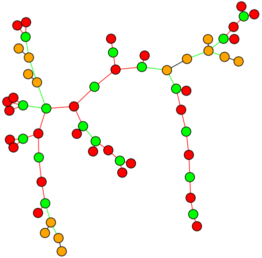
Promenade autour des arbres

Frédéric Chapoton

CNRS & Université Claude Bernard Lyon 1

Février 2014

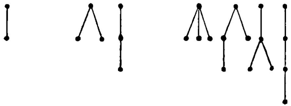


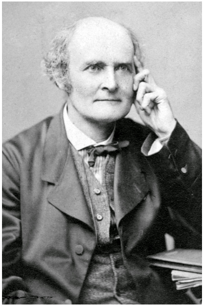
Des arbres en 1857

entrée en scène

The inspection of these figures will at once show what is meant by the term in question, and by the terms *root*, *branches* (which may be either main branches, intermediate branches, or free branches), and *knots* (which may be either the root itself, or proper knots, or the extremities of the free branches). To apply this to the question in hand, PU consists of a single term represented by fig. 1 (*bis*); QPU consists, as above, of two terms represented by the two parts of fig. 2 (*bis*), viz. the

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.





Arthur Cayley, *Philosophical Magazine* (1857)

Dans la lignée de cet article de Cayley ...

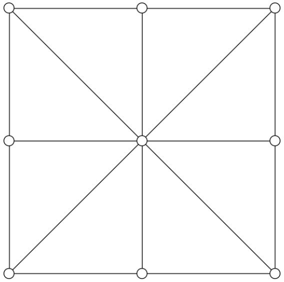
Beaucoup de structures algébriques liées aux arbres :

- John Butcher (1972) : arbres et méthodes de Runge-Kutta
- Robert Grossman et Richard Larsson (1989) : une algèbre de Hopf de forêts
- Alain Connes et Dirk Kreimer (1998) : arbres et renormalisation
- F. C. et Muriel Livernet (2000) : arbres et algèbres pré-Lie
- et bien d'autres !

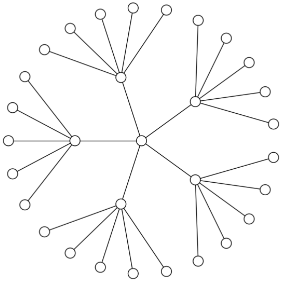
Plan

Graphes et arbres

avoir ou ne pas avoir de cycles



un graphe

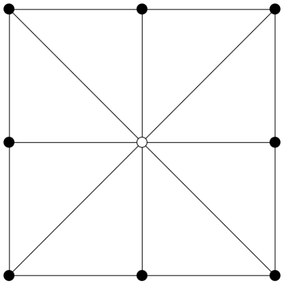


un arbre

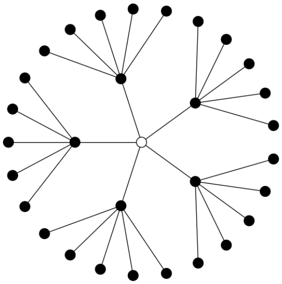
Couverture par sommets

ou comment contrôler le trafic

C'est un ensemble de sommets tel que chaque arête soit touchée.



un exemple



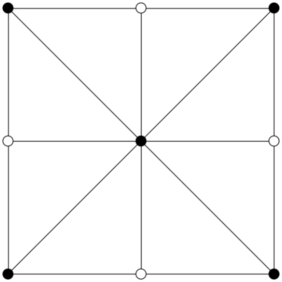
un exemple

Facile en prenant beaucoup de sommets.

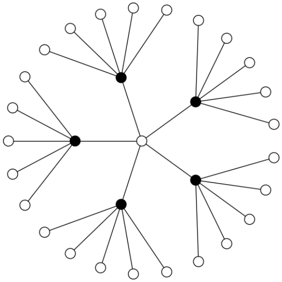
Couverture par sommets

ou comment contrôler le trafic

C'est un ensemble de sommets tel que chaque arête soit touchée.



un autre exemple



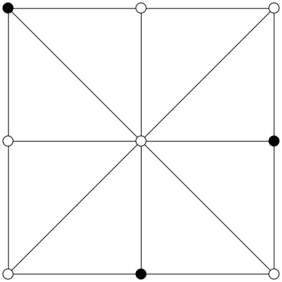
un autre exemple

On cherche des couvertures avec peu de sommets.

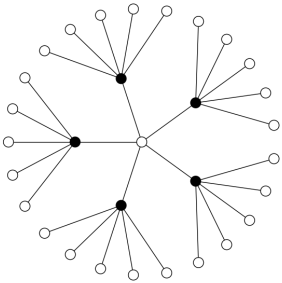
Ensemble indépendant

ou comment éviter les voisins

C'est un ensemble de sommets non-adjacents.



un exemple



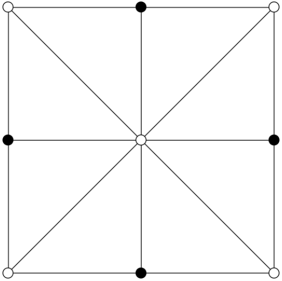
un exemple

Facile en ne prenant peu de sommets.

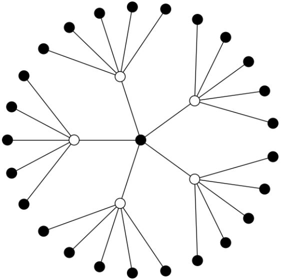
Ensemble indépendant

ou comment éviter les voisins

C'est un ensemble de sommets non-adjacents.



un autre exemple



un autre exemple

On cherche des ensembles indépendants avec beaucoup de sommets.

Quelques remarques

- Par complémentation :
  un ensemble indépendant $\longleftrightarrow$ une couverture par sommet
  (au plus un point $\longleftrightarrow$ au moins un point par arête)

Quelques remarques

- Par complémentation :
  un ensemble indépendant $\longleftrightarrow$ une couverture par sommet
  (au plus un point $\longleftrightarrow$ au moins un point par arête)
- Deux formes de maximalité pour les ensembles indépendants :
  de cardinal maximal $\implies$ maximal pour l'inclusion

Quelques remarques

- Par complémentation :
  un ensemble indépendant $\longleftrightarrow$ une couverture par sommet
  (au plus un point $\longleftrightarrow$ au moins un point par arête)
- Deux formes de maximalité pour les ensembles indépendants :
  de cardinal maximal $\implies$ maximal pour l'inclusion
- Deux formes de minimalité pour les couvertures par sommets :
  de cardinal minimal $\implies$ minimal pour l'inclusion

Quelques remarques

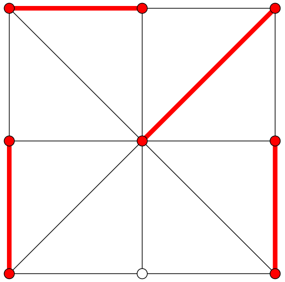
- Par complémentation :
  un ensemble indépendant $\longleftrightarrow$ une couverture par sommet
  (au plus un point $\longleftrightarrow$ au moins un point par arête)
- Deux formes de maximalité pour les ensembles indépendants :
  de cardinal maximal $\implies$ maximal pour l'inclusion
- Deux formes de minimalité pour les couvertures par sommets :
  de cardinal minimal $\implies$ minimal pour l'inclusion

On va s'intéresser ici à la maximalité et minimalité pour le cardinal.

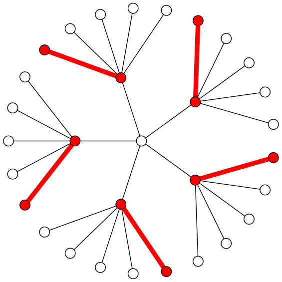
Couplage

ou comment faire la paire

C'est un ensemble d'arêtes sans sommets communs



un exemple



un exemple

On cherche les couplages avec le nombre maximal d'arêtes.

Des questions classiques

(a) trouver le cardinal maximal d'un ensemble indépendant

(b) trouver le cardinal minimal d'une couverture par sommets

(c) trouver le cardinal maximal d'un couplage

Des questions classiques

(a) trouver le cardinal maximal d'un ensemble indépendant

(b) trouver le cardinal minimal d'une couverture par sommets

(c) trouver le cardinal maximal d'un couplage

Problèmes classiques et difficiles en général.

Des questions classiques

(a) trouver le cardinal maximal d'un ensemble indépendant
(b) trouver le cardinal minimal d'une couverture par sommets
(c) trouver le cardinal maximal d'un couplage

Problèmes classiques et difficiles en général.
Une forme de (a) et (b) est un **problème NP-complet**.
(Richard Karp, 1972)

Des questions classiques

(a) trouver le cardinal maximal d'un ensemble indépendant

(b) trouver le cardinal minimal d'une couverture par sommets

(c) trouver le cardinal maximal d'un couplage

Problèmes classiques et difficiles en général.
Une forme de (a) et (b) est un **problème NP-complet**. (Richard Karp, 1972)
Pour (c) il y a un algorithme polynomial (Jack Edmonds, 1961).

Des questions classiques

(a) trouver le cardinal maximal d'un ensemble indépendant

(b) trouver le cardinal minimal d'une couverture par sommets

(c) trouver le cardinal maximal d'un couplage

Problèmes classiques et difficiles en général.
Une forme de (a) et (b) est un **problème NP-complet**.
(Richard Karp, 1972)
Pour (c) il y a un algorithme polynomial (Jack Edmonds, 1961).
Problèmes (a), (b), (c) équivalents pour les graphes bipartis
(Dénes Kőnig, 1931)

Des questions classiques

(a) trouver le cardinal maximal d'un ensemble indépendant

(b) trouver le cardinal minimal d'une couverture par sommets

(c) trouver le cardinal maximal d'un couplage

Problèmes classiques et difficiles en général.
Une forme de (a) et (b) est un **problème NP-complet**. (Richard Karp, 1972)
Pour (c) il y a un algorithme polynomial (Jack Edmonds, 1961).
Problèmes (a), (b), (c) équivalents pour les graphes bipartis (Dénes Kőnig, 1931)
Problèmes (a), (b), (c) pour les arbres : **jolie combinatoire**

Plan

Le cas des arbres

Petit historique de ce qui va suivre

- Première apparition dans un article de Jennifer S. Zito en 1991 (motivations de **combinatoire**, recherche des arbres extrêmes)

Le cas des arbres

Petit historique de ce qui va suivre

- Première apparition dans un article de Jennifer S. Zito en 1991 (motivations de **combinatoire**, recherche des arbres extrêmes)
- Redécouverte par Michel Bauer et Stéphane Coulomb en 2004 (motivations de **physique statistique**, transitions de phases)

- Première apparition dans un article de Jennifer S. Zito en 1991 (motivations de **combinatoire**, recherche des arbres extrêmes)
- Redécouverte par Michel Bauer et Stéphane Coulomb en 2004 (motivations de **physique statistique**, transitions de phases)
- Apparitions récentes en relation avec les **opérades** d'une part (séries en arbres)

Le cas des arbres

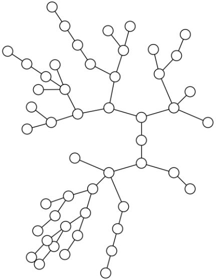
Petit historique de ce qui va suivre

- Première apparition dans un article de Jennifer S. Zito en 1991 (motivations de **combinatoire**, recherche des arbres extrêmes)
- Redécouverte par Michel Bauer et Stéphane Coulomb en 2004 (motivations de **physique statistique**, transitions de phases)
- Apparitions récentes en relation avec les **opérades** d'une part (séries en arbres)
- et les **algèbres amassées** d'autre part (variétés amassées sur les corps finis)

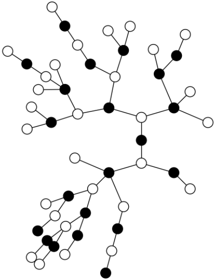
Le cas des arbres

une histoire tricolore

On commence par les couvertures par sommets



un arbre

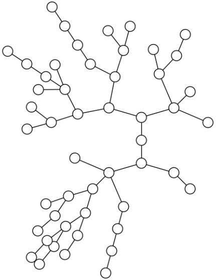


une couverture

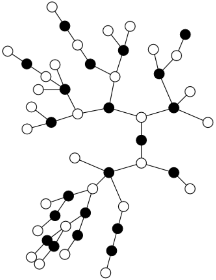
Le cas des arbres

une histoire tricolore

On commence par les couvertures par sommets



un arbre



une autre couverture

Trois types de sommets

via les couvertures

On colorie les sommets :

vert $\longleftrightarrow$ v est dans toutes les couvertures,

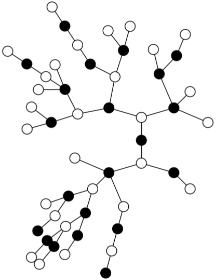
orange $\longleftrightarrow$ v est dans certaines couvertures seulement,

rouge $\longleftrightarrow$ v n'est dans aucune couverture

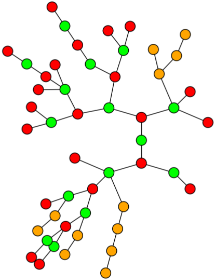
Trois types de sommets

via les couvertures

On colorie les sommets :
vert $\longleftrightarrow$ v est dans toutes les couvertures,
orange $\longleftrightarrow$ v est dans certaines couvertures seulement,
rouge $\longleftrightarrow$ v n'est dans aucune couverture



une couverture

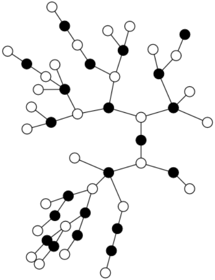


le coloriage

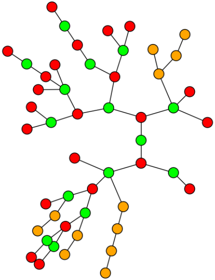
Trois types de sommets

via les couvertures

On colorie les sommets :
vert $\longleftrightarrow$ v est dans toutes les couvertures,
orange $\longleftrightarrow$ v est dans certaines couvertures seulement,
rouge $\longleftrightarrow$ v n'est dans aucune couverture



une autre couverture



le coloriage

Trois types de sommets

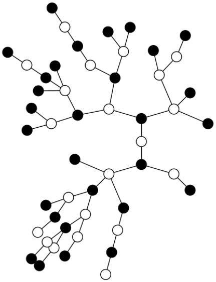
via les ensembles indépendants

On colorie les sommets :
vert $\longleftrightarrow$ v n'est dans aucun ensemble indépendant,
rouge $\longleftrightarrow$ v est dans tous les ensembles indépendants,
orange $\longleftrightarrow$ v est dans certains seulement

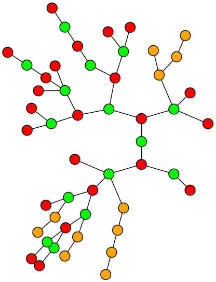
Trois types de sommets

via les ensembles indépendants

On colorie les sommets :
vert $\longleftrightarrow$ v n'est dans aucun ensemble indépendant,
rouge $\longleftrightarrow$ v est dans tous les ensembles indépendants,
orange $\longleftrightarrow$ v est dans certains seulement



un ensemble indépendant



le coloriage

Trois types de sommets

via les couplages

dans un couplage, on appelle les arêtes des **dominos**

Pour les couplages : un autre découpage en trois types de sommets

I sommets qui sont toujours dans le même domino

II sommets qui sont toujours dans un domino, qui varie

III sommets qui sont parfois hors des dominos

Trois types de sommets

via les couplages

dans un couplage, on appelle les arêtes des **dominos**

Pour les couplages : un autre découpage en trois types de sommets

I sommets qui sont toujours dans le même domino

II sommets qui sont toujours dans un domino, qui varie

III sommets qui sont parfois hors des dominos

Théorème (Zito, Bauer-Coulomb)

C'est la même partition en trois types de sommets !

I $\longleftrightarrow$ *orange*

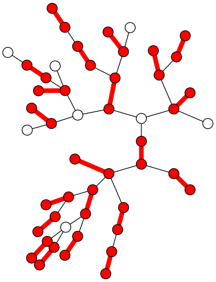
II $\longleftrightarrow$ *vert*

III $\longleftrightarrow$ *rouge*

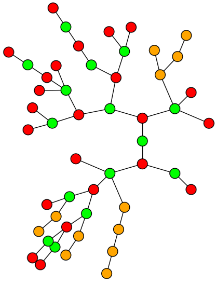
Trois types de sommets

pour les couplages

orange $\longleftrightarrow$ sommets qui sont toujours dans le même domino
vert $\longleftrightarrow$ sommets qui sont toujours dans un domino, qui varie
rouge $\longleftrightarrow$ sommets qui sont parfois hors des dominos



un couplage

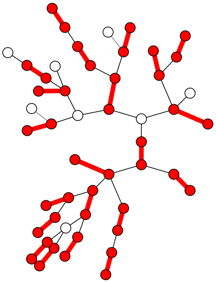


le coloriage

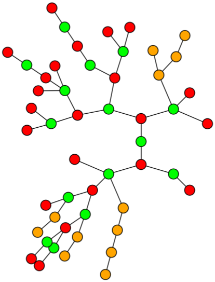
Trois types de sommets

pour les couplages

orange $\longleftrightarrow$ sommets qui sont toujours dans le même domino
vert $\longleftrightarrow$ sommets qui sont toujours dans un domino, qui varie
rouge $\longleftrightarrow$ sommets qui sont parfois hors des dominos



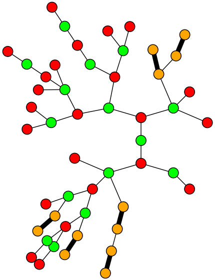
un autre couplage



le coloriage

Trois types de sommets et des arêtes distinguées

On obtient de plus un couplage parfait sur les sommets orange :

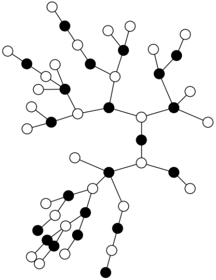


coloriage + couplage parfait

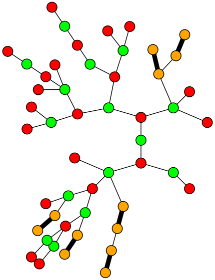
Chaque sommet orange appartient à un domino fixe.

Trois types de sommets

retour sur les couvertures



une couverture



le coloriage

Dans chaque domino orange, exactement un sommet dans chaque couverture (et dans chaque ensemble indépendant).

Un jeu de construction pour les arbres

Caractérisation locale remarquable :

Théorème (Zito, Bauer-Coulomb)

Pour tout arbre T, il existe un unique coloriage en trois couleurs tel que

- *les sommets rouges ne sont liés qu'à des sommets verts*
- *chaque sommet vert est lié à au moins deux sommets rouges*
- *il existe un couplage parfait sur l'ensemble des sommets oranges*

Un jeu de construction pour les arbres

et un peu de jargon physique

comme des règles de construction avec trois types d'arêtes

- O-O les dominos orange-orange
- R-V les arêtes rouge-vert
- X-X les autres arêtes

Un jeu de construction pour les arbres

et un peu de jargon physique

comme des règles de construction avec trois types d'arêtes

- O-O les dominos orange-orange
- R-V les arêtes rouge-vert
- X-X les autres arêtes

et des règles locales en chaque sommet :

- vert : au moins deux arêtes R-V plus des arêtes X-X
- rouge : seulement des arêtes R-V
- orange : une arête O-O plus des arêtes X-X

Un jeu de construction pour les arbres

et un peu de jargon physique

comme des règles de construction avec trois types d'arêtes

- O-O les dominos orange-orange
- R-V les arêtes rouge-vert
- X-X les autres arêtes

et des règles locales en chaque sommet :

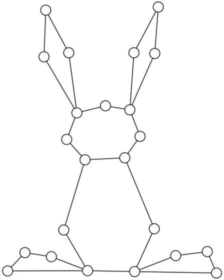
- vert : au moins deux arêtes R-V plus des arêtes X-X
- rouge : seulement des arêtes R-V
- orange : une arête O-O plus des arêtes X-X

Les arbres sont des graphes de Feynman pour le Lagrangien

$$\underbrace{-\frac{1}{2}(X^2+O^2)-RV}_{} + \underbrace{ve^X(e^R-R-1)+re^V+oOe^X}_{}$$

Isthmes

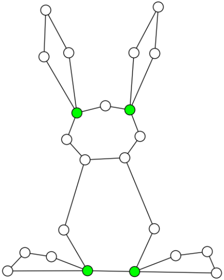
ou points d'articulation



un exemple de graphe connexe

Un isthme est un sommet s tel que $G \setminus s$ n'est pas connexe.

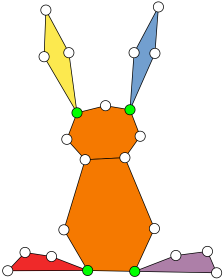
Isthmes



les isthmes de ce graphe

Un isthme est un sommet s tel que $G \setminus s$ n'est pas connexe.

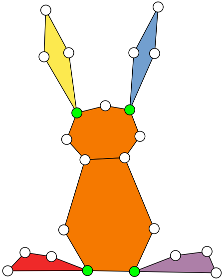
Isthmes et blocs



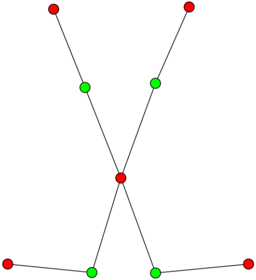
les isthmes de ce graphe

Les isthmes définissent des blocs.

Arbre des isthmes et blocs



isthmes et blocs



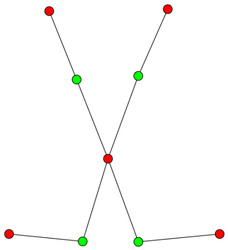
arbre associé

Les isthmes et les blocs forment un arbre :

Sommets verts $\longleftrightarrow$ isthmes

Sommets rouges $\longleftrightarrow$ blocs

Propriétés

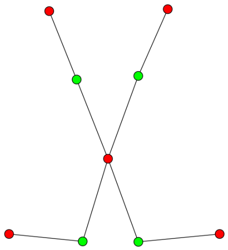


Cet arbre associé aux isthmes et blocs d'un graphe

1. est bipartite rouge-vert
2. chaque sommet vert a au moins deux voisins rouges

Donc c'est le coloriage canonique de cet arbre !

Propriétés



Cet arbre associé aux isthmes et blocs d'un graphe

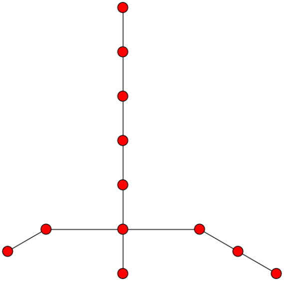
1. est bipartite rouge-vert
2. chaque sommet vert a au moins deux voisins rouges

Donc c'est le coloriage canonique de cet arbre !
On obtient ainsi exactement tous les arbres ayant seulement des arêtes rouge-vert.

Algorithme

ou comment obtenir facilement le tricoloriage

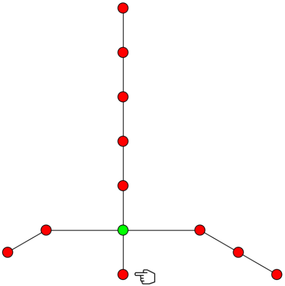
Étape 0 : tous les sommets sont rouges



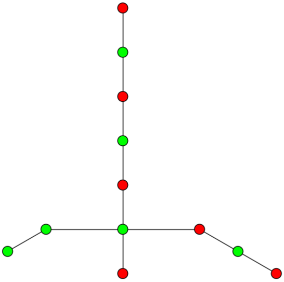
Algorithme

ou comment obtenir facilement le tricoloriage

Étape 0 : tous les sommets sont rouges
Étape 1 : si un sommet a un seul voisin rouge, ce voisin devient vert (répéter tant que c'est possible)



un sommet devient vert

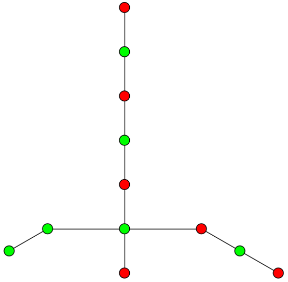


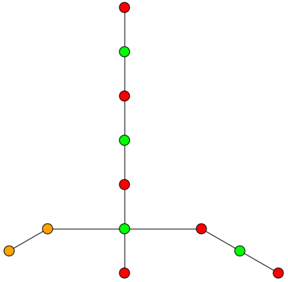
fin de l'étape 1

Algorithme

ou comment obtenir facilement le tricoloriage

Étape 0 : tous les sommets sont rouges
Étape 1 : si un sommet a un seul voisin rouge, ce voisin devient vert (répéter tant que c'est possible)
Étape 2 : les sommets verts sans voisins rouges deviennent orange

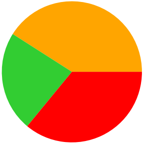


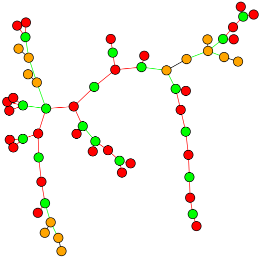


Pour les grands arbres aléatoires

Dans un arbre très grand (pris au hasard), on a (en moyenne) une proportion non nulle de chacun des trois types de sommets :

- $\approx 23\%$ de sommets verts,
- $\approx 41\%$ de sommets oranges,
- $\approx 36\%$ de sommets rouges.





Plan

Une variété pour chaque arbre

On fixe un arbre T et un couplage maximal C de cet arbre.

Une variété pour chaque arbre

On fixe un arbre T et un couplage maximal C de cet arbre.
On prend trois jeux de variables :

- x_i et x'_i pour i dans T (**variables amassées**)
- α_i pour i dans T non couverts par C (**coefficients**)

On pose $\alpha_i = 1$ pour $i \in C$.

Une variété pour chaque arbre

On fixe un arbre T et un couplage maximal C de cet arbre.
On prend trois jeux de variables :

- x_i et x'_i pour i dans T (**variables amassées**)
- α_i pour i dans T non couverts par C (**coefficients**)

On pose $\alpha_i = 1$ pour $i \in C$. Et on considère les équations

$$x_i x'_i = 1 + \alpha_i \prod_{j - i} x_j$$

(produit sur les sommets j voisins de i)
plus la condition que les α_i sont inversibles.
$\longrightarrow$ une variété algébrique affine $X_{T,C}$
Ces variétés sont des cas particuliers de variétés associées aux **algèbres amassées**.

Petits arbres

Pour l'arbre avec un seul sommet  :

$$x\,x' = 1 + \alpha$$

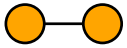
avec α non nul. C'est un ouvert dans $\mathbb{C}^2$.

Petits arbres

Pour l'arbre avec un seul sommet  :

$$x\,x' = 1 + \alpha$$

avec α non nul. C'est un ouvert dans $\mathbb{C}^2$.

Pour l'arbre à deux sommets  :

$$\begin{aligned} x\,x' &= 1 + y, \\ y\,y' &= 1 + x. \end{aligned}$$

C'est une variété lisse de dimension 2.

Quelques résultats

Remarque : les coefficients α_i sont sur des sommets rouges.
On pourrait mettre des coefficients partout, mais ça ne donne rien de plus.

Théorème

La variété $X_{T,C}$ est lisse et ne dépend pas du couplage C, à isomorphisme près.

(Le coloriage est utile pour montrer l'isomorphisme.)

Théorème

La caractéristique d'Euler de $X_{T,C}$ est le nombre d'ensembles indépendants maximaux de T.

Nombre de points

On peut aussi compter les points sur les corps finis.

Théorème

Le nombre de points sur le corps fini $\mathbf{F}_q$ *de* $X_{T,C}$ *est un polynôme (réciproque) en la variable* q*, donné explicitement par*

$$\sum_S (q-1)^{2\#T-\#C-2\#S} q^{\#S}$$

où S *parcourt les ensembles indépendants (pas nécessairement maximaux).*

Ça provient d'un découpage géométrique de la variété.

Illustration des résultats

Pour l'arbre avec un seul sommet , on trouve :

$$(q-1)^2 + q = 1 - q + q^2.$$

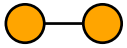
Il y a 1 ensemble indépendant maximal.

Illustration des résultats

Pour l'arbre avec un seul sommet , on trouve :

$$(q-1)^2 + q = 1 - q + q^2.$$

Il y a 1 ensemble indépendant maximal.

Pour l'arbre à deux sommets , on trouve :

$$(q-1)^2 + 2q = 1 + q^2.$$

Il y a 2 ensembles indépendants maximaux.