Un théorème du Jardin d'Éden pour les sous-décalages linéaires

Michel Coornaert

IRMA, Strasbourg

Séminaire GT3, Strasbourg

Décalages et sous-décalages

On prend :

- un groupe G,
- un ensemble A (appelé l'alphabet).

Considérons l'ensemble

$$A^G = \{x \colon G \to A\}$$

muni de la topologie prodiscrète et de l'action de G donnée par

$$\begin{aligned} G \times A^G &\to A^G \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

où

$$gx(h) = x(g^{-1}h) \quad \forall h \in G.$$

Cette action s'appelle le G-décalage. Elle est continue pour la topologie prodiscrète sur A^G.

Décalages et sous-décalages

On prend :

• un groupe G,

• un ensemble A (appelé l'alphabet).

Considérons l'ensemble

$$A^G = \{x \colon G \to A\}$$

muni de la topologie prodiscrète et de l'action de G donnée par

$$\begin{aligned} G \times A^G &\to A^G \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

où

$$gx(h) = x(g^{-1}h) \quad \forall h \in G.$$

Cette action s'appelle le G-décalage. Elle est continue pour la topologie prodiscrète sur A^G.

L'espace A^G s'appelle l'espace des configurations ou encore le décalage plein sur le groupe G et l'alphabet A.

Décalages et sous-décalages

On prend :
- un groupe G,
- un ensemble A (appelé l'alphabet).

Considérons l'ensemble

$$A^G = \{x\colon G \to A\}$$

muni de la topologie prodiscrète et de l'action de G donnée par

$$\begin{aligned} G \times A^G &\to A^G \\ (g, x) &\mapsto gx \end{aligned}$$

où

$$gx(h) = x(g^{-1}h) \quad \forall h \in G.$$

Cette action s'appelle le G-décalage. Elle est continue pour la topologie prodiscrète sur A^G.

L'espace A^G s'appelle l'espace des configurations ou encore le décalage plein sur le groupe G et l'alphabet A.

Un fermé G-invariant $X \subset A^G$ s'appelle un sous-décalage.

Automates cellulaires

Définition

Soit $X \subset A^G$ un sous-décalage. Un automate cellulaire sur X est une application

$$\tau \colon X \to X$$

vérifiant la condition suivante :
Il existe un sous-ensemble fini $M \subset G$ et une application $\mu \colon A^M \to A$ telle que :

$$(\tau(x))(g) = \mu((g^{-1}x)|_M) \quad \forall x \in X, \forall g \in G,$$

où $(g^{-1}x)|_M$ désigne la restriction de la configuration $g^{-1}x$ à M.

Définition

Soit $X \subset A^G$ un sous-décalage. Un automate cellulaire sur X est une application

$$\tau \colon X \to X$$

vérifiant la condition suivante :
Il existe un sous-ensemble fini $M \subset G$ et une application $\mu \colon A^M \to A$ telle que :

$$(\tau(x))(g) = \mu((g^{-1}x)|_M) \quad \forall x \in X, \forall g \in G,$$

où $(g^{-1}x)|_M$ désigne la restriction de la configuration $g^{-1}x$ à M.

On dit alors que M est une mémoire et que μ est une application de définition locale de τ.

Exemple : le jeu de la vie de Conway

On prend $G = \mathbb{Z}^2$ et $A = \{0,1\}$.
Le jeu de la vie est décrit par l'automate cellulaire :

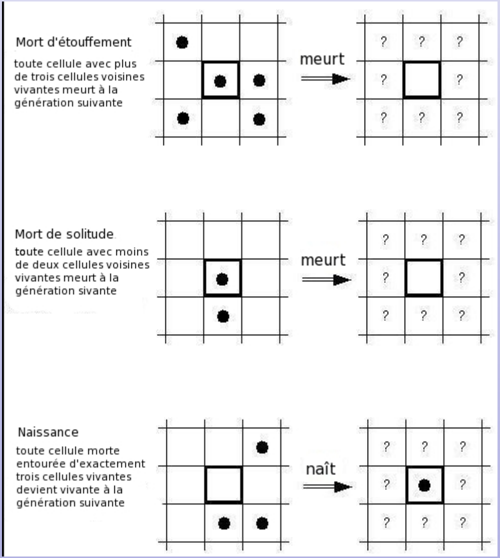
$$\tau \colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$$

sur le décalage plein $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ que l'on obtient en prenant $M = \{-1,0,1\}^2 \subset \mathbb{Z}^2$ comme mémoire et $\mu \colon A^M \to A$ donnée par

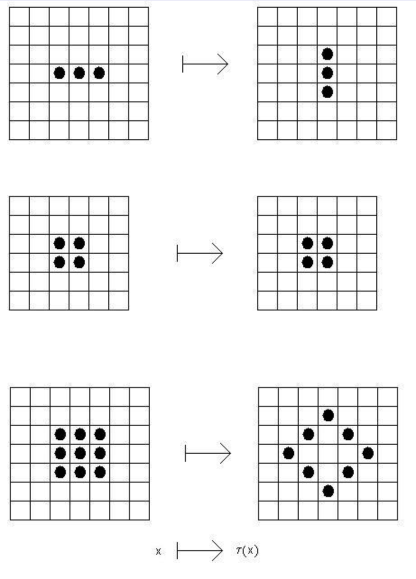
$$\mu(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \begin{cases} \displaystyle\sum_{m \in M} y(m) = 3 \\ \text{ou } \displaystyle\sum_{m \in M} y(m) = 4 \text{ and } y((0,0)) = 1 \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall y \in A^M$.

Exemple : le jeu de la vie de Conway



Exemple : le jeu de la vie de Conway



Définition

On dit qu'un groupe G est moyennable si l'ensemble $\mathcal{P}(G)$ des parties de G admet une mesure de probabilité invariante finiment additive, c'est-à-dire s'il existe une application $m\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ telle que

(Amen-1) $m(G) = 1$

(Amen-2) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

(Amen-3) $m(gA) = m(A)$

quels que soient $g \in G$ et $A, B \in \mathcal{P}(G)$.

Définition

On dit qu'un groupe G est moyennable si l'ensemble $\mathcal{P}(G)$ des parties de G admet une mesure de probabilité invariante finiment additive, c'est-à-dire s'il existe une application $m\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ telle que

(Amen-1) $m(G) = 1$

(Amen-2) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

(Amen-3) $m(gA) = m(A)$

quels que soient $g \in G$ et $A, B \in \mathcal{P}(G)$.

- Tout groupe fini (et, plus généralement, tout groupe localement fini) est moyennable.

Définition

On dit qu'un groupe G est moyennable si l'ensemble $\mathcal{P}(G)$ des parties de G admet une mesure de probabilité invariante finiment additive, c'est-à-dire s'il existe une application $m \colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ telle que

(Amen-1) $m(G) = 1$

(Amen-2) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

(Amen-3) $m(gA) = m(A)$

quels que soient $g \in G$ et $A, B \in \mathcal{P}(G)$.

- Tout groupe fini (et, plus généralement, tout groupe localement fini) est moyennable.
- Tout groupe commutatif (et, plus généralement, tout groupe résoluble) est moyennable.

Groupes moyennables

Définition

On dit qu'un groupe G est moyennable si l'ensemble $\mathcal{P}(G)$ des parties de G admet une mesure de probabilité invariante finiment additive, c'est-à-dire s'il existe une application $m\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ telle que

(Amen-1) $m(G) = 1$

(Amen-2) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

(Amen-3) $m(gA) = m(A)$

quels que soient $g \in G$ et $A, B \in \mathcal{P}(G)$.

- Tout groupe fini (et, plus généralement, tout groupe localement fini) est moyennable.
- Tout groupe commutatif (et, plus généralement, tout groupe résoluble) est moyennable.
- Tout groupe de type fini à croissance sous-exponentielle est moyennable.

Définition

On dit qu'un groupe G est moyennable si l'ensemble $\mathcal{P}(G)$ des parties de G admet une mesure de probabilité invariante finiment additive, c'est-à-dire s'il existe une application $m\colon \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ telle que

(Amen-1) $m(G) = 1$

(Amen-2) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

(Amen-3) $m(gA) = m(A)$

quels que soient $g \in G$ et $A, B \in \mathcal{P}(G)$.

- Tout groupe fini (et, plus généralement, tout groupe localement fini) est moyennable.
- Tout groupe commutatif (et, plus généralement, tout groupe résoluble) est moyennable.
- Tout groupe de type fini à croissance sous-exponentielle est moyennable.
- Un exemple de groupe non moyennable est fourni par le groupe libre à deux générateurs. Plus généralement, tout groupe contenant un sous-groupe libre non commutatif est non-moyennable.

Automates cellulaires pré-injectifs

Définition

On dit qu'un automate cellulaire $\tau\colon X \to X$, défini sur un sous-décalage $X \subset A^G$, est pré-injectif si :

$$\left.\begin{array}{c}\tau(x) = \tau(x') \\ \text{et} \\ \{g \in G \mid \ x(g) \neq x'(g)\} \text{ est fini}\end{array}\right\} \Longrightarrow x = x'.$$

Automates cellulaires pré-injectifs

Définition

On dit qu'un automate cellulaire $\tau \colon X \to X$, défini sur un sous-décalage $X \subset A^G$, est pré-injectif si :

$$\left. \begin{array}{c} \tau(x) = \tau(x') \\ \text{et} \\ \{g \in G \mid \ x(g) \neq x'(g)\} \text{ est fini} \end{array} \right\} \Longrightarrow x = x'.$$

Exemple

L'automate cellulaire $\tau \colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ qui définit le jeu de la vie de Conway n'est pas pré-injectif.

Automates cellulaires pré-injectifs

Définition

On dit qu'un automate cellulaire $\tau\colon X \to X$, défini sur un sous-décalage $X \subset A^G$, est pré-injectif si :

$$\left.\begin{array}{c}\tau(x) = \tau(x') \\ \text{et} \\ \{g \in G \mid \ x(g) \neq x'(g)\} \text{ est fini}\end{array}\right\} \Longrightarrow x = x'.$$

Exemple

L'automate cellulaire $\tau\colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ qui définit le jeu de la vie de Conway n'est pas pré-injectif.

Exemple

L'automate cellulaire $\tau\colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ défini par

$$\forall x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \tau(x)(n) = x(n+1) + x(n) \mod 2,$$

est pré-injectif. Mais il n'est pas injectif car les deux configurations constantes ont la même image.

Le théorème du Jardin d'Éden

Le théorème suivant est le théorème du Jardin d'Éden dû à Ceccherini-Silberstein, Machì et Scarabotti. Il a d'abord été démontré pour $G = \mathbb{Z}^2$ par Moore et Myhill, puis étendu aux groupes de type fini à croissance sous-exponentielle par Machì et Mignosi.

Le théorème du Jardin d'Éden

Le théorème suivant est le théorème du Jardin d'Éden dû à Ceccherini-Silberstein, Machì et Scarabotti. Il a d'abord été démontré pour $G = \mathbb{Z}^2$ par Moore et Myhill, puis étendu aux groupes de type fini à croissance sous-exponentielle par Machì et Mignosi.

Théorème (CMS-1999)

Soient G un groupe moyennable et A un ensemble fini. Soit $\tau \colon A^G \to A^G$ un automate cellulaire défini sur le décalage plein A^G. Alors on a

$$\tau \text{ surjectif} \iff \tau \text{ pré-injectif.}$$

Le théorème du Jardin d'Éden

Le théorème suivant est le théorème du Jardin d'Éden dû à Ceccherini-Silberstein, Machì et Scarabotti. Il a d'abord été démontré pour $G = \mathbb{Z}^2$ par Moore et Myhill, puis étendu aux groupes de type fini à croissance sous-exponentielle par Machì et Mignosi.

Théorème (CMS-1999)

Soient G un groupe moyennable et A un ensemble fini. Soit $\tau \colon A^G \to A^G$ un automate cellulaire défini sur le décalage plein A^G. Alors on a

$$\tau \text{ surjectif} \iff \tau \text{ pré-injectif.}$$

Exemple

L'automate cellulaire $\tau \colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ qui définit le jeu de la vie de Conway n'est pas pré-injectif. Il n'est donc pas surjectif.

Le théorème du Jardin d'Éden

Le théorème suivant est le théorème du Jardin d'Éden dû à Ceccherini-Silberstein, Machì et Scarabotti. Il a d'abord été démontré pour $G = \mathbb{Z}^2$ par Moore et Myhill, puis étendu aux groupes de type fini à croissance sous-exponentielle par Machì et Mignosi.

Théorème (CMS-1999)

Soient G un groupe moyennable et A un ensemble fini. Soit $\tau\colon A^G \to A^G$ un automate cellulaire défini sur le décalage plein A^G. Alors on a

$$\tau \text{ surjectif} \iff \tau \text{ pré-injectif.}$$

Exemple

L'automate cellulaire $\tau\colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ qui définit le jeu de la vie de Conway n'est pas pré-injectif. Il n'est donc pas surjectif.

Exemple

L'automate cellulaire $\tau\colon \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ défini par

$$\forall x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \tau(x)(n) = x(n+1) + x(n) \mod 2,$$

est pré-injectif. Il est donc surjectif (facile à démontrer directement).

Soient G un groupe et A un ensemble.

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est de type fini s'il existe un ensemble fini $D \subset G$ et un sous-ensemble $L \subset A^D$ tel que

$$X = X(D, L) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in A^G : (g^{-1}x)|_D \in L \text{ pour tout } g \in G\}.$$

Soient G un groupe et A un ensemble.

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est de type fini s'il existe un ensemble fini $D \subset G$ et un sous-ensemble $L \subset A^D$ tel que

$$X = X(D, L) \stackrel{\text{déf}}{=} \{x \in A^G : (g^{-1}x)|_D \in L \text{ pour tout } g \in G\}.$$

Définition

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^G$ est fortement irréductible s'il existe un sous-ensemble fini $\Delta \subset G$ qui vérifie la propriété suivante :
si Ω_1 et Ω_2 sont des sous-ensembles finis de G tels que il n'existe pas d'élément $g \in \Omega_2$ tel que l'ensemble $g\Delta$ rencontre Ω_1 alors, étant donnés deux configurations quelconques $x_1, x_2 \in X$, on peut toujours trouver une configuration $x \in X$ telle que $x|_{\Omega_1} = x_1|_{\Omega_1}$ et $x|_{\Omega_2} = x_2|_{\Omega_2}$.

Un théorème du Jardin d'Éden pour les sous-décalages

L'extension suivante du théorème du Jardin d'Éden est due à F. Fiorenzi :

Théorème (F-2003)

Soient G un groupe moyennable et A un ensemble fini. Soit $\tau \colon X \to X$ un automate cellulaire défini sur un sous-décalage fortement irréductible de type fini $X \subset A^G$. Alors on a

$$\tau \text{ surjectif} \iff \tau \text{ pré-injectif.}$$

Soient G un groupe et $A = V$ un espace vectoriel sur un corps K.

Soient G un groupe et $A = V$ un espace vectoriel sur un corps K.
Un sous-décalage linéaire est un sous-décalage $X \subset V^G$ qui est aussi un sous-espace vectoriel de V^G.

Un théorème du Jardin d'Éden pour les sous-décalages linéaires

Soient G un groupe et $A = V$ un espace vectoriel sur un corps K.
Un sous-décalage linéaire est un sous-décalage $X \subset V^G$ qui est aussi un sous-espace vectoriel de V^G.
Un automate cellulaire linéaire sur un sous-décalage linéaire $X \subset V^G$ est un automate cellulaire $\tau \colon X \to X$ qui est K-linéaire.

Un théorème du Jardin d'Éden pour les sous-décalages linéaires

Soient G un groupe et $A = V$ un espace vectoriel sur un corps K.
Un sous-décalage linéaire est un sous-décalage $X \subset V^G$ qui est aussi un sous-espace vectoriel de V^G.
Un automate cellulaire linéaire sur un sous-décalage linéaire $X \subset V^G$ est un automate cellulaire $\tau \colon X \to X$ qui est K-linéaire.
Résultat obtenu en collaboration avec Tullio Ceccherini-Silberstein :

Théorème (CC-2010a)

Soient G un groupe moyennable, K un corps, et V un espace vectoriel de dimension finie sur K. Soit $\tau \colon X \to X$ un automate cellulaire linéaire défini sur un sous-décalage linéaire fortement irréductible de type fini $X \subset V^G$. Alors on a

$$\tau \text{ surjectif} \iff \tau \text{ pré-injectif.}$$

Corollaire

τ injectif $\Rightarrow$ τ surjectif.

Esquisse de la démonstration

On utilise le critère de moyennabilité de Følner : pour qu'un groupe G soit moyennable, il faut et il suffit qu'il admette un filet de Følner, i.e., un filet $(F_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles finis non vides tel que

$$\lim_i \frac{|F_i \setminus F_i g|}{|F_i|} = 0 \quad \forall g \in G.$$

Esquisse de la démonstration

On utilise le critère de moyennabilité de Følner : pour qu'un groupe G soit moyennable, il faut et il suffit qu'il admette un filet de Følner, i.e., un filet $(F_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles finis non vides tel que

$$\lim_i \frac{|F_i \setminus F_i g|}{|F_i|} = 0 \quad \forall g \in G.$$

On définit la dimension moyenne $\mathrm{mdim}(Y)$ d'un sous-espace vectoriel $Y \subset V^G$ par

$$\mathrm{mdim}(Y) = \limsup_i \frac{\dim(\pi_{F_i}(Y))}{|F_i|},$$

où $\pi_{F_i} \colon V^G \to V^{F_i}$ est la projection canonique et $\dim(\cdot)$ désigne la dimension pour les K-espaces vectoriels de dimension finie.

Esquisse de la démonstration

On utilise le critère de moyennabilité de Følner : pour qu'un groupe G soit moyennable, il faut et il suffit qu'il admette un filet de Følner, i.e., un filet $(F_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles finis non vides tel que

$$\lim_i \frac{|F_i \setminus F_i g|}{|F_i|} = 0 \quad \forall g \in G.$$

On définit la dimension moyenne $\operatorname{mdim}(Y)$ d'un sous-espace vectoriel $Y \subset V^G$ par

$$\operatorname{mdim}(Y) = \limsup_i \frac{\dim(\pi_{F_i}(Y))}{|F_i|},$$

où $\pi_{F_i} \colon V^G \to V^{F_i}$ est la projection canonique et $\dim(\cdot)$ désigne la dimension pour les K-espaces vectoriels de dimension finie.

On montre alors

$$\tau \text{ surjectif} \iff \operatorname{mdim}(\tau(X)) = \operatorname{mdim}(X) \iff \tau \text{ pré-injectif}.$$

Esquisse de la démonstration

On utilise le critère de moyennabilité de Følner : pour qu'un groupe G soit moyennable, il faut et il suffit qu'il admette un filet de Følner, i.e., un filet $(F_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles finis non vides tel que

$$\lim_i \frac{|F_i \setminus F_i g|}{|F_i|} = 0 \quad \forall g \in G.$$

On définit la dimension moyenne $\mathrm{mdim}(Y)$ d'un sous-espace vectoriel $Y \subset V^G$ par

$$\mathrm{mdim}(Y) = \limsup_i \frac{\dim(\pi_{F_i}(Y))}{|F_i|},$$

où $\pi_{F_i} \colon V^G \to V^{F_i}$ est la projection canonique et $\dim(\cdot)$ désigne la dimension pour les K-espaces vectoriels de dimension finie.
On montre alors

$$\tau \text{ surjectif} \iff \mathrm{mdim}(\tau(X)) = \mathrm{mdim}(X) \iff \tau \text{ pré-injectif}.$$

Dans cette démonstration, la dimension moyenne joue le rôle qui est joué par l'entropie dans le cas d'un alphabet fini.

Bibliographie

[CC-2006] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *The Garden of Eden theorem for linear cellular automata*, Ergod. Th & Dynam. Sys. **26** (2006), 53–68.

Bibliographie

[CC-2006] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *The Garden of Eden theorem for linear cellular automata*, Ergod. Th & Dynam. Sys. **26** (2006), 53–68.

[CC-2010a] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *A Garden of Eden theorem for linear subshifts*, preprint, arXiv :1002.3957, à paraître dans Ergodic Theory & Dynamical Systems.

Bibliographie

[CC-2006] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *The Garden of Eden theorem for linear cellular automata*, Ergod. Th & Dynam. Sys. **26** (2006), 53–68.

[CC-2010a] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *A Garden of Eden theorem for linear subshifts*, preprint, arXiv :1002.3957, à paraître dans Ergodic Theory & Dynamical Systems.

[CC-2010b] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *Cellular automata and groups*, Springer Monographs in Mahtematics, Springer, Berlin, 2010.

Bibliographie

[CC-2006] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *The Garden of Eden theorem for linear cellular automata*, Ergod. Th & Dynam. Sys. **26** (2006), 53–68.

[CC-2010a] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *A Garden of Eden theorem for linear subshifts*, preprint, arXiv :1002.3957, à paraître dans Ergodic Theory & Dynamical Systems.

[CC-2010b] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *Cellular automata and groups*, Springer Monographs in Mahtematics, Springer, Berlin, 2010.

[CMS-1999] T. Ceccherini-Silberstein, A. Machì and F. Scarabotti, *Amenable groups and cellular automata*, Ann. Inst. Fourier **49** (1999), 673–685.

Bibliographie

[CC-2006] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *The Garden of Eden theorem for linear cellular automata*, Ergod. Th & Dynam. Sys. **26** (2006), 53–68.

[CC-2010a] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *A Garden of Eden theorem for linear subshifts*, preprint, arXiv :1002.3957, à paraître dans Ergodic Theory & Dynamical Systems.

[CC-2010b] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *Cellular automata and groups*, Springer Monographs in Mahtematics, Springer, Berlin, 2010.

[CMS-1999] T. Ceccherini-Silberstein, A. Machì and F. Scarabotti, *Amenable groups and cellular automata*, Ann. Inst. Fourier **49** (1999), 673–685.

[F-2003] F. Fiorenzi, *Cellular automata and strongly irreducible shifts of finite type*, Theoret. Comput. Sci. **299** (2003), 477–493.

Bibliographie

[CC-2006] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *The Garden of Eden theorem for linear cellular automata*, Ergod. Th & Dynam. Sys. **26** (2006), 53–68.

[CC-2010a] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *A Garden of Eden theorem for linear subshifts*, preprint, arXiv :1002.3957, à paraître dans Ergodic Theory & Dynamical Systems.

[CC-2010b] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *Cellular automata and groups*, Springer Monographs in Mahtematics, Springer, Berlin, 2010.

[CMS-1999] T. Ceccherini-Silberstein, A. Machì and F. Scarabotti, *Amenable groups and cellular automata*, Ann. Inst. Fourier **49** (1999), 673–685.

[F-2003] F. Fiorenzi, *Cellular automata and strongly irreducible shifts of finite type*, Theoret. Comput. Sci. **299** (2003), 477–493.

[Gro-1999] M. Gromov, *Endomorphisms of symbolic algebraic varieties*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **1** (1999), 109–197.