Задачи о метрических компактах

В. В. Доценко

Формулировки приведенных здесь задач весьма похожи, да и в решениях много общего: идея состоит в том, чтобы изучать орбиту точки при итерациях данного отображения. В каждой из задач (K, ρ) — компактное метрическое пространство.

Задача 1. Если отображение $f\colon K \to K$ не уменьшает расстояния[1)], то оно является изометрией.

Задача 2 (задача 4.9 из задачника «Математического просвещения», №4, с. 217). Если сюръекция $f\colon K \to K$ не увеличивает расстояния, то она является изометрией.

Задача 3. Изометричное отображение $f\colon K \to K$ является биекцией.

Решение задачи 1. Фиксируем точки $x, y \in K$ и рассмотрим последовательность $\{(f^k x, f^k y)\}$ точек компакта $K \times K$. Выберем сходящуюся подпоследовательность $S = \{(f^{k_i} x, f^{k_i} y)\}$. У такой последовательности последовательность первых координат является сходящейся, поэтому $\lim\limits_{j>i\to\infty} \rho(f^{k_i} x, f^{k_j} x) = 0$, и тем более $\lim\limits_{j>i\to\infty} \rho(x, f^{k_j - k_i} x) = 0$ (раз отображение f не уменьшает расстояния). То же самое верно и для вторых координат. Поэтому точка (x, y) является предельной для последовательности S. Если бы оказалось, что верно неравенство $\rho(fx, fy) - \rho(x, y) > \varepsilon$, то при любом натуральном k было бы верно неравенство $\rho(f^k x, f^k y) - \rho(x, y) > \varepsilon$. Поскольку расстояние — непрерывная функция, то это противоречит тому, что (x, y) — предельная точка. Значит, все расстояния сохраняются, что и требовалось.

Решение задачи 2. Фиксируем положительное число ε и рассмотрим какую-либо конечную ε-сеть[2)] S. (Конечная ε-сеть существует в силу компактности.) Заметим, что для любого натурального числа k множество $f^k S$ будет ε-сетью (раз отображение f не увеличивает расстояния). Рассмотрим величины $A_k = \sum_{x,y \in S} \rho(f^k x, f^k y)$. Последовательность $\{A_k\}$

[1)] Т. е. $\forall x, y \in K \quad \rho(fx, fy) \geqslant \rho(x, y)$.

[2)] Подмножество S в метрическом пространстве (M, ρ) называется ε-сетью, если для любой точки $m \in M$ найдется точка $s \in S$, такая что $\rho(m, s) \leqslant \varepsilon$.

монотонна, рассмотрим ее точную нижнюю грань A. Пусть натуральное число k таково, что $A_k - A < \varepsilon$. Докажем, что расстояние между любыми двумя точками $a, b \in K$ не могло измениться (уменьшиться) более, чем на 5ε. В самом деле, найдем точки $\bar{a}, \bar{b} \in f^k S$: $\rho(a, \bar{a}) \leqslant \varepsilon$, $\rho(b, \bar{b}) \leqslant \varepsilon$. Тогда (используем неравенства типа $\rho(f\bar{a}, f\bar{b}) \leqslant \rho(f\bar{a}, fa) + \rho(fa, fb) + \rho(fb, f\bar{b})$, означающие, что сумма трех сторон четырехугольника не меньше четвертой) $\rho(a, b) - \rho(fa, fb) \leqslant \rho(a, \bar{a}) + \rho(b, \bar{b}) + \big(\rho(\bar{a}, \bar{b}) - \rho(f\bar{a}, f\bar{b})\big) + \rho(f\bar{a}, fa) + {} + \rho(f\bar{b}, fb) \leqslant 5\varepsilon$. Поскольку действительное число $\varepsilon > 0$ произвольно, то все расстояния сохраняются, что и требовалось.

Решение задачи 3. Докажем, что отображение f сюръективно (инъективность очевидна). Фиксируем точку $x \in K$. Выделим сходящуюся подпоследовательность из последовательности $\{f^k x\}$, пусть это последовательность $\{f^{k_i} x\}$. Для такой последовательности $\lim\limits_{j>i\to\infty} \rho(f^{k_i} x, f^{k_j} x) = {} = 0$, поэтому из изометричности f следует, что и $\lim\limits_{j>i\to\infty} \rho(x, f^{k_j - k_i} x) = 0$, т. е. x — предельная точка множества fK. Но изометрия — непрерывное отображение, а непрерывный образ компакта — компакт, значит, $x \in fK$, что и требовалось.

Замечание. Компактность в каждом из случаев играет ключевую роль. Если пространство некомпактно (пусть даже полно), то легко придумать контрпримеры: гомотетии на прямой опровергают первые два утверждения, параллельный перенос на луче $[0, \infty)$ — третье. (Впрочем, третье утверждение верно, если, к примеру, K — арифметическое евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, поскольку все изометрии в этом случае можно перечислить: это суть композиции не более чем $n+1$ симметрий относительно гиперплоскостей.)