Числа Каталана и естественные отображения

В. Доценко

Числа Каталана встречаются в математике при подсчете количества тех или иных комбинаторных объектов. Результатом этого являются теоремы вида: “Количество элементов в множестве A_n равно количеству элементов в множестве $Б_n$”. Убедительным (разумеется, не единственно возможным) доказательством такой теоремы было бы построение явного взаимно однозначного соответствия (биекции) между множествами A_n и $\mathrm{Б}_n$. В большинстве предложенных задач надо как раз построить такое отображение. Для однозначной трактовки условий задачи снабжены списком исследуемых объектов для $n = 3$. Порядок, в котором они выписаны, является случайным и не несет никакой дополнительной информации. Нумерация пунктов тоже сравнительно сумбурна. Впрочем, для пунктов, отличающихся лишь нижним индексом, эквивалентность соответствующих интерпретаций должна быть либо мгновенно очевидна, либо следовать из уже сделанного.

Определение. Числа Каталана c_n $(n \geqslant 0)$ (однозначно) определяются рекуррентным соотношением

$$c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \ldots + c_nc_0 \quad (n \geqslant 0)$$

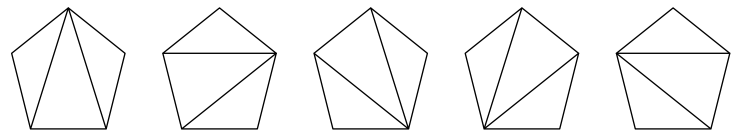
и “начальным условием” $c_0 = 1$.

1. (Явная формула[1]) Докажите, что $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. (Как обычно, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.)

2. (Несколько стандартных интерпретаций) Докажите (по возможности построив биекции), что в каждом из этих множеств c_n элементов.

(a) *Триангуляции* (разрезания на n треугольников непересекающимися диагоналями) выпуклого $(n + 2)$-угольника

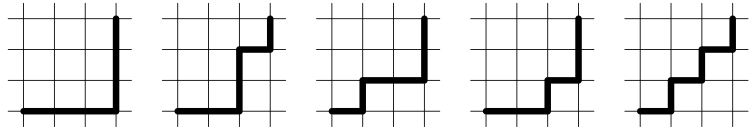
[1]Знать явную формулу для построения отображений совершенно незачем, тем не менее узнать ее не вредно. А можно и придумать комбинаторное доказательство.



(b) Неассоциативные произведения $n + 1$ букв (иначе говоря, способы расставить скобки, чтобы порядок умножений был однозначно определен)

`a(b(cd))` `(ab)(cd)` `((ab)c)d` `a((bc)d)` `(a(bc))d`

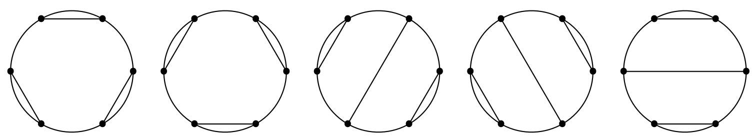
(c_1) Пути из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) по линиям клетчатой бумаги, идущих вверх и вправо, не поднимающиеся выше прямой $y = x$



(c_2) Последовательности длины $2n$, в которых по n раз встречаются числа 1 и -1, и все частичные суммы[2] неотрицательны

`1 1 1 -1 -1 -1` `1 1 -1 1 -1 -1` `1 -1 1 1 -1 -1` `1 -1 1 -1 1 -1` `1 1 -1 -1 1 -1`

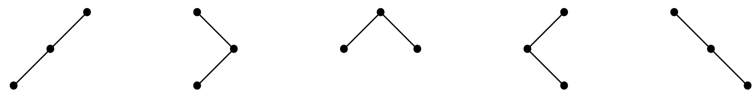
(d) Способы соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами



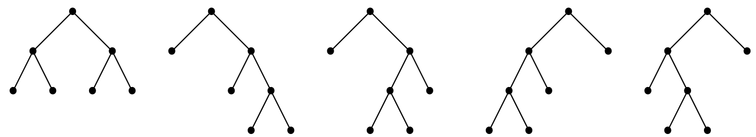
[2]k-й частичной суммой последовательности $a_1, \ldots, a_p$ $(k \leqslant p)$ называется сумма $a_1 + \ldots + a_k$.

3. (Еще несколько интерпретаций) Докажите (по возможности построив биекции), что в каждом из этих множеств c_n элементов.

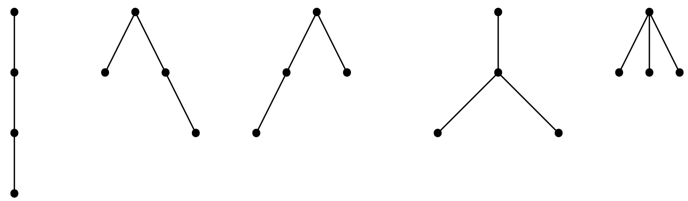
(a) *Плоские корневые двоичные деревья* (у каждой вершины не более двух сыновей [“правый” или “левый”] и один предок [кроме корня, у которого нет предков]) с n вершинами



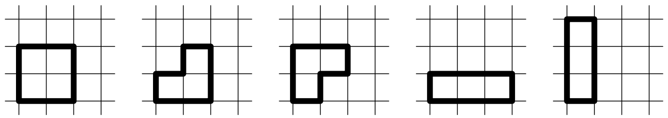
(b) *Плоские корневые строго двоичные деревья* (у каждой вершины либо два сына, либо ни одного [и тогда это по определению лист]) с $n+1$ листьями



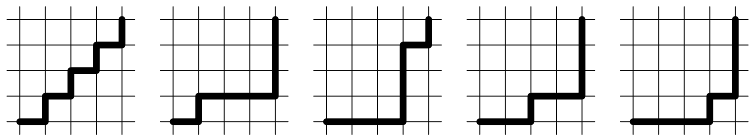
(c) *Плоские корневые деревья* с $n+1$ вершинами



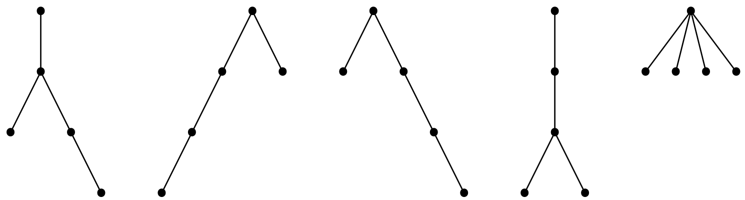
(d) *Параллеломино* (пары путей на клетчатой бумаге с началом в точке $(0,0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца) периметра $2n+2$



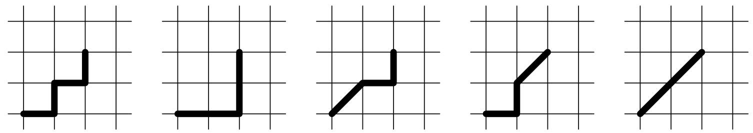
(e_1) Пути по линиям клетчатой бумаги из точки $(0,0)$ в точку $(n+1, n+1)$, идущие только вправо или вверх, не поднимающиеся выше прямой $y = x$ и такие, что любая вертикальная сторона с концом на этой прямой имеет нечетную длину



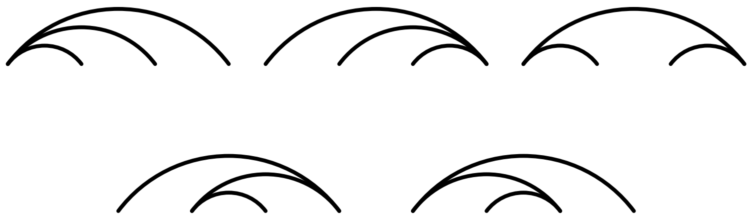
(e_2) Плоские корневые деревья с $n+2$ вершинами, такие что для любого поддерева корня “самый правый путь” из корня этого поддерева (в каждой вершине выбирающий самое правое ребро вниз) имеет четную длину



(f) Пути из точки $(0,0)$ в точку $(n-1, n-1)$, идущие вправо, вверх или по диагонали вправо вверх, не поднимающиеся выше прямой $y = x$ и такие, что идти по диагонали можно только вдоль прямой $y = x$



(g) Способы соединить $n+1$ точек на прямой n непересекающимися дугами так, чтобы не было циклов и из каждой точки дуги выходили только влево или только вправо



(h) Последовательности натуральных чисел $1 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, где $a_i \leqslant i$

`1 1 1     1 1 2     1 1 3     1 2 2     1 2 3`

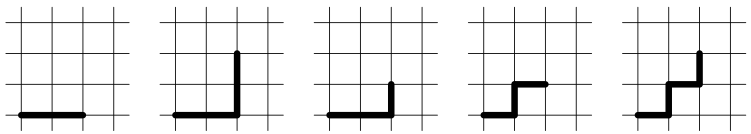
(i$_1$) Последовательности целых чисел $a_1, \ldots, a_{n-1}$, такие что $a_i \leqslant 1$ и все частичные суммы неотрицательны

`0 0     0 1     1 0     1 1     1 -1`

(i$_2$) Последовательности целых чисел $a_1, \ldots, a_n$, такие что $a_i \geqslant -1$, все частичные суммы неотрицательны и $a_1 + \ldots + a_n = 0$

`0 0 0     0 1 -1     1 0 -1     1 -1 0     2 -1 -1`

(j) Пути на клетчатой бумаге с началом в точке $(0, 0)$, идущие вправо или вверх, не поднимающиеся выше прямой $y = x$, причем единичных шагов вправо должно быть $n - 1$



(k) Последовательности целых чисел $a_1, \ldots, a_n$, такие что $a_1 = 0$ и $0 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i + 1$

`0 0 0     0 0 1     0 1 0     0 1 1     0 1 2`

(l) Последовательности целых чисел $a_1, \ldots, a_{2n}$, такие что $a_1 = 1$, $a_{2n} = 0$ и $|a_i - a_{i+1}| = 1$

`1 2 3 2 1 0     1 2 1 2 1 0     1 2 1 0 1 0`
`1 0 1 2 1 0     1 0 1 0 1 0`

(m) Перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$, у которых длина каждой убывающей подпоследовательности не превышает 2

`1 2 3     2 1 3     1 3 2     3 1 2     2 3 1`

(n) Перестановки чисел $1, 2, \ldots, 2n$, такие что все четные числа встречаются в порядке возрастания, все нечетные числа встречаются в порядке возрастания и для каждого k число $2k - 1$ встречается раньше, чем $2k$

`1 2 3 4 5 6     1 2 3 5 4 6     1 3 2 4 5 6`
`1 3 2 5 4 6     1 3 5 2 4 6`

(o) Способы разбить все натуральные числа от 1 до n на несколько *незацепленных* групп (нельзя при $a < b < c < d$ отнести a и c к одной группе, а b и d — к другой)

`123     12-3     13-2     23-1     1-2-3`

(p) Способы разбить все натуральные числа от 1 до $2n+1$ на $n+1$ незацепленных групп, ни одна из которых не содержит двух последовательных чисел

`137-46-2-5     1357-2-4-6     157-24-3-6`
`17-246-3-5     17-26-35-4`

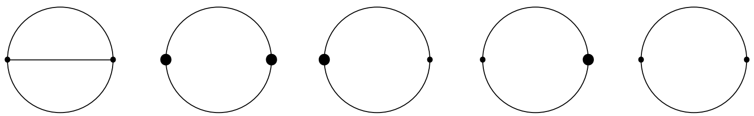
Определение. Стандартная n–таблица Юнга — это таблица с невозрастающими длинами строк, заполненная числами $1, \ldots, n$ (каждое встречается один раз), причем числа в строках и столбцах возрастают. Форма таблицы — это набор ее строк, перечисленных в порядке убывания. Примеры стандартных 6-таблиц Юнга (форм (3,2,1), (4,2), (2,2,2) соответственно):

1	2	3		1	2	4	5	1	2
4	5			3	6			3	5
6								4	6

(q) Стандартные $(2n)$–таблицы Юнга формы (n, n)

1 2 3	1 2 4	1 3 4	1 2 5	1 3 5
4 5 6	3 5 6	2 5 6	3 4 6	2 4 6

(r) Способы соединить некоторые из $n-1$ точек на окружности непересекающимися хордами и объявить некоторые из оставшихся точек отмеченными



(s) Наборы из n целых чисел от 0 до n, сумма которых делится на $n+1$ (числа могут повторяться, порядок чисел в наборе не важен[3])

0 0 0 0 1 3 0 2 2 1 1 2 2 3 3

(t) Последовательности натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$ $(a_k \geqslant 2)$, такие что в строке

$$1,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ 1$$

любое a_i является делителем суммы двух соседей

4 3 2 3 5 2 3 2 3 2 5 3 2 3 4

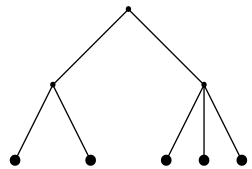
(u) Последовательности целых чисел $a_1, \ldots, a_n$, такие что a_i равно количеству $j < i$, для которых $a_j < a_i$

0 0 0 0 0 2 0 1 0 0 1 1 0 1 2

[3]Такие наборы часто называют *мультимножествами.*

(v) Вершины на уровне $n-1$ у дерева, определяемого (по индукции) так:

- У корневой вершины (единственной вершины на уровне 0) два сына
- Если у вершины (на уровне q) k сыновей, то у ее сыновей (на уровне $q+1$) $2, 3, \ldots, k+1$ сыновей соответственно



(w) Последовательности целых чисел $a_1, \ldots, a_n$, где $0 \leqslant a_i \leqslant n-i$ и если для пары индексов $i < j$, таких что $a_i > 0$, $a_j > 0$, все промежуточные члены последовательности равны нулю $(a_{i+1} = \ldots = a_{j-1} = 0)$, то $a_i + i < a_j + j$

0 0 0 0 1 0 1 0 0 2 0 0 1 1 0

(x) Последовательности целых чисел $a_1, \ldots, a_n$, где $1 \leqslant a_i \leqslant i$ и если $a_i = j$, то $a_{i-p} \leqslant j - p$ при $1 \leqslant p \leqslant j-1$

1 1 1 1 1 2 1 1 3 1 2 1 1 2 3

(y) Перестановки $a_1, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, такие что не существует $i < j < k$, с $a_j < a_k < a_i$ (312-*избегающие* перестановки)

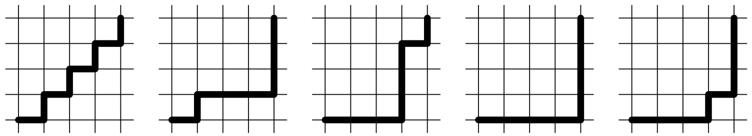
1 2 3 1 3 2 2 1 3 2 3 1 3 2 1

(z) Пары (P, Q) стандартных n-таблиц Юнга одинаковой формы с не более чем двумя строками

1 2 3 1 2 3

1 2	1 2	1 2	1 3	1 3	1 2	1 3	1 3
3	3	3	2	2	3	2	2

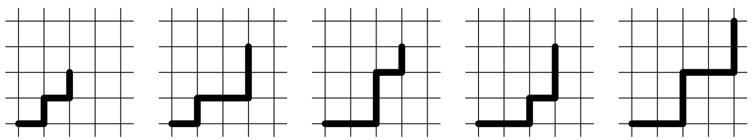
$(\hbar)$ Пути на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку $(n+1,n+1)$, удовлетворяющие условию задачи $2c_1$ и такие, что никакая горизонтальная сторона не заканчивается на прямой $y=x-2$



$(\wp)$ Способы выбрать число k и разбить числа $1, 2, \ldots, k$ на $n+1$ незацепленных групп так, что любые два числа из одной группы различаются по крайней мере на 3

`1-2-3-4`　`14-2-3-5`　`15-2-3-4`　`25-1-3-4`
`16-25-3-4`

$(\mathring{v})$ Пути на клетчатой бумаге с началом в точке $(0,0)$, идущие лишь вверх или вправо, не поднимающиеся выше прямой $y=x$ и заканчивающиеся на этой прямой, с $n-1$ фрагментами "вправо–вверх" и без трех последовательных шагов в одном направлении



4. Докажите (по возможности построив биекцию), что в множестве всех путей на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку $(2n,2n)$, идущих лишь вверх или вправо и не проходящих через точки вида $(2k-1,2k-1)$, ровно c_{2n} элементов.

5. Докажите, что если существует способ разбить числа $1, 2, \ldots, k$ на $n+1$ незацепленных групп, ни одна из которых не содержит двух последовательных чисел,[4] то $k \leqslant 2n+1$.

[4] Как в 3(р).

Определение. Числа Нараяны $N_{n,k}$ определяются формулой

$$N_{n,k} = \frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}.$$

6. Докажите, что количество последовательностей из задачи $2c_2$, в которых фрагмент '`1 -1`' встречается ровно k раз, состоит из $N_{n,k}$ элементов.

7. Из предыдущей задачи ясно, что для каждого n

$$\frac{1}{n}\binom{n}{1}\binom{n}{0} + \frac{1}{n}\binom{n}{2}\binom{n}{1} + \ldots + \frac{1}{n}\binom{n}{n}\binom{n}{n-1} = c_n.$$

Выведите из построенных биекций еще какие-нибудь тождества про числа $\binom{n}{k}$, c_n, …

Решения задач про числа Каталана и естественные отображения

Содержание.

Явная формула

1. (Эйлер) Получим еще одно рекуррентное соотношение для чисел c_n. (В качестве интерпретации удобно выбрать количество триангуляций.) Рассмотрим множество пар $\langle$триангуляция, диагональ из этой триангуляции$\rangle$. Ясно, что в этом множестве $c_n \cdot (n-1)$ элементов. С другой стороны, есть ровно $n+2$ диагонали, отсекающие от нашего многоугольника $(i+2)$-угольник. Для такой диагонали существует $c_i c_{n-i}$ триангуляций ее содержащих. При этом каждая пара посчитана дважды (для $i+2$-угольника и для $(n-i+2)$-угольника). Отсюда

$$(n-1)c_n = (n+2)(c_1c_{n-1} + c_2c_{n-2} + \ldots + c_{n-1}c_1)/2.$$

Легко видеть, что

$$c_1c_{n-1} + \ldots + c_{n-1}c_1 = c_{n+1} - 2c_n,$$

поэтому $(n-1)c_n = (n+2)(c_{n+1} - 2c_n)/2$ и $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2(2n+1)}{n+2}$, откуда немедленно следует явная формула.

Это решение не является ни наиболее коротким из известных, ни наиболее "естественным". Решение, основанное на так называемом "принципе отражений", можно найти в [1]; решение, использующее "лемму Рени", приведено ниже. В работе [EK][5] явная формула доказана по индукции с использованием рекуррентного соотношения (легко получаемого из интерпретации 2(c_2))

$$c_n + \binom{1}{1}c_{n-1} + \binom{3}{2}c_{n-2} + \ldots + \binom{2n-1}{n}c_0 = \binom{2n}{n}.$$

Отображения

Ниже приводятся несколько отображений. Большинство из них довольно "естественные"; более того, они оказываются биекциями. (Как правило, доказательства оставлены читателю.)

Несколько наивных биекций

$2c_1 \to 2c_2$ Очевидно.

$2d \to 2c_2$ Зафиксируем вершину v. Начнем двигаться из нее по часовой стрелке, записывая в каждой вершине единицу, если мы встречаем выходящую из нее хорду впервые, и минус единицу в противном случае.

$2c_2 \to 3l$ Вычислим все частичные суммы.

$2c_2 \to 3n$ Заменим k-ю по счету единицу на число $2k-1$, а k-ю минус единицу — на число $2k$.

$3e_1 \to 3e_2$ Очевидность здесь слегка хлипкая: ясно, что есть шанс, что ограничение композиции отображений $3c \to 2c_2 \to 2c_1$ на

[5] Расшифровку обозначений для команд, образованных участниками Конференции при решении задач этого цикла, см. в разделе "Как появился этот текст?".

рассматриваемые деревья может подойти. После построения той из этих двух биекций, что пока не описана, так и выйдет.

$3k \to 3i_1$ Вычислим разности: $a_i \mapsto a_{i+1} - a_i$.

$3k \to 3i_2$ Тоже несложно:

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_n, a_{n-1} - a_n, a_{n-2} - a_{n-1}, \ldots, a_2 - a_1)\,.$$

$3j \to 2c_1$ Добавим в конец пути одно горизонтальное ребро и необходимое количество вертикальных, чтобы попасть в точку (n, n).

$3f \to 3j$ Заменим каждый шаг по диагонали на шаг вправо.

Классические биекции с деревьями

Начнем с нескольких стандартных определений. Рассмотрим дерево T и его вершины v и w. Будем говорить, что v — *брат* w, если они являются сыновьями одной и той же вершины. *Алгоритмом поиска глубины один* $DFS(T)$, применяемым к (плоскому) дереву T назовем выбор пути (последовательности вершин) в дереве T, начинающегося и заканчивающегося в корневой вершине, причем обход (порядок вершин в последовательности) происходит по следующим правилам:

- Если T состоит из одной вершины, то обход прекращается.
- Пусть v — самый левый сын корневой вершины (соединенный с ней ребром e), T_v — поддерево с корнем v. Тогда пройдем в v [по ребру e], выполним $DFS(T_v)$, затем поднимемся в корень по ребру e и применим DFS к дереву, полученному удалением из дерева T поддерева T_v (вместе с ребром e).

Стандартной нумерацией вершин дерева назовем их нумерацию в порядке первого появления при выполнении алгоритма DFS.

$3b \to 2b$ Двигаясь слева направо по листьям дерева, расставим на них метки — буквы, которые мы хотим перемножить. Каждую вершину, сыновья которой уже помечены, будем помечать произведением меток ее сыновей. Метка корня дерева будет соответствовать способу расстановки скобок.

$3b \to 2c_2$ Будем выполнять алгоритм DFS, записывая единицу при первом проходе по каждому левому ребру и минус единицу при первом проходе по каждому правому ребру.

$3c \to 2c_2$ Будем выполнять алгоритм DFS, записывая единицу при каждом проходе вниз по ребру, и минус единицу при каждом проходе вверх по ребру.

$3b \to 3a$ Сотрем все листья (вместе с идущими в них ребрами).

$2a \to 3a$ Выберем произвольную сторону l многоугольника. Построим дерево, вершины которого соответствуют треугольникам триангуляции (причем корень соответствует треугольнику со стороной l), а две вершины соединены ребром, если соответствующие треугольники имеют общую сторону.

$3c \to 2d$ Фиксируем одну из $2n$ “коротких” дуг ω. Вершинами дерева будут области, на которые круг разбит хордами, корнем — та из областей, у которой ω — часть границы. Две вершины соединены, если соответствующие области граничат.

$3b \to 3c$ Склеим вершины v и w (удалив соединяющее их ребро), если v является правым сыном w.

$3e_2 \to 3c$ Склеим корневую вершину с самым левым ее сыном (удалив соединяющее их ребро).

Триангуляции, скобочные структуры и таблицы Юнга

$2a \to 2b$ Пусть l — произвольная сторона многоугольника. Двигаясь от l против часовой стрелки, расставим на всех сторонах многоугольника, кроме l, метки — буквы, которые мы хотим перемножать. Для данной триангуляции найдем треугольник ABC, на сторонах AB и BC которого стоят метки p и q соответственно. Удалим этот треугольник, а на стороне CA поставим метку (pq). Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока на стороне l не появится метка. Эта метка и есть соответствующий способ расстановки скобок.

Замечание. Классическая биекция с $3b$, являющаяся и композицией отображений $3b \to 3a \to 2a$, и композицией отображений $3b \to 2b \to 2a$, приведена в книжке [4], которая выдавалась в подарок участникам Конференции.

$2b \to 2c_2$ Приведем сразу два отображения.

Менее Научное Отображение: сотрем все правые скобки и заменим каждую левую скобку на единицу, а каждую букву (кроме последней) — на минус единицу.

Более Научное Отображение: заменим каждый знак умножения на единицу, а каждую правую скобку на минус единицу. (Это соответствует выполнению умножений на “стековом калькуляторе”.)

Упражнение. Композиция первого из этих отображений и обратного ко второму (или наоборот) дает некоторое отображение, переставляющее объекты одной и той же интерпретации. Для каких интерпретаций это отображение допускает “естественное” описание?

$2a \to 2c_2 \to 3q$ Построим целую серию биекций. Обозначим через $A_{n,k}$ множество способов провести k непересекающихся диагоналей в $(n+2)$-угольнике. Обозначим через $B_{n,k}$ множество стандартных $(n+k+1)$-таблиц Юнга формы $(k+1, k+1, 1^{n-1-k})$ (где 1^{n-1-k} символизирует единицу, повторенную $n-1-k$ раз). Наконец, обозначим через $C_{n,k}$ множество последовательностей целых чисел $a_1, \ldots, a_{n+k+1}$, таких что

- каждый из членов последовательности либо равен минус единице, либо положителен;
- количество минус единиц равно n;
- все частичные суммы неотрицательны, а сумма всех членов последовательности равна нулю.

Мы построим биекции $A_{n,k} \to B_{n,k} \to C_{n,k}$. (Заметим, что множества с параметром k, равным $n-1$, совпадают с множествами, перечисленными в заголовке этого фрагмента.)

$A_{n,k} \to B_{n,k}$ Сотрем нижнюю сторону многоугольника. В результате образуются отдельные отрезки и многоугольники, в которых проведены диагонали. Пусть всего тех и других m штук. Можно считать, что им уже сопоставлены некоторые последовательности (отрезку сопоставляем пустую последовательность). Построим последовательность так: запишем число $m-1$, после чего обойдем получившиеся многоугольники и отрезки по часовой стрелке, записывая для каждого сопоставленную ему последовательность и ставя после нее минус единицу. Закончив это, уберем последнюю минус единицу.

$B_{n,k} \to C_{n,k}$ Обозначим через $b_1, \ldots, b_{d+1}$ подпоследовательность всех положительных членов нашей последовательности. Теперь для каждого числа i от единицы до $n+d+1$ выполним следующее предписание:

- Если $a_i \geqslant 1$, дописываем число i в первую строку таблицы.
- Если $a_i = -1$ и при этом число минус единиц с меньшими номерами равно некоторой частичной сумме последовательности $b_1, \ldots, b_{d+1}$, дописываем число i во вторую строку таблицы.
- Иначе дописываем число i в первый столбец (начиная с третьей строки).

Упражнение. Изучите, как устроено последнее отображение при $k = n-1$. Очень просто, не правда ли?

Упражнение. Докажите, что число элементов в множестве $A_{n,k}$ равно $\frac{1}{n+k+2}\binom{n+k+2}{k+1}\binom{n-1}{k}$.

$3q \to 3z$ Рассмотрим таблицу из задачи $3q$. Вычеркнув из нее числа от $n+1$ до $2n$, получим первую таблицу из задачи $3z$. Если вычеркнуть, наоборот, числа от 1 до n, повернуть таблицу на $180°$, и заменить каждое число i на $2n+1-i$, то получим вторую таблицу.

Замечание. С помощью принципа отражений (см. [1]) и биекции с путями, аналогичной $3q \to 2c_1$, можно доказать, что количество стандартных таблиц формы $(n-k, k)$ равно $c_{n,k} = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$. Числа $c_{n,k}$ образуют *треугольник Каталана*, который многим похож на треугольник Паскаля и последнее время нередко встречается в математических сюжетах. Некоторые тождества из приводимого ниже решения задачи 7 естественно выписывать именно в терминах этого треугольника.

Перестановки, избегающие данную: теорема Дилуорса, RSK и все такое

$3m \to 2c_1$ Рассмотрим перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обозначим через b_i количество чисел $a_j < a_i$, таких что $j > i$. Пусть $p_1 < < p_2 < \ldots < p_k$ — это все такие p, что $b_p \neq 0$. Построим путь на клетчатой бумаге следующим образом: двигаемся направо в точку $(b_{p_1} + p_1 - 1, 0)$, затем наверх в точку $(b_{p_1} + p_1 - 1, p_1)$, затем направо в точку $(b_{p_2}+p_2-1,p_1)$, затем вверх в точку $(b_{p_2}+p_2-1,p_2)$ и т. д. Окончание этого пути выглядит так: из точки $(b_{p_k}+p_k-1,p_{k-1})$ вверх до точки $(b_{p_k}+p_k-1,p_k)$, затем направо в точку (n,p_k) и, наконец, наверх в точку (n,n).

Замечание. На самом деле описанное отображение является композицией отображений $3m \to 3w \to 2c_1$, где первое отображение есть $a_1,\dots,a_n \mapsto b_1,\dots,b_n$. Хотя это отображение — способ получить из любой перестановки последовательность $b_1, \dots, b_n$ с $0 \leqslant b_i \leqslant n-i$ ("код перестановки") — было описано при представлении задач, некоторые участники ([ГК],[П],[Т]) предпочли решать задачу $3m$ другим, более простым способом. Они предложили следующее отображение $3m \to 3h$:

$$a_1,\dots,a_n \mapsto a'_1,\dots,a'_n,$$

где $a'_k = \min\limits_{i\geqslant k} a_k$. Это отображение имеет смысл для любой перестановки, но оказывается, что если так кодировалась перестановка описанного в задаче вида, то ее можно восстановить однозначно. Причина этого кроется в теореме Дилуорса: в частично упорядоченном множестве длина максимальной *антицепи* (куска из попарно несравнимых элементов) равна числу *цепей* (кусков из попарно сравнимых элементов). Перестановка индуцирует частичный порядок на числах от 1 до n: $a \prec b$, если $a<b$ и a стоит правее b в перестановке. Изучаемые перестановки суть те, для которых в соответствующем частично упорядоченном множестве нет антицепей длины три. Из теоремы Дилуорса следует, что такую перестановку можно разбить на не более чем две возрастающие подпоследовательности. После этого уже легко построить обратное отображение.

Замечание. Наметим построение биекции $3m \to 3z$. Для этого удобно описать несколько более общую биекцию: алгоритм Робинсона–Шенстеда–Кнута, сопоставляющий перестановке чисел $1,\dots,n$ пару стандартных n-таблиц Юнга одинаковой формы. При этом оказывается, что количество строк в соответствующей диаграмме Юнга равно наибольшей из длин убывающих подпоследовательностей, что нам и требуется.

Будем читать нашу перестановку слева направо, корректируя таблицы. Инвариант: на l-м шаге есть две таблицы одинаковой формы, причем если занумеровать первые l чисел в перестановке в порядке возрастания числами от единицы до l, то алгоритм изготовит как раз имеющуюся у нас пару таблиц. Опишем способ найти в первой таблице место для очередного числа a_k ("процедура выпихивания"). Если оно больше всех чисел первой строки таблицы, запишем его в конец этой строки. В противном случае найдем первое число a, которого оно меньше, запишем число a_k на его место и применим процедуру выпихивания к оставшейся части таблицы (без первой строки) для поиска места числу a.

Построение второй таблицы значительно проще. Просто в каждую клеточку надо вписать номер шага, на котором она появилась.

Упражнение. Постройте обратное отображение и докажите свойство этой биекции, анонсированное выше.

$3m \to 3v$ Построим дерево T_0 следующим образом. Вершины уровня $n-1$ соответствуют перестановкам из задачи $3m$. Две вершины (на j-м и $j+1$-м) соединены ребром, если первая из соответствующих перестановок является подпоследовательностью второй (т. е. получается выбрасыванием числа $j+2$). Тогда T_0 совпадает с деревом из задачи $3v$.

$3y \to 2b$ Определим алгоритм *стековой сортировки* (SS) последовательности A:

- $SS(\varnothing)=\varnothing$
- $SS(A_1xA_2)=xSS(A_1)SS(A_2)$, если x — наименьший элемент в последовательности A_1xA_2

Перестановку A (рассматриваемую как последовательность) назовем *поддающейся сортировке*, если $SS(A)=1,2,\dots,n$. Тогда 312-избегающие перестановки оказываются поддающимися сортировке, и наоборот. Изоморфизм же стековой сортировки с выполнением умножений очевиден.

Замечание. Отметим, что для любой перестановки σ чисел 1, 2, 3 множество σ-избегающих перестановок чисел 1, …, n состоит из c_n элементов. Действительно, отображение

$$a_1,\dots,a_n \mapsto a_n,\dots,a_1$$

отождествляет 123-избегающие перестановки с 321-избегающими, 213-избегающие — с 312-избегающими, а 231-избегающие — с 132-избегающими. А отображение

$$a_1, \ldots, a_n \mapsto n+1-a_n, \ldots, n+1-a_1$$

отождествляет 213-избегающие перестановки с 132-избегающими, а 231-избегающие — с 312-избегающими. Наконец, композицией наших биекций можно отждествить 123-избегающие перестановки с 312-избегающими. Если σ — перестановка четырех элементов, то такого эффекта уже не наблюдается. Например, отношение количества 2143-избегающих перестановок чисел 1, …, n к количеству 1234-избегающих перестановок стремится к нулю при $n \to \infty$ (это не очень просто доказать…).

$3y \to 3x$ Последовательности $a_n - 1, \ldots, a_1 - 1$ — это просто коды 312-избегающих перестановок из задачи $3y$.

Разбиения на группы: метод "инструкций сверху"

Этот раздел посвящен изложению идей работы [П].

$3c_2 \to 3\wp$ Заменим в последовательности из $2c_2$ все фрагменты '`1 -1`' на '`0`' (одновременно). Получившаяся последовательность из единиц, минус единиц и нулей обладает следующими свойствами:
— количество единиц равно количеству минус единиц;
— общее количество единиц и нулей равно n;
— все частичные суммы неотрицательны;
— отсутствуют фрагменты '`1 -1`'.
(Приведенное отображение — биекция между множеством из задачи $2c_2$ и множеством таких последовательностей.)

Объясним, как построить из такой последовательности разбиение из задачи $3\wp$. Сначала откроем новую группу (здесь и далее 'откроем' означает 'создадим', 'закроем' — 'перестанем добавлять элементы'; группа, открытая последней и еще не закрытая, называется текущей) и запишем в эту группу 1. Далее будем действовать так. Рассмотрим очередной элемент a_i.

- Если $a_i = 0$, закроем текущую группу и откроем новую группу с первым элементом $i+1$.

- Если $a_i = 1$, откроем новую группу с первым элементом $i+1$.
- Если $a_i = -1$, закроем текущую группу и запишем $i+1$ в ту группу, которая стала текущей.

Это решение интересно тем, что идея сопоставления последовательности процесса построения разбиения на группы может быть прекрасно реализована в каждой из предложенных задач о разбиениях на группы. Для полноты картины приведем соответствующие отображения для задач $3o$ и $3p$. Для задачи $3o$ возьмем в качестве управляющей последовательности последовательность из задачи $2c_2$ без малейших изменений. Рассмотрим очередной элемент a_i.

- Если $a_i = 1$ и i нечетно, то откроем новую группу (пока не помещая туда ничего).
- Если $a_i = 1$ и i четно, то положим в текущую группу $i/2$.
- Если $a_i = -1$ и i нечетно, то ничего не делать.
- Если $a_i = -1$ и i четно, то положим в текущую группу $i/2$ и закроем эту группу.

В случае задачи $3p$ заменим последовательность $a_1, \ldots, a_{2n}$ из задачи $2c_2$ на последовательность длины $4n+2$:

$$b_1 = 1, \quad b_{2k} = b_{2k+1} = a_k, \quad b_{4n+2} = -1$$

и будем выполнять инструкции, описанные выше.

Разбиения на группы: биекции с хордовыми диаграммами

Отображения из этого раздела предложены в работе [Т]. Здесь тоже налицо преимущество единообразности подхода.

$3r \to 3o$ Разрежем окружность в произвольной точке, не совпадающей ни с одной из данных, и развернем ее в отрезок. Хорды станут дугами, расположенными в одной полуплоскости. Они разбивают эту полуплоскость на несколько частей. Отрезок разбит концами дуг и отмеченными точками на n отрезков. Разбивка этих отрезков на группы осуществляется так: то, в какую часть полуплоскости, определяемую проведенными дугами, попал отрезок, дает “первичную разбивку” (два отрезка из разных частей полуплоскости заведомо в разных группах), а отмеченные точки определяют окончательную разбивку (два отрезка в одной части полуплоскости в одной группе, если между ними нет отмеченных точек). Незацепленность групп очевидна.

$2d \to 3p$ Проделаем ту же операцию, что и выше. Здесь отрезков получится как раз $2n+1$ а “первичная разбивка” является окончательной. Выполнение нужных условий очевидно.

$2d \to 3\wp$ Для каждой пары соседних точек, соединенных хордой, стянем дугу, соединяющую эти точки, в одну отмеченную точку, получив конфигурацию из задачи $3r$ (для некоторого количества точек). По каждой такой конфигурации построим разбивку на группы, как сказано выше. Выполнение нужных условий очевидно.

Разбиения на группы: древесные вариации

В работе [ГК] для решения задачи 5 была предложена конструкция, которая в качестве побочного продукта дает биекцию $3p \to 3c$. А именно, назовем *выпуклой оболочкой* данной группы множество всех чисел, больших ее наименьшего элемента и меньших наибольшего. Для любой группы A числа, остающиеся после выбрасывания из выпуклой оболочки этой группы всех элементов этой группы, можно единственным образом разбить в объединение непересекающихся выпуклых оболочек некоторых групп $A_1, \ldots, A_{n(A)}$. Теперь построим дерево так: его вершинами будут группы, причем сыновья вершины, соответствующей группе A, — это в точности определенные выше группы $A_1, \ldots, A_{n(A)}$. Корень дерева — это группа, содержащая числа 1 и $2n+1$ (про которые легко доказать, что они в одной группе — см. решение задачи 5).

З а м е ч а н и е. Аналогичное отображение на языке скобочных структур предложено в работе [БС]: нужно выписать числа в строчку и поставить открывающую скобку перед наименьшим числом каждой группы и закрывающую после наибольшего.

У п р а ж н е н и е. Если применить это отображение в других задачах про разбивку на группы, то получится некая древесная структура. Можно ли ее явно описать?

Лемма Рени: явная формула для чисел Нараяны и другие применения

В этом разделе будет доказано классическое утверждение, называемое обычно “лемма Рени”, и объяснено его применение в задачах о путях на клетчатой бумаге. Сходные рассуждения имеются в книгах [1, 3].

У т в е р ж д е н и е. Пусть $a_1, \ldots, a_{2n+1}$ — последовательность единиц и минус единиц, причем сумма ее членов равна единице. Тогда среди ее *циклических сдвигов* (так называются последовательности

$$a_k,\ a_{k+1},\ \ldots,\ a_{2n+1},\ a_1,\ \ldots,\ a_{k-1}$$

найдется ровно один, все частичные суммы которого положительны.

Докажем это. В самом деле, по крайней мере один найдется: достаточно взять сдвиг, при котором первым окажется такое число a_k, что $(k-1)$-я частичная сумма исходной последовательности — наименьшая. (Сравните с известной задачей про кольцевую дорогу и бензоколонки: если суммарного запаса бензина достаточно, чтобы проехать круг, то машина с пустым баком может выбрать бензоколонку, стартовав с которой, она сможет прехать круг. Решение идентично: устроим репетицию автопробега с достаточным запасом горючего, после чего стартуем там, где в баке было меньше всего.) Если же таких сдвигов два, то последовательность можно сложить из двух кусков с положительными суммами, что противоречит условию про общую сумму.

Как применяется это утверждение? Во-первых, можно вывести другим способом явную формулу для чисел Каталана. В самом деле, добавим к последовательности из задачи $2c_2$ единицу в начало. Получим последовательность с положительными частичными суммами, которых, как мы теперь знаем, в $2n+1$ раз меньше, чем всех последовательностей из $n+1$ единиц и n минус единиц (все циклические сдвиги такой последовательности различны, ибо в противном случае числа n и $n+1$ имели бы нетривиальный общий делитель), а таковых ровно $\binom{2n+1}{n}$. Осталось заметить, что $\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Похожее применение этого утверждения позволяет вывести явную формулу для чисел Нараяны из задачи **6**. А именно, пусть последовательность $A = (a_1, \ldots, a_{2n})$ удовлетворяет условиям задачи $2c_2$. Рассмотрим последовательность 1, a_1, …, a_{2n}. Обозначим через b_i количество единиц между $(i-1)$-й и i-й минус единицей $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Лемма Рени показывает, что соответствие $A \leftrightarrow A'$ устанавливает биекцию между множеством последовательностей из задачи $2c_2$ и множеством последовательностей из $n+1$ единиц и n минус единиц с точностью до циклических сдвигов; ясно также, что соответствие $A' \leftrightarrow B$ устанавливает биекцию между последним множеством и множеством последовательностей из n неотрицательных целых чисел с суммой $n+1$ (тоже с точностью до циклических сдвигов). Вновь отсутствие общих делителей у чисел n и $n+1$ гарантирует, что все циклические сдвиги такой последовательности различны. Таким образом, количество этих последовательностей с точностью до сдвигов равно N/n, где N — общее число таких последовательностей. Рассмотрим только пути с k фрагментами ‘`1 -1`’. Для таких последовательностей среди чисел $b_1, \ldots, b_n$ найдется ровно k ненулевых. Итак, поэтому нам нужно подсчитать количество целочисленных последовательностей c_1, …, c_n, где $c_1 + \ldots + c_n = n+1$, $c_i \geqslant 0$ и ровно k элементов отлично от нуля. Это число равно $\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$ (первый множитель отвечает за выбор мест для ненулевых элементов, а второй — за разбиения числа $n+1$ в упорядоченную сумму k ненулевых слагаемых), откуда и получается требуемая формула.

(Другой способ доказательства формулы для чисел Нараяны состоит в получении рекуррентного соотношения на количество рассматриваемых путей. А именно, если обозначить это количество $N'_{n,k}$, то верны равенства

$$N'_{n,1} = 1, \quad N'_{n,n-1} = 1, \quad kN'_{n,k} = (2n-k)N_{n-1,k-1} + kN_{n-1,k}.$$

Первые два равенства очевидны, для доказательства третьего удалите из последовательности всеми способами (их k) фрагмент ‘`1 -1`’. Теперь равенство $N_{n,k} = N'_{n,k}$ легко доказать по индукции.)

Наконец, можно применить лемму Рени для мало-мальски убедительного рассуждения, проясняющего комбинаторный смысл интерпретации чисел Каталана из задачи $3s$. Эта задача имеет особый статус: единственное “биективное” решение, известное мне (на момент написания этого текста — в частности, уже после Конференции), является весьма косвенным. По сути, вся его биективность израсходо-

вана на доказательство того, что число таких наборов равно c_n; хорошей же биекции с другой интерпретацией не видно, поэтому завершается рассуждение весьма расплывчатыми объяснениями. Впрочем, придирчивый читатель может отметить, что в ряде случаев, когда биекция была неявной, — например, когда построение ведется по индукции (а такие биекции встречаются в этом тексте…), — никаких сожалений по этому поводу не встречалось.

Для краткости обозначим через M множество всех рассматриваемых наборов (не указывая явно число n, от которого это множество зависит). Для каждого набора $A = [a_1, \ldots, a_n] \in M$ определим его сдвиги

$$s_i(a) = [(a_1 + i) \bmod (n+1), \ldots, (a_n + i) \bmod (n+1)] \ (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Поскольку сумма элементов в $s_i(a)$ сравнима с $-i$ по модулю $n+1$, мы видим, что каждый набор $[b_1, \ldots, b_n]$, где $0 \leqslant b_i \leqslant n$, либо принадлежит множеству M, либо является сдвигом одного из элементов множества M. Таким образом, мы установили биекцию между $n+1$ копиями множества M и множеством всех наборов $[b_1, \ldots, b_n]$ длины n, где $0 \leqslant b_i \leqslant n$. Поскольку мы рассматривали неупорядоченные наборы, мы можем считать, что $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. С использованием обратного отображения к отображению $2c_1 \to 3h$ мы можем построить путь на клетчатой бумаге из точки $(0,0)$ в точку (n,n) (использующий шаги $(1,0)$ и $(0,1)$), т. е. последовательность из единиц и минус единиц. Как получить теперь последовательность из задачи $2c_2$? Ответ: надо к нашей последовательности дописать единицу и выбрать ее единственный циклический сдвиг с положительными частичными суммами. После этого начальную единицу надо отбросить и объявить, что полученная последовательность из задачи $2c_2$ и есть результат нашей деятельности.

Смесь: бесхозные отображения, комбинаторные тождества и все такое.

$3f \to 2c_1$ ([БС],[П],[Т]) Заменим каждый шаг по диагонали на пару шагов “вверх–вправо” и добавим шаг вправо в начало пути и шаг вверх в конец пути.

$3b \to 3p$ Рассмотрим стандартную нумерацию вершин. Отнесем две вершины к одной группе, если одна из них является правым сыном другой.

$3k \to 2c_2$ Пусть $b_i = a_i - a_{i+1} + 1$ (положим $a_{n+1} = 0$). Заменим a_i на фрагмент '`1 -1`^{b_i}' (где через a^n обозначено a, повторенное n раз).

$3c \to 3i_2$ Будем выполнять алгоритм DFS, записывая при первом проходе через вершину v число, на 1 меньшее числа ее сыновей (для каждой вершины, кроме последней).

$3d \to 2c_2$ Для параллеломино со столбцами высоты $C_1, \ldots, C_k$ обозначим через a_i число (единичных) квадратов в C_i, а через b_i — число строк, пересекающихся и с C_i, и с C_{i+1}. Пусть соответствующая этому параллеломино последовательность состоит из k фрагментов, i-й из которых имеет вид '$\mathtt{1}^{a_i - b_{i-1}+1}$ $\mathtt{-1}^{a_i - b_i + 1}$'. (Мы считаем, что $b_0 = 0$.)

Участники конференции нашли другой способ описать биекцию между этими множествами. Будем рисовать параллеломино следующим образом: первое ребро нижнего пути, первое ребро верхнего пути, второе ребро нижнего пути, второе ребро верхнего пути и т. д., записывая каждый раз для шага вверх (вправо) верхнего пути `1` (`-1`), а для нижнего пути — наоборот. Нарисовав параллеломино, удалим первую единицу и последнюю минус единицу.

$3g \to 2c_2$ Занумеруем точки числами $1, 2, \ldots, n+1$ слева направо. Пусть точка с номером i соединена с a_i точками, номера которых больше, чем i. Рассмотрим последовательность из $n+1$ фрагментов, i-й из которых имеет вид '$\mathtt{1}^{a_i}$ `-1`'.

У п р а ж н е н и е. (Еще одна интерпретация чисел Каталана) Перестановка $a_1, \ldots, a_k$ чисел $1, \ldots, k$ называется *up-down перестановкой*, если $a_k < a_{k-1} > a_{k-2} < \ldots$ Докажите, что множество тех up-down перестановок чисел $1, \ldots, 2n+1$, в которых локальные минимумы (числа на нечетных местах) возрастают (слева направо) и локальные максимумы (числа на четных местах) возрастают, состоит из c_n элементов.

$2c_1 \to 3h$ Рассмотрим путь L на клетчатой бумаге. Пусть очередной член последовательности a_i равен площади фигуры, ограниченной прямыми $y = -1$, $x = i - 1$, $x = i$ и путем L.

$3v \to 3h$ Для данной вершины v рассмотрим единственный путь длины $n-1$ (т. е. проходящий через n вершин $v_1, \ldots, v_n = v$) из корня в вершину v. Обозначим через b_i число сыновей вершины v_i. Положим $a_i = i + 2 - b_i$.

$3v \to 3u$ Пометим корень числом 0, а двух его сыновей — числами 0 и 1. Затем пометим все остальные вершины, руководствуясь следующим правилом. Пусть v — вершина на уровне n, уже помеченная числом j. Пусть братья вершины v, помеченные числами, меньшими j, имеют метки $l_1, \ldots, l_i$. Тогда вершина v имеет $i+2$ сыновей, и мы помечаем их числами $l_1, \ldots, l_i, j, n$. Каждой вершине уровня $n-1$ сопоставим последовательность меток на единственном пути длины $n-1$ из корня в эту вершину.

У п р а ж н е н и е. [6] Докажите, что при таком способе расстановки меток количество вершин на уровне n, помеченных числом j, равно $c_j c_{n-j}$.

З а м е ч а н и е. Для большинства целочисленных последовательностей[7], рассматриваемых в задаче **3**, можно проверить, что при попытке организовать разумный перебор всех объектов данной интерпретации, дерево перебора совпадает с деревом из $3v$. Наиболее последовательно это проверялось в работе [K].

$3t \to 2c_2$ Рассмотрим последовательность $1, a_1, \ldots, a_n, 1$. (Положим $a_0 = a_{n+1} = 1$.) Ясно, что равенство $a_i = a_{i+1}$ никогда не выполняется (иначе все a_j, в том числе единица, должны быть кратными a_i). Поэтому найдется хотя бы одно такое i, что $a_{i-1} < a_i > a_{i+1}$. Поскольку число $a_{i-1} + a_{i+1}$ кратно a_i и меньше, чем $2a_i$, оно должно быть равно a_i. Когда мы удалим из последовательности число a_i, мы получим последовательность на один элемент короче, которая тоже удовлетворяет исходному условию делимости. И наоборот, всякую последовательность можно удлинить, добавив число $a_i + a_{i+1}$ между числами a_i и a_{i+1}. Будем повторять эту операцию (стартовав с последовательности $1, 1$), но при добавлении $a_i + a_{i+1}$ между a_i и a_{i+1} будем вставлять флажок перед a_i и после этого изменять последовательность только справа от последнего флажка. Расположение n флажков полностью определяет последовательность $a_1, \ldots, a_n$

[6] Выполнено в работе [K].

[7] И некоторых других интерпретаций, например, $3r$.

и флажки предшествуют соответствующим числам. Заменим каждый флажок на единицу, а каждое число a_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ — на минус единицу.

$2a \rightarrow 3t$ (Эта материализация рассуждения из предыдущего решения предложена в работе [Т].) Выберем сторону AB данного многоугольника. Пометим вершины A и B числом 1. Рассмотрим некоторую триангуляцию. Если в треугольнике PQR вершины P и Q помечены числами x и y соответственно, пометим вершину R числом $x + y$. Будем действовать таким образом, пока не пометим все вершины. Прочитаем метки по кругу, начиная с вершины A, чтобы получить последовательность из $3t$.

$3r \rightarrow 3i_1$ Выберем произвольную вершину v. Начнем двигаться из нее по часовой стрелке, записывая в каждой вершине

- 1, если она помечена или если она является концом ранее не встречавшейся хорды,
- $-1-p$, если это второй конец некоторой хорды и на стягиваемой этой хордой дуге ω отмечено ровно p точек, не принадлежащих другим дугам, содержащимся в ω,
- 0 иначе.

$3c_2 \rightarrow 3r$ Начнем с одной Очень Полезной Биекции: мы отождествим множество из задачи $3c_2$ с множеством последовательностей длины $n-1$ из чисел ± 2 и "± 0" с неотрицательными частичными суммами. А именно, удалим первую единицу и последнюю минус единицу, разрежем последовательность на куски длины 2 и заменим каждый кусок на сумму чисел в нем. (Чтобы различать '`1 -1`' и '`-1 1`', мы должны иметь нули двух сортов.) Это отображение является биекцией (чтобы убедиться, что частичные суммы неотрицательны, заметим, что частичные суммы с нечетными номерами для последовательности из задачи $2c_2$ положительны). Теперь отметим точки, помеченные нулем "первого сорта", и соединим точки, помеченные числами ± 2, в соответствии с отображением $2d \rightarrow 2c_2$. (С точками, помеченными нулем "второго сорта", ничего делать не нужно.)

$3a \rightarrow 3o$ Указание. Модифицируйте отображение $3b \rightarrow 3p$.

$3p \rightarrow 3o$ ([КЛП]; сравните с предыдущим отображением) Выбросим нечетные числа и поделим четные на 2.

$3u \rightarrow 3o$ ([БС], [КЛП]) Отнесем числа i и j в одну группу, если $a_i = a_j$.

$3u \rightarrow 3h$ ([ГК], [Т]) Переставим числа в неубывающем порядке и прибавим к каждому числу 1.

$3x \rightarrow 3a$ Построим двоичное дерево $T(a_1, \ldots, a_n)$ по следующим правилам. Положим $T(\varnothing) = \varnothing$. Если $n > 0$, определим левое корневое поддерево дерева $T(a_1, \ldots, a_n)$ как $T(a_1, \ldots, a_{n-a_n})$, а правое — как $T(a_{n-a_n+1}, \ldots, a_n)$.

$3x \rightarrow 3u$ (Это замечательно простое[8] отображение взято из работы [БС].)

$$a_1, \ldots, a_n \mapsto 1 - a_1, 2 - a_2, \ldots, n - a_n.$$

$3\hbar \rightarrow 2c_1$ Будем использовать терминологию последовательностей из единиц и минус единиц (вспомните биекцию $2c_1 \rightarrow 2c_2$). Заменим одновременно все пары шагов '`-1 1`', для которых частичная сумма, заканчивающаяся на минус единице, равна нулю, на '`1 -1`' и удалим единицу в начале и минус единицу в конце.

$3\hbar \rightarrow 3e_1$ ([КЛП]) Для каждой горизонтальной стороны четной длины (не менее 4, ибо иначе она заканчивается на прямой $y = x-2$), которая пересекает прямую $y = x-2$ в точке A, найдем предыдущую точку B пересечения нашего пути с прямой $y = x - 2$ и сдвинем часть пути от точки A до точки B, убрав один вертикальный шаг после точки A и добавив один такой шаг до точки B. В результате получится путь без сторон четной длины.

$3c_2 \rightarrow 3\overset{\circ}{v}$ Вспомним Очень Полезную Биекцию, использованную в биекции $3c_2 \rightarrow 3r$. Заменим каждый нуль "первого сорта" на '`1 -1`', каждый нуль "второго сорта" на '`1 1 -1 -1`', каждую двойку на '`1 1 -1`', и каждую минус двойку на '`1 -1 -1`'. Теперь последовательности из единиц и минус единиц отождествим с путями на клетчатой бумаге обычным образом.

Решения задач 4–7

4. Определим по пути L (который мы обычным образом отождествляем с последовательностью из единиц и минус единиц) новый путь следующим образом:

[8] Особенно разителен контраст со сложностью формулировки.

- $s(\varnothing) = \varnothing$
- $s(L_1X) = L_1s(X)$
- $s(\bar{L}_1X) = \mathtt{1}s(X)\mathtt{-1}L_1^*$,

где L_1 — это путь положительной длины с концами на диагонали, все остальные точки которого лежат строго ниже диагонали, $\bar{L}_1$ — путь, полученный из L_1 заменой $\mathtt{1} \leftrightarrow \mathtt{-1}$, L_1^* — это L_1 без первой единицы и последней минус единицы, X — произвольный путь. Тогда отображение s устанавливает биекцию между рассматриваемыми путями и путями из задачи $2c_1$ (где число n заменено на $2n$).

5. (Такой план предложен в работе [K]) Указание. Обозначим через A_n и B_n соответственно утверждения "Для $k = 2n+1$ первое и последнее число принадлежат одной группе" и "Не существует разбиения чисел $1, 2, \ldots, 2n+2$ на $n+1$ группу, удовлетворяющего нашим условиям". (Утверждение задачи следует из B_n.) А дальше по индукции:

$$A_1 \Rightarrow B_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \ldots$$

7. Приведем несколько тождеств. Из задачи $3r$ можно извлечь тождество Тушара[9]

$$\sum_{k \leqslant n/2} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} c_k = c_{n+1}.$$

Соответствие RSK объясняет, что верно тождество

$$\sum_{k \leqslant n/2} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}\right)^2 = c_n.$$

Из задачи $3j$ можно получить (очевидное) тождество

$$\sum_{k \leqslant n-1} \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-1}{k-1} = c_n.$$

[9] Оно было известно уже в 20-е годы XX века, биективное доказательство было получено Л. Шапиро в середине 70-х годов.

Замечание. Приведем здесь еще одну материализацию тождества Тушара. Рассмотрим последовательности длины n из чисел 0, 1, 2, причем k-я частичная сумма не меньше k для любого натурального числа k от единицы до $n-1$ и сумма всех членов последовательности равна n. Построим мультимножество, в котором каждая такая последовательность встречается с кратностью, равной 2^{N_1}, где N_1 — количество единиц в ней. Тогда количество элементов в этом мультимножестве равно n-му числу Каталана. Легко построить биекцию между этой интерпретацией и интерпретациями $2c_2$, $3r$. Кроме того, очевидное рекуррентное соотношение дает тождество Тушара.

Как появился этот текст?

Этот цикл задач был подготовлен специально для 14-й Летней Конференции Турнира Городов (Белорецк, август 2002 г.). Я благодарен С. Дориченко, пригласившему меня в жюри Конференции и предложившему составить цикл задач для возможного использования на Конференции.

Изначально задач было меньше: считалось, что вряд ли участники Летней Конференции Турнира Городов успеют больше за неделю. Тем более ситуация не очень привычна, — происходит движение не вглубь, а вширь: мало задач, связанных цепочкой следствий. Однако те участники Конференции, кого заинтересовал этот сюжет, стали решать задачи очень бодро, придумывая при этом иногда более естественные и внятно описываемые биекции, чем известные автору. Как следствие этого, к промежуточному финишу пришлось дополнить список интерпретаций чисел Каталана. К окончательному финишу некоторые участники построили биекции, композициями которых можно получить биекцию между любыми двумя интерпретациями. Тексты решений во многом основаны на работах участников Конференции. В большинстве случаев это специально оговорено, причем использованы следующие обозначения:

[БС] Дмитрий Бугаев (Омск), Иван Семушин (Киров)

[ГК] Сергей Гайфуллин (Жуковский), Каринэ Куюмжиян (Ростов-на-Дону)

[ЕК] Георгий Есебуа, Антон Ковтун (Харьков)

[К] Андрей Каменов (Москва)

[КЛП] Алексей(?) Кислицын, Евгений Лазарев, Артем Помелов (Киров)

[П] Евгений Поршнев (Москва)

[Т] Роман Травкин (Липецк)

Я благодарен всем этим участникам Конференции: не видя, что этот сюжет может вызвать такой интерес, я вряд ли стал бы заниматься написанием такого текста.

Библиографические указания

Все интерпретации чисел Каталана из задачи 3 были известны и ранее. Как выяснилось, все они содержатся либо во втором томе [3] (пока не переведенном на русский язык), либо в приложении к этому тому “Catalan Addendum” (пока, насколько я знаю, не опубликованном даже в оригинале). Ссылки на web-страницы, где содержатся английские тексты этих и других текстов про числа Каталана, имеются, например, в замечательной электронной энциклопедии целочисленных последовательностей Нила Слоуна [2]. В книге [1], содержащей огромное количество захватывающих комбинаторных сюжетов, про числа Каталана написано на удивление мало. Впрочем, там можно прочитать про обобщение леммы Рени, связанное с p-деревьями (очевидным обобщением строго двоичных деревьев) и применение производящих функций к выводу явной формулы для чисел Каталана.

Список литературы

[1] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. Конкретная математика.

[2] N. Sloane. On-line encyclopedia of integer sequences. `www.research.att.com/~njas/sequences`

[3] Р. Стенли. Перечислительная комбинаторика.

[4] Студенческие чтения МК НМУ. Выпуск 2.