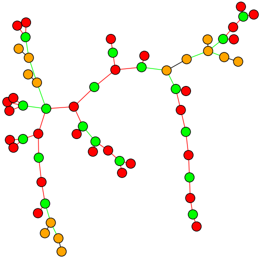
Combinatoire des couplages et des ensembles indépendants dans les arbres



Frédéric Chapoton

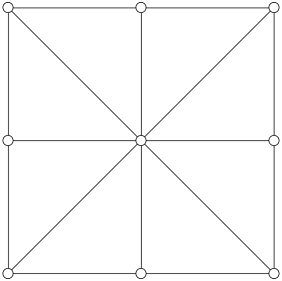
CNRS & Université Claude Bernard Lyon 1

Février 2014

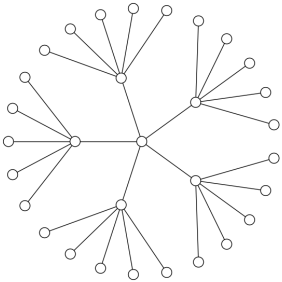
Plan

Graphes et arbres

avoir ou ne pas avoir de cycles



un graphe

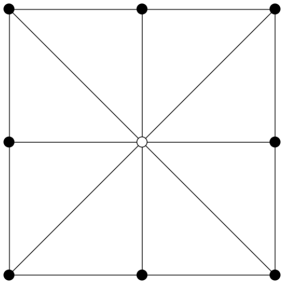


un arbre

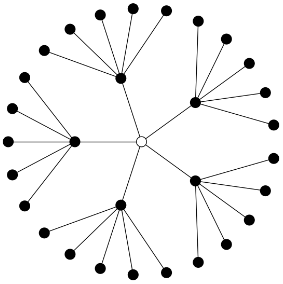
Couverture par sommets

ou comment contrôler le trafic

C'est un ensemble de sommets tel que chaque arête soit touchée.



un exemple



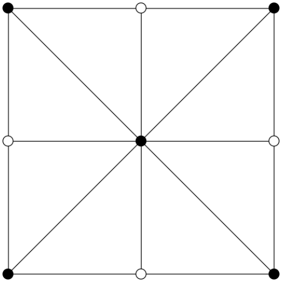
un exemple

Facile en prenant beaucoup de sommets.

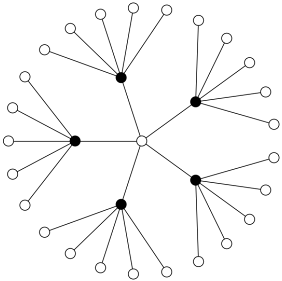
Couverture par sommets

ou comment contrôler le trafic

C'est un ensemble de sommets tel que chaque arête soit touchée.



un autre exemple



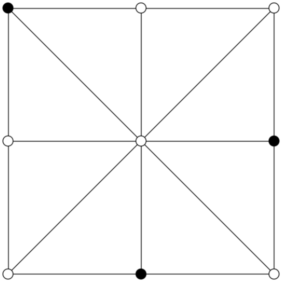
un autre exemple

On cherche des couvertures avec peu de sommets.

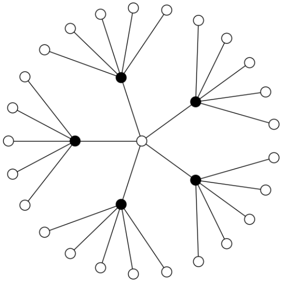
Ensemble indépendant

ou comment éviter les voisins

C'est un ensemble de sommets non-adjacents.



un exemple



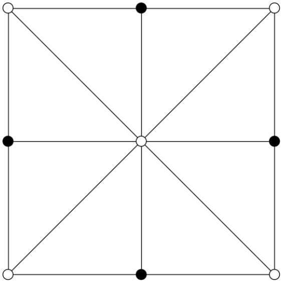
un exemple

Facile en ne prenant peu de sommets.

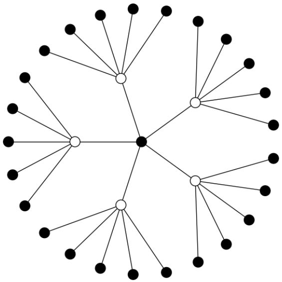
Ensemble indépendant

ou comment éviter les voisins

C'est un ensemble de sommets non-adjacents.



un autre exemple



un autre exemple

On en cherche avec beaucoup de sommets.

Quelques remarques

- Par complémentation :
  un ensemble indépendant $\longleftrightarrow$ une couverture par sommet
  (au plus un point $\longleftrightarrow$ au moins un point par arête)

Quelques remarques

- Par complémentation :
  un ensemble indépendant $\longleftrightarrow$ une couverture par sommet
  (au plus un point $\longleftrightarrow$ au moins un point par arête)
- Deux formes de maximalité pour les ensembles indépendants :
  de cardinal maximal $\implies$ maximal pour l'inclusion

Quelques remarques

- Par complémentation :
  un ensemble indépendant $\longleftrightarrow$ une couverture par sommet
  (au plus un point $\longleftrightarrow$ au moins un point par arête)
- Deux formes de maximalité pour les ensembles indépendants :
  de cardinal maximal $\implies$ maximal pour l'inclusion
- Deux formes de minimalité pour les couvertures par sommets :
  de cardinal minimal $\implies$ minimal pour l'inclusion

Quelques remarques

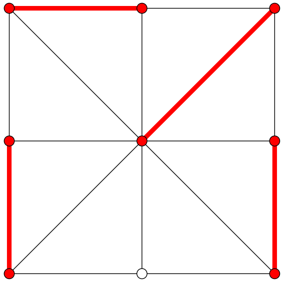
- Par complémentation :
  un ensemble indépendant $\longleftrightarrow$ une couverture par sommet
  (au plus un point $\longleftrightarrow$ au moins un point par arête)
- Deux formes de maximalité pour les ensembles indépendants :
  de cardinal maximal $\implies$ maximal pour l'inclusion
- Deux formes de minimalité pour les couvertures par sommets :
  de cardinal minimal $\implies$ minimal pour l'inclusion

La réciproque de ces implications est fausse.
On va s'intéresser ici à la maximalité et minimalité pour le cardinal.

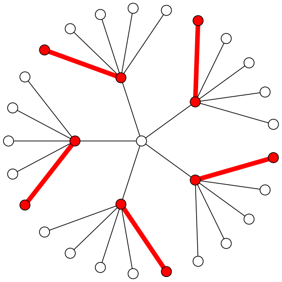
Couplage

ou comment faire la paire

C'est un ensemble d'arêtes sans sommets communs



un exemple



un exemple

On cherche les couplages avec le nombre maximal d'arêtes.

Des questions classiques

(a) trouver le cardinal maximal d'un ensemble indépendant

(b) trouver le cardinal minimal d'une couverture par sommets

(c) trouver le cardinal maximal d'un couplage

Des questions classiques

(a) trouver le cardinal maximal d'un ensemble indépendant

(b) trouver le cardinal minimal d'une couverture par sommets

(c) trouver le cardinal maximal d'un couplage

Problèmes classiques et difficiles en général.

Des questions classiques

(a) trouver le cardinal maximal d'un ensemble indépendant

(b) trouver le cardinal minimal d'une couverture par sommets

(c) trouver le cardinal maximal d'un couplage

Problèmes classiques et difficiles en général.
Une forme de (a) et (b) est un **problème NP-complet**.
(Richard Karp, 1972)

Des questions classiques

(a) trouver le cardinal maximal d'un ensemble indépendant

(b) trouver le cardinal minimal d'une couverture par sommets

(c) trouver le cardinal maximal d'un couplage

Problèmes classiques et difficiles en général.
Une forme de (a) et (b) est un **problème NP-complet**.
(Richard Karp, 1972)
Pour (c) il y a un algorithme polynomial (Jack Edmonds, 1961).

Des questions classiques

(a) trouver le cardinal maximal d'un ensemble indépendant

(b) trouver le cardinal minimal d'une couverture par sommets

(c) trouver le cardinal maximal d'un couplage

Problèmes classiques et difficiles en général.
Une forme de (a) et (b) est un **problème NP-complet**. (Richard Karp, 1972)
Pour (c) il y a un algorithme polynomial (Jack Edmonds, 1961).
Problèmes (a), (b), (c) équivalents pour les graphes bipartis (Dénes Kőnig, 1931)

Des questions classiques



(a) trouver le cardinal maximal d'un ensemble indépendant
(b) trouver le cardinal minimal d'une couverture par sommets
(c) trouver le cardinal maximal d'un couplage

Problèmes classiques et difficiles en général.
Une forme de (a) et (b) est un **problème NP-complet**. (Richard Karp, 1972)
Pour (c) il y a un algorithme polynomial (Jack Edmonds, 1961).
Problèmes (a), (b), (c) équivalents pour les graphes bipartis (Dénes Kőnig, 1931)
Problèmes (a), (b), (c) pour les arbres : **jolie combinatoire**

Plan

- Première apparition dans un article de Jennifer S. Zito en 1991 (motivations de **combinatoire**, recherche des arbres extrêmes)

Le cas des arbres

Petit historique

- Première apparition dans un article de Jennifer S. Zito en 1991 (motivations de **combinatoire**, recherche des arbres extrêmes)
- Redécouverte par Michel Bauer et Stéphane Coulomb en 2004 (motivations de **physique statistique**, transitions de phases)

Le cas des arbres

Petit historique

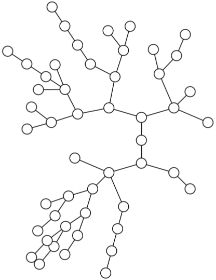
- Première apparition dans un article de Jennifer S. Zito en 1991 (motivations de **combinatoire**, recherche des arbres extrêmes)
- Redécouverte par Michel Bauer et Stéphane Coulomb en 2004 (motivations de **physique statistique**, transitions de phases)
- Apparitions récentes en relation avec les **opérades** d'une part (séries en arbres)

- Première apparition dans un article de Jennifer S. Zito en 1991 (motivations de **combinatoire**, recherche des arbres extrêmes)
- Redécouverte par Michel Bauer et Stéphane Coulomb en 2004 (motivations de **physique statistique**, transitions de phases)
- Apparitions récentes en relation avec les **opérades** d'une part (séries en arbres)
- et les **algèbres amassées** d'autre part (variétés amassées sur les corps finis)

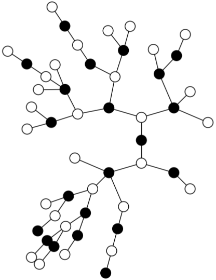
Le cas des arbres

une histoire tricolore

On commence par les couvertures par sommets (minimales)



un arbre

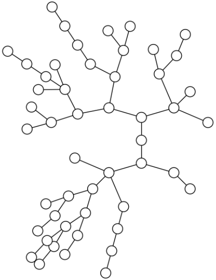


une couverture

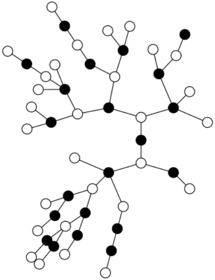
Le cas des arbres

une histoire tricolore

On commence par les couvertures par sommets (minimales)



un arbre



une autre couverture

Trois types de sommets

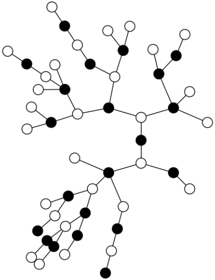
couvertures

On colorie les sommets :
vert $\longleftrightarrow$ v est dans toutes les couvertures,
orange $\longleftrightarrow$ v est dans certaines couvertures seulement,
rouge $\longleftrightarrow$ v n'est dans aucune couverture

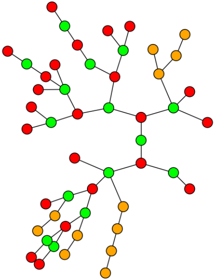
Trois types de sommets

couvertures

On colorie les sommets :
vert $\longleftrightarrow$ v est dans toutes les couvertures,
orange $\longleftrightarrow$ v est dans certaines couvertures seulement,
rouge $\longleftrightarrow$ v n'est dans aucune couverture



une couverture

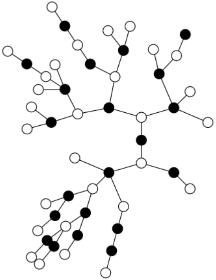


le coloriage

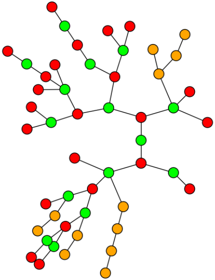
Trois types de sommets

couvertures

On colorie les sommets :
vert $\longleftrightarrow$ v est dans toutes les couvertures,
orange $\longleftrightarrow$ v est dans certaines couvertures seulement,
rouge $\longleftrightarrow$ v n'est dans aucune couverture



une autre couverture



le coloriage

Trois types de sommets

ensembles indépendants (maximaux) par passage au complémentaire

On colorie les sommets :

vert $\longleftrightarrow$ v n'est dans aucun ensemble indépendant,

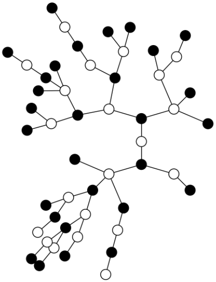
rouge $\longleftrightarrow$ v est dans tous les ensembles indépendants,

orange $\longleftrightarrow$ v est dans certains seulement

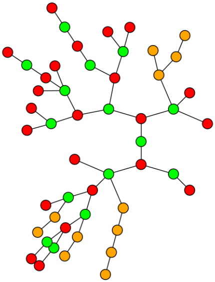
Trois types de sommets

ensembles indépendants (maximaux) par passage au complémentaire

On colorie les sommets :
vert $\longleftrightarrow$ v n'est dans aucun ensemble indépendant,
rouge $\longleftrightarrow$ v est dans tous les ensembles indépendants,
orange $\longleftrightarrow$ v est dans certains seulement



un ensemble indépendant

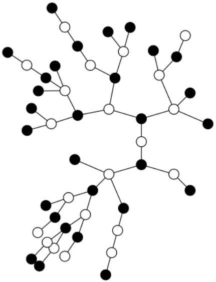


le coloriage

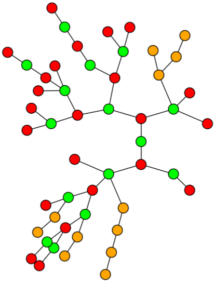
Trois types de sommets

ensembles indépendants (maximaux) par passage au complémentaire

On colorie les sommets :
vert $\longleftrightarrow$ v n'est dans aucun ensemble indépendant,
rouge $\longleftrightarrow$ v est dans tous les ensembles indépendants,
orange $\longleftrightarrow$ v est dans certains seulement



un autre ensemble indépendant



le coloriage

Trois types de sommets

couplages (maximaux)

dans un couplage, on appelle les arêtes des **dominos**

Pour les couplages : un autre découpage en trois types de sommets

I sommets qui sont toujours dans le même domino

II sommets qui sont toujours dans un domino, qui varie

III sommets qui sont parfois hors des dominos

Trois types de sommets

couplages (maximaux)

dans un couplage, on appelle les arêtes des **dominos**

Pour les couplages : un autre découpage en trois types de sommets

I sommets qui sont toujours dans le même domino

II sommets qui sont toujours dans un domino, qui varie

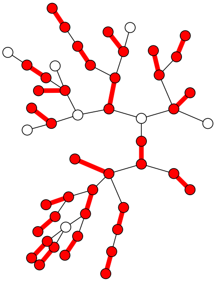
III sommets qui sont parfois hors des dominos

Théorème (Zito, Bauer-Coulomb)

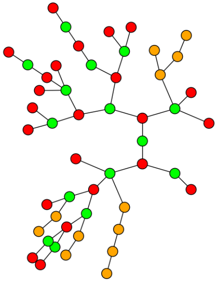
C'est la même partition en trois types de sommets !
I $\longleftrightarrow$ *orange*
II $\longleftrightarrow$ *vert*
III $\longleftrightarrow$ *rouge*

Trois types de sommets

couplages



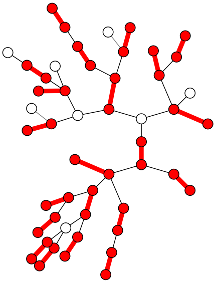
un couplage



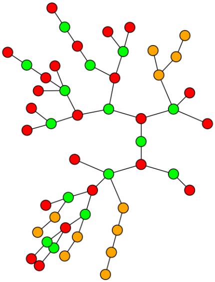
le coloriage

Trois types de sommets

couplages



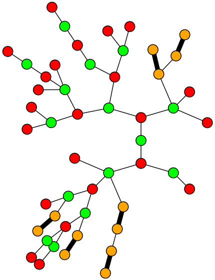
un autre couplage



le coloriage

Trois types de sommets et des arêtes distinguées

On obtient de plus un couplage parfait sur les sommets orange :

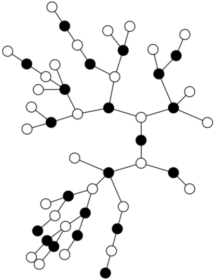


coloriage + couplage parfait

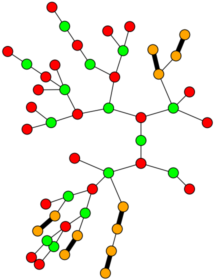
Chaque sommet orange appartient à un domino fixe.

Trois types de sommets

couvertures



une couverture



le coloriage

Dans chaque domino orange, exactement un sommet dans chaque couverture (et dans chaque ensemble indépendant).

Un jeu de construction pour les arbres

Caractérisation locale remarquable de ce tricoloriage :

Théorème (Zito, Bauer-Coulomb)

Pour tout arbre T, il existe un unique coloriage en trois couleurs tel que

- *les sommets rouges ne sont liés qu'à des sommets verts*
- *chaque sommet vert est lié à au moins deux sommets rouges*
- *il existe un couplage parfait sur l'ensemble des sommets oranges*

Un jeu de construction pour les arbres

comme des règles de construction avec trois types d'arêtes

- $O - O$ les dominos orange-orange
- $R - V$ les arêtes rouge-vert
- $X - X$ les autres arêtes (avec des sommets vert ou orange)

Un jeu de construction pour les arbres

comme des règles de construction avec trois types d'arêtes

- $O - O$ les dominos orange-orange
- $R - V$ les arêtes rouge-vert
- $X - X$ les autres arêtes (avec des sommets vert ou orange)

et des règles locales en chaque sommet :

- vert : au moins deux arêtes $R - V$ plus des arêtes $X - X$
- rouge : seulement des arêtes $R - V$
- orange : une arête $O - O$ plus des arêtes $X - X$

Un jeu de construction pour les arbres

comme des règles de construction avec trois types d'arêtes

- O – O les dominos orange-orange
- R – V les arêtes rouge-vert
- X – X les autres arêtes (avec des sommets vert ou orange)

et des règles locales en chaque sommet :

- vert : au moins deux arêtes R – V plus des arêtes X – X
- rouge : seulement des arêtes R – V
- orange : une arête O – O plus des arêtes X – X

Les arbres sont des graphes de Feynman pour le lagrangien

$$\underbrace{-\frac{1}{2}(X^2 + O^2) - RV}_{\text{arêtes}} + \underbrace{ve^X(e^R - R - 1) + re^V + oOe^X}_{\text{sommets}}$$

Principe de dissymétrie
idée

Principe général de combinatoire énumérative, concernant les objets avec une “structure arborescente” (arbres, hyperarbres, cactus, etc.) *i.e.* une topologie sans cycles.

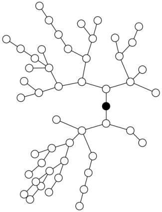
Principe de dissymétrie
idée

Principe général de combinatoire énumérative, concernant les objets avec une “structure arborescente” (arbres, hyperarbres, cactus, etc.) *i.e.* une topologie sans cycles.
Autre idée classique : c’est plus facile de compter les objets enracinés (décomposition récursive possible).

Principe de dissymétrie
idée

Principe général de combinatoire énumérative, concernant les objets avec une “structure arborescente” (arbres, hyperarbres, cactus, etc.) *i.e.* une topologie sans cycles.
Autre idée classique : c’est plus facile de compter les objets enracinés (décomposition récursive possible).

Principe de dissymétrie : utiliser l’existence d’un **centre naturel** pour compter les objets non-enracinés.



un arbre et son centre

Principe de dissymétrie
exemple prototypique : les arbres

x une espèce de structure de type singleton (sommets)

Principe de dissymétrie
exemple prototypique : les arbres

x une espèce de structure de type singleton (sommets)
E, E_2 et $E_{\geq 2}$ les espèces de structure des ensembles, des ensembles de cardinal 2 et des ensemble de cardinal au moins 2

Principe de dissymétrie
exemple prototypique : les arbres

x une espèce de structure de type singleton (sommets)
E, E_2 et $E_{\geq 2}$ les espèces de structure des ensembles, des ensembles de cardinal 2 et des ensemble de cardinal au moins 2
Quatre espèces de structures d'arbres :

- T les arbres
- T^o les arbres enracinés en un sommet
- T^- les arbres enracinés en une arête
- T^{o-} les arbres enracinés en une paire (sommet $\in$ arête)

Principe de dissymétrie
exemple prototypique : les arbres

x une espèce de structure de type singleton (sommets)
E, E_2 et $E_{\geq 2}$ les espèces de structure des ensembles, des ensembles de cardinal 2 et des ensemble de cardinal au moins 2
Quatre espèces de structures d'arbres :

- T les arbres
- T^o les arbres enracinés en un sommet
- T^- les arbres enracinés en une arête
- T^{o-} les arbres enracinés en une paire (sommet $\in$ arête)

(espèce de structure $\approx$ série génératrice exponentielle)

Principe de dissymétrie
un lagrangien pour les arbres

Principe de dissymétrie donne une égalité entre espèces :

$$T + T^{o-} = T^{o} + T^{-}$$

Principe de dissymétrie
un lagrangien pour les arbres

Principe de dissymétrie donne une égalité entre espèces :

$$T + T^{o-} = T^{o} + T^{-}$$

Par ailleurs, on a par décomposition combinatoire

$$T^{o} = xE(T^{o}) \quad T^{-} = E_2(T^{o}) \quad T^{o-} = (T^{o})^2$$

Principe de dissymétrie
un lagrangien pour les arbres

Principe de dissymétrie donne une égalité entre espèces :

$$T + T^{o-} = T^{o} + T^{-}$$

Par ailleurs, on a par décomposition combinatoire

$$T^{o} = xE(T^{o}) \quad T^{-} = E_2(T^{o}) \quad T^{o-} = (T^{o})^2$$

On obtient donc

$$T = -(T^{o})^2 + E_2(T^{o}) + xE(T^{o})$$

version combinatoire du lagrangien $-(T^{o})^2/2 + xe^{T^{o}}$.

Principe de dissymétrie
application au tricoloriage

trois espèces singleton $r, o, v \longleftrightarrow$ trois types de sommets.

Principe de dissymétrie
application au tricoloriage

trois espèces singleton $r, o, v \longleftrightarrow$ trois types de sommets.
$R =$ arbres avec demi-arête R$-$V attachée à un sommet rouge
$V =$ arbres avec demi-arête R$-$V attachée à un sommet vert
$O =$ arbres avec demi-arête O$-$O attachée à un sommet orange
$X =$ arbres avec demi-arête X$-$X attachée à un sommet vert ou orange

Principe de dissymétrie
application au tricoloriage

trois espèces singleton $r, o, v \longleftrightarrow$ trois types de sommets.
R = arbres avec demi-arête R$-$V attachée à un sommet rouge
V = arbres avec demi-arête R$-$V attachée à un sommet vert
O = arbres avec demi-arête O$-$O attachée à un sommet orange
X = arbres avec demi-arête X$-$X attachée à un sommet vert ou orange
En utilisant la structure du tricoloriage, on montre que

- $T^{o} = vE(X)E_{\geq 2}(R) + rE(V) + oOE(X)$
- $T^{-} = E_2(X) + E_2(O) + RV$
- $T^{o-} = X^2 + O^2 + 2RV$

Principe de dissymétrie
application au tricoloriage

Le principe de dissymétrie donne encore

$$T + T^{o-} = T^{o} + T^{-}$$

Principe de dissymétrie
application au tricoloriage

Le principe de dissymétrie donne encore

$$T + T^{o-} = T^{o} + T^{-}$$

En remplacant par les expressions obtenues, on trouve

$$T = E_2(X) + E_2(O) - X^2 - O^2 - RV + vE(X)E_{\geq 2}(R) + rE(V) + oOE(X)$$

Principe de dissymétrie application au tricoloriage

Le principe de dissymétrie donne encore

$$T + T^{o-} = T^{o} + T^{-}$$

En remplacant par les expressions obtenues, on trouve

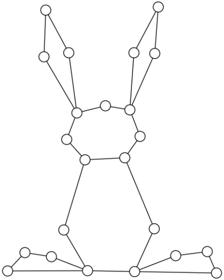
$$T = E_2(X)+E_2(O)-X^2-O^2-RV+vE(X)E_{\geq 2}(R)+rE(V)+oOE(X)$$

version combinatoire du lagrangien

$$T = -\frac{1}{2}(X^2 + O^2) - RV + ve^X(e^R - R - 1) + re^V + oOe^X$$

les singletons r, o, v sont les "constantes de couplages"

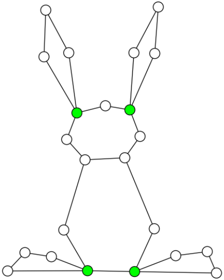
Isthmes



un exemple de graphe connexe

Un isthme est un sommet s tel que $G \setminus s$ n'est pas connexe.

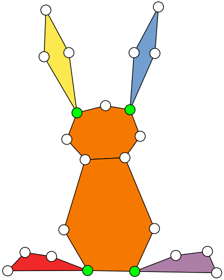
Isthmes



les isthmes de ce graphe

Un isthme est un sommet s tel que $G \setminus s$ n'est pas connexe.

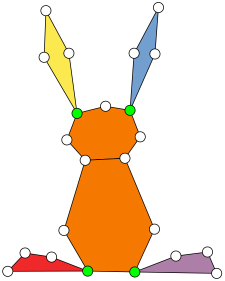
Isthmes et blocs



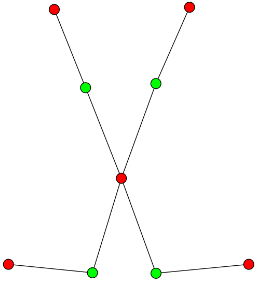
les isthmes et les blocs

Les isthmes définissent des blocs.

Arbre des isthmes et blocs



isthmes et blocs



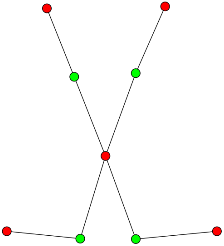
arbre associé

Les isthmes et les blocs forment un arbre :

Sommets verts ● $\longleftrightarrow$ isthmes

Sommets rouges ● $\longleftrightarrow$ blocs

Propriétés



Cet arbre associé aux isthmes et blocs d'un graphe

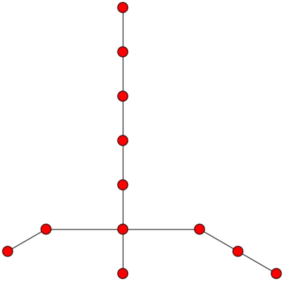
1. est bipartite rouge – vert
2. chaque sommet vert ● a au moins deux voisins rouges ●

Donc c'est le coloriage canonique de cet arbre ! (aucun sommet orange)

Algorithme

ou comment obtenir facilement le tricoloriage

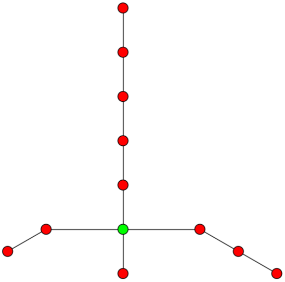
Étape 0 : tous les sommets sont rouges



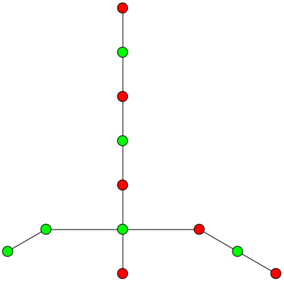
Algorithme

ou comment obtenir facilement le tricoloriage

Étape 0 : tous les sommets sont rouges
Étape 1 : si un sommet a un seul voisin rouge, ce voisin devient vert (répéter tant que c'est possible)



un sommet devient vert

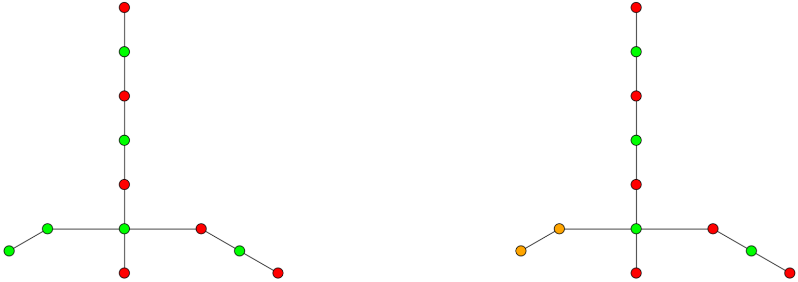


fin de l'étape 1

Algorithme

ou comment obtenir facilement le tricoloriage

Étape 0 : tous les sommets sont rouges
Étape 1 : si un sommet a un seul voisin rouge, ce voisin devient vert (répéter tant que c'est possible)
Étape 2 : les sommets verts sans voisins rouges deviennent orange



Plan

Une variété pour chaque arbre

On fixe un arbre T et un couplage maximal C de cet arbre.

Une variété pour chaque arbre

On fixe un arbre T et un couplage maximal C de cet arbre.
On prend trois jeux de variables :

- x_i et x_i' pour i dans T (variables amassées)
- α_i pour i dans T non couverts par C (coefficients)

On pose $\alpha_i = 1$ pour $i \in C$.

Une variété pour chaque arbre

On fixe un arbre T et un couplage maximal C de cet arbre.
On prend trois jeux de variables :

- x_i et x'_i pour i dans T (variables amassées)
- α_i pour i dans T non couverts par C (coefficients)

On pose $\alpha_i = 1$ pour $i \in C$. Et on considère les équations

$$x_i x'_i = 1 + \alpha_i \prod_{j - i} x_j$$

(produit sur les sommets j voisins de i)
plus la condition que les α_i sont inversibles.
$\longrightarrow$ une variété algébrique affine $X_{T,C}$

Petits arbres

Pour l'arbre avec un seul sommet, il y a un coefficient :

$$x\,x' = 1 + \alpha$$

avec α non nul. C'est un ouvert dans $\mathbb{C}^2$.

Petits arbres

Pour l'arbre avec un seul sommet, il y a un coefficient :

$$x\,x' = 1 + \alpha$$

avec α non nul. C'est un ouvert dans $\mathbb{C}^2$.

Pour l'arbre à deux sommets, pas de coefficients :

$$\begin{aligned} x\,x' &= 1 + y, \\ y\,y' &= 1 + x. \end{aligned}$$

C'est une variété lisse de dimension 2.

Quelques résultats

Théorème

La variété $X_{T,C}$ est lisse, et ne dépend pas du couplage C, à isomorphisme près.

Quelques résultats

Théorème

La variété $X_{T,C}$ est lisse, et ne dépend pas du couplage C, à isomorphisme près.

Théorème

Le nombre de points sur le corps fini $\mathbf{F}_q$ de $X_{T,C}$ est un polynôme (réciproque) en la variable q, donné explicitement par

$$\sum_S (q-1)^{2\#T-\#C-2\#S} q^{\#S}$$

où S parcourt les ensembles indépendants (pas nécessairement maximaux).

Quelques résultats

Théorème

La variété $X_{T,C}$ est lisse, et ne dépend pas du couplage C, à isomorphisme près.

Théorème

Le nombre de points sur le corps fini $\mathbf{F}_q$ de $X_{T,C}$ est un polynôme (réciproque) en la variable q, donné explicitement par

$$\sum_{S} (q-1)^{2\#T - \#C - 2\#S} q^{\#S}$$

où S parcourt les ensembles indépendants (pas nécessairement maximaux).

La caractéristique d'Euler de $X_{T,C}$ est le nombre d'ensemble indépendants maximaux de T.

Illustration des résultats

Pour l'arbre avec un seul sommet, on trouve :

$$(q-1)^2 + q = 1 - q + q^2.$$

Il y a 1 ensemble indépendant maximal.

Illustration des résultats

Pour l'arbre avec un seul sommet, on trouve :

$$(q-1)^2+q=1-q+q^2.$$

Il y a 1 ensemble indépendant maximal.

Pour l'arbre à deux sommets, on trouve :

$$(q-1)^2+2q=1+q^2.$$

Il y a 2 ensembles indépendants maximaux.