'Analyse infinitésimale, on en fait voir en même temps l'application à la Géométrie. (...)

Contrairement aux traités antérieurs, l'*Introductio* ne se réduit pas à un inventaire des principaux résultats connus à l'époque. Euler choisit en effet de réorganiser le matériel disponible en l'articulant autour de la notion de fonction. Il explique ainsi dans la suite de la préface :

Je me suis sur-tout étendu dans le premier Livre sur les fonctions de variables, parce qu'elles sont l'objet de l'Analyse infinitésimale. J'y ai enseigné la manière de les transformer, de les décomposer, & de les réduire en séries infinies. J'ai fait l'énumération de plusieurs especes, auxquelles on doit avoir égard, particulièrement dans la haute Analyse. Je les ai d'abord divisées en algébriques & en transcendantes. Les premières sont composées de quantités variables combinées entr'elles par les opérations ordinaires de l'Algèbre, & et les secondes dépendent d'autres opérations, ou des mêmes combinaisons que les précédentes, mais répétées une infinité de fois. La subdivision des fonctions algébriques, qui s'offre la première est celle en rationnelles & en irrationnelles. (...)

De fait, les premiers chapitres de l'ouvrage sont consacrés à une étude assez systématique de la notion de fonction. Le chapitre I contient les définitions :

Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur. (...) Lorsqu'il s'agit de représenter ces sortes de quantités par des caractères, on se sert des premières lettres de l'alphabet a, b, c, etc. (...)

Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs définies. (...) On a coutume de représenter les quantités variables par les dernières lettres de l'alphabet z, y, x, etc. (...)

Une fonction d'une quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes.

et des exemples :

Toute expression analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités constantes, est une fonction de z. Par exemple, $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{a^2 - z^2}$; c^z ; etc. sont des fonctions de z.

Euler fait ensuite la distinction entre d'une part les fonctions qu'il appelle algébriques, dont l'expression en fonction des variables ne fait intervenir que les quatre opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division), l'élévation aux puissances, l'extraction des racines, ou la résolution des équations, et d'autre part les fonctions qu'il appelle transcendantes, qui font subir aux variables d'autres opérations comme prendre des exponentielles, des logarithmes ou des lignes trigonométriques. Parmi les fonctions algébriques, Euler distingue les fonctions rationnelles, qui sont celles dont l'expression ne fait intervenir que les quatre opérations arithmétiques. Enfin les fonctions entières sont celles qui s'expriment à partir des variables en n'utilisant que l'addition, la soustraction et la multiplication. Qu'Euler donne une telle classification est le signe qu'à ses yeux, la notion de fonction est une abstraction utile car elle englobe tous les cas possibles.

Considérer le logarithme, l'exponentielle et les lignes trigonométriques comme des fonctions et les traiter sur un pied d'égalité avec les autres expressions est une des grandes innovations d'Euler. Euler se met ainsi en position d'employer les procédés algébriques généraux (développement, factorisation, etc.) sur toutes les expressions, quelle que soit leur nature. Les résultats qu'Euler obtient dans les chapitres suivants de l'*Introductio* montrent la fécondité de cette approche. Voici à titre d'exemples quelques-uns de ces résultats.

Dans le chapitre VII, Euler étudie le logarithme et l'exponentielle. Il introduit notamment la notation e pour désigner la base des logarithmes naturels et donne sa valeur $e = 2,7182818\ldots$ avec vingt-trois décimales exactes. Il obtient également les développements en séries de l'exponentielle et du logarithme et utilise ce dernier pour calculer les valeurs du logarithme des dix premiers entiers positifs avec vingt-cinq décimales exactes.

Dans le chapitre VIII, Euler explore les lignes trigonométriques. Il rappelle les formules d'addition usuelles et en donne d'autres, comme

$$\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \tan \frac{a+b}{2}.$$

Il s'intéresse ensuite aux facteurs dans le membre de droite de l'égalité

$$1 = (\cos z)^2 + (\sin z)^2 = \left(\cos z + \sqrt{-1}\sin z\right)\left(\cos z - \sqrt{-1}\sin z\right)\ ;$$

en utilisant les formules d'addition, il montre que

$$\left(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x\right)\left(\cos y \pm \sqrt{-1}\sin y\right) = \cos(x+y) \pm \sqrt{-1}\sin(x+y),$$

$$\left(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x\right)\left(\cos y \pm \sqrt{-1}\sin y\right)\left(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z\right) = \cos(x+y+z) \pm \sqrt{-1}\sin(x+y+z),$$

$$\ldots$$

Son résultat le plus fameux part de la formule de de Moivre, qu'il redémontre : pour tout entier n, on a

$$\cos(nz) \pm \sqrt{-1}\sin(nz) = \left(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z\right)^n.$$

Euler en déduit

$$\cos(nz) = \frac{\left(\cos z + \sqrt{-1}\sin z\right)^n + \left(\cos z - \sqrt{-1}\sin z\right)^n}{2},$$

$$\sin(nz) = \frac{\left(\cos z + \sqrt{-1}\sin z\right)^n - \left(\cos z - \sqrt{-1}\sin z\right)^n}{2\sqrt{-1}},$$

puis, par un raisonnement assez convaincant mais peu rigoureux car basé sur l'utilisation de quantités infiniment grandes et infiniment petites, il en déduit les célèbres formules [4]

$$\cos\nu = \frac{e^{+\nu\sqrt{-1}} + e^{-\nu\sqrt{-1}}}{2}, \qquad \sin\nu = \frac{e^{+\nu\sqrt{-1}} - e^{-\nu\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \qquad e^{\pm\nu\sqrt{-1}} = \cos\nu \pm \sqrt{-1}\sin\nu.$$

4. Euler est le premier à écrire la formule $e^{ix} = \cos x + i\sin x$. Cependant la formule $ix = \ln(\cos x + i\sin x)$, qui est presque équivalente à la formule d'Euler, avait été publiée dès 1722 par Roger Cotes (1682–1716), vingt-six ans avant la parution du traité d'Euler.

Dans le chapitre IX, Euler parvient à factoriser le membre de droite des équations ci-dessus donnant le sinus et le cosinus et obtient

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{16\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{25\pi^2}\right)\cdots$$

$$\cos z = \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{49\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{81\pi^2}\right)\cdots$$

Nous arrêtons ici l'énumération des résultats obtenus par Euler dans l'*Introductio*. Faisons toutefois une dernière remarque au sujet de cet ouvrage. Nous avons observé qu'Euler s'autorise à manipuler des séries et des quantités infiniment petites ou infiniment grandes. Il fait le choix en revanche de ne pas recourir au calcul différentiel dans l'*Introductio*. Ce fait témoigne de sa volonté de montrer que les résultats qu'il obtient sont indépendants du calcul différentiel. Cela étant, Euler se devait de rédiger des ouvrages exposant le calcul différentiel et la résolution des équations différentielles. Il le fera quelques années plus tard, en publiant les *Institutiones calculi differentialis (Cours de calcul différentiel)* et les *Institutiones calculi integralis (Cours de calcul intégral)*, respectivement en 1755 et en 1768–1770.

10.3.4 Résumé : l'apport de la notion de fonction

Vers le milieu du XVIII[e] siècle, le calcul infinitésimal est devenu l'étude et la manipulation d'expressions algébriques et de séries. Le mot de fonction est utilisé pour désigner les quantités dépendant d'une ou de plusieurs quantités variables. Euler organise son traité d'analyse autour de la notion de fonction ; il montre qu'elle apporte une simplification et une unification dans le langage, en permettant par exemple de mettre le logarithme, l'exponentielle et les lignes trigonométriques sur le même pied que les autres expressions.

Grâce à l'autorité scientifique d'Euler, la pertinence et l'intérêt du nouveau concept sont reconnus très rapidement par les autres mathématiciens. Désormais, plus rien ne lie le calcul infinitésimal à la géométrie des courbes. Le calcul infinitésimal peut alors devenir une branche pleinement autonome des mathématiques. La notion de fonction, qui permet la naissance de l'analyse au XVIII[e] siècle, demeure aujourd'hui encore un des piliers sur lesquels cette discipline repose.

10.4 La notion de fonction dérivée

C'est Lagrange (1736–1813), Giuseppe Lodovico Lagrangia à sa naissance, qui introduit à la fin du XVIII[e] siècle les terminologies « fonction primitive » et « fonction dérivée » ainsi que la notation $f'(x)$. Voici ce qu'il explique dans son ouvrage *Théorie des fonctions analytiques* publié en 1797.

> Considérons donc une fonction $f(x)$ d'une variable quelconque x. Si à la place de x on y met $x+i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$, et par la théorie des séries on pourra la développer en une série de cette forme
>
> $$f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \cdots,$$
>
> dans laquelle les quantités p, q, r, etc., coefficients des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive x, et indépendantes de l'indéterminée i.

Ici Lagrange affirme que grâce à la théorie des séries, on peut trouver, pour toute fonction f de la variable x, des fonctions p, q, r, s, etc. de x telles que, si i est une variable supplémentaire, l'égalité

$$f(x+i) = f(x) + p(x)\, i + q(x)\, i^2 + r(x)\, i^3 + s(x)\, i^4 + \cdots$$

ait lieu. Lagrange dit que les fonctions p, q, r, s, etc. sont dérivées de la fonction f, puis il note $p = f'$. Par un raisonnement simple, il montre ensuite que

$$2q = p', \qquad 3r = q', \qquad 4s = r', \ \ldots$$

et obtient donc

$$f(x+i) = f(x) + f'(x)i + \frac{f''(x)}{2}i^2 + \frac{f'''(x)}{2\cdot 3}i^3 + \frac{f^{\mathrm{IV}}(x)}{2\cdot 3\cdot 4}i^4 + \cdots$$

Il énonce enfin la définition :

> Nous appellerons la fonction $f(x)$ la *fonction primitive* par rapport aux fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, etc. qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci *fonctions dérivées* par rapport à celle-là.

puis indique sans preuve le lien entre sa définition et le calcul différentiel :

> De la même manière, si y est supposée une fonction de x, nous dénoterons ses fonctions dérivées par y', y'', y''', etc.
>
> Au reste, pour peu qu'on connaisse le calcul différentiel, on doit voir que les fonctions dérivées y', y'', y''', etc. relatives à x coïncident avec les expressions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc.

10.5 Critique des fondements

Les règles du calcul infinitésimal n'ont jamais mené ni à des paradoxes ni à des contradictions. Elles ont au contraire permis d'obtenir des résultats nombreux tout au long du XVIII$^{\mathrm{e}}$ siècle, résultats qu'il était impossible d'obtenir par d'autres méthodes. Les mathématiciens de l'époque ont donc confiance en la justesse de ces règles.

Néanmoins les fondements des règles du calcul ne semblent pas assurés. Ni l'idée intuitive de vitesse d'accroissement sur laquelle s'appuie Newton, ni le concept ambigu de grandeur infiniment petite utilisé par Leibniz ne sont satisfaisants du point de vue logique, surtout en comparaison des canons de rigueur des géomètres grecs. Le problème n'est pas gênant quand on se contente de manipuler des symboles par le calcul, mais il le devient quand il s'agit de donner un sens aux fluxions et aux différentielles, et en particulier quand on souhaite utiliser le calcul infinitésimal pour répondre à des questions de géométrie.

Les critiques au sujet de ces faiblesses logiques du calcul commencent dès la fin du XVII$^{\mathrm{e}}$ siècle. Ainsi l'académicien français Michel Rolle (1652–1719) qualifie le traité de L'Hospital sur l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* de « collection d'erreurs ingénieuses » quand il paraît en 1697.

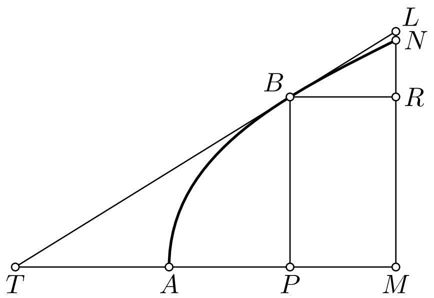
10.5.1 La critique de Berkeley

Une des critiques les plus célèbres est celle de l'évêque irlandais George Berkeley (1685–1783). Dans un pamphlet d'une centaine de pages intitulé *The Analyst : or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician, Wherein It is examined whether the Object, Principles,* *and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith*[5] et publié en 1734, Berkeley montre la nécessité d'une clarification logique du calcul infinitésimal. Sa contestation ne porte pas sur les résultats obtenus à l'aide du calcul infinitésimal, mais sur la méthode elle-même. Berkeley doute de l'existence des quantités infiniment petites, écrivant par exemple à propos des fluxions de Newton

> Et que sont ces fluxions ? Les vitesses d'accroissements évanescents. Et que sont ces mêmes accroissements évanescents ? Ce ne sont ni des quantités finies, ni des quantités infiniment petites, ni rien d'autre encore. Ne devrions-nous pas les appeler des fantômes de quantités disparues ?

Pour Berkeley, une des erreurs logiques commises par les mathématiciens est que certaines étapes de calcul supposent que les quantités infiniment petites sont non-nulles, tandis que d'autres étapes négligent ces mêmes quantités infiniment petites, comme si elles étaient nulles. Berkeley justifie son point de vue en l'illustrant sur plusieurs exemples.

Dans le paragraphe XXI de *The Analyst*, il examine avec un œil critique la façon dont le calcul différentiel permet de déterminer la sous-tangente à la parabole d'équation $y^2 = px$. Il était connu depuis l'Antiquité grecque que la longueur PT de la sous-tangente au point B est le double de l'abscisse AP, d'où $PT = 2x$ si l'on pose $x = AP$. Berkeley reprend alors pour la critiquer la méthode de Leibniz basée sur l'utilisation du triangle différentiel (voir le paragraphe 9.3.3). Sur la figure, le point A est l'origine du système de coordonnées, les points B et N sont sur la parabole et ont pour coordonnées (x, y) et $(x+dx, y+dy)$ respectivement.



Berkeley commence par rappeler le raisonnement usuellement tenu par les adeptes du calcul différentiel. Refusant l'idée de quantité infiniment petite, il considère que dx et dy sont des grandeurs ordinaires et non-nulles :

> En supposant maintenant que la courbe soit un polygone, et par suite que BN, l'accroissement ou la différence de la courbe, soit une ligne droite qui coïncide avec la tangente, et donc que le triangle différentiel BRN soit semblable au triangle TPB, on trouverait que la sous-tangente PT est (...) $y\ dx/dy$.

Mais ici, il semble bien qu'on commette une erreur en faisant comme si le point N était sur la tangente en B à la parabole. Une telle supposition ne vaut que si N est infiniment proche de B, mais cela n'a pas grand sens. Berkeley distingue donc le point N du point L de même abscisse et situé sur la tangente en B à la parabole. Appelons $(x+dx, y+dy+z)$ les coordonnées de L et lisons comment Berkeley entend corriger l'équation qui donne la valeur de la sous-tangente :

5. *L'analyste, ou un discours adressé à un mathématicien infidèle, dans lequel il est examiné si l'objet, les principes et les règles d'inférence de l'analyse moderne sont plus nettement conçus ou déduits d'une manière plus évidente que les mystères de la Religion et les questions de la Foi.* Le texte complet du pamphlet de Berkeley est disponible sur le Web à l'adresse `http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/`.

Mais il y a là une erreur qui provient de l'inexactitude de la supposition précédente, et qui fait que la valeur de PT trouvée est plus grande que la valeur réelle. Car en réalité ce n'est pas le triangle RNB mais le triangle RLB qui est semblable au triangle PBT. (...) La vraie expression pour la sous-tangente est donc $y\ dx/(dy+z)$. Il y avait une erreur par défaut en divisant par dy, une erreur z égale à la ligne NL comprise entre la courbe et la tangente.

De l'équation $y^2 = px$ de la parabole, les règles du calcul différentiel conduisent à la relation $2y\ dy = p\ dx$, d'où $PT = y\ dx/dy = 2y^2/p = 2x$, en accord avec le résultat connu. Ayant invalidé l'équation $PT = y\ dx/dy$, Berkeley doit aussi montrer que l'équation $2y\ dy = p\ dx$ n'est pas exacte. Il procède comme suit :

Maintenant [l'équation de la courbe] est $y^2 = px$, en appelant p le paramètre de la parabole, d'où il vient par la règle des différences $2y\ dy = p\ dx$ et

$$dy = p\,\frac{dx}{2y}.$$

Mais si vous mettez $y + dy$ au carré et retenez le produit entier sans rejeter le carré de la différence, alors il vient, en substituant les quantités augmentées dans l'équation de la courbe, qu'en fait

$$dy = \frac{p\ dx}{2y} - \frac{(dy)^2}{2y}.$$

Il y avait donc une erreur par excès dans l'écriture

$$dy = p\,\frac{dx}{2y},$$

qui provenait de la règle des différences erronée. Et la mesure de cette seconde erreur est

$$\frac{(dy)^2}{2y} = z.$$

À ce stade, Berkeley estime avoir mis à jour deux erreurs dans le raisonnement des adeptes du calcul différentiel : l'une provient de la confusion qui est faite en géométrie entre points sur la courbe et points sur la tangente ; l'autre est commise en négligeant certains termes non-nuls dans les calculs sous prétexte qu'ils sont infiniment petits. Le miracle est que ces deux erreurs se compensent, puisqu'on parvient malgré tout au résultat correct. Berkeley conclut par ces mots :

Ainsi les deux erreurs sont égales et de signe contraire, donc se compensent l'une l'autre. La première erreur par défaut est corrigée par la seconde erreur par excès.

10.5.2 La réaction des mathématiciens à la critique de Berkeley

Les créateurs du calcul infinitésimal, Newton et Leibniz, étaient déjà conscients de la faiblesse logique des fondements. Les critiques que formule Berkeley dans son opuscule n'apportent donc pas grand-chose de neuf. Elles demandent toutefois une réponse, d'autant plus qu'elles viennent d'un homme qui n'est pas impliqué dans la recherche mathématique.

Les mathématiciens s'efforcent donc soit de donner des interprétations précises des quantités infiniment petites, soit de les éviter dans le calcul. Pendant les sept ans qui suivent la parution de *The Analyst*, près de trente textes sont publiés pour apporter des réponses. Une controverse naît même entre deux mathématiciens anglais, qui ont des interprétations différentes des méthodes de Newton !

En 1742, Colin Maclaurin (1698–1746) publie un ouvrage dans lequel il essaie de donner un exposé systématique et rigoureux des méthodes de Newton. Dans l'introduction de son *Treatise of fluxions*, Maclaurin écrit :

> [Berkeley] décrit la méthode des fluxions comme fondée sur un raisonnement faux et plein de mystères. Ses objections semblent avoir été causées par la façon trop abrégée dont les éléments de cette méthode ont été généralement exposés. Le fait qu'une personne aussi capable que Berkeley ait mal compris cette méthode m'apparaît comme une preuve suffisante de la nécessité d'un exposé plus complet de ses fondements.

Dans ce *Treatise of fluxions*, Maclaurin base ses raisonnements sur des méthodes rigoureuses, comme la méthode d'exhaustion. Mais malgré les efforts du mathématicien anglais, son travail ne répond pas réellement au problème des fondements du calcul infinitésimal.

Nous allons pour notre part examiner la solution que préconise d'Alembert.

10.5.3 L'idée de d'Alembert : le concept de limite

Commençons par présenter brièvement notre homme. Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) commence par faire des études de droit et de médecine, puis apprend les mathématiques, essentiellement en autodidacte. Talentueux dans ce domaine, il présente son premier article mathématique en 1739 à l'Académie Royale des Sciences de Paris, ce qui lui vaut d'en être nommé membre l'année suivante. Entre 1751 et 1775, il collabore avec Denis Diderot (1713–1784) à la rédaction de l'*Encyclopédie.* Il est notamment l'auteur du « Discours préliminaire » (l'introduction de l'*Encyclopédie*) et de presque tous les articles mathématiques. C'est dans ce cadre qu'il présente ses idées sur le calcul infinitésimal.

Revenons à la critique de Berkeley, et plus particulièrement à son analyse du procédé par lequel est déterminée la tangente à la parabole. Le problème est, selon Berkeley, que l'on n'a pas le droit d'amener le point N jusque sur le point B (sinon BRN n'est plus un vrai triangle), mais que tant que N est différent de B, les relations algébriques simplifiées fournies par le calcul différentiel ne sont pas exactes. Pour d'Alembert (comme d'ailleurs pour d'autres mathématiciens), la solution au problème consiste à définir de façon judicieuse une notion de limite. L'article LIMITE de l'*Encyclopédie* est l'occasion pour d'Alembert d'exposer précisément son idée :

> LIMITE. On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite que l'on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche : en quelque sorte que la différence d'une pareille quantité à la limite est absolument inassignable. (...) À proprement parler, la limite ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra.

Dans la suite de l'article, d'Alembert illustre son propos par quelques exemples, dont celuici : l'aire du cercle est la limite croissante de l'aire des polygones réguliers inscrits et la limite décroissante de l'aire des polygones réguliers circonscrits, quand le nombre de côtés des polygones augmente.

La définition de limite que donne d'Alembert est peu précise : l'utilisation du mot « s'approcher » renvoie à une idée d'évolution dans le temps qui est étrangère aux mathématiques. La définition de d'Alembert, si on la prend à la lettre, est par ailleurs assez restrictive, car alors une grandeur ne peut approcher de sa limite qu'en y restant toujours inférieure ou toujours supérieure, sans avoir le droit d'osciller autour d'elle.

C'est dans l'article CALCUL *différentiel* que d'Alembert se sert de cette notion de limite pour apporter une réponse précise à la critique de Berkeley. Il explique notamment que

> la supposition que l'on fait [dans le calcul différentiel] de quantités infiniment petites n'est que pour abréger & simplifier les raisonnemens ; mais que, dans le fond, le calcul *différentiel* ne suppose point nécessairement l'existence de ces quantités ; que ce calcul ne consiste qu'à *déterminer algébriquement la limite d'un rapport de laquelle on a déjà l'expression en lignes, & à égaler ces deux limites, ce qui fait trouver une des lignes que l'on cherche.* (...)
>
> On a vu plus haut qu'il n'y a point proprement de quantités infiniment petites du premier ordre dans le calcul *différentiel* ; que les quantités qu'on nomme ainsi, y sont censées divisées par d'autres quantités censées infiniment petites, & que, dans cet état, elles marquent non des quantités infiniment petites, ni même des fractions, dont le numérateur & le dénominateur sont infiniment petits, mais la limite d'un rapport de deux quantités finies. (...)

D'Alembert explique ici que le calcul différentiel peut être présenté sans recours à la notion de quantité infiniment petite. À ses yeux en effet, le calcul différentiel est un ensemble de règles de calcul permettant la détermination algébrique de la limite de certains rapports. Traduite dans notre langage moderne, l'idée de d'Alembert revient à dire la chose suivante : une fonction f étant donnée par son expression, il est possible d'obtenir la fonction f' donnant la valeur des limites $f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ par de simples règles de calcul.

Dans l'article CALCUL *différentiel*, d'Alembert répond également aux objections formulées par Berkeley dans le paragraphe XXI de *The Analyst.* D'abord, il montre que le quotient BP/PT est la limite du quotient NR/RB quand N tend vers B. Posant alors

$$x = AP, \quad y = BP, \quad u = RB = PM \quad \text{et} \quad v = NR,$$

d'Alembert écrit les équations $y^2 = px$ et $(y+v)^2 = p(x+u)$; un calcul permet d'en déduire que $NR/RB = v/u = p/(2y+v)$. Quand N tend vers B, les quantités u et v deviennent aussi proches de zéro que l'on peut vouloir, de sorte que NR/RB a pour limite $p/2y$. La limite de NR/RB est donc égale à la fois à $BP/PT = y/PT$ et à $p/2y$, d'où $PT = 2y^2/p = 2x$. Ce raisonnement suit d'assez près le texte de Berkeley ; il permet donc de lever les objections de ce dernier concernant cet exemple précis. D'Alembert va plus loin en affirmant qu'il est possible d'argumenter de manière analogue contre toutes les critiques qui avaient été formulées à l'encontre du calcul différentiel :

> Ceux qui liront avec attention ce que nous venons de dire, & qui y joindront l'usage du calcul & les réflexions, n'auront plus aucune difficulté sur aucun cas, & trouveront facilement des réponses aux objections de Rolle & des autres adversaires du calcul *différentiel*, supposé qu'il lui en reste encore. Il faut avouer que si ce calcul a eu des ennemis dans sa naissance, c'est la faute des géomètres ses partisans, dont les uns l'ont mal compris, les autres l'ont trop peu expliqué.

Notre encyclopédiste affirme donc ici que son idée s'adapte facilement à toutes les situations concrètes, mais lui-même n'a traité que quelques exemples. Il laisse donc à ses successeurs la tâche d'explorer systématiquement la notion de limite et de montrer qu'elle fournit des fondations rigoureuses au calcul différentiel.

10.5.4 La proposition de Lagrange

Pour d'Alembert, le quotient $\frac{dy}{dx}$ est la limite des quotients de la variation de la grandeur y sur la variation de la grandeur x. D'Alembert dispose donc en 1754 de la définition que nous utilisons actuellement pour la dérivée d'une fonction. De surcroît, le travail de d'Alembert est publié dans l'*Encyclopédie* ; il est donc bien diffusé, du moins accessibles aux lecteurs francophones. On ne peut donc qu'être surpris en constatant qu'aucun mathématicien ne cherche à prolonger le travail de d'Alembert et à exploiter la notion de limite dans la seconde moitié du XVIII$^{\text{e}}$ siècle. Sans doute le concept paraissait-il peu fructueux, puisqu'il ne conduisait à aucun résultat nouveau mais imposait des étapes supplémentaires dans les démonstrations. L'absence d'une théorie bâtie autour du concept de limite, c'est-à-dire l'absence de théorèmes permettant de le manipuler commodément, n'encourageait certainement pas non plus son utilisation.

C'est ainsi que vers la fin du siècle, l'idée de limite apparaît comme aussi vague et confuse que la manipulation des quantités infiniment petites, ces quantités jamais nulles mais qui s'approchent de zéro. C'est pourquoi Lagrange, lorsqu'il échafaude sa théorie des fonctions dérivées (voir le paragraphe 10.4), préfère s'appuyer sur la théorie des séries qu'il juge plus sûre. Le titre complet de son ouvrage est d'ailleurs *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.*

Néanmoins, la proposition de Lagrange de définir les dérivées en se basant sur la théorie des séries fait elle aussi long feu. Les mathématiciens de la fin du XVIII$^{\text{e}}$ siècle et du début du XIX$^{\text{e}}$ siècle ne font plus aveuglément confiance à la théorie des séries. Un des points qui pose problème est le lien entre les développements en série des fonctions et la théorie des séries numériques. Euler avait ainsi substitué $x = 1$ dans le développement

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5 + \cdots$$

et avait trouvé

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots \tag{$*$}$$

Mais les mathématiciens du XVIII$^{\text{e}}$ siècle considèrent que l'égalité $(*)$ est absurde, car une somme de termes positifs ne peut pas donner un nombre négatif.

Chapitre 11

Aspects du XIX^{e} siècle

Résumé et objectifs du chapitre

Dans son état actuel, ce chapitre a pour but de présenter le contexte social et culturel dans lequel la recherche scientifique s'effectue en Europe au XIX^{e} siècle. Il sera complété en cours par l'exposé de quelques-uns des progrès accomplis en mathématiques au XIX^{e} siècle.

11.1 Introduction

Vers la fin du XVIII^{e} siècle, l'enthousiasme soulevé par les progrès réalisés grâce au calcul infinitésimal semble retomber. De fait, peu de résultats nouveaux sont obtenus entre la mort d'Euler (1783) et 1800. Certains commentateurs prévoient la fin des progrès en mathématiques :

> Il serait difficile et peut-être téméraire d'analyser les chances que l'avenir offre à l'avancement des mathématiques : dans presque toutes les parties, on est arrêté par des difficultés insurmontables ; des perfectionnements de détail semblent la seule chose qui reste à faire.
>
> J. B. J. Delambre, *Rapport à l'Empereur sur le progrès des sciences, des lettres et des arts depuis 1789*, 1810.

> Que dirais-je des sciences exactes : la plupart paraissent parvenues à leur plus haute période. L'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, les mathématiques transcendantes sont des sciences que l'on peut regarder comme terminées, et il ne reste plus à faire que d'utiles applications.
>
> A. L. Cauchy, *Discours à la société académique de Cherbourg*, 1811.

Contrairement à ce sentiment pessimiste, le XIX^{e} siècle va être un véritable « âge d'or pour les mathématiques », selon les mots de l'historien des mathématiques C. Boyer. Tous les domaines des mathématiques connaîtront un développement sans précédent.

Cette floraison de résultats provient en grande partie du rôle plus important accordé à la science dans la société européenne au XIX^{e} siècle. Le plus important aspect de cette évolution est lié à la grande réforme du système d'enseignement supérieur que les gouvernements français et prussien mettent en place au début du XIX^{e} siècle. La science, qui n'occupait qu'une place secondaire dans les universités du XVIII^{e} siècle, est mise au cœur du nouveau dispositif. Des emplois de professeurs de science sont créés, avec une double mission d'enseignement et de recherche. Ce contexte entraîne une forte augmentation du nombre de mathématiciens actifs.

Un deuxième aspect important du XIX^{e} siècle est la séparation des différentes branches de la science en des disciplines spécialisées, qui deviennent indépendantes les unes des autres. Ainsi le début du XIX^{e} siècle voit la naissance des premiers journaux dédiés exclusivement aux progrès des mathématiques, tandis que la fin du XIX^{e} siècle voit la création des sociétés savantes, associations vouées à la promotion d'une science.

L'objet de ce chapitre est d'examiner ces changements. Au passage, nous comparons la manière dont les mathématiques sont pratiquées en France et en Allemagne, qui sont les deux nations les plus importantes pour les mathématiques du XIX^{e} siècle.

11.2 Réforme des systèmes d'enseignement en France et en Prusse

Après la mort d'Euler en 1783 et le départ de Lagrange de l'Académie de Berlin pour celle de Paris en 1787, l'essentiel de l'activité mathématique a lieu dans la capitale française. Quand la Révolution de 1789 éclate, les meilleurs mathématiciens que compte l'Europe ont pour noms Lagrange, Pierre-Simon Laplace (1749–1827) et Gaspard Monge (1746–1818).

La Révolution désorganise toute la structure administrative française et notamment son système d'enseignement supérieur. Vers 1795, des solutions de remplacement sont mises en place. C'est la création des premières grandes écoles : École des Travaux Publics (renommée Polytechnique un an après sa création) et École Normale de l'An II [1]. Le but de l'École Normale est d'enseigner aux futurs professeurs de la République le savoir dont ils devront ensuite assurer la diffusion. Par réaction anti-cléricale, le cursus est très orienté vers les sciences avec une forte composante mathématique. Les cours qu'y donnent Lagrange, Laplace et Monge sont sténographiés et imprimés.

L'École Polytechnique est pour sa part instituée dans le but d'instruire la physique, les mathématiques et la technologie à quelques centaines d'étudiants (un très grand nombre pour l'époque). Les meilleurs mathématiciens de la République (Laplace et Monge au début) sont chargés de la sélection et de l'instruction des élèves et de l'administration de l'École. De leur côté, les candidats se forment tous de la même manière : bachoter les travaux des examinateurs à l'École Polytechnique est la meilleure préparation au concours d'entrée. Toujours à titre d'entraînement, les candidats étudient aussi les cours enseignés à l'École Polytechnique : ceux-ci sont imprimés et vendus à plusieurs milliers d'exemplaires, c'est-à-dire plus que le nombre total d'ouvrages de physique, chimie, minéralogie et pharmacie réunis ! Le système des grandes écoles confère ainsi un caractère centralisé à la recherche mathématique en France : le petit groupe de mathématiciens en poste à l'École Polytechnique influence fortement les domaines de recherche explorés.

La situation est très différente dans les états allemands au début du XIX^{e} siècle. Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855), le seul grand mathématicien actif, travaille de manière assez isolée jusque dans les années 1830, d'abord aux frais d'un mécène, le duc de Brunswick, puis en assumant le poste de directeur de l'observatoire de Göttingen.

1. L'École des Arts et Métiers, fondée en 1780 sous l'Ancien Régime devient Nationale et Supérieure en 1800. L'École Polytechnique devient militaire en 1804. L'École Centrale est créée en 1829.

Au XVIII^{e} siècle, la France occupe une position prééminente sur la scène intellectuelle européenne. À cette suprématie, les conquêtes de Napoléon des années 1800–1810 ajoutent la domination politique. Les dirigeants des états allemands regardent avec envie les grandes écoles françaises qui, pensent-ils, ont permis les conditions de la victoire de la France en donnant une formation scientifique aux officiers de son armée.

Les responsables prussiens mandatent Wilhelm von Humboldt (1767–1835) et son frère Alexander (1769–1859) pour restructurer le système éducatif. Un bilan est dressé : le pays a besoin de former des ingénieurs et des industriels. Il n'est évidemment pas question de fonder le nouveau système éducatif sur les idées rationalistes françaises, qui conduisent du reste à un enseignement trop préoccupé de questions pratiques. Les responsables allemands veulent au contraire que les étudiants qui suivent une formation y trouvent la possibilité d'un développement harmonieux et d'un épanouissement intellectuel. Ils suivent en cela les thèmes de la philosophie « néo-humaniste », en vogue en Prusse à cette époque. Le modèle adopté est celui d'une formation par la recherche scientifique.

Wilhelm von Humboldt fonde la nouvelle université de Berlin en 1809. Par opposition aux universités traditionnelles, dans lesquelles les professeurs sont des érudits classiques (philosophes, juristes, ...) souvent peu au courant de l'actualité scientifique, ceux de l'université de von Humboldt sont des producteurs de savoir : mener des recherches scientifiques fait explicitement partie de leurs missions. De plus, le mode de fonctionnement de cette université fait que les étudiants sont eux-mêmes impliqués dans cette recherche. L'exemple de la nouvelle université de Berlin fait tache d'huile, et au cours de la première moitié du XIX^{e} siècle, les universités de Prusse puis des autres états allemands se transforment et adoptent ce nouveau modèle. Vers le milieu du XIX^{e} siècle, toute la science allemande s'élabore dans les universités.

11.3 Mathématiques pures versus mathématiques appliquées

La philosophie « néo-humaniste », à la mode au début du XIX^{e} siècle en Prusse, garantit que les idées intellectuelles, le bien social et les êtres humains se développent de façon harmonieuse lorsqu'ils se développent tous ensemble. Dès lors, les progrès de n'importe quelle science, même dénuée d'utilité pratique, présentent un intérêt. Ce point de vue est exprimé par une phrase célèbre du mathématicien allemand Carl Jacobi (1804–1851), dans une lettre adressée au mathématicien français Adrien-Marie Legendre (1752–1833) :

> Il est vrai que Monsieur Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomène naturels ; mais un philosophe comme lu aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain et que, sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question de système du monde.

On retrouve cette idée d'une science pure, qu'il faut protéger des influences qui lui sont externes et de toutes les contraintes, dans l'extrait suivant de l'avant-propos du premier numéro du *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Journal pour les mathématiques pures et appliquées)*, fondé en 1826 par le prussien A. L. Crelle (1780–1855) :

> Comme donc un journal est dans les faits un moyen très efficace pour développer une science et la diffuser, pour la fermer aux influences étrangères, et la protéger des sujétions, des modes, des autorités, des écoles, des respects et la conserver dans le domaine libre de la pensée, il vaut la peine d'essayer s'il est possible de donner vie et croissance à une telle publication en langue allemande pour les mathématiques.

On observe de fait une différence de nature entre les thèmes de recherche privilégiés par les mathématiciens français et ceux de leurs collègues allemands. Les premiers restent finalement assez proches des applications pratiques ; leurs travaux traitent de mécanique céleste et de probabilités. Les mathématiques allemandes deviennent pour leur part plus abstraites : le développement de la théorie des nombres par exemple est principalement le fait des mathématiciens allemands du XIXe siècle.

11.4 Comparaison des situations française et allemande

Au début du XVIIIe siècle, la France occupe le devant de la scène mathématique. Le fait que tous les jeunes futurs mathématiciens viennent étudier en France dans les années 1800–1830 prouve cette prééminence française : on dispose ainsi des témoignages de Niels Henrik Abel (1802–1829) et de Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859).

La tendance s'inverse vers 1840. La recherche mathématique allemande a rattrapé son retard. Les universités allemandes proposent un enseignement à la pointe de ce qui se fait. Les jeunes étudiants étrangers vont étudier préférentiellement en Allemagne.

La raison d'un tel renversement n'est pas clair. Une raison parfois invoquée est que les professeurs des universités allemandes, hiérarchiquement au sommet de l'institution qui les emploie, bénéficient d'une liberté absolue dans leur recherche, liberté garantie par l'idéal néo-humaniste. Cela aurait permis le développement de mathématiques plus créatives et plus originales que ce qu'autorisait le modèle français, assez centralisé comme nous l'avons vu.

11.5 La formation d'une communauté mathématique

Nous avons vu des raisons qui permettent un accroissement du nombre de mathématiciens en France et en Allemagne. Les journaux scientifiques créés au XVIIIe siècle sont généralistes et ne répondent pas aux besoins de cette communauté naissante. Dès le début du XIXe siècle apparaissent des journaux exclusivement dédiés aux mathématiques. Le travail des éditeurs de ces premiers journaux est difficile : c'est à eux que revient la recherche du financement, mais aussi celle des auteurs, au moins dans les premières années d'existence du journal.

L'existence de ces journaux cimente un peu plus la communauté mathématique. En effet, les mathématiciens disposent par ce biais d'un moyen de communication exclusif. À travers ces journaux, au fil des articles rédigés et lus, le langage des mathématiciens se standardise tout en devenant incompréhensible pour les personnes n'appartenant pas à la communauté. Ces journaux permettent également d'arbitrer les conflits, qu'ils touchent à la priorité d'une découverte ou à l'exactitude d'un résultat : l'honneur d'un résultat revient au premier qui réussit à en publier une preuve correcte.

À la fin du XIXe siècle enfin, les mathématiciens, peut-être sous la pression de la concurrence des autres sciences, créent des sociétés de promotion de leur science. Ces associations sont à la fois des éditeurs de journaux de mathématiques et des syndicats qui défendent les intérêts de la communauté. Ainsi la London Mathematical Society est créée en 1865, la Société Mathématique de France est créée en 1872, et la Deutsche Mathematische Vereinigung est créée en 1890.

On ne peut toutefois pas parler d'une communauté mathématique mondiale au XIXe siècle, mais plutôt de plusieurs communautés mathématiques nationales. Les journaux de mathématiques sont publiés dans les diverses langues européennes, et les découvertes mettent parfois du temps à traverser les barrières linguistiques. À la toute fin du siècle, une volonté de coopération internationale apparaît avec l'Union Mathématique Internationale, laquelle organise tous les quatre ans une conférence permettant aux mathématiciens de tous les pays de faire le point sur les progrès de leur discipline. Ces conférences régulières, les Congrès Internationaux des Mathématiciens, ont encore lieu de nos jours.

11.6 Résumé : la professionnalisation des mathématiques

Au XIX^{e} siècle :

- Les opportunités de carrière comme professeur dans les établissements d'enseignement supérieur font qu'il devient possible de vivre du métier de mathématicien. Le nombre de personnes impliquées dans la recherche mathématique croît fortement.
- Les sciences se spécialisent de plus en plus, et les mathématiques se séparent des sciences physiques. Des journaux spécialisés de mathématiques font leur apparition.
- Les mathématiciens partagent une formation, un langage et des intérêts communs. Une communauté mathématique se forme, soudée autour de moyens de communication et de sociétés savantes.

L'historien des mathématiques J. Gray parle de « professionnalisation des mathématiques » pour désigner cette triple évolution.

Ces changements dans les conditions et les méthodes de travail des mathématiciens expliquent certaines caractéristiques des progrès réalisés en mathématiques au cours du XIX^{e} siècle. Ainsi le grand nombre de découvertes effectuées est directement lié à l'accroissement du nombre de mathématiciens. La liberté de recherche accordée aux professeurs des universités allemandes a quant à elle favorisé le développement des « mathématiques pures », telles la théorie des nombres, qui peuvent paraître abstraites et gratuites parce qu'elles n'ont pas d'application pratique au moment où elles sont élaborées.

Bibliographie

Le petit livre d'Amy Dahan-Dalmédico et de Jeanne Peiffer présente de façon très complète l'évolution des idées mathématiques. Le style est (parfois très) condensé.

Amy Dahan-Dalmédico et Jeanne Peiffer, *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales*, Points Sciences S49, Paris : Seuil, 1986.

Les livres suivants, écrits par la commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques », présentent des textes mathématiques originaux en les resituant dans leur contexte et en les expliquant.

Jean Dhombres (responsable) et al., *Mathématiques au fil des âges*, Paris : Gauthier-Villars, 1987.

Commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques », *Histoire de problèmes, histoire des mathématiques*, Paris : éditions du Marketing (Ellipses), 1993.

Les deux livres d'histoire des sciences suivants inscrivent le développement des sciences et des techniques dans son contexte social, culturel, scientifique et économique. Le premier est factuel et consensuel ; son organisation générale est chronologique. Le second ouvrage a choisi d'aborder une vingtaine de thèmes, ce qui lui permet de suivre chronologiquement l'évolution des sciences tout en proposant des points de vue originaux et pertinents sur la place de la science dans la société ; il est de plus écrit dans un style très vivant.

Yves Gingras, Peter Keating, Camille Limoges, *Du scribe au savant : les porteurs du savoir de l'Antiquité à la révolution industrielle*, Paris : Presses Universitaires de France, 2000.

Bernadette Bensaude-Vincent et al. (sous la dir. de Michel Serres), *Éléments d'histoire des sciences*, Paris : Bordas, 1989 ; texte réédité par Larousse, 1997.

L'ouvrage de Morris Kline est une référence ; celui de Victor Katz est une introduction particulièrement complète, lisible et détaillée. Les deux livres ont le léger inconvénient de parfois trop regarder les mathématiques d'une époque à la lumière des connaissances modernes.

Morris Kline, *Mathematical tought from ancient to modern times*, New York : Oxford University Press, 1974.

Victor J. Katz, *A history of mathematics*, New York : Addison-Wesley, 1998.

Le site suivant (en anglais) propose des biographies très soignées de la plupart des mathématiciens, passés et présents.

`http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/`

En supplément à ces ouvrages, nous avons utilisé les documents suivants pour préparer les différents chapitres du cours.

Chapitre 1

James Ritter, *Babylone -1800*, dans : *Éléments d'histoire des sciences*, cité plus haut.

James Ritter, *Chacun sa vérité : les mathématiques en Égypte et en Mésopotamie*, dans : *Éléments d'histoire des sciences*, cité plus haut.

Maurice Caveing, *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Egypte anciennes*, Lille : Presses universitaires, 1994.

Chapitre 2

Maurice Caveing, *La figure et le nombre*, Lille : Presses universitaires du Septentrion, 1997.

Euclide, *Les Éléments*, traduits et commentés par Bernard Vitrac, Paris : Presses universitaires de France, 1990–2001.

Chapitre 3

Pierre Dedron et Jean Itard, *Mathématiques et mathématiciens*, Paris : Magnard, 1959.

Thomas Heath, *A history of Greek mathematics*, New York : Dover, 1981.

Chapitre 4

Ahmed Djebbar, *Une histoire de la science arabe*, Points Sciences S144, Paris : Seuil, 2001.

Jacques Sesiano, *Une introduction à l'histoire de l'algèbre*, Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 1999.

Paul Benoit et Françoise Michaud, *L'intermédiaire arabe*, dans : *Éléments d'histoire des sciences*, cité plus haut.

Chapitre 5

Paul Benoit, *Calcul, algèbre et marchandise*, dans : *Éléments d'histoire des sciences*, cité plus haut.

Chapitre 6

Florian Cajori, *A History of mathematical notations*, New York : Dover, 1993.

Jacques Sesiano, *Une introduction à l'histoire de l'algèbre*, Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes, 1999.

Chapitre 7

Michael Sean Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat*, Princeton : Princeton University Press, 1994.

« René Descartes, 1596-1650 ; Les découvertes scientifiques d'un génie français », *Les cahiers de Science et Vie* n° 66, décembre 2001, Paris : Excelsior Publications.

Chapitre 8

C. H. Edwards, *The historical development of the calculus*, New York : Springer Verlag, 1979.

Indivisibles and infinitesimals, cours d'histoire des mathématiques de la Open University, fascicule « Origins and development of the Calculus 2 » préparé par Margaret E. Baron, Milton Keynes : The Open University Press, 1974.

Michael Sean Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat*, Princeton : Princeton University Press, 1994.

Chapitre 9

Michel Blay, *Isaac Newton*, dans : *Les Mathématiciens*, Bibliothèque scientifique, Paris : Pour la Science, 1996.

The Calculus in the Eighteenth Century II : Techniques and Applications, cours d'histoire des mathématiques de la Open University, fascicule « Origins and development of the Calculus 5 » préparé par H. J. M. Bos, Milton Keynes : The Open University Press, 1975.

Chapitre 10

The Calculus in the Eighteenth Century I : Foundations, cours d'histoire des mathématiques de la Open University, fascicule « Origins and development of the Calculus 4 » préparé par H. J. M. Bos, Milton Keynes : The Open University Press, 1975.

Chapitre 11

Algebra and the profession of mathematics, cours d'histoire des mathématiques de la Open University, unité 14, préparée par J. Gray, Milton Keynes : The Open University Press, 1987.

Catherine Goldstein, *Le métier des nombres*, dans : *Éléments d'histoire des sciences*, cité plus haut.

Jean-Pierre Friedelmeyer, *La création des premières revues de mathématiques*, dans : *L'Ouvert*, Journal de l'APMEP d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg, n° 86, 1997.