Divers exemples d'algèbres pré-Lie

Frédéric Chapoton

20 mai 2005

Introduction

On définit des structures d'algèbres pré-Lie associées à divers ensembles d'objets combinatoires ou géométriques. On donne également plusieurs constructions algébriques d'algèbres pré-Lie.

On rappelle qu'une algèbre pré-Lie est un espace vectoriel V muni d'un produit $\curvearrowleft : V \otimes V \to V$ vérifiant la relation

$$(x \curvearrowleft y) \curvearrowleft z - x \curvearrowleft (y \curvearrowleft z) = (x \curvearrowleft z) \curvearrowleft y - x \curvearrowleft (z \curvearrowleft y). \tag{1}$$

On appelle unité pré-Lie un élément e de V tel que $e \curvearrowleft x = x$ pour tout x et $x \mapsto x \curvearrowleft e$ est semisimple. La valeur propre de cet endomorphisme moins un définit alors une graduation.

1 Combinatoire

1.1 Jeu de Lego

On appelle muret la donnée d'une suite d'entiers strictement positifs $i_0, \ldots, i_r$ et d'une suite d'entiers positifs ou nuls $j_1, \ldots, j_r$ tels que, pour tout $1 \leq k \leq r$, on ait $j_k < \min(i_{k-1}, i_k)$. On se représente un muret M sous la forme d'une suite de colonnes de taille i_k, avec une séparation de hauteur j_k entre i_{k-1} et i_k. Avec les notations ci-dessus, on appelle $r+1$ la largeur du muret, notée $\ell(M)$.

On appelle plateau de largeur p une suite de p colonnes consécutives de même hauteur, sans séparations. On note $\mathrm{Plat}(M, p)$ l'ensemble des plateaux de largeur p de M. On note Muret le $\mathbb{Z}$-module libre sur l'ensemble des murets. On définit un produit $\curvearrowleft$ sur Muret comme suit :

$$M_1 \curvearrowleft M_2 = \sum_{P \in \mathrm{Plat}(M_1, \ell(M_2))} M_1 \curvearrowleft_P M_2 \tag{2}$$

où $M_1 \curvearrowleft_P M_2$ est le muret formé de M_2 posé sur le plateau P de M_1. La figure 2 montre deux exemples de ce produit.

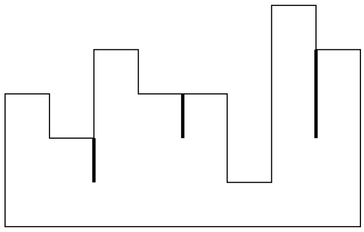

FIG. 1 – Le muret (3,2,4,3,3,1,5,4) ;(0,1,0,1,0,0,2), de largeur 8.

Proposition 1 *Le produit* $\curvearrowleft$ *munit* Muret *d'une structure d'algèbre pré-Lie.*

REMARQUE : la surface des murets définit une graduation compatible au produit.

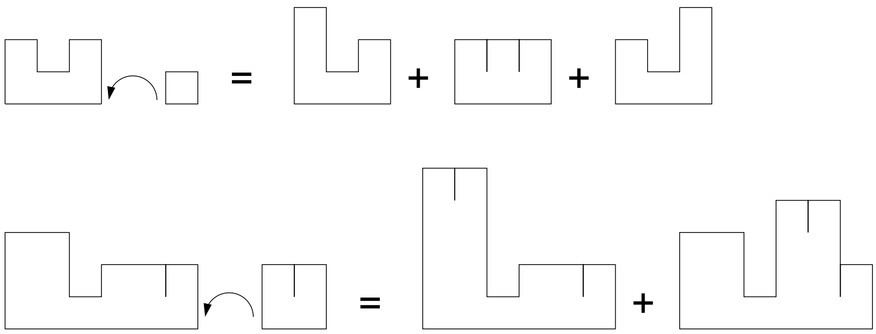

FIG. 2 – Deux exemples de produit.

REMARQUE : il existe une bijection entre murets et polyominos diagonalement convexes, voir [Fla91] pour la définition de cette notion. Cette bijection consiste à décaler les colonnes, en conservant le nombre de cases en contact entre deux colonnes successives, voir la figure 3 pour un exemple.

1.2 Courbes planes sans inflexion

On appelle courbe plane sans inflexion une classe d'isotopie d'immersion de S^1 dans le plan $\mathbb{R}^2$ ayant seulement des points doubles transverses et une courbure toujours strictement positive. On appelle segment une composante connexe de la courbe privée de ses points doubles et on note Segment(O) l'ensemble des segments d'une courbe O. En un point lisse t de la courbe, celle-ci divise un petit disque $B_\epsilon(t)$ en deux parties : on appelle coté convexe (resp. concave) la plus petite (resp. grande) de ces deux parties de $B_\epsilon(t)$.

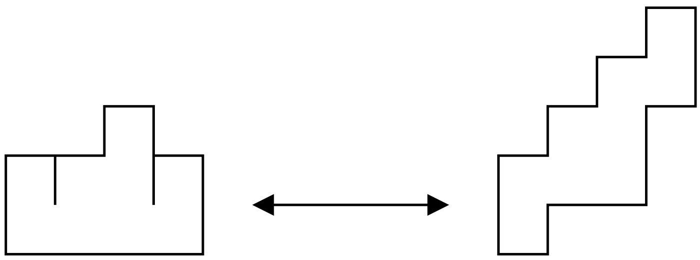

FIG. 3 – Exemple de la correspondance entre murets et polyominos.

Un segment est dit externe si la partie du plan située du coté concave est la partie du plan extérieure à la courbe. On note Externe(O) l'ensemble des segments externes d'une courbe O.

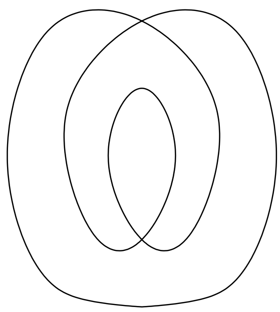

FIG. 4 – Une courbe plane sans inflexion, à 4 segments dont un externe.

On note Courbe le $\mathbb{Z}$-module libre sur les courbes planes sans inflexion. On définit un produit $\curvearrowleft$ sur Courbe comme suit :

Soient O_1, O_2 deux courbes, on pose

$$O_1 \curvearrowleft O_2 = \sum_{x \in \mathrm{Externe}(O_2)} \sum_{y \in \mathrm{Segment}(O_1)} O_1 \curvearrowleft_x^y O_2 \tag{3}$$

où $O_1 \curvearrowleft_x^y O_2$ désigne la courbe obtenue en plaçant une petite copie de O_2 du coté convexe du segment y de O_1, le recollement se faisant, par addition d'un point double, le long du segment externe x de O_2, voir la figure 5 pour un exemple.

Proposition 2 *Le produit* $\curvearrowleft$ *munit* Courbe *d'une structure d'algèbre pré-Lie.*

Le nombre de points doubles plus un définit une graduation compatible au produit.

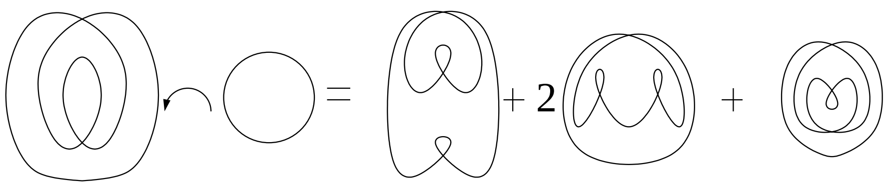

Fig. 5 – Exemple de produit.

Remarque : On peut associer un diagramme de Gauss à cordes orientées à une courbe plane sans inflexion. On rappelle qu'un diagramme de Gauss est un ensemble de points deux à deux distincts sur un cercle orienté, plus un ensemble de paires de points, chaque point appartenant à exactement une paire. Ces paires sont nommées cordes.

Ici, le cercle orienté est celui qui paramètre la courbe dans le sens de rotation vers la gauche, les points correspondent aux paramètres où la courbe est singulière, les cordes aux deux points associés à chaque point double. On oriente chaque corde en prenant comme point initial celui où la courbe passe du domaine concave au domaine convexe. Par exemple, la figure 6 montre les diagrammes associés aux trois courbes de droite de la figure 5.

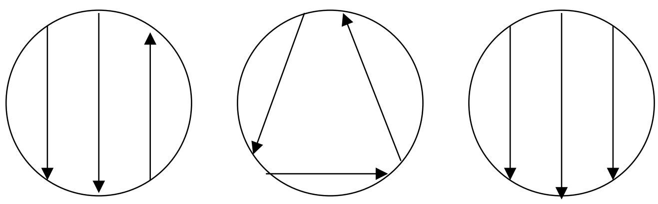

Fig. 6 – Exemples de diagrammes de Gauss.

1.3 Arbres plans enracinés

On peut dans l'exemple précédent considérer seulement les courbes d'indice maximal. Elles sont paramétrées par les arbres plans enracinés, voir [Arn94].

On appelle arbre plan enraciné une arbre plongé dans le plan et muni d'un sommet distingué, voir la figure 7.

On appelle secteur d'un sommet une composante connexe du complémentaire de l'arbre dans un petit voisinage de ce sommet. On note Sect l'ensemble des secteurs et Racine l'ensemble des secteurs de la racine.

On note Dessin le $\mathbb{Z}$-module libre sur les arbres plans enracinés. Le produit $\curvearrowleft$ sur Dessin est défini comme suit :

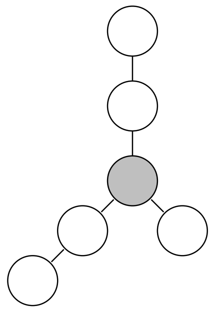

FIG. 7 – Un arbre plan enraciné à 7 sommets et 12 secteurs.

Soient T_1, T_2 deux arbres, on pose

$$T_1 \curvearrowleft T_2 = \sum_{x \in \mathrm{Racine}(T_2)} \sum_{y \in \mathrm{Sect}(T_1)} T_1 \curvearrowleft_x^y T_2 \tag{4}$$

où $T_1 \curvearrowleft_x^y T_2$ désigne l'arbre obtenu en greffant une copie de T_2 par une arête issue du secteur x de la racine de T_2 et aboutissant dans le secteur y de T_1.

REMARQUE : le nombre de sommets définit une graduation compatible au produit.

1.4 Entrelacs

On considère l'ensemble des classes d'isotopie d'entrelacs dans $\mathbb{R}^3$, munis d'une composante connexe distinguée. On note $\mathrm{Compo}(E)$ l'ensemble des composantes connexes d'un entrelacs E.

On note Entrel le $\mathbb{Z}$-module libre sur ces entrelacs marqués. On définit un produit $\curvearrowleft$ sur Entrel comme suit :

Soient E_1, E_2 deux entrelacs marqués, on pose

$$E_1 \curvearrowleft E_2 = \sum_{x \in \mathrm{Compo}(E_1)} E_1 \curvearrowleft_x E_2, \tag{5}$$

où $E_1 \curvearrowleft_x E_2$ s'obtient à partir de l'union disjointe de E_1 et E_2 en attachant la composante marquée de E_2 à la composante x de E_1 par croisement des deux composantes. On prend comme composante marquée de $E_1 \curvearrowleft_x E_2$ celle de E_1.

1.5 Algèbres de Temperley-Lieb

On considère les diagrammes de Gauss avec des cordes non orientées sans intersection et avec un point du bord marqué. Si D est un tel diagramme, on note $\mathrm{Segment}(D)$ l'ensemble des composantes connexes du cercle de D privé du point marqué et des extrémités des cordes.

On note $\mathcal{TL}$ le $\mathbb{Z}$-module libre sur ces diagrammes. On définit un produit $\curvearrowleft$ sur $\mathcal{TL}$ comme suit :

Soient D_1, D_2 deux diagrammes, on pose

$$D_1 \curvearrowleft D_2 = \sum_{y \in \mathrm{Segment}(D_1)} D_1 \curvearrowleft_y D_2, \tag{6}$$

où $D_1 \curvearrowleft_y D_2$ désigne le diagramme obtenu en recollant le point marqué de D_2 le long du segment y de D_1, voir la figure 8 pour un exemple simple.

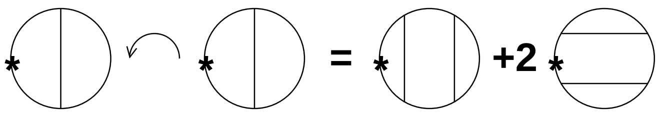

Fig. 8 – Exemple de composition.

Proposition 3 *Le produit $\curvearrowleft$ munit $\mathcal{TL}$ d'une structure d'algèbre pré-Lie.*

Il est bien connu, en relation avec l'algèbre de Temperley-Lieb de rang n, que le nombre de tels diagrammes à n cordes est le nombre de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

1.6 Fonctions de garage

On appelle fonction de garage à n places une application f de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{i=1}^{j} f(i) \leq j \text{ pour tout } 1 \leq j \leq n-1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} f(i) = n. \tag{7}$$

On se représente une fonction de garage par son graphe, voir la figure 9.

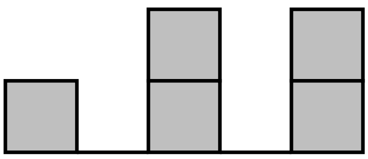

Fig. 9 – La fonction de garage à 5 places (1,0,2,0,2).

Il est bien connu que le nombre de fonctions de garage à n places est le nombre de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, voir par exemple [Sta99].

On note Garage_n le $\mathbb{Z}$-module libre sur les fonctions de garage à n places. On pose $\mathrm{Garage} = \oplus_{n\geq 1} \mathrm{Garage}_n$. On définit un produit $\curvearrowleft$ sur Garage comme suit :

Soient f_p, f_q deux fonctions de garage, on pose

$$f_p \curvearrowleft f_q = \sum_{i=0}^{p} f_p \curvearrowleft_i f_q, \tag{8}$$

où $f_p \curvearrowleft_i f_q$ désigne la fonction de garage obtenue en intercalant f_2 à la place i de f_1, voir la figure 10 pour un exemple.

Proposition 4 *Le produit* $\curvearrowleft$ *munit* Garage *d'une structure d'algèbre pré-Lie.*

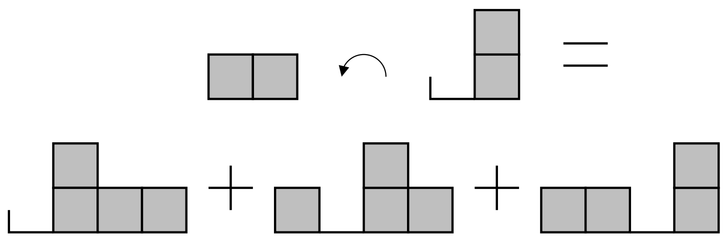

FIG. 10 – Exemple de composition.

Mots et alphabets Dans le même ordre d'idées, on peut munir le $\mathbb{Z}$-module libre sur les mots en l'alphabet A, B d'une structure d'algèbre pré-Lie par insertion avec des signes. Plus précisément, on insère un mot dans deux cas :

$$\begin{cases} \text{entre } A \text{ et } B \text{ avec le signe } -, \\ \text{entre } (B \text{ ou } \emptyset) \text{ et } (A \text{ ou } \emptyset) \text{ avec le signe } +. \end{cases} \tag{9}$$

Le produit pré-Lie est la somme des insertions d'un mot dans un autre aux places possibles avec les signes convenus.

Cette insertion est compatible avec l'involution μ qui échange A, B et renverse le mot.

Exemples :

$$AB \curvearrowleft AAB = ABAAB + AABAB - AAABB, \tag{10}$$

$$ABAB \curvearrowleft AB = 3ABABAB - AABBAB - ABAABB. \tag{11}$$

On a une double graduation par le nombre de A et le nombre de B.

Le mot vide est une unité pré-Lie qui induit la graduation triviale.

Les mots commençant par A et finissant par B forment une sous-algèbre pré-Lie. L'algèbre de Lie associée est due à Ihara, voir les travaux de Ihara, Drinfeld, Cartier [Car02, p. 28], Ecalle, Racinet [Rac00] sur les valeurs zêta multiples.

1.7 Graphes trivalents

On considère, à isotopie près, les graphes Γ trivalents, plongés dans S^2, munis d'un sommet distingué noté ∞ et tels que $\Gamma \backslash \infty$ soit connexe. On note Triv le $\mathbb{Z}$-module libre sur l'ensemble de ces classes d'isotopie de graphes. On définit un produit $\curvearrowleft$ sur Triv comme suit :

$$\Gamma_1 \curvearrowleft \Gamma_2 = \sum_{s \in \mathrm{Som}(\Gamma_1) \backslash \{\infty\}} \Gamma_1 \curvearrowleft_s \Gamma_2, \tag{12}$$

où $\Gamma_1 \curvearrowleft_s \Gamma_2$ désigne la somme des trois graphes obtenus en recollant le sommet ∞ de Γ_2 au sommet s de Γ_1, de chacune des trois façons possibles par rotation.

Proposition 5 *Le produit* $\curvearrowleft$ *munit* Triv *d'une structure d'algèbre pré-Lie.*

Remarque : le nombre de sommets moins deux définit une graduation compatible au produit pré-Lie.

2 Opérades

On peut naturellement associer à une opérade une algèbre pré-Lie. Voici des exemples de cette construction.

2.1 Tresses

On note Br_n l'ensemble des tresses à n brins, Tresse_n le $\mathbb{Z}$-module libre sur Br_n, et $\mathrm{Tresse} = \oplus_{n \geq 1} \mathrm{Tresse}_n$. On peut définir une opérade sur les tresses.

Soient $X_p \in \mathrm{Br}_p$, $X_q \in \mathrm{Br}_q$ deux tresses, on pose

$$X_p \curvearrowleft X_q = \sum_{i=1}^{p} X_p \curvearrowleft_i X_q \tag{13}$$

où $X_p \curvearrowleft_i X_q$ désigne la tresse obtenue par substitution de X_q à la place du brin i de X_p.

Proposition 6 *Le produit* $\curvearrowleft$ *munit* Tresse *d'une structure d'algèbre pré-Lie.*

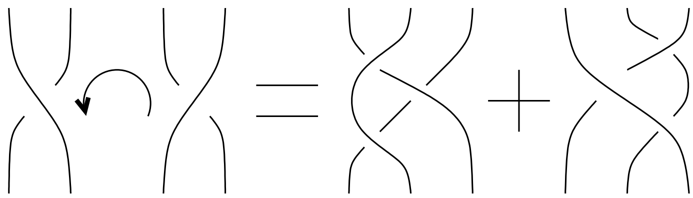

FIG. 11 – Exemple de produit de tresses.

Le nombre de cordes moins un définit une graduation compatible au produit pré-Lie.

REMARQUE : les tresses colorées forment une sous-algèbre pré-Lie.

Dans le même ordre d'idée, en remplaçant les passages dessus ou dessous par des croisements transverses, on peut définir une opérade avec des configurations à la Fomin-Kirillov pour les décompositions réduites des permutations, modulo les relations de commutations. On obtient une opérade en ensembles, le cardinal en rang n est le nombre total de classes de décompositions irréductibles dans $\mathfrak{S}_n$ modulo les relations du type $s_i s_j = s_j s_i$. On peut en déduire une algèbre pré-Lie par la recette habituelle.

2.2 Polytopes de Stasheff et opérade A_∞

Soit $n \geq 1$. On note (C_n, ∂) le complexe cellulaire du polytope de Stasheff K_n, dont une base sur $\mathbb{Z}$ est donnée par les arbres plans à n feuilles. On note Arbre la somme directe des complexes C_n pour $n \geq 1$. On définit un produit $\curvearrowleft$ sur Arbre comme suit : Soient $T_p \in C_p$ et $T_q \in C_q$, on pose

$$T_p \curvearrowleft T_q = \sum_{i=1}^{p} T_p \curvearrowleft_i T_q, \tag{14}$$

où $T_p \curvearrowleft_i T_q$ désigne l'arbre T_q greffé sur la feuille i de l'arbre T_p. On a alors

Proposition 7 *Le produit $\curvearrowleft$ munit* Arbre *d'une structure d'algèbre pré-Lie différentielle graduée.*

Le nombre de feuilles moins un donne une autre graduation compatible au produit pré-Lie.

REMARQUE : l'algèbre pré-Lie sur l'homologie est l'algèbre pré-Lie de Witt formée par les champs de vecteurs polynomiaux sur la droite affine.

REMARQUE : une structure très proche a été définie par Markl et Shnider dans [MS96].

3 Géométrie

3.1 Champs de vecteurs invariants

L'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur une variété munie d'une connexion affine provient d'une algèbre pré-Lie. L'action d'un sous-groupe fini du groupe affine de $\mathbb{R}^n$ préserve la connexion plate sur $\mathbb{R}^n$. Il en résulte donc une structure d'algèbre pré-Lie sur les champs de vecteurs invariants. Deux cas particuliers paraissent intéressants : les singularités associées aux groupes de Weyl des systèmes de racines et les singularités kleiniennes correspondant aux sous-groupes finis de $SL_2(\mathbb{C})$, qui admettent une classification du type ADE, issue de la correspondance de McKay [McK80, Rei].

4 Algèbre

4.1 Dérivation des Perm-algèbres

Une Perm-algèbre est un espace vectoriel V muni d'un produit associatif $\times : V \otimes V \to V$ vérifiant de plus, pour tous x, y, z dans V,

$$x \times y \times z = x \times z \times y. \tag{15}$$

Par exemple, toute algèbre associative commutative est aussi une Perm-algèbre.

Si $(V, \times)$ est une Perm-algèbre munie d'une dérivation D, on pose

$$x \curvearrowleft y = D(x)y. \tag{16}$$

Proposition 8 $(V, \curvearrowleft)$ *est une algèbre pré-Lie.*

PREUVE : En notant le produit associatif par la juxtaposition, on a

$$(x \curvearrowleft y) \curvearrowleft z - x \curvearrowleft (y \curvearrowleft z) = D(D(x)y)z - D(x)D(y)z = D^2(x)yz, \tag{17}$$

et la propriété des Perm-algèbres est exactement ce qui est nécessaire pour obtenir l'axiome pré-Lie. □

En particulier, on peut associer ainsi une algèbre pré-Lie à toute algèbre associative commutative munie d'une dérivation, qu'on peut voir comme un espace muni d'un champ de vecteurs, *i.e.* un "système dynamique".

4.2 Groupe abélien et anneau commutatif

Soit $(G, +)$ un groupe abélien, $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif, ψ un morphisme de groupes abéliens de $(G, +)$ dans $(A, +)$ et L_G le A-module libre de base $(\ell_g)_{g \in G}$. On définit un produit pré-Lie sur L_G par la formule

$$\ell_f \curvearrowleft \ell_g = \psi(f)\, \ell_{f+g}. \tag{18}$$

En effet, on a

$$(\ell_f \curvearrowleft \ell_g) \curvearrowleft \ell_h - \ell_f \curvearrowleft (\ell_g \curvearrowleft \ell_h) = \psi(f)^2\, \ell_{f+g+h}. \tag{19}$$

4.3 Algèbre associative somme de deux sous-algèbres

Soit A une algèbre associative et supposons que $A = A_- \oplus A_+$ où A_- et A_+ sont deux sous-algèbres de A. Soit $\pi_\pm$ la projection sur $A_\pm$ parallèlement à $A_\mp$. Chacune des ces deux projections vérifie la relation suivante, dite relation de Baxter pour $q = 1$:

$$\pi(xy) + \pi(x)\pi(y) = \pi(\pi(x)y + x\pi(y)). \tag{20}$$

On définit un produit par

$$y \curvearrowleft x = \pi_+(x)y + y\pi_-(x) = \pi_+(x)y + yx - y\pi_+(x). \tag{21}$$

Par un calcul sans difficulté utilisant la relation de Baxter, on montre que ce produit est pré-Lie. L'exemple à l'origine de cette construction est le produit normal : $a(z)b(z)$: de deux champs dans la théorie des algèbres vertex, voir le livre [Kac98, p. 82, p. 119 et p. 130]

Remarque importante : en fait, ceci définit une structure pré-Lie sur toute algèbre vertex. Le produit pré-Lie est l'ordre normal, donné par le coefficient constant en z de l'opérateur vertex $Y(a, z)$.

Par ailleurs, la relation de Baxter ci-dessus intervient de façon cruciale dans la méthode combinatoire de renormalisation de Connes et Kreimer, voir [CK00, eq. (23)]

Cette construction semble différente de celle de Aguiar qui utilise la relation de Baxter pour $q = 0$ pour définir une algèbre dendriforme.

4.4 Partitions

L'algèbre pré-Lie libre sur un générateur a une base indexée par les arbres enracinés. On oriente toutes les arêtes en direction de la racine. A un arbre enraciné T, on peut associer la partition $\lambda(T)$ définie par les valences de ses sommets, où la valence d'un sommet est le nombre d'arêtes entrantes.

On peut passer au quotient et on obtient une structure pré-Lie sur un espace vectoriel gradué ayant une base (E_λ) indexée par les partitions ("espace de Fock"). Ceci correspond à l'algèbre pré-Lie engendrée par un champ de vecteur générique $F\partial$ sur la droite affine. A une partition $\lambda = 1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots$ de taille $|\lambda|$ et de longueur $\ell(\lambda)$ correspond le champ de vecteur fonction

$$F^{1+|\lambda|-\ell(\lambda)} \prod_{i\geq 1} (F^{(i)})^{\lambda_i} \partial, \tag{22}$$

où $F^{(i)}$ est la dérivée n-ième de F. Le produit pré-Lie des champs de vecteurs se traduit en un produit pré-Lie dans la base formée par les E_λ. Soit $\lambda[i]$ la partition obtenue en rallongeant d'une unité la i-ème part de λ. On obtient

$$E_\lambda \curvearrowleft E_\mu = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} E_{\mu \cup \lambda[i]} + (1 + |\lambda| - \ell(\lambda)) E_{\mu \cup \lambda \cup 1}. \tag{23}$$

Références

[Arn94] V. I. Arnold. Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications. In *Singularities and bifurcations*, pages 33–91. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994. With an appendix by F. Aicardi.

[Car02] Pierre Cartier. Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents. *Astérisque*, (282) :Exp. No. 885, viii, 137–173, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.

[CK00] A. Connes and D. Kreimer. Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I : The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem. *Comm. Math. Phys.*, 210(1) :249–273, 2000.

[Fla91] P. Flajolet. Pólya festoons. Technical Report 1507, INRIA, 1991.

[Kac98] V. Kac. *Vertex algebras for beginners*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 1998.

[Mac98] I.G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials. 2nd ed.* Oxford Science Publications. Oxford : Clarendon Press. x, 475 p. (1998). [ISBN 0-19-850450-0/pbk], 1998.

[McK80] J. McKay. Graphs, singularities, and finite groups. In *The Santa Cruz Conference on Finite Groups (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979)*, volume 37 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 183–186. A.M.S., 1980.

[MS96] M. Markl and S. Shnider. Drinfeld algebra deformations, homotopy comodules and the associahedra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(9) :3505–3547, 1996.

[Rac00] G. Racinet. *Séries génératrices non-commutatives de polyzêtas et associateurs de Drinfel'd*. PhD thesis, Université Picardie Jules Vernes, 2000.

[Rei] M. Reid. La correspondance de McKay. séminaire Bourbaki, preprint math/9911165, 20 pp.

[Sta99] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume 2. Cambridge University Press, 1999.