De quelques opérades anticycliques

11 avril 2005

Commençons par des opérades cycliques classiques.

$$\mathrm{Comm} \longleftarrow \mathrm{Assoc} \longleftarrow \mathrm{Lie}$$

C'est un diagramme d'opérades cycliques (action de $\mathfrak{S}_{n+1}$).

Ce sont des opérades de Koszul (Ginzburg-Kapranov).

Pour Comm(n), l'action du groupe $\mathfrak{S}_{n+1}$ est triviale.

L'opérade Assoc provient d'une opérade non-symétrique cyclique (action triviale de $\mathbb{Z}/(n+1)$).

Pour Lie, pas de description simple, dimension $(n-1)!$.

Parfois appelé module de Whitehouse, travaux de Getzler-Kapranov

L'opérade Poisson a aussi une structure cyclique.

Notion de forme bilinéaire invariante $(,)$, ces formes sont <u>symétriques</u>.

Dans les cas Assoc et Comm :

$$(ab, c) = (a, bc) \tag{1}$$

Lien avec la notion d'algèbre de Frobenius.

Dans le cas Lie :

$$([a, b], c) = (a, [b, c]) \tag{2}$$

Formule vérifiée par la forme de Killing $(a, b) = Tr(ab)$.

Slogan : la représentation adjointe est auto-adjointe.

Opérades néo-classiques (Loday)

$$\text{Zinbiel} \longleftarrow \text{Dend} \longleftarrow \text{PreLie}$$

et

$$\text{Perm} \longleftarrow \text{Dias} \longleftarrow \text{Leibniz}$$

Ce sont des opérades quadratiques binaires de Koszul (Loday,C-Livernet)

La ligne de Perm s'obtient par produit tensoriel de la ligne de Comm par Perm.

La ligne de Zinbiel est la duale de Koszul de la ligne de Perm.

Théorème 1 *Chacune de ces six opérades a une structure anticyclique, et les deux lignes sont des diagrammes d'opérades anticycliques. Les opérades* Dend *et* Dias *sont des opérades non-symétriques anticycliques.*

En un sens, tout est déterminé par la structure anticyclique de Perm. En effet, le produit tensoriel d'une opérade anticyclique par une opérade cyclique est anticyclique et le dual de Koszul d'une opérade anticyclique est aussi anticyclique.

On a donc des notions de forme bilinéaire invariante, ces formes sont antisymétriques .

Exemple : PreLie

Une opération notée $x \curvearrowleft y$ vérifiant

$$(x \curvearrowleft y) \curvearrowleft z - x \curvearrowleft (y \curvearrowleft z) = (x \curvearrowleft z) \curvearrowleft y - x \curvearrowleft (z \curvearrowleft y). \tag{3}$$

Description de l'opérade PreLie par des arbres enracinés (C-Livernet). Notion liée aux groupes avec structure affine invariante à gauche.

Axiomes d'invariance de la forme antisymétrique $\langle\,\rangle$:

$$\langle x \curvearrowleft y, z\rangle = -\langle x \curvearrowleft z, y\rangle, \tag{4}$$

$$\langle x \curvearrowleft y, z\rangle = \langle x, y \curvearrowleft z - z \curvearrowleft y\rangle. \tag{5}$$

On remarque que $[y,z] = y \curvearrowleft z - z \curvearrowleft y$ est un crochet de Lie.

Slogan : l'adjoint de l'action adjointe est l'action pré-Lie.

Cette notion d'invariance était déjà connue, dans le cadre des groupes avec structure symplectique invariante à gauche.

Exemple : Perm

Une opération associative notée xy vérifiant

$$xyz = xzy. \tag{6}$$

Description de l'opérade Perm : dim $\mathrm{Perm}(n) = n$ avec action par permutations

Axiomes d'invariance de la forme antisymétrique $\langle\,\rangle$:

$$\langle xy, z\rangle = -\langle zy, x\rangle \tag{7}$$

et

$$\langle xy, z\rangle = \langle xz - zx, y\rangle. \tag{8}$$

Théorème 2 *L'action de $\mathfrak{S}_{n+1}$ sur $\mathrm{Perm}(n)$ est le module irréductible associé à la partition $(n, 1)$, i.e. la représentation naturelle comme groupe de Coxeter.*

Exemple : Zinbiel et Leibniz (opérades duales de Koszul)

Description de Zinbiel par des battages.

Toutes deux vivent sur la représentation régulière de $\mathfrak{S}_n$.

Théorème 3 *Pour la structure anticyclique, on a*

$$\mathrm{Zinbiel}(n) \simeq \mathrm{Leibniz}(n) \simeq \mathrm{Lie}(n+1) \tag{9}$$

en tant que modules sur $\mathfrak{S}_{n+1}$.

On obtient donc deux nouvelles interprétations du module Lie(n).

Exemple : Dias, opérade non symétrique

La dimension de Dias(n) est n avec une base e_i^n pour $i = 1, \ldots, n$.

L'action du groupe cyclique $\mathbb{Z}/(n+1)$ dans la base e^n est donnée par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Exemple : Dend, opérade non symétrique

La dimension de Dend(n) est le nombre de Catalan $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

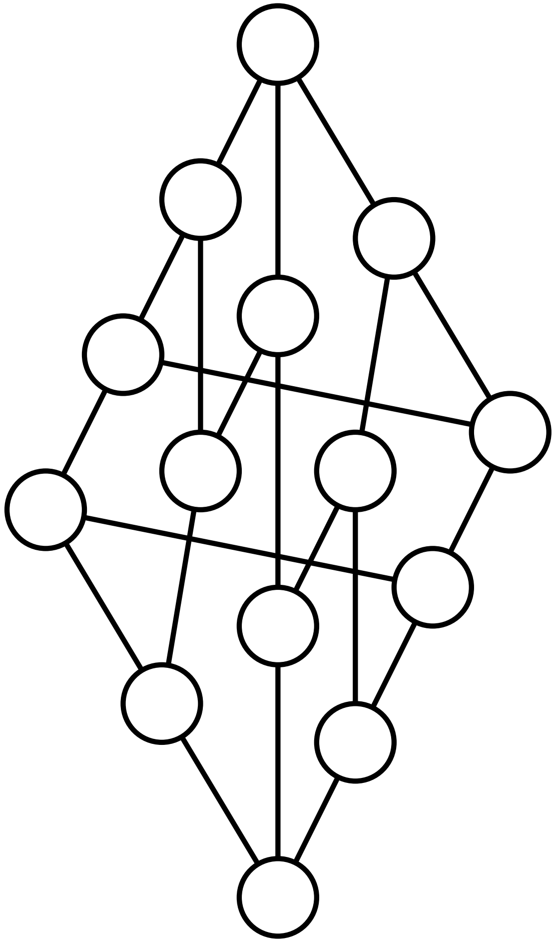
Cet espace a une base indexée par l'ensemble $\mathbb{Y}_n$ des arbres binaires plans à n sommets internes.

Comment décrire l'action du groupe cyclique, trouver une matrice d'ordre $n+1$?

Construction à partir du poset de Tamari

Ordre partiel sur $\mathbb{Y}_n$ (treillis)

Poset de Tamari sur $\mathbb{Y}_3$



On regarde ce poset comme un carquois avec relations.

On a donc une catégorie de modules et sa catégorie dérivée. La catégorie dérivée a un auto-équivalence naturelle : la translation d'Auslander-Reiten.

Au niveau des groupes de Grothendieck (de base $\mathbb{Y}_n$), la translation d'Auslander-Reiten donne la transformation de Coxeter θ.

Formule directe :

$$\theta = -L(L^{-t}) \tag{11}$$

où L est la matrice du poset de Tamari.

Théorème 4 *La structure anticyclique de* Dend *est donnée par* $(-1)^n\theta^2$ *sur* $\mathbb{Y}_n$.

Il y a un résultat analogue pour l'opérade Dias et les carquois uniorientés.