UNIVERSITÉ PARIS 13 — Institut Galilée
« U.F.R DE MATHÉMATIQUES »

T H È S E

pour obtenir

le grade de Docteur
de l'Université Paris 13
Spécialité : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement par

Adriano MARMORA
le 26 juin 2006

Constantes locales p-adiques

Directeur de thèse
Ahmed ABBES

Jury

M. Ahmed ABBES	directeur de thèse
M. Pierre BERTHELOT	rapporteur
M. Bruno CHIARELLOTTO	
M. Luc ILLUSIE	
M. William MESSING	
M. Jacques TILOUINE	

Autre rapporteur
M. Nobuo TSUZUKI

À la mémoire du Professeur V. Cristante

Remerciements

Je souhaite remercier, avant tout, mon directeur de thèse, Ahmed Abbes. Il a accepté de diriger cette thèse et m'a proposé un sujet de travail qui s'est révélé profond et riche en développements. Il a accompli sa tache avec abnégation et honnêteté. Il a su m'encourager et me pousser à donner le meilleur de moi-même. Il m'a soutenu dans les moments difficiles et il a été intransigeant lorsque il le fallait. Ses remarques et ses critiques constructives sur les versions préliminaires de ce texte ont énormément contribué à améliorer la clarté de l'exposition, la rigueur dans les démonstrations, ainsi que la langue française. Je lui en suis profondément reconnaissant.

Je remercie le Professeur Nobuo Tsuzuki pour son travail de rapporteur, sa lecture attentive et ses remarques.

Le Professeur Pierre Berthelot me fait l'honneur d'être membre du jury de thèse aujourd'hui. Je le remercie également pour son travail de rapporteur, ainsi que pour ses remarques et suggestions.

C'est le Professeur Bruno Chiarellotto qui m'a conseillé, lorsque j'étais étudiant à l'Université de Padoue, de venir en France, d'abord pour suivre des cours de DEA, puis pour travailler avec Ahmed Abbes. Je le remercie pour m'avoir transmis son esprit d'ouverture et je garde un bon souvenir de ses cours à l'université, qu'il donne avec passion. C'est un grand plaisir pour moi qu'il fasse partie du jury.

Dans l'année 2004/2005, j'ai eu la chance de pouvoir assister au cours du Professeur Luc Illusie sur la cohomologie étale à l'Université Paris-Sud. Dans le cadre de ce cours, lors de la préparation d'un exposé sur la transformée de Fourier-Deligne et la formule du produit ℓ-adique, il a eu la patience de m'écouter et de me guider. L'importance pour cette thèse de l'intuition que j'en ai retirée est incontestable. Je le remercie infiniment pour toutes les belles mathématiques qu'il m'apprises et pour tout le soin qu'il a mis dans la préparation de son cours. Il me fait l'honneur aujourd'hui de faire partie du jury.

Je remercie également les professeurs William Messing et Jacques Tilouine d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je garde un souvenir ému du Professeur Valentino Cristante. Ses cours à l'Université de Padoue m'ont introduit aux mathématiques, et notamment à la géométrie algébrique et arithmétique. Je me souviens de son style très vivant, clair, et de son goût pour les belles mathématiques. Sa disparition l'année dernière m'a profondément touché. Je lui dédicace cette thèse.

Lors de ces années passées au LAGA à l'Institut Galilée, j'ai profité d'une ambiance féconde et en même temps détendue. J'en remercie tous les membres du laboratoire, en particulier de l'équipe de géométrie algébrique, ainsi que les secrétaires, le bibliothècaire, et les personnels, pour leur sympathie et leur disponibilité. Un remerciement particulier aux autres thésards, avec lesquels j'ai partagé les plaisirs et les difficultés du quotidien.

Un grand merci à tous mes amis, mathématiciens ou non, proches ou éloignés, poètes et artistes : Andrea et Stefania, Ana et Mauro, Luca et Catarina, Ernesto, Pietro, Olivier, Anna et Dmitri, Maurizio, Paolo, Adriano, Joël, Baptiste, Marko, Tanja et Roberto...

Non avrò mai ringraziato abbastanza la mia famiglia che mi ha sempre sostenuto con affetto, nei momenti difficili come nei più felici. Ai miei genitori, Rosa e Umberto, alle *mie sorelle Antonella e Giovanna, a Diego, Silvano ed a mio nipote Pietro, a tutti loro : grazie.*

I na kraju, puno hvala tebi, Ano.

Table des matières

Introduction 9

partie 1. Irrégularité et Conducteur de Swan p-adiques 13

1. Introduction 14
2. Conducteurs 15
3. Théorie de Hodge p-adique et (φ, Γ)-modules 16
4. Équations différentielles p-adiques 21
5. Preuve du théorème 1.1 et corollaires 26

partie 2. Facteurs Epsilon p-adiques 31

Notations et conventions 33

Chapitre 1. Représentations de Weil-Deligne 35

1.1. Représentations de Weil, Weil-Deligne et caractères additifs 35
1.2. Constantes locales 38
1.3. Formulaire 40
1.4. Un exemple : le facteur epsilon d'un caractère d'Artin-Schreier 42

Chapitre 2. Facteurs epsilon et corps des normes 45

2.1. Rappels et compléments sur le corps des normes et sur la ramification 45
2.2. Tours admissibles de caractères additifs 49
2.3. Stabilisation des facteurs epsilon 53
2.4. Applications aux représentations de de Rham 57

Chapitre 3. F-isocristaux sur un corps local 59

3.1. Les anneaux de fonctions 59
3.2. Modules de Deligne 62
3.3. (φ, ∇)-modules 64
3.4. (φ, ∇)-modules unités 73
3.5. Modules de Crew 76
3.6. Constantes locales 78

Chapitre 4. Calcul (micro)différentiel arithmétique sur un trait complet 81

4.1. Coefficients binomiaux modifiés 81
4.2. Rappels de calcul différentiel sur un trait complet 82
4.3. $F\mathcal{D}^{\dagger}$-modules holonomes 92

4.4. Microdifférentielles arithmétiques sur un trait complet (niveau 0) 94
4.5. Microlocalisation au niveau 0 97

Chapitre 5. Formule du produit 101
5.1. Rappels sur les F-isocristaux 101
5.2. Rappels sur les fonctions L des F-isocristaux 103
5.3. Formule du produit : conjecture 105

Bibliographie 113

Introduction

Cette thèse est consacrée à l' étude locale des “système locaux” de coefficients p-adiques sur une courbe. Soit K un corps de valuation discrète complet, de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$. La nature des coefficients p-adiques sur $\mathrm{Spec}(K)$ dépend de la caractéristique de K : en inégales caractéristiques, ce sont des représentations p-adiques du groupe de Galois absolu G_K de K ; en égale caractéristique, ce sont des F-isocristaux surconvergents sur $\mathrm{Spec}(K)$ (c'est-à-dire des systèmes d'équations différentielles sur l'anneau de Robba, muni d'une structure de Frobenius). Ce travail a pour but de développer et d'étudier les constantes locales (conducteurs et facteurs epsilon) des coefficients p-adiques dans les deux cas.

Le schéma d'étude est le même en égale ou inégales caractéristiques. D'abord, on associe à un “système local” p-adique un module de Deligne (appelé aussi (φ, N, G_K)-module par Fontaine). Puis, si le corps résiduel de K est fini, on en déduit par linéarisation du Frobenius une représentation de Weil-Deligne de K, et donc des facteurs locaux en suivant la méthode classique tracée par Deligne et Tate pour les coefficients ℓ-adiques [**De73**], [**Ta79**]. Cette approche tannakienne, due à Fontaine, est bien connue en inégales caractéristique ; elle est à la base de la théorie de Hodge p-adique. On se propose ici de la calquer en égale caractéristique. Pour ce faire, on utilise le théorème de monodromie p-adique démontré par André, Mebkhout et Kedlaya, et on définit le module de Deligne d'un F-isocristal sur $\mathrm{Spec}(K)$, comme étant l'espace des “hypersolutions” de l'isocristal.

Le module de Deligne et à fortiori les invariants locaux définis par le formalisme tannakien sont en général difficiles d'accès. C'est pourquoi on aimerait bien leur trouver une interprétation directe. On attaque ce problème en deux étapes. D'abord, on passe du cas d'inégales caractéristiques au cas d'égale caractéristique par une “déformation cyclotomique” appelée *corps des normes*, due à Fontaine et Wintemberger [**Win83**]. Une partie importante de ce travail consiste à suivre les constantes locales le long de cette déformation. Le reste du travail se situe en égale caractéristique. Il s'agit alors de donner des interprétations directes, différentielles ou géométriques, des constantes locales.

Cette stratégie est beaucoup plus simple à réaliser pour le conducteur. Commençons donc par ce cas. En égale caractéristique, on dispose d'un invariant différentiel d'un F-isocristal qui a été défini par Robba, Christol et Mebkhout sur le modèle des équations différentielles classiques, à savoir l'*irrégularité p-adique*. L'interpretation différentielle du conducteur de Swan est essentiellement due à Matsuda en rang 1 et à Tsuzuki dans le cas général. Tsuzuki à démontré le résultat suivant [**Tsu98a**], [**Tsu98b**] : il y a une équivalence tannakienne entre la catégorie des F-isocristaux surconvergents unités[1] sur $\mathrm{Spec}(K)$, et la catégorie des représentations p-adiques continues de G_K ayant monodromie finie ; sous cette correspondance l'irrégularité p-adique d'un F-isocristal est égale au conducteur de Swan de la représentation associée. On étend ce résultat au cas général en démontrant que l'irrégularité d'un F-isocristal vaut le conducteur de Swan du module de Deligne associé, cf. [**An02a**, 7.1.2], [**Mat02**, 8.6] et (partie 1, 4.10).

Dans la première partie de cette thèse, je développe l'aspect "déformation cyclotomique" pour les conducteurs. Supposons K de caractéristique 0 et soit V une représentation de de Rham de G_K. Je démontre que la suite des conducteurs de Swan de la restriction de V le long de la tour p-cyclotomique de K est stationnaire, et elle vaut le conducteur de la représentation de Weil-Deligne induite par V sur le corps des normes. Grâce au résultat de Matsuda-Tsuzuki, j'en déduit que cette limite est l'irrégularité de l'équation différentielle p-adique associée à V par Berger [**Berg02**].

Pour le facteur epsilon, les deux aspects du travail sont nouveaux. En inégales caractéristiques, je stabilise les facteurs epsilon p-adiques pour une représentation de de Rham V de G_K le long de la tour p-cyclotomique. Plus précisément, je démontre que pour un bon choix des caractères additifs (relativement à la tour p-cyclotomique), la suite des facteurs epsilon de la restriction de V le long de la tour p-cyclotomique de K est stationnaire, et que sa limite est le facteur epsilon sur le corps des normes (partie 2, 2.4.2).

La partie la plus difficile de ce travail est l'interprétation différentielle du facteur epsilon en égale caractéristique. Supposons désormais K d'égale caractéristique et notons $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. L'idée qui a guidé ma recherche et qui reste pour l'instant inachevée, est la suivante. En utilisant le principe local-global de Katz-Gabber pour les F-isocristaux surconvergents, démontré par Matsuda [**Mat02**], la question se ramène à une *formule du produit* pour les facteurs epsilon pour les F-isocristaux surconvergents sur une courbe lisse au-dessus d'un corps fini. C'est un analogue de la formule du produit pour les faisceaux étales ℓ-adiques, conjecturée par Deligne et démontrée par Laumon en 1984 [**Lau87**]. Je dégage l'analogue p-adique de cette formule (partie 2, 5.3.9) et je le démontre pour les F-isocristaux unités de rang 1 (partie 2, 5.3.15), et pour les F-isocristaux unités finies (partie 2, 5.3.16).

Pour attaquer la formule du produit p-adique dans le cas général, ma stratégie inspirée de l'analogue ℓ-adique, consiste à établir un "principe de la phase stationnaire" sur la droite affine $\mathbb{A}^1_k$. Pour ce faire, il est nécessaire de travailler avec des coefficients plus généraux, à savoir les $F\mathcal{D}^\dagger$-modules de Berthelot. La première étape est purement locale. Soient $\mathcal{O}_C$ un anneau de valuation discrète, complet, de caractéristique 0 et de corps résiduel k, $\mathscr{S}$ un relèvement de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ en un $\mathcal{O}_C$-schéma formel formellement lisse. Dans des travaux récents et inachevés [**Cr04a**], [**Cr04b'**], Crew reprend la définition de l'anneau $\mathcal{D}^\dagger$ des opérateurs différentiels arithmétiques de Berthelot sur $\mathscr{S}$. Il développe aussi un formalisme tannakien pour les $F\mathcal{D}^\dagger$-modules holonomes. Je reprend en détails cette étude. L'anneau $\mathcal{D}^\dagger$ est une limite inductive sur le niveau $m \in \mathbb{N}$, d'anneaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$. Je construit et j'étudie l'anneau $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$ des microdifférentielles arithmétiques de niveau 0 (partie 2, section 4.4). Je

[1] *unit-root* en anglais

propose aussi une définition de l'anneau $\widehat{\Theta}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$ des microdifférentielles de niveau m (partie 2, 4.4.9) pour lequel je n'ai pas encore un théorème de structure. En m'inspirant de l'analyse algébrique ([**Kas83**], [**Mal91**] et [**Sab02**]) et de la théorie formelle des opérateurs finis [**Lop04**], je propose une définition de la micro-localisation (ou la transformée de Fourier locale) pour un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-module, et un énoncé conjectural de la phase stationnaire locale. Cette approche, généralisée au niveau supérieur, pourrait aussi fournir une interprétation, analogue au cas ℓ-adique, du facteur epsilon en tant que “déterminant” du Frobenius agissant sur la transformée de Fourier locale.

Ce texte est composé de deux parties indépendantes avec une bibliographie commune. La première partie reproduit mon article [**Mar04**] publié dans Documenta Mathematica 9 (2004). Elle contient le théorème de comparaison entre le conducteur de Swan et l'irrégularité en inégale caractéristique.

La deuxième partie est divisé en cinq chapitres. Le premier chapitre est introductif, il contient les rappels et le formalisme concernant les représentations de Weil-Deligne et leurs constantes locales. Il se termine par le calcul du facteur epsilon pour un caractère d'Artin-Schreier.

Le deuxième chapitre traite de la déformation au corps de normes des facteurs epsilon. Dans la dernière section on donne les applications aux facteurs epsilon d'une représentation de de Rham.

Le troisième chapitre est consacrée aux F-isocristaux sur un corps local d'égale caractéristique, appelés aussi (φ, ∇)-modules. On démontre l'équivalence tannakienne entre la catégorie des (φ, ∇)-modules sur l'anneau de Robba et la catégorie des modules de Deligne. Dans la section 3.4, on fait le lien avec le théorème de classification de Tsuzuki pour les (φ, ∇)-modules unités. Le section 3.5 contient des rappels sur des objets d'algèbre linéaire introduits par Crew [**Cr04a**, §5], rebaptisés ici modules de Crew. Leurs utilité sera claire dans la section 4.3. Enfin, dans la section 3.6, on définit les constantes locales associées à un F-isocristal.

Le quatrième chapitre ébauche l'analyse micro-locale pour les $\mathcal{D}^\dagger$-modules arithmétiques. On commence par des rappels de calcul différentiel. Puis dans la sections 4.3, on esquisse le théorème de classification de Crew pour les $F\mathcal{D}^\dagger$-modules holonomes. Dans la section 4.4, on construit les microdifférentielles arithmétiques de niveau 0. La microlocalisation est introduite dans 4.5. On termine par l'énoncé de la conjecture de la phase stationnaire locale (4.5.8).

Le cinquième chapitre concerne la formule du produit pour les F-isocristaux surconvergents sur une courbe. Après des rappels sur les F-isocristaux et leurs fonctions L, on énonce la conjecture de la formule du produit (5.3.9) et on la démontre pour les F-isocristaux unités de rang 1 (5.3.15), et pour les F-isocristaux unités finies (5.3.16).

Première partie

Irrégularité et Conducteur de Swan p-adiques

1. Introduction

Soient K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0, de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$, et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. On note G_K le groupe de Galois de $\overline{K}/K$ et I_K le sous-groupe d'inertie. Fontaine a défini une hiérarchie sur les représentations p-adiques de G_K(i.e. les $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action continue de G_K) : représentations de de Rham $\supset$ rep. semi-stables $\supset$ rep. cristallines. Le théorème de monodromie p-adique affirme que toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable, i.e. sa restriction à un sous-groupe ouvert de G_K est semi-stable. Le but de cet article est l'étude d'invariants numériques qui mesurent le défaut de semi-stabilité de représentations potentiellement semi-stables. Une telle représentation est entièrement décrite par son module de Weil-Deligne $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$. Celui-ci est muni d'une action de G_K dont la restriction à l'inertie se factorise par un quotient fini. Fontaine [**Fon79**] définit les conducteurs de Swan et d'Artin de V, notés respectivement $\mathrm{sw}(V)$ et $\mathrm{ar}(V)$, comme étant les conducteurs de Swan et d'Artin de $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$. Dans un travail récent [**Berg02**], Berger associe à toute représentation de de Rham V une équation différentielle p-adique $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ munie d'une structure de Frobenius. À une équation différentielle p-adique M munie d'une structure de Frobenius, Christol et Mebkhout [**ChMe01**] associent un invariant entier $\mathrm{irr}(M)$, l'irrégularité de M.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient μ_n le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité dans $\overline{K}$ et $K_n = K(\mu_n)$. Pour une représentation p-adique V de G_K, on note V_n sa restriction au sous-groupe $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K_n)$. Le résultat principal de cet article est le suivant.

Théorème 1.1. *Pour toute représentation de de Rham V de G_K, on a*

$$\mathrm{irr}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{sw}(V_n).$$

Le théorème 1.1 est l'analogue en caractéristique zéro d'un théorème de Tsuzuki en caractéristique $p > 0$. Soit E un corps de valuation discrète complet, de caractéristique p et de corps résiduel parfait. Dans [**Tsu98a**], Tsuzuki montre que la catégorie des représentations p-adiques de $\mathrm{G}_E = \mathrm{Gal}(E^{\mathrm{sep}}/E)$ dont l'inertie agit par un quotient fini (monodromie finie), est équivalente à la catégorie des φ-∇-modules étales sur un corps valué $\mathcal{E}^\dagger(E)$ de caractéristique 0, d'anneau d'entiers hensélien et de corps résiduel E (voir §4.8 pour la définition). Puis dans [**Tsu98b**], il démontre l'égalité entre le conducteur de Swan de la restriction à l'inertie d'une telle représentation et l'irrégularité du ∇-module correspondent. Dans la démonstration de 1.1, on se ramène, par la théorie du corps des normes, au cas d'un corps de valuation discrète complet d'égale caractéristique $p > 0$. Cependant, on ne peut pas appliquer directement le résultat de Tsuzuki, car dans notre cas, l'action de l'inertie ne se factorise pas par un quotient fini. La stratégie de la démonstration consiste à décrire la représentation de Weil-Deligne en termes de l'équation différentielle de Berger, puis de reprendre une partie de la preuve de Tsuzuki (l'induction de Brauer). Comme corollaires du théorème 1.1, on en déduit un résultat analogue pour le conducteur d'Artin (cf. 5.7) et l'égalité entre un polygone de Newton de pentes p-adiques et une limite de polygones de Newton de pentes de Swan (cf. 5.9).

Quand cet article a été déjà achevé, l'auteur a reçu une prépublication de P.Colmez [**Col03**] dont le résultat principal est une formule pour $\mathrm{sw}(V)$ en termes d'une filtration sur $\mathrm{D_{dR}}(V)$. Les deux travaux sont indépendants et les méthodes utilisées semblent différentes.

Cet article est une partie de la thèse de doctorat en mathématique que je prépare à l'université de Paris 13, sous la direction d'Ahmed Abbes. Je tiens ici à le remercier pour son soutien constant tout le long de ce travail et ses lectures attentives des versions préliminaires de ce texte. Je remercie également le referee qui, par ses remarques, a amélioré ce manuscrit.

Notations. Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W = \mathrm{W}(k)$ (resp. $W_n = \mathrm{W}_n(k)$) l'anneau des vecteurs de Witt infinis (resp. de longueur $n \geq 1$) et $K_{\mathrm{a}} = \mathrm{Fr}\, W$ le corps des fractions de W. On note $|\cdot|$ la valeur absolue de K_{a} normalisée par $|p| = p^{-1}$ et σ l'endomorphisme de Frobenius agissant sur k, W_n, W et K_{a}. On fixe une extension finie K/K_{a} totalement ramifiée et une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. On note $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K$ dans $\overline{K}$, $\overline{k}$ son corps résiduel, $\mathcal{O}_{\mathrm{C}}$ le complété p-adique de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ et $\mathrm{C} = \mathrm{Fr}\, \mathcal{O}_{\mathrm{C}}$. Pour toute extension finie L de K_{a}, contenue dans $\overline{K}$, on note $\mathcal{O}_L$ son anneau d'entiers, k_L son corps résiduel et $L_{\mathrm{a}} = \mathrm{Fr}\, \mathrm{W}(k_L)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient μ_n le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité dans $\overline{K}$ et $L_n = L(\mu_n)$. On note L_∞ la réunion des L_n, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{H}_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L_\infty)$ et $\Gamma_L = \mathrm{Gal}(L_\infty/L)$. Soit $\chi : \mathrm{G}_K \to \mathbb{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Une représentation galoisienne p-adique (ou une $\mathbb{Q}_p$-représentation galoisienne) est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action linéaire et continue de G_K. On note $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)$ la catégorie des $\mathbb{Q}_p$-représentations de G_K.

2. Conducteurs

On note $\mathrm{B_{cris}}$ et $\mathrm{B_{st}} = \mathrm{B_{cris}}[X]$ les anneaux des périodes de Fontaine associés à K (cf. [**Fon94a**]). Soient $N : \mathrm{B_{st}} \to \mathrm{B_{st}}$ la $\mathrm{B_{cris}}$-dérivation qui envoie X sur -1 et φ le Frobenius agissant sur $\mathrm{B_{cris}}$ et $\mathrm{B_{st}}$. Ces applications vérifient $N\varphi = p\varphi N$. Ces anneaux sont munis d'une action continue de $\mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}$ commutant avec φ et N. Soit L/K_{a} une extension finie contenue dans $\overline{K}$. On note $\mathrm{G}_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$. On rappelle que $\mathrm{B_{st}^{G_L}} = \mathrm{B_{cris}^{G_L}} = L_{\mathrm{a}}$ (cf. [**Fon94b**, 5.1.2] et [**Fon94a**, 4.2.5]).

Pour tout $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)$, Fontaine définit

$$\mathrm{D_{cris}}(V) = (\mathrm{B_{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_K} \text{ et } \mathrm{D_{st}}(V) = (\mathrm{B_{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_K}.$$

Ce sont des K_{a}-espaces vectoriels de dimensions inférieures ou égales à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$. Le Frobenius de $\mathrm{B_{cris}}$ induit un endomorphisme σ-semi-linéaire $\varphi : \mathrm{D_{cris}}(V) \to \mathrm{D_{cris}}(V)$, appelé Frobenius. L'espace $\mathrm{D_{st}}(V)$ est muni d'un Frobenius φ et d'un endomorphisme K_{a}-linéaire N, vérifiant $N\varphi = p\varphi N$. On rappelle que V est dite cristalline (resp. semi-stable) si $\dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D_{cris}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ (resp. $\dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D_{st}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$). Elle est dite potentiellement cristalline (resp. potentiellement semi-stable) s'il existe une extension finie K'/K telle que la restriction de V à $\mathrm{G}_{K'}$ est cristalline (resp. semi-stable). On note P le corps $K \otimes_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{Fr}\, \mathrm{W}(\overline{k})$. C'est le complété p-adique de l'extension maximale non-ramifiée K^{nr} de K dans $\overline{K}$. Le groupe d'inertie absolu de K est canoniquement isomorphe à G_P, le groupe de Galois absolu de P. Dans la suite, pour tout $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)$, on considère la restriction de V à I_K comme une représentation p-adique de G_P. Par [**Fon94a**, 5.1.5], une représentation V est cristalline (resp. potentiellement cristalline, resp. semi-stable, resp. potentiellement semi-stable) si et seulement si sa restriction à I_K est cristalline (resp. potentiellement cristalline, resp. semi-stable, resp. potentiellement semi-stable).

Soit V une représentation p-adique potentiellement semi-stable de dimension n. Fontaine définit $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \varinjlim_{G' \leq \mathrm{G}_K} (\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G'}$, où la limite est prise sur les sous-groupes ouverts G' de G_K (cf. [**Fon94b**, 5.6.4]). C'est un $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'une action semi-linéaire de G_K. Si L/K est une extension galoisienne finie telle que V est semi-stable comme représentation de G_L, alors $(\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_L}$ est un L_{a}-espace vectoriel de dimension n et l'action de G_K se factorise par $\mathrm{Gal}(L/K)$. On a un isomorphisme de représentations $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) \cong K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}} \otimes_{L_{\mathrm{a}}} (\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_L}$. Par conséquent la restriction $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|I_K}$ est une représentation linéaire de I_K qui se factorise à travers le sous-groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Définition 2.1. [**Fon79**, 7.4.7] Soit V une représentation p-adique potentiellement semi-stable. Les conducteurs de Swan et d'Artin de $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|I_K}$ sont aussi appelés conducteur de Swan et d'Artin de V et notés respectivement $\mathrm{sw}(V)$ et $\mathrm{ar}(V)$.

Si G_K agit par un quotient fini $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur V, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) = K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et $\mathrm{sw}(V)$ et $\mathrm{ar}(V)$ coïncident avec $\mathrm{sw}(\mathrm{Gal}(L/K), V)$ et $\mathrm{ar}(\mathrm{Gal}(L/K), V)$ respectivement.

Pour une représentation V potentiellement semi-stable, on considère aussi la variante

$$\mathrm{ar}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathrm{ar}(V) + \dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) - \dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V).$$

3. Théorie de Hodge p-adique et (φ, Γ)-modules

3.1. Les anneaux. On pose $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (W_n[\![T]\!][\frac{1}{T}])$, qui est aussi la complétion p-adique de $W[\![T]\!][\frac{1}{T}]$. C'est un anneau de valuation discrète, complet, de caractéristique 0, absolument non ramifié, de corps résiduel $k(\!(T)\!)$. Son corps de fractions $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}[1/p]$ est canoniquement isomorphe à

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n T^n \,\middle|\, a_n \in K_{\mathrm{a}}, (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ bornée et } \lim_{n \to -\infty} |a_n| = 0 \right\}.$$

On pose

$$\mathcal{E}^{\dagger} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n T^n \in \mathcal{E} \,\middle|\, \exists\, 0 < \rho < 1 \text{ vérifiant } \lim_{n \to -\infty} |a_n| \rho^n = 0 \right\},$$

l'anneau des séries dans $\mathcal{E}$ qui convergent sur une couronne $\{x \in \mathrm{C} \mid \rho \leq |x|_{\mathrm{C}} < 1\}$ pour un réel $0 < \rho < 1$. Pour tout $s \in \mathcal{E}^{\dagger}$, on note $\mathrm{v}_1(s) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{v}_{K_{\mathrm{a}}}(a_n)$ la valuation de Gauss. On rappelle que cette valuation sur $\mathcal{E}^{\dagger}$ est discrète et que l'anneau de valuation $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^{\dagger}}$ est hensélien, de corps résiduel $k(\!(T)\!)$(cf.[**Mat95**, §2]).

On note aussi σ l'endomorphisme $x \mapsto x^p$ de $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Soit R (cf. [**Fon90**, §A3.1.1]) la limite projective du système

$$\cdots \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}.$$

C'est une $\overline{k}$-algèbre intègre, parfaite de caractéristique p. On dispose de la description suivante : $R \cong \{(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} | \, x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathrm{C}}, \, (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\}$, où, à droite, la multiplication est donnée composante par composante et la somme par la formule $(x+y)^{(n)} = \lim_{m\to+\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$. L'anneau R est complet pour la valuation (non-discrète) définie, pour tout $x \in R$, par $\mathrm{v}_R(x) = \mathrm{v}_{\mathrm{C}}(x^{(0)})$, où v_{C} est la valuation de C normalisée par $\mathrm{v}_{\mathrm{C}}(p) = 1$. Le corps $\mathrm{Fr}\, R$ est algébriquement clos (cf. [**Fon90**, A3.1.6]). On rappelle que $\mathrm{W}(R) \cong \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{W}_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$, où les applications de transition sont la composition des morphismes de troncation et du Frobenius σ de $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$. C'est une $\mathrm{W}(\overline{k})$-algèbre. Le groupe $\mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}$ agit par fonctorialité sur $\mathrm{W}(R)$ et $\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$. On appelle φ le Frobenius de $\mathrm{W}(R)$ (resp. $\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$). On fixe une fois pour toutes un élément $\varepsilon \in R$ tel que $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$. Pour tout x dans R, on note $[x]$ son relèvement de Teichmüller dans $\mathrm{W}(R)$.

On vérifie facilement que $((\overline{\varepsilon^{(n)}}, 0, \ldots, 0) - 1)^{p^n} = 0$ dans $\mathrm{W}_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un morphisme continu $W[T]/T^{p^n} \to \mathrm{W}_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$, qui envoie T sur $(\overline{\varepsilon}^{(n)}, 0, \ldots, 0) - 1$ et $w \in W$ sur $\sigma^{-n}(w)$. D'où un morphisme continu de W-algèbres $W[\![T]\!] \to \mathrm{W}(R)$, qui envoie T dans $[\varepsilon] - 1$. Comme $[\varepsilon] - 1$ est inversible dans $\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$, on obtient un homomorphisme continu de W-algèbres $W[\![T]\!][\frac{1}{T}] \to \mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$, qui se factorise par complétion p-adique en

$$\begin{tikzcd} W[\![T]\!][\frac{1}{T}] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R) \\ & \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

L'homomorphisme i est injectif car $i(p) \neq 0$. En inversant p, on obtient $i : \mathcal{E} \to \mathrm{Fr}\, \mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$.

LEMME 3.2. [**Fon90**, A3.2.2] *Les anneaux $i(\mathcal{E})$ et $i(\mathcal{E}^\dagger)$ ne dépendent pas du choix de ε. Ils sont stables par les actions de $\mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}$ et du Frobenius φ sur $\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$. Les actions induites de $\mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}$ et de φ sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^\dagger$ sont données par*

$$\forall g \in \mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}, \qquad g(T) = (T+1)^{\chi(g)} - 1, \qquad \varphi(T) = (T+1)^p - 1.$$

L'action de $\mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}$ se factorise par $\Gamma_{K_{\mathrm{a}}}$.

On rappelle brièvement la construction du corps des normes (cf. [**Win83**, §2.2]). L'extension maximale modérément ramifiée de K dans K_∞ est finie. Soit n_1 le plus petit entier tel que K_∞/K_{n_1} soit totalement sauvagement ramifiée. On choisit une uniformisante u de K_{n_1}. Pour tout $n \geq n_1$, le Frobenius de $\mathcal{O}_{K_{n+1}}/u\mathcal{O}_{K_{n+1}}$ se factorise à travers $\mathcal{O}_{K_n}/u\mathcal{O}_{K_n} \subset \mathcal{O}_{K_{n+1}}/u\mathcal{O}_{K_{n+1}}$. Soit $\lambda_n : \mathcal{O}_{K_{n+1}}/u\mathcal{O}_{K_{n+1}} \to \mathcal{O}_{K_n}/u\mathcal{O}_{K_n}$ le morphisme ainsi défini. On pose $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{K_n}/u\mathcal{O}_{K_n}$, où les applications de transitions sont les λ_n. C'est un anneau de valuation discrète, complet, de corps résiduel canoniquement isomorphe au corps résiduel de K_∞, qui est une extension finie k' de k. Il ne dépend pas du choix de u. Soit $\mathrm{E}_K = \mathrm{Fr}\, \mathcal{O}_{\mathrm{E}_K}$. Par fonctorialité de la construction, on associe à $\overline{K}$ une clôture séparable $\mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}$ de E_K et $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}/\mathrm{E}_K)$ est canoniquement isomorphe à H_K. Pour tout $n \geq n_1$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{K_{n+1}}/u\mathcal{O}_{K_{n+1}} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\lambda_n"] & \mathcal{O}_{\overline{K}}/u\mathcal{O}_{\overline{K}} \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathcal{O}_{K_n}/u\mathcal{O}_{K_n} \arrow[r, hook] & \mathcal{O}_{\overline{K}}/u\mathcal{O}_{\overline{K}} \end{tikzcd}$$

Comme $R \cong \varprojlim_{n\geq n_1} \mathcal{O}_{\overline{K}}/u\mathcal{O}_{\overline{K}}$, on en déduit des applications injectives $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K} \hookrightarrow R$ et $\mathrm{E}_K \hookrightarrow \mathrm{Fr}\, R$.

Soient $\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}$ l'extension maximale non-ramifiée de $\mathcal{E}$ dans $\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\mathrm{sh}}$ son anneau d'entiers. Par fonctorialité de la hensélisation, $\mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}$ et φ agissent sur $\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}$. L'inclusion $i : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \hookrightarrow \mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$ induit, par réduction modulo p, un isomorphisme canonique entre les corps résiduels de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et $\mathrm{E}_{K_{\mathrm{a}}}$. Par conséquent, $\mathrm{Gal}(\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}/\mathcal{E})$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{H}_{K_{\mathrm{a}}}$. Soit L une extension finie de K_{a}. On pose $\mathcal{E}_L = (\mathcal{E}^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{H}_L}$. C'est une extension finie non ramifiée de $\mathcal{E}$. Elle est munie d'actions naturelles de Γ_L et de φ . Pour L/K_{a} finie galoisienne, $\mathcal{E}_L$ est muni d'une action naturelle de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_{\mathrm{a}})$. On note $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ l'anneau de valuation de $\mathcal{E}_L$. On note k'_L le corps résiduel de E_L et $L' = \mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k'_L)$. Si L est absolument non-ramifié, alors $k'_L = k_L$ et $L' = L_{\mathrm{a}} = L$ (cf. [**CL**, Ch.IV, Prop.17]). Dans ce cas le corps $\mathcal{E}_L$ a la description simple suivante.

LEMME 3.3. *Soit L/K_{a} une extension finie non-ramifiée. Il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{E}_L \cong \mathcal{E} \otimes_{K_{\mathrm{a}}} L$, compatible avec l'action de Γ_L et du Frobenius. Pour L/K_{a} finie galoisienne, cet isomorphisme est compatible à l'action de* $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_{\mathrm{a}})$.

DÉM. L'anneau $\mathcal{E} \otimes_{K_{\mathrm{a}}} L$ est un corps car K_{a} est algébriquement fermé dans $\mathcal{E}$ et p est inversible. Comme $L = L_{\mathrm{a}} \subseteq \mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$, l'inclusion i s'étend, par linéarité, en $i_L : \mathcal{E} \otimes_{K_{\mathrm{a}}} L \hookrightarrow \mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$. L'image de cette application est contenue dans $\mathcal{E}_L$. On a $|i_L(\mathcal{E} \otimes_{K_{\mathrm{a}}} L) : \mathcal{E}| = |k_L : k| = |\mathrm{E}_L : \mathrm{E}_{K_{\mathrm{a}}}| = |\mathcal{E}_L : \mathcal{E}|$, donc $i_L(\mathcal{E} \otimes_{K_{\mathrm{a}}} L) = \mathcal{E}_L$. ☐

PROPOSITION 3.4. [**Fon90**, A2.2.1] *Soient $\overline{\pi}$ une uniformisante de E_L et π un relèvement dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$. Il existe un unique isomorphisme continu de L'-algèbres, $\psi_\pi : \mathcal{E}_{L'} \to \mathcal{E}_L$ qui envoie T sur π.*

DÉM. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ est de valuation discrète, complet, absolument non-ramifié. C'est donc un anneau de Cohen (cf. [**EGA**, IV_0 19.8.5]). Par [**EGA**, IV_0 19.8.6(ii)] il existe un isomorphisme $\psi : \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{L'}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ relevant l'isomorphisme $k'_L((T)) \to \mathrm{E}_L$ qui envoie T sur $\overline{\pi}$. On note $\omega = \pi - \psi(T) \in p\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$. Soit $s = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{L'}}$. On écrit

$$\sum_{n=0}^{m} a_n \pi^n = \sum_{n=0}^{m} a_n (\psi(T) + \omega)^n = \sum_{n=0}^{m} a_n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \psi(T)^i \omega^{n-i} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{m-j} a_{j+i} \binom{j+i}{i} \psi(T)^i \right) \omega^j = \sum_{j=0}^{m} \psi \left(\sum_{i=0}^{m-j} a_{j+i} \binom{j+i}{i} T^i \right) \omega^j,$$

où $j = n - i$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose $s_j = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{j+i} \binom{j+i}{i} T^i \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{L'}}$. On définit $\psi_\pi(s) = \sum_{n<0} a_n \pi^n + \sum_{j\geq 0} \psi(s_j)\omega^j$, qui converge p-adiquement car $\omega \in p\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ et $\lim_{n\to-\infty} a_n = 0$.

L'application ψ_π est un isomorphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{L'}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$, qui envoie T sur π. On la prolonge en un isomorphisme $\mathcal{E}_{L'} \to \mathcal{E}_L$. L'unicité est évidente. □

Soient $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathcal{E}^\dagger}$ l'hensélisé strict de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ dans $\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\,R)$ et $\mathcal{E}^{\dagger^{\mathrm{nr}}}$ son corps des fractions. Par fonctorialité de la hensélisation, $\mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}$ et φ agissent sur $\mathcal{E}^{\dagger^{\mathrm{nr}}}$. Comme plus haut, l'inclusion canonique $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathcal{E}^\dagger} \hookrightarrow \mathrm{W}(\mathrm{Fr}\,R)$ induit un isomorphisme $\mathrm{Gal}(\mathcal{E}^{\dagger^{\mathrm{nr}}}/\mathcal{E}^\dagger) \cong \mathrm{H}_{K_{\mathrm{a}}}$. Soit L une extension finie de K_{a}. On pose $\mathcal{E}^\dagger_L = (\mathcal{E}^{\dagger^{\mathrm{nr}}})^{\mathrm{H}_L}$. C'est une extension finie non ramifiée de $\mathcal{E}^\dagger$, de corps résiduel E_L. Pour L/K_{a} finie galoisienne non-ramifiée, on démontre comme dans le lemme 3.3, qu'il y a un isomorphisme canonique, $\mathcal{E}^\dagger \otimes_{K_{\mathrm{a}}} L \cong \mathcal{E}^\dagger_L$, compatible avec l'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_{\mathrm{a}})$ et du Frobenius.

Proposition 3.5. [**Mat95**, Prop. 3.4] *Soit $\overline{\pi}$ une uniformisante de E_L. Il existe un relèvement π de $\overline{\pi}$ dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger_L}$ tel que sous l'isomorphisme $\psi_\pi : \mathcal{E}_{L'} \to \mathcal{E}_L$, on ait $\psi_\pi(\mathcal{E}^\dagger_{L'}) = \mathcal{E}^\dagger_L$.*

On note
$$\mathcal{R} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n T^n \,\middle|\, a_n \in K_{\mathrm{a}},\ \exists \rho_c \in]0,1[\text{ t.q. } \forall \rho \in]\rho_c, 1[\,,\ \lim_{n\to\pm\infty} |a_n|\rho^n = 0 \right\}.$$
On munit cet anneau d'une action du Frobenius et de $\Gamma_{K_{\mathrm{a}}}$ en posant :
$$\varphi(T) = (1+T)^p - 1 \text{ et } \forall \gamma \in \Gamma_{K_{\mathrm{a}}},\quad \gamma(T) = (1+T)^{\chi(\gamma)} - 1.$$
On pose $t = \log(T+1) \in \mathcal{R}$, qu'on note aussi abusivement $\log[\varepsilon]$, bien qu'il n'appartienne pas à $\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\,R)$. On a une inclusion $\mathcal{E}^\dagger \subset \mathcal{R}$ compatible avec les actions du Frobenius et de $\Gamma_{K_{\mathrm{a}}}$.

Pour toute extension finie L/K_{a}, on pose $\mathcal{R}_L = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger_L$. On vérifie que cet anneau est intègre. C'est une extension étale finie de $\mathcal{R}$. On le munit du Frobenius produit tensoriel des Frobenius sur $\mathcal{R}$ et sur $\mathcal{E}^\dagger_L$. Si L/K_{a} est galoisienne finie, alors le groupe $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_{\mathrm{a}})$ agit sur $\mathcal{R}_L$ en agissant sur $\mathcal{R}$ à travers le quotient $\Gamma_{K_{\mathrm{a}}}$ et sur $\mathcal{E}^\dagger_L$ via son action naturelle. On a $\mathcal{R}_L^{\mathrm{Gal}(L_\infty/(K_{\mathrm{a}})_\infty)} = \mathcal{R}$. On vérifie facilement que $\log \frac{(1+T)^p-1}{T^p} \in \mathcal{R}$ et pour tout $\gamma \in \Gamma_{K_{\mathrm{a}}}$, $\log \frac{(1+T)^{\chi(\gamma)}-1}{T} \in \mathcal{R}$. On prolonge les actions de φ et $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_{\mathrm{a}})$ à l'anneau des polynômes $\mathcal{R}_L[X]$ par
$$\varphi_L(X) = pX + \log \frac{(1+T)^p - 1}{T^p}$$
$$\forall \gamma \in \mathrm{Gal}(L_\infty/K_{\mathrm{a}}),\quad \gamma(X) = X + \log \frac{(1+T)^{\chi(\gamma)} - 1}{T}.$$
On notera formellement $X = \log T$. On désigne par $\mathcal{R}[1/t]$ (resp. $\mathcal{R}[\log T][1/t]$) le localisé de $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}[\log T]$) en t. Dans la suite, on considérera souvent sur $\mathcal{R}_L[1/t]$ et $\mathcal{R}_L[\log T][1/t]$ l'action du sous groupe Γ_L de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_{\mathrm{a}})$. On vérifie que (cf. [**Berg02**, Prop. 3.3])
$$(\mathcal{R}_L[\log T][1/t])^{\Gamma_L} = L_{\mathrm{a}}.$$

Soit L/K_{a} une extension finie galoisienne, on a $\mathcal{R}_{L'} \cong \mathcal{R} \otimes_{K_{\mathrm{a}}} L'$. Si on prend un relevement $\pi \in \mathcal{E}_L^\dagger$ d'une uniformisante de E_L, satisfaisant la proposition 3.5, alors ψ_π se prolonge en un isomorphisme $\psi_\pi : \mathcal{R}_{L'} \to \mathcal{R}_L$.

3.6. Le théorème de comparaison de Berger. Un (φ, Γ)-module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ (resp. $\mathcal{E}_K$) est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-module de type fini (resp. un $\mathcal{E}_K$-espace vectoriel de dimension finie) muni d'une action semi-linéaire et continue de Γ_K et d'un endomorphisme φ semi-linéaire par rapport au Frobenius de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ (resp. $\mathcal{E}_K$) commutant entre eux. On dit qu'un (φ, Γ)-module $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ est étale si l'image $\varphi(\mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$.

Pour tout (φ, Γ)-module M sur $\mathcal{E}_K$ on peut choisir un réseau stable par φ et Γ_K, qui est donc un (φ, Γ)-module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$. On dit qu'un (φ, Γ)-module M sur $\mathcal{E}_K$ est étale s'il existe un réseau $\mathcal{M}$ de M stable par Γ_K et φ qui est étale. On note $\Phi\Gamma^{\text{ét}}_{\mathcal{E}_K}$ la catégorie dont les objets sont les (φ, Γ)-modules étales et les morphismes sont les applications linéaires commutant avec φ et Γ_K. Dans [**Fon90**], Fontaine construit une équivalence de catégories entre $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)$ et $\Phi\Gamma^{\text{ét}}_{\mathcal{E}_K}$. On rappelle sa construction brièvement. On note $\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}$ le completé p-adique de $\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}$. Pour toute $\mathbb{Q}_p$-représentation V de G_K, on considère le $\mathcal{E}_K$-espace vectoriel $\mathrm{D}(V) = (\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{H}_K}$ muni des actions semi-linéaires de Γ_K et de φ . C'est un objet de $\Phi\Gamma^{\text{ét}}_{\mathcal{E}_K}$. Le foncteur D définit une équivalence de catégories entre $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)$ et $\Phi\Gamma^{\text{ét}}_{\mathcal{E}_K}$.

Théorème 3.7 (Cherbonnier-Colmez). [**ChCo98**, III 5.2] *Soit $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)$. La famille des sous-$\mathcal{E}_K^\dagger$-modules de type fini de $\mathrm{D}(V)$ stables par φ et Γ_K admet un plus grand élément $\mathrm{D}^\dagger(V)$ et on a*

$$\mathrm{D}(V) = \mathcal{E}_K \otimes_{\mathcal{E}_K^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V).$$

Pour toute représentation p-adique V de G_K, Berger définit $\mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) = \mathcal{R}_K \otimes_{\mathcal{E}_K^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V)$ et $\mathrm{D}^\dagger_{\log}(V) = \mathcal{R}_K[\log T] \otimes_{\mathcal{E}_K^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V)$ avec les actions évidentes de φ et Γ_K (cf.[**Berg02**, §3.2]). Soit L/K une extension galoisienne finie. Le module $\mathrm{D}(V_{|\mathrm{G}_L})$, est muni naturellement d'une action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$. Par le théorème 3.7, on obtient une action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ sur $\mathrm{D}^\dagger(V_{|\mathrm{G}_L})$ et donc sur $\mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V_{|\mathrm{G}_L})$ et $\mathrm{D}^\dagger_{\log}(V_{|\mathrm{G}_L})$.

Théorème 3.8 (Berger). [**Berg02**, 3.6] *Soit V est une représentation p-adique de G_K. On a des isomorphismes canoniques :*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \cong (\mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)[1/t])^{\Gamma_K} \textit{ et } \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) \cong (\mathrm{D}^\dagger_{\log}(V)[1/t])^{\Gamma_K}.$$

Soit L/K une extension galoisienne finie. Alors les isomorphismes $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V_{|\mathrm{G}_L}) \cong (\mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V_{|\mathrm{G}_L})[1/t])^{\Gamma_L}$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L}) \cong (\mathrm{D}^\dagger_{\log}(V_{|\mathrm{G}_L})[1/t])^{\Gamma_L}$ ci-dessus, sont équivariants pour les actions naturelles de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Remarque 3.9. Dans [**Berg02**, 3.6], l'assertion sur l'équivariance par rapport à $\mathrm{Gal}(L/K)$ n'apparait pas. C'est une conséquence immédiate de la démonstration. On l'a mise en évidence pour l'importance qu'elle jouera dans la suite.

4. Équations différentielles p-adiques

Soit $\hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/K_{\mathrm{a}}}$ le module des différentielles continues de $\mathcal{R}$ sur K_{a}. C'est un $\mathcal{R}$-module libre de rang 1 de base $\frac{dT}{T+1} = \frac{d[\varepsilon]}{[\varepsilon]}$. Soient L/K_{a} une extension finie et L' l'extension finie non-ramifiée de K_{a} qui lui est associée dans la section §3.1 (au dessus de Lemme 3.3). Comme $\mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{R}_L$ est étale finie et L'/K_{a} est finie, on a un isomorphisme canonique $\hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}_L/L'} \cong \mathcal{R}_L \otimes_{\mathcal{R}} \hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/K_{\mathrm{a}}}$. On étend la dérivation $d : \mathcal{R} \to \hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/K_{\mathrm{a}}}$ en $d\colon \mathcal{R}[\log T] \to \hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/K_{\mathrm{a}}}$, en posant $d(\log T) = \frac{1}{T} dT$. Le corps des constantes de $\mathcal{R}_L[1/t]$ et de $\mathcal{R}_L[\log T]$ est L'.

On appelle équation différentielle p-adique (ou module à connexion) sur $\mathcal{R}_K$ un $\mathcal{R}_K$-module de présentation finie muni d'une connexion. On démontre qu'un tel module est forcement libre (cf. [**An02b**, Prop. 2.3]). Une équation différentielle p-adique est dite unipotente (resp. quasi-unipotente) si elle est extension itérée d'équations différentielles triviales (resp. s'il existe une extension finie L/K telle que $M \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_L$ soit unipotente). On dit qu'une équation différentielle p-adique M est munie d'une structure de Frobenius si elle est munie d'un endomorphisme $\varphi_M : M \to M$, φ-semi-linéaire, horizontal, tel que $\varphi_M(M)$ engendre M sur $\mathcal{R}_K$.

4.1. Équation différentielle p-adique associée à une représentation de de Rham. Soit V une représentation galoisienne p-adique de G_K. On rappelle que Berger démontre que pour tout $x \in \mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]$, la limite $\lim_{\gamma \to \mathrm{Id}_{\Gamma_K}} \frac{\gamma(x)-x}{\chi(\gamma)-1}$ existe (cf. [**Berg02**, §5.1]). On note cette limite $\nu(x)$. L'application $x \mapsto t^{-1}\nu(x) \otimes \frac{dT}{T+1}$ définit une connexion $\nabla_V \colon \mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t] \to \mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t] \otimes_{\mathcal{R}_K} \hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}_K/K'}$.

Soit V une représentation de de Rham de dimension n. On rappelle que Berger montre qu'il existe un unique sous-$\mathcal{R}_K$-module libre de rang n de $\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]$ stable par $t^{-1}\nu$. On l'appelle $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$. Il est stable par l'action du Frobenius et de Γ_K (cf. [**Berg02**, §5.4 et §5.5] ou [**Berg04**, IV.4]). On vérifie qu'il est une muni d'une structure de Frobenius. Par construction, on associe à un morphisme de représentations de de Rham $V_1 \to V_2$, un morphisme d'équations différentielles p-adiques $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_1) \to \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_2)$.

THÉORÈME 4.2 (Berger). [**Berg02**, 5.20] *On a un foncteur additif $V \mapsto \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$, de la catégorie des représentations p-adiques de de Rham de G_K, dans la catégorie des équations différentielles p-adiques sur $\mathcal{R}_K$ munies d'une structure de Frobenius. Ce foncteur associe à une représentation de dimension n une équation différentielle de rang n. C'est un $\otimes$-foncteur exacte et fidèle. L'équation $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ est quasi-unipotente si et seulement si la représentation V est potentiellement semi-stable. L'équation $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ est unipotente (resp. triviale) si et seulement s'il existe n tel que la restriction de V à G_{K_n} soit semi-stable (resp. cristalline).*

On étend ∇_V en une connexion ∇_V sur $\mathrm{D}^{\dagger}_{\log}(V)$ et $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_K[\log T]$, en posant $\nabla_V(\log T) = \frac{dT}{T}$.

Soit M un module à connexion sur $\mathcal{R}_K$. On vérifie aisément que la dimension sur L' des sections horizontales de $M \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_L[\log T]$ est inférieure ou égale au rang de M. Si on a l'égalité on dit que M est triviale sur $\mathcal{R}_L[\log T]$. Le module M est unipotent si et seulement si M est triviale sur $\mathcal{R}_K[\log T]$.

Corollaire 4.3. *Si V est cristalline (resp. semi-stable), alors*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)\otimes_{K_{\mathrm{a}}}K'\cong \left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\nabla_V}\cong \left(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)\right)^{\nabla_V}$$

$$\left(\textit{resp. } \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)\otimes_{K_{\mathrm{a}}}K'\cong \left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\log}(V)[1/t]\right)^{\nabla_V}\cong \left(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)\otimes_{\mathcal{R}_K}\mathcal{R}_K[\log T]\right)^{\nabla_V}\right).$$

Dém. Le théorème 3.8 implique que $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)\cong \left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\Gamma_K}$. Par définition de ∇_V, on a $\left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\Gamma_K}\subseteq \left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\nabla_V}$. Car si $x\in \left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\Gamma_K}$, alors $\nu(x)=\lim_{\gamma\to \mathrm{Id}_{\Gamma_K}}\frac{\gamma(x)-x}{\chi(\gamma)-1}=0$. D'autre part, par définition, on a aussi, $\left(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)\right)^{\nabla_V}\subseteq \left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\nabla_V}$. On vérifie facilement que la dimension sur K' de $\left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\nabla_V}$ est inférieure ou égale à $\dim_{\mathbb{Q}_p}V$. Comme V est cristalline, $\dim_{\mathbb{Q}_p}V=\dim_{K_{\mathrm{a}}}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)=\dim_{K'}\left(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)\right)^{\nabla_V}$. D'où les premiers isomorphismes. Le cas semi-stable est analogue. $\square$

Théorème 4.4 (André, Kedlaya, Mebkhout). [**An02a**, 7.1.5][**Ked04**, 1.1][**Meb02**, 5.0-23] *Tout module à connexion sur $\mathcal{R}_K$, admettant une structure de Frobenius est quasi-unipotent.*

4.5. Rappels sur l'irrégularité d'une équation différentielle p-adique. On rappelle brièvement la définition de l'indice d'une équation différentielle p-adique introduite initialement par Robba (cf. [**ChMe01**, §2.3] et [**ChMe02**, §14]). Soient C un corps et u un endomorphisme d'un C-espace vectoriel V. On dit que u admet un indice si $\operatorname{Ker}u$ et $\operatorname{Coker}u$ sont de dimension finie et on appelle indice de u l'entier $\chi(u,V)=\dim_C\operatorname{Ker}u-\dim_C\operatorname{Coker}u$. On note $\mathcal{A}=\{\sum_{n=0}^{+\infty}a_nT^n\in\mathcal{R}\}$. C'est la sous-algèbre de $\mathcal{R}$ des séries convergentes sur le disque ouvert. On note γ_+ l'inclusion de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{R}$ et et γ^+ la troncation $\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nT^n\mapsto\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nT^n$ de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$. Pour tout nombre naturel n, on note abusivement γ_+ (resp. γ^+) l'inclusion de $\mathcal{A}^{\oplus n}$ dans $\mathcal{R}^{\oplus n}$ (resp. la projection de $\mathcal{R}^{\oplus n}$ sur $\mathcal{A}^{\oplus n}$). Soit M un module à connexion sur $\mathcal{R}$ de rang n. On choisit une base de M. Soient $\xi=T\frac{d}{dT}$ et G la matrice de la dérivation $\nabla_\xi:M\to M$ par rapport à cette base. Soit u le K_{a}-endomorphisme $T\frac{d}{dT}-G$ de $\mathcal{R}^{\oplus n}$. On dit que M admet un indice généralisé sur $\mathcal{A}$ si $\gamma^+\circ u\circ\gamma_+$ admet un indice. Ceci ne dépend pas de la base choisie. On note $\widetilde{\chi}(M,\mathcal{A})=\chi(\gamma^+\circ u\circ\gamma_+,\mathcal{A}^{\oplus n})$. Si deux modules à connexion sur $\mathcal{R}$, M' et M'' ont un indice généralisé, alors pour toute extension M de M' par M'', $\widetilde{\chi}(M,\mathcal{A})=\widetilde{\chi}(M',\mathcal{A})+\widetilde{\chi}(M'',\mathcal{A})$.

Théorème 4.6 (Christol-Mebkhout). *Soit M une équation différentielle p-adique ayant une structure de Frobenius. Alors M admet un indice généralisé sur $\mathcal{A}$.*

Dém. L'existence d'une structure de Frobenius implique la solubilité de M et que ses exposants sont non-Liouville (cf. [**ChMe01**, §2.5]). Le corps de constantes K_{a} est de valuation discrète donc maximalement complet. C'est donc un cas particulier de [**ChMe02**, Th. 14.11]. $\square$

Pour une équation différentielle p-adique M munie d'une structure de Frobenius, on appelle irrégularité de M et on note $\operatorname{irr}(M)$, l'indice généralisé $\widetilde{\chi}(M,\mathcal{A})$.

Remarque 4.7. 1. Soient L/K_{a} une extension finie et M un module libre de rang r sur $\mathcal{R}\otimes_{K_{\mathrm{a}}}L$ muni d'une connexion. On considère M comme une équation différentielle

p-adique sur $\mathcal{R}$ de rang $r\dim_{K_{\mathrm{a}}} L$. Si M admet un indice généralisé, on pose $\mathrm{irr}(M) = (\dim_{K_{\mathrm{a}}} L)^{-1}\widetilde{\chi}(M,\mathcal{A})$.
2. Soit M une équation différentielle p-adique sur $\mathcal{R}_K$. On choisit un élément π dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K^\dagger}$ comme dans 3.5. Via les isomorphismes $\psi_\pi : \mathcal{R}_{K'} \to \mathcal{R}_K$ et $\mathcal{R}_{K'} \cong \mathcal{R}\otimes_{K_{\mathrm{a}}} K'$, on peut définir l'irrégularité de M. On vérifie que ceci ne dépend pas du choix de π.
3. L'indice généralisé coïncide avec la définition d'indice sur $\mathcal{E}^\dagger$ de Tsuzuki dans [**Tsu98b**, §1](cf. [**Mat02**, §8]).

4.8. Équations quasi-unipotentes. La catégorie des équations différentielles p-adiques quasi-unipotentes est tannakienne neutre. On rappelle ici des constructions classiques (cf. [**An02a**] et [**Mat02**]). Soit $k(\!(T)\!)^{\mathrm{sep}}$ une clôture séparable fixée de $k(\!(T)\!)$ (dans la section 5 on suppose $k(\!(T)\!)^{\mathrm{sep}} \subset \mathrm{Fr}\,R$). Soit $E/k(\!(T)\!)$ une extension séparable finie contenue dans $k(\!(T)\!)^{\mathrm{sep}}$. On note k_E son corps résiduel, $\mathrm{G}_E = \mathrm{Gal}(k(\!(T)\!)^{\mathrm{sep}}/E)$ et I_E le sous-groupe d'inertie. On pose $\mathcal{E}(E) = (\mathcal{E}^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{G}_E}$, $\mathcal{E}^\dagger(E) = \mathcal{E}(E)\cap\mathcal{E}^{\dagger\mathrm{nr}}$ et $\mathcal{R}(E) = \mathcal{R}\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{E}^\dagger(E)$. Évidement, si E est égal au corps de normes E_L associé à une extension finie L/K, alors $\mathcal{E}(\mathrm{E}_L) = \mathcal{E}_L$, $\mathcal{E}^\dagger(\mathrm{E}_L) = \mathcal{E}_L^\dagger$ et $\mathcal{R}(\mathrm{E}_L) = \mathcal{R}_L$. Les propriétés qu'on a rappelées dans les sections précédentes pour $\mathcal{E}_L, \mathcal{E}_L^\dagger, \mathcal{R}_L$, en dehors de l'action de Γ_L, sont aussi valables pour $\mathcal{E}(E), \mathcal{E}^\dagger(E), \mathcal{R}(E)$. Soient F/E une extension galoisienne finie et M un $\mathcal{R}(E)$-module à connexion unipotent sur $\mathcal{R}(F)$. On considère le $\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k_F)$-espace vectoriel des sections horizontales
$$S_F(M) = (M\otimes_{\mathcal{R}(E)}\mathcal{R}(F)[\log T])^\nabla.$$
On le munit d'une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(F/E)$ et d'un endomorphisme nilpotent de la façon suivante. Pour tout $g\in\mathrm{Gal}(F/E)$ et $x\in M\otimes_{\mathcal{R}(E)}\mathcal{R}(F)[\log T]$, on pose $g(x) = (\mathrm{Id}\otimes g)(x)$. On considère sur $M\otimes_{\mathcal{R}(E)}\mathcal{R}(F)[\log T]$ l'application $\mathrm{Id}\otimes N$, où N est la $\mathcal{R}(F)$-dérivation de $\mathcal{R}(F)[\log T]$ qui envoie $\log T$ sur 1. Cette application commute avec l'action de $\mathrm{Gal}(F/E)$. Les diagrammes suivantes sont commutatifs :

$$\begin{CD}
M\otimes_{\mathcal{R}(E)}\mathcal{R}(F)[\log T] @>\nabla>> M\otimes_{\mathcal{R}(E)}\mathcal{R}(F)[\log T]\otimes_{\mathcal{R}_F}\hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}_F/\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k_F)}\\
@V{\mathrm{Id}\otimes g}VV @VV{\mathrm{Id}\otimes g\otimes dg}V\\
M\otimes_{\mathcal{R}(E)}\mathcal{R}(F)[\log T] @>\nabla>> M\otimes_{\mathcal{R}(E)}\mathcal{R}(F)[\log T]\otimes_{\mathcal{R}_F}\hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}_F/\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k_F)}
\end{CD}$$

et

$$\begin{CD}
M\otimes_{\mathcal{R}(E)}\mathcal{R}(F)[\log T] @>\nabla>> M\otimes_{\mathcal{R}(E)}\mathcal{R}(F)[\log T]\otimes_{\mathcal{R}_F}\hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}_F/\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k_F)}\\
@VV{\mathrm{Id}\otimes N}V @VV{\mathrm{Id}\otimes N\otimes\mathrm{Id}}V\\
M\otimes_{\mathcal{R}(E)}\mathcal{R}(F)[\log T] @>\nabla>> M\otimes_{\mathcal{R}(E)}\mathcal{R}(F)[\log T]\otimes_{\mathcal{R}_F}\hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}_F/\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k_F)}
\end{CD}$$

On en déduit sur $S_F(M)$, une action de $\mathrm{Gal}(F/E)$ et un endomorphisme, qu'on note $N_{S_F(M)}$, commutant entre eux. On vérifie facilement que $N_{S_F(M)}$ est nilpotent. On peut résumer ces données en disant que $S_F(M)$ est une $\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k_F)$-représentation semi-linéaire du schéma en groupes $\mathrm{Gal}(F/E)\times\mathbb{G}_a$, où $\mathrm{Gal}(F/E)$ est considéré comme schéma en groupes constant. La dimension de $S_F(M)$ sur $\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k_F)$ est par construction égale au rang de M.

Inversement, soit V une $\operatorname{Fr} W(k_F)$-représentation semi-linéaire de $\operatorname{Gal}(F/E)\times\mathbb{G}_a$. On note N_V l'endomorphisme nilpotent de V associé à l'action de $\mathbb{G}_a$. On pose

$$M_F(V)=\left\{x\in V\otimes_{\operatorname{Fr} W(k_F)}\mathcal{R}(F)[\log T]\;\middle|\;\begin{array}{c}\forall g\in\operatorname{Gal}(F/E),\ g(x)=x,\\ (N_V\otimes\operatorname{Id}+\operatorname{Id}\otimes N)(x)=0\end{array}\right\}.$$

Proposition 4.9. *Sous les hypothèses ci-dessus, $M_F(V)$ est un $\mathcal{R}(E)$-module libre de rang égal à la dimension de V.*

Dém. Comme $\mathcal{R}(F)=\mathcal{E}^\dagger(F)\otimes_{\mathcal{E}^\dagger(E)}\mathcal{R}(E)$ et $\mathcal{E}^\dagger(E)$ est un corps on vérifie que

$$(V\otimes_{\operatorname{Fr} W(k_F)}\mathcal{R}(F))^{\operatorname{Gal}(F/E)}=(V\otimes_{\operatorname{Fr} W(k_F)}\mathcal{E}^\dagger(F))^{\operatorname{Gal}(F/E)}\otimes_{\mathcal{E}^\dagger(E)}\mathcal{R}(E).$$

Comme $\operatorname{Gal}(\mathcal{E}^\dagger(F)/\mathcal{E}^\dagger(E))=\operatorname{Gal}(F/E)$, on en déduit par un raisonnement classique (cf. [**CL**, Ch.X Prop.3]) que $(V\otimes_{\operatorname{Fr} W(k_F)}\mathcal{R}(F))^{\operatorname{Gal}(F/E)}$ est un $\mathcal{R}(E)$-module libre de rang égal à la dimension de V. On définit un isomorphisme

$$f:(V\otimes_{\operatorname{Fr} W(k_F)}\mathcal{R}(F))^{\operatorname{Gal}(F/E)}\to M_F(V),$$

en posant $f(\sum_l v_l\otimes\alpha_l)=\sum_l\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^iN_V^i(v_l)\otimes\frac{1}{i!}\alpha_l(\log T)^i$, où r est un entier tel que $N_V^r=0$. L'application inverse $g:M_F(V)\to(V\otimes_{\operatorname{Fr} W(k_F)}\mathcal{R}(F))^{\operatorname{Gal}(F/E)}$, est induite par la projection $\mathcal{R}(F)[\log T]\to\mathcal{R}(F)$ qui envoie $\log T$ en 0. En fait, par construction $gf=\operatorname{Id}$ et pour conclure il suffit de montrer que g est injective. Soit $x=\sum_l v_l\otimes(\sum_{i=0}^d\alpha_{i,l}(\log T)^i)$. Supposons que $g(x)=\sum_l v_l\otimes\alpha_{0,l}=0$. La relation $(N_V\otimes\operatorname{Id}+\operatorname{Id}\otimes N)(x)=0$ équivaut à

$$(\star)\qquad \forall i=0,\ldots,d,\quad \sum_l N_V(v_l)\otimes\alpha_{i,l}=-\sum_l v_l\otimes(i+1)\alpha_{i+1,l}.$$

Comme $\sum_l v_l\otimes\alpha_{0,l}=0$, en appliquant $N_V\otimes\operatorname{Id}+\operatorname{Id}\otimes N$, on obtient $\sum_l N_V(v_l)\otimes\alpha_{0,l}=0$. D'où par $(\star)$, $\sum_l v_l\otimes\alpha_{1,l}=0$. Ainsi, par récurrence, on montre $x=0$. □

On munit $M_F(V)$ de la connexion induite par $d:\mathcal{R}(F)[\log T]\to\hat\Omega^1_{\mathcal{R}(F)/\operatorname{Fr} W(k_F)}$ et la connexion triviale sur V. Par construction, il est quasi-unipotent. Les inclusions naturelles

$$S_F(M)\subseteq M\otimes_{\mathcal{R}(E)}\mathcal{R}(F)[\log T]\text{ et }M_F(V)\subseteq V\otimes_{\operatorname{Fr} W(k_F)}\mathcal{R}(F)[\log T]$$

induisent par linéarisation des isomorphismes

$$S_F(M)\otimes_{\operatorname{Fr} W(k_F)}\mathcal{R}(F)[\log T]\to M\otimes_{\mathcal{R}(E)}\mathcal{R}(F)[\log T],$$
$$M_F(V)\otimes_{\mathcal{R}(E)}\mathcal{R}(F)[\log T]\to V\otimes_{\operatorname{Fr} W(k_F)}\mathcal{R}(F)[\log T]$$

compatibles aux structures supplémentaires. On en déduit que le foncteur M_F est un quasi-inverse de S_F.

On introduit une variante de ces équivalences après extension des scalaires à $\overline{K}$. On rappelle que le produit $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}=\mathcal{R}(E)\otimes_{\operatorname{Fr} W(k_E)}\overline{K}$ est intègre car $\operatorname{Fr} W(k_E)$ est algébriquement fermé dans $\mathcal{R}(E)$. Pour une extension galoisienne $E/k((T))$, on étend linéairement l'action de l'inertie $I(E/k((T)))$ à $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$. Si F/E est une extension galoisienne finie, alors $\mathcal{R}(F)_{\overline{K}}^{I(F/E)}=\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$. Tout module à connexion M, libre de type fini sur $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$, provient par extension des scalaires, d'un module M', libre de type fini sur $\mathcal{R}(E)\otimes_{\operatorname{Fr} W(k_E)}L$, où L est une extension finie de $\operatorname{Fr} W(k_E)$ contenue dans $\overline{K}$. On peut donc parler d'irrégularité de M (cf. Rem.4.7-1 et 4.7-2). Soit M un module à connexion sur $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$, unipotent sur $\mathcal{R}(F)_{\overline{K}}$. On pose

$$S'_F(M) = (M \otimes_{\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}} \mathcal{R}(F)_{\overline{K}}[\log T])^{\nabla}.$$

C'est une représentation linéaire de $I(F/E)\times\mathbb{G}_a$. De façon analogue à ci-dessus, le foncteur S'_F est une équivalence de catégories entre modules à connexion sur $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$, unipotents sur $\mathcal{R}(F)_{\overline{K}}$ et représentations linéaires sur $\overline{K}$ du schéma en groupes $I(F/E) \times \mathbb{G}_a$. Un quasi-inverse est donné par

$$M'_F(V) = \left\{ x \in V \otimes_{\overline{K}} \mathcal{R}(F)_{\overline{K}}[\log T] \,\middle|\, \begin{array}{c} \forall g \in I(F/E),\, g(x) = x, \\ (N_V \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

Pour tout $\mathcal{R}(E)$-module à connexion M, on considère son extension des scalaires $M \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_E)} \overline{K}$ comme module à connexion sur $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$. Il est évident que $S'_F(M \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_E)} \overline{K}) = S_F(M) \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_F)} \overline{K}$, où on ne considère sur $S_F(M)$ que l'action du sous-groupe $I(F/E) \times \mathbb{G}_a$ de $\mathrm{Gal}(F/E) \times \mathbb{G}_a$.

La proposition suivante est une variante d'une proposition de Tsuzuki [**Tsu98b**].

Proposition 4.10. [**An02a**, 7.1.2] *Soient M un $\mathcal{R}(E)$-module à connexion quasi-unipotent et F/E une extension galoisienne finie telle que M soit unipotent sur $\mathcal{R}(F)$. Alors l'irrégularité de M est égale au conducteur de Swan de la représentation $S_F(M)$ du groupe d'inertie $I(F/E)$.*

Dém. Comme le conducteur de Swan et l'irrégularité ne varient pas par extension des scalaires on peut tensoriser avec $\overline{K}$. L'équivalence S'_F induit un isomorphisme entre le groupe de Grothendieck des $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$-modules à connexion, unipotents sur $\mathcal{R}(F)_{\overline{K}}$ et le groupe de Grothendieck des représentations de $I(E/F)\times\mathbb{G}_a$ sur $\overline{K}$. Dans ce dernier la classe d'une représentation V de $I(E/F) \times \mathbb{G}_a$ est égale à la classe de sa restriction à $I(F/E)$. Comme le conducteur de Swan et l'irrégularité se factorisent par le groupe de Grothendieck, il suffit de vérifier qu'ils se correspondent par S'_F. Dans cet isomorphisme l'induction d'une représentation correspond à l'oubli de structure pour le module à connexion correspondant. Le conducteur de Swan et l'irrégularité varient de la même façon par rapport à l'induction et à l'oubli respectivement. On peut, en appliquant le théorème d'induction de Brauer (cf. [**Ser67**, §10]), se réduire au cas de dimension 1. Soit M un module à connexion sur $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$ de rang 1, unipotent sur $\mathcal{R}(F)_{\overline{K}}$. On considère la représentation $S = S'_F(M)$ de $I = I(F/E)$. Soit Λ l'extension finie de $\mathbb{Q}_p$, obtenue en ajoutant les racines m-ièmes de l'unité, où m est l'exposant du groupe I. Par un autre théorème de Brauer (cf.[**Ser67**, §12.2, Th.24]), il existe une représentation S_0 de I sur Λ telle que $S \cong S_0 \otimes_\Lambda \overline{K}$. On note $\Lambda' \subseteq \overline{K}$ l'extension non-ramifiée de Λ de corps résiduel k_F. On rappelle que Tsuzuki [**Tsu98b**] associe à S_0 un module à connexion $\mathcal{D}^\dagger(S_0)$ sur $\Lambda' \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_E)} \mathcal{E}^\dagger(E)$, d'irrégularité égale au conducteur de Swan de S_0 (en fait le cas de dimension 1 est dû à Matsuda [**Mat95**]). On vérifie que $\mathcal{D}^\dagger(S_0) = \left(S_0 \otimes_\Lambda (\Lambda' \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_F)} \mathcal{E}^\dagger(F))\right)^I$, avec la connexion induite par celle de

$\mathcal{E}^\dagger(F)$. Comme S est de rang 1, on a $M'_F(S) = (S \otimes_{\overline{K}} \mathcal{R}(F)_{\overline{K}})^I$. On termine par,

$$\begin{aligned} M'_F(S) &\cong \Big(S_0 \otimes_\Lambda \overline{K} \otimes_{\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k_F)} \big(\mathcal{E}^\dagger(F) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger(E)} \mathcal{R}(E)\big)\Big)^I \\ &\cong (S_0 \otimes_\Lambda \Lambda' \otimes_{\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k_F)} \mathcal{E}^\dagger(F))^I \otimes_{(\Lambda' \otimes_{\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k_E)} \mathcal{E}^\dagger(E))} (\overline{K} \otimes_{\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k_E)} \mathcal{R}(E)) \\ &\cong \mathcal{D}^\dagger(S_0) \otimes_{(\Lambda' \otimes_{\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k_E)} \mathcal{E}^\dagger(E))} \mathcal{R}(E)_{\overline{K}}. \end{aligned}$$

□

5. Preuve du théorème 1.1 et corollaires

Soient V une représentation p-adique de G_K et L/K une extension galoisienne finie. On rappelle (cf. §3.6) que les modules $\mathrm{D}(V_{|\mathrm{G}_L})$, $\mathrm{D}^\dagger(V_{|\mathrm{G}_L})$ et $\mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V_{|\mathrm{G}_L})$ sont munis d'une action naturelle de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$. Pour tout $x \in \mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V_{|\mathrm{G}_L})[1/t]$ et $g \in \mathrm{Gal}(L_\infty/K)$, $g(t^{-1}\nu(x)) = \chi(g)^{-1}t^{-1}\nu(g(x))$. Pour V de de Rham, on en déduit une action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ sur $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_{|\mathrm{G}_L})$. On munit les modules $\mathrm{D}(V)$, $\mathrm{D}^\dagger(V)$, $\mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ et $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ de l'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ via le quotient Γ_K.

LEMME 5.1. *Soient V une représentation p-adique de G_K et L/K une extension galoisienne finie. On a des isomorphismes canoniques :*

i) $\mathrm{D}(V_{|\mathrm{G}_L}) \cong \mathcal{E}_L \otimes_{\mathcal{E}_K} \mathrm{D}(V)$;

ii) $\mathrm{D}^\dagger(V_{|\mathrm{G}_L}) \cong \mathcal{E}^\dagger_L \otimes_{\mathcal{E}^\dagger_K} \mathrm{D}^\dagger(V)$;

iii) $\mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V_{|\mathrm{G}_L}) \cong \mathcal{R}_L \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$;

iv) pour V de de Rham, $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_{|\mathrm{G}_L}) \cong \mathcal{R}_L \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$.

Ces isomorphismes sont compatibles avec les actions de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$.

DÉM. i) On a une application $\mathcal{E}_K$-linéaire injective $\mathrm{D}(V) \to \mathrm{D}(V_{|\mathrm{G}_L})$, compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$. Comme $\dim_{\mathcal{E}_K} \mathrm{D}(V) = \dim_{\mathcal{E}_L} \mathrm{D}(V_{|\mathrm{G}_L}) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$, elle induit un isomorphisme $\mathcal{E}_L \otimes_{\mathcal{E}_K} \mathrm{D}(V) \cong \mathrm{D}(V_{|\mathrm{G}_L})$ équivariant pour l'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$. ii) est une conséquence du Théorème 3.7. iii) se déduit directement de ii). iv) L'injection $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \subseteq \mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]$ entraîne que $\mathcal{R}_L \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \subseteq \mathcal{R}_L \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)[1/t] = \mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V_{|\mathrm{G}_L})[1/t]$. C'est un sous-$\mathcal{R}_L$-module stable par $t^{-1}\nu$, par l'unicité de $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_{|\mathrm{G}_L})$ il est égal à $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_{|\mathrm{G}_L})$. □

Soit V une représentation potentiellement semi-stable de G_K. Choisissons une extension galoisienne finie L/K telle que la restriction de V à G_L soit semi-stable. Soit L'/K_{a} l'extension finie non-ramifiée associée à L dans la section §3.1 (au dessus de Lemme 3.3). On considère le L'-espace vectoriel des sections horizontales

$$S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) = (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_L[\log T])^{\nabla_V}.$$

L'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ sur $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_L[\log T]$ commute avec la connexion par la définition même de cette dernière (cf. §4.1). On en déduit une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ sur $S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))$. La restriction de cette action au sous-groupe $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ correspond via l'identification $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K) \cong \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ à l'action décrite au §4.8.

PROPOSITION 5.2. *Soient V une représentation galoisienne p-adique de G_K et L/K une extension galoisienne finie telle que la restriction de V à G_L soit semi-stable. Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)\otimes_{\mathcal{R}_K}\mathcal{R}_L[\log T]\cong \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L})\otimes_{L_{\mathrm{a}}}\mathcal{R}_L[\log T]. \tag{5.1}$$

Le groupe $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ agit sur le deux membres de (5.1) : à gauche comme décrit plus haut et à droite diagonalement, par son quotient $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L})$ et par son action naturelle sur $\mathcal{R}_L[\log T]$. L'isomorphisme (5.1) est équivariant pour cette action. Il est aussi horizontal où on considère à droite la connexion triviale sur $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L})$. De façon équivalente, en prenant les sections horizontales, on un isomorphisme canonique $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$-équivariant

$$S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))\cong \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L})\otimes_{L_{\mathrm{a}}}L'. \tag{5.2}$$

Par conséquent, l'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ sur $S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))$ se factorise par son quotient fini $\mathrm{Gal}(L\otimes_{L_{\mathrm{a}}}L'/K)$. Le conducteur de Swan de V est égal à $\mathrm{sw}(I(L\otimes_{L_{\mathrm{a}}}L'/K),S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)))$.

DÉM. Par le corollaire 4.3, on a un isomorphisme

$$\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L})\otimes_{L_{\mathrm{a}}}L'\cong \left(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_{|\mathrm{G}_L})\otimes_{\mathcal{R}_L}\mathcal{R}_L[\log T]\right)^{\nabla_V}.$$

Il est équivariant par rapport à l'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ car il est le composé de l'isomorphisme équivariant du théorème 3.8 avec une inclusion naturelle. Cette action se factorise évidemment par $\mathrm{Gal}(L\otimes_{L_{\mathrm{a}}}L'/K)$. Le lemme 5.1-iv) donne un isomorphisme, $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$-équivariant,

$$\left(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_{|\mathrm{G}_L})\otimes_{\mathcal{R}_L}\mathcal{R}_L[\log T]\right)^{\nabla_V}\cong \left(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)\otimes_{\mathcal{R}_K}\mathcal{R}_L[\log T]\right)^{\nabla_V}=S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)).$$

Ceci montre (5.2). L'isomorphisme (5.1) suit en tensorisant (5.2) par $\mathcal{R}_L[\log T]$ au dessus de L' et en composant avec l'isomorphisme canonique $S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))\otimes_{L'}\mathcal{R}_L[\log T]\cong \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)\otimes_{\mathcal{R}_K}\mathcal{R}_L[\log T]$. □

REMARQUE 5.3. Un résultat analogue à la proposition 5.2 a été démontré par N.Wach pour les représentations sur un corps absolument non-ramifié, qui sont de de Rham et de hauteur finie (cf. [**Wa96**, A5 et B1.4.2]).

Soit L/K une extension galoisienne finie quelconque contenue dans $\overline{K}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $G_n=\mathrm{Gal}(L_n/K_n)$ et I_n son sous-groupe d'inertie. Pour $n\in\mathbb{N}$, la restriction induit un monomorphisme de groupes $f_n:G_{n+1}\hookrightarrow G_n$. Soit $n(L)$ le plus petit entier tel que $K_{n(L)}$ contienne l'intersection de L avec K_∞. Pour $n\geq n(L)$, f_n est un isomorphisme et le groupe G_n est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$. Par abus on note encore $f_n:\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)\to G_n$ cet isomorphisme. Le lemme suivant est une reformulation d'un résultat classique de Sen (cf. [**Sen69**, Lemma 1, pg. 40] et [**Win83**, 3.3.2]).

LEMME 5.4. *Pour n assez grand la filtration de ramification supérieure et inférieure de G_n est stationnaire et correspond via l'isomorphisme f_n à la filtration de ramification de $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$.*

DÉM. On utilise ici une définition différente du corps de normes mais équivalente à celle donnée dans le paragraphe 3.1. On considère la limite projective d'ensembles $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{K_n}$, où les applications de transitions sont les normes. Cet ensemble est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K}$ muni de la multiplication composante par composante et de la somme donnée par la formule suivante. Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K}$, alors $(x+y)_n = \lim_{m\to+\infty} N_{K_m/K_n}(x_m + y_m)$. On note $G = \mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$. Soit $\pi \in \mathrm{E}_L$ une uniformisante. Comme $(L_n/K)_{n\geq 1}$ est cofinal dans l'ensemble des sous-extension finies de L_∞/K, on peut écrire $\pi = (\pi_n)_{n\geq 1}$ avec $\pi_n \in L_n$. Soit $n' \geq n(L)$ un entier tel que $L_\infty/L_{n'}$ soit totalement ramifiée. Pour tout $n \geq n'$, π_n est une uniformisante de L_n. Pour tout $g \in G$ et $n \geq n'$, on pose $i(g) = i_G(g) = \mathrm{v}_{\mathrm{E}_L}(g(\pi) - \pi)$ et $i_n(g) = i_{G_n}(f_n(g)) = \mathrm{v}_{L_n}(f_n(g)(\pi_n) - \pi_n)$. On doit montrer que $i(g) = \lim_{n\to+\infty} i_n(g)$. En fait,

$$\begin{aligned}
i(g) = \mathrm{v}_{\mathrm{E}_L}(g(\pi)-\pi) &= \mathrm{v}_{L_{n'}}((g(\pi)-\pi)_{n'}) = \\
&= \mathrm{v}_{L_{n'}}\left(\lim_{n'\leq n\to+\infty} N_{L_n/L_{n'}}(g(\pi_n)-\pi_n)\right) = \\
&= \lim_{n'\leq n\to+\infty} \mathrm{v}_{L_{n'}}(N_{L_n/L_{n'}}(g(\pi_n)-\pi_n)) = \\
&= \lim_{n'\leq n\to+\infty} \mathrm{v}_{L_n}((g(\pi_n)-\pi_n)) = \lim_{n\to+\infty} i_n(g).
\end{aligned}$$

□

On rappelle qu'on a noté $V_n = V_{|\mathrm{G}_{K_n}}$.

LEMME 5.5. *Soit V une représentation potentiellement semi-stable. La suite $(\mathrm{sw}(V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.*

DÉM. Par définition $\mathrm{sw}(V_n) = \mathrm{sw}(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V_n)_{|I_{K_n}})$. On a un monomorphisme évident $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V_n) \hookrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|\mathrm{G}_{K_n}}$, qui est un isomorphisme car $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V_n)$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ ont la même dimension. Donc $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V_n)_{|I_{K_n}} \cong \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|I_{K_n}}$ et l'action de I_{K_n} se factorise par I_n. Par le lemme 5.4, pour n assez grand, le conducteur $\mathrm{sw}(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|I_{K_n}})$ est constant. □

Soit V une représentation de G_K qui devient semi-stable sur L. Pour un entier n assez grand, on considère $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V_n) = K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}} \otimes_{L'} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_{L_n}})$ comme $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$-représentation semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$ via l'isomorphisme f_n. Cette représentation ne dépend pas de n. Sa restriction à l'inertie est linéaire. Dans la suite on la considère comme une représentation de $\mathrm{G}_{\mathrm{E}_K}$ et on la note $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V)$. Par le lemme 5.5,

$$\mathrm{sw}(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V)) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{sw}(V_n). \tag{5.3}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1. Par le théorème de monodromie p-adique la représentation V est potentiellement semi-stable. Soit L/K une extension galoisienne finie telle que $V_{|\mathrm{G}_L}$ soit semi-stable. On choisit un entier n assez grand de façon que $G_n = \mathrm{Gal}(L_n/K_n)$ soit isomorphe à $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$ avec leurs filtrations de ramifications. Donc $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V_n)$ et $\mathrm{sw}(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V)) = \mathrm{sw}(I(L_n/K_n), \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_{L_n}}))$. Par la proposition 5.2, on a un isomorphisme $S_{\mathrm{E}_{L_n}}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) \cong \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_{L_n}})$, équivariant par rapport à l'action de $\mathrm{Gal}(L_n/K)$. D'où, par restriction, l'égalité de $\mathrm{sw}(I(L_n/K_n), \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_{L_n}}))$ et de $\mathrm{sw}(I(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K), S_{\mathrm{E}_{L_n}}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)))$. Comme $\mathrm{E}_L = \mathrm{E}_{L_n}$, ce dernier est égal à l'irrégularité de $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$, par la proposition 4.10. □

LEMME 5.6. *Soient V une représentation galoisienne p-adique de G_K, L/K une extension galoisienne finie telle que $V_{|\mathrm{G}_L}$ soit semi-stable et n' le plus petit entier tel que $K_{n'} \supseteq (L \otimes_{L_{\mathrm{a}}} L') \cap K_\infty$. Alors :*

i) Pour tout $n \geq n'$, $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_n) = \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{n'}) \cong (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_K[\log T])^{\nabla_V}$.

ii) Pour tout $n \geq n'$, $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V_n) = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V_{n'}) \cong (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))^{\nabla_V}$.

DÉM. On pose $D = \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L})$. i) On considère l'isomorphisme (5.1) (prop. 5.2), $D \otimes_{L_{\mathrm{a}}} \mathcal{R}_L[\log T] \cong \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_L[\log T]$. En prenant les sections horizontales et les points fixès par $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$, on obtient $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{n'}) = (D \otimes_{L_{\mathrm{a}}} L')^{\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)} = (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_K[\log T])^{\nabla_V}$. Pour $m \geq n'$, de façon analogue, on obtient $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_m) = (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_{K_m}[\log T])^{\nabla_V}$. Comme $\mathrm{H}_{K_m} = \mathrm{H}_K$, on a $\mathcal{R}_K = \mathcal{R}_{K_m}$ en tant qu'anneaux. D'où $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_m) = \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{n'})$. ii) Par la proposition 5.2,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))^{\nabla_V} &\cong (M_{\mathrm{E}_L}(D \otimes_{L_{\mathrm{a}}} L'))^{\nabla} \\
&= \left\{ x \in D \otimes_{L_{\mathrm{a}}} \mathcal{R}_L[\log T] \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall g \in \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty),\ g(x) = x, \\ (N_D \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)(x) = 0, \\ (\mathrm{Id} \otimes d)(x) = 0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ x \in D \otimes_{L_{\mathrm{a}}} L' \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall g \in \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty),\ g(x) = x, \\ (N_D \otimes \mathrm{Id})(x) = 0 \end{array} \right\} = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V_{n'}).
\end{aligned}
$$

On conclut comme dans i). □

COROLLAIRE 5.7. *Soit V une représentation de de Rham de G_K. Alors :*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{ar}(V_n) = \mathrm{irr}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) + \mathrm{rg}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) - \dim_{K'} (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_K[\log T])^{\nabla_V}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{ar}_{\mathrm{cris}}(V_n) = \mathrm{irr}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) + \mathrm{rg}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) - \dim_{K'} (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))^{\nabla_V}.$$

DÉM. Soit L/K une extension galoisienne finie telle que $V_{|\mathrm{G}_L}$ soit semi-stable. On pose $D = \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L})$. On rappelle que $\dim_{L_{\mathrm{a}}} D^{I(L/K)} = \dim_{K_{\mathrm{a}}} D^{\mathrm{Gal}(L/K)}$ car $H^1(\mathrm{Gal}(k_L/k), \mathrm{GL}_n(L_{\mathrm{a}}))$ est triviale (cf. [**CL**, Ch.X, Prop.3]). On a $\mathrm{ar}(V) - \mathrm{sw}(V) = \dim_{L_{\mathrm{a}}} D - \dim_{L_{\mathrm{a}}} D^{I(L/K)} = \dim_{L_{\mathrm{a}}} D - \dim_{K_{\mathrm{a}}} D^{\mathrm{Gal}(L/K)} = \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) = \mathrm{rg}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) - \dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)$. Par le théorème 1.1 et le lemme 5.6-i) on obtient la première formule. On en déduit facilement la deuxième en utilisant la définition de $\mathrm{ar}_{\mathrm{cris}}(V)$ et 5.6-ii). □

REMARQUE 5.8. Le corollaire 5.7 généralise un résultat de Berger (cf. Th. 4.2 et [**Berg02**, Th. 5.20]) : l'équation $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ est unipotente (resp. triviale) si et seulement si V est semi-stable (resp. cristalline) sur K_n, pour n assez grand. En effet V est semi-stable (resp. cristalline) sur K_n si et seulement si $\mathrm{ar}(V_n) = 0$ (resp. $\mathrm{ar}_{\mathrm{cris}}(V_n) = 0$).

L'équation $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ est unipotente (resp. triviale) si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) = \dim_{K'}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)\otimes_{\mathcal{R}_K}\mathcal{R}_K[\log T])^{\nabla_V}$ (resp. $\mathrm{rg}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) = \dim_{K'}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))^{\nabla_V}$) et dans ce cas on a aussi $\mathrm{irr}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) = 0$.

Soit M une équation différentielle p-adique ayant une structure de Frobenius. Dans [**ChMe01**], Christol et Mebkhout associent à M une décomposition en somme directe indexée par les rationnels, la décomposition par les pentes p-adiques. C'est un théorème profond de la théorie que la hauteur du polygone de Newton associé à cette décomposition est égale à l'indice $\widetilde{\chi}(M,\mathcal{A})$.

COROLLAIRE 5.9. *Soient V une représentation galoisienne p-adique de G_K et L/K une extension galoisienne finie telle que la restriction de V à G_L soit semi-stable.*

i) On a un isomorphisme $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$-équivariant,

$$\mathrm{D}^{\infty}_{\mathrm{pst}}(V)\cong K^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{a}}\otimes_{L'} S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)).$$

*ii) Sous l'isomorphisme du i), la décomposition de $K^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{a}}\otimes_{L'} S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))$ induite par les pentes p-adiques de $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$, correspond à la décomposition par les pentes de Swan de $\mathrm{D}^{\infty}_{\mathrm{pst}}(V)$ (cf. [**Kat88**, Ch. 1]). Par conséquent, on a l'égalité des polygones de Newton associés.*

DÉM. On déduit l'assertion i) par restriction de l'isomorphisme (5.2) (prop.5.2) à $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$. Pour ii), soit $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) = \oplus_{q\in\mathbb{Q}}\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)_q$ la décomposition par les pentes p-adiques. On pose $D_q = K^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{a}}\otimes_{L'} S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)_q)$. C'est un facteur directe de $\mathrm{D}^{\infty}_{\mathrm{pst}}(V)$ de dimension égal au rang de $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)_q$. C'est stable par φ et N. Par la proposition 4.10, on a $\mathrm{sw}(D_q) = \mathrm{irr}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)_q) = q\,\mathrm{rg}\,\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)_q = q\dim_{K^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{a}}} D_q$. Pour conclure il suffit de montrer que toute pente de Swan de D_q est égale à q. Soient s une pente de Swan de D_q et $D_{q,s}\neq 0$ sa partie isopentique de pente s. Par [**Kat88**, Lemma 1.8], $D_{q,s}$ est stable par $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$. Comme φ et N commutent avec $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$, l'unique pente possible pour $\varphi(D_{q,s})$ et $N(D_{q,s})$ est s. Comme $D_{q,s}$ est maximal de pente s, on a $\varphi(D_{q,s})\subseteq D_{q,s}$ et $N(D_{q,s})\subseteq D_{q,s}$. On en déduit que $M_{\mathrm{E}_L}(D_{q,s})$ est un sous-module différentiel de $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)_q$ muni d'un Frobenius. Donc $M_{\mathrm{E}_L}(D_{q,s})$ a comme seule pente q. Par 4.10,

$$s\dim_{K^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{a}}} D_{q,s} = \mathrm{sw}(D_{q,s}) = \mathrm{irr}(M_{\mathrm{E}_L}(D_{q,s})) = q\,\mathrm{rg}\,M_{\mathrm{E}_L}(D_{q,s}) = q\dim_{K^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{a}}} D_{q,s}.$$

D'où $s = q$. □

Deuxième partie

Facteurs Epsilon p-adiques

Notations et conventions

0.1. Dans toute cette partie, K désigne un corps de valuation discrète complet. On note $\mathcal{O}_K$ l'anneau de valuation de K, $\mathfrak{m}_K$ son idéal maximal et k son corps résiduel qu'on supposera parfait de caractéristique $p > 0$. On note v_K la valuation de K normalisée par $\mathrm{v}_K(K^*) = \mathbb{Z}$. Soient K^{sep} une clôture séparable de K, k^{sep} le corps résiduel de K^{sep} (qui est une clôture séparable de k), G_K (resp. G_k) le groupe de Galois de K^{sep} sur K (resp. k^{sep} sur k) et I_K le groupe d'inertie de K ; de sorte qu'on ait une suite exacte

$$\mathbf{1} \longrightarrow I_K \longrightarrow G_K \longrightarrow G_k \longrightarrow \mathbf{1} .$$

On note σ le Frobenius absolu de k^{sep}, défini par $\sigma(x) = x^p$.

0.2. Sauf mention explicite du contraire, on sous-entend par module sur un anneau un module à *gauche*.

0.3. Pour un anneau commutatif A, on note $\mathrm{W}(A)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans A. Pour tout endomorphisme f de A, on notera encore f l'endomorphisme de $\mathrm{W}(A)$ déduit par fonctorialité.

0.4. Soient G un groupe, A un anneau commutatif, M un A-module. Supposons que G agit à gauche sur A par des automorphismes d'anneaux. On dira que M est muni d'une action *semi-linéaire* de G s'il est muni d'un homomorphisme $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(M)$ tel que pour tout $\gamma \in G$, $a \in A$ et $m \in M$, on a $\rho(\gamma)(am) = \gamma(a)\rho(\gamma)(m)$.

Si A est muni d'un endomorphisme σ, on dit qu'un homomorphisme de groupes $f\colon M \to N$ est un morphisme *σ-linéaire* si pour tout $m \in M$ et $a \in A$, on a $f(am) = \sigma(a)f(m)$.

CHAPITRE 1

Représentations de Weil-Deligne

1.1. Représentations de Weil, Weil-Deligne et caractères additifs

1.1.1. On désigne par K un corps de valuation discrète complet, et on reprend les notations (0.1). On suppose de plus *le corps résiduel k de K fini de cardinal $q = p^f$*. On note $\|x\|_K = q^{-\mathrm{v}_K(x)}$ la valeur absolue d'un élément x de K.

L'automorphisme $\mathrm{F}^* = \sigma^{-f}$ est un générateur topologique de G_k, qui l'identifie à $\widehat{\mathbb{Z}}$, et induit ainsi un homomorphisme $\nu\colon G_K \to \widehat{\mathbb{Z}}$. On appelle groupe de Weil de K^{sep} sur K et on note W_K le sous-groupe de G_K image inverse de $\mathbb{Z}$ par ν. Cette définition ne dépend pas du générateur topologique de G_k choisi. On appellera *Frobenius géométrique* tout élément de W_K qui relève F^*.

Pour toute extension finie L de K, W_L est un sous-groupe d'indice fini de W_K ; si de plus L/K est galoisienne, alors W_L est distingué dans W_K et le quotient s'identifie au groupe de Galois de L sur K.

Dans toute cette partie, C désigne un corps de caractéristique 0.

Définition 1.1.2. On dit qu'une représentation de W_K dans un C-espace vectoriel de dimension finie est une représentation de Weil si elle est triviale sur un sous-groupe ouvert de I_K. On notera $\mathrm{Rep}_C(W_K)$ la catégorie abélienne des C-représentations de Weil de K.

Proposition 1.1.3. *Supposons C algébriquement clos et soit (V,ρ) une C-représentation irréductible de Weil de K. Alors il existe un caractère non ramifié $\chi\colon W_K \to C^*$ et une C-représentation (V,ρ') de W_K qui se factorise par un quotient fini, tels que $\rho = \rho' \otimes \chi$.*

Dém. On note $W = \rho(W_K)$ et $\overline{\rho}$ l'inclusion $W \hookrightarrow \mathrm{GL}_C(V)$. On a la suite exacte

$$\mathbf{1} \longrightarrow I_K/I_K \cap \mathrm{Ker}\,\rho \longrightarrow W \longrightarrow \mathbb{Z}/\nu(\mathrm{Ker}\,\rho) \longrightarrow \mathbf{1}\ .$$

Le groupe $I = I_K/I_K \cap \mathrm{Ker}\,\rho$ est fini. Si $\nu(\mathrm{Ker}\,\rho) \neq 0$, alors W est fini et l'assertion est démontrée en prenant $\rho' = \rho$ et χ trivial. Sinon, le groupe W est une extension de I par $\mathbb{Z}$. On choisit un Frobenius géométrique de W_K et on note ϕ son image dans W. Si n est l'ordre du groupe $\mathrm{Aut}(I)$, alors pour tout $x \in I$, on a $\phi^n x \phi^{-n} = x$. On en déduit que ϕ^n appartient à $Z(W)$, le centre de W. On note H le sous-groupe de W engendré par ϕ^n. Il est isomorphe à $\mathbb{Z}$, distingué dans W et d'indice fini (en effet, le quotient W/H est une extension de I par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). Par le lemme de Schur, la restriction de $\overline{\rho}$ à H se factorise à travers un caractère $\widetilde{\chi}$:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\overline{\rho}_{|H}"] \arrow[dr, "\widetilde{\chi}"'] & \mathrm{GL}_C(V) \\ & C^* \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Soient $\tilde{z} = \widetilde{\chi}(\phi^n)$, z une racine n-ième de $\tilde{z}$, χ le caractère de W_K définit par $\chi(g) = z^{\nu(g)}$; donc $\chi(g) = \widetilde{\chi}(g)$, pour $g \in H$. On prend $\rho' = \rho\chi^{-1}$. □

1.1.4. La théorie du corps de classe local fournit un isomorphisme, dit de réciprocité, entre le plus grand quotient abélien W_K^{ab} de W_K et K^*, normalisé de sorte que la classe d'un Frobenius géométrique corresponde à une uniformisante de K. On note $r_K \colon W_K \to K^*$ l'homomorphisme obtenu en composant la projection canonique de W_K sur W_K^{ab} avec l'isomorphisme de réciprocité. Se donner une C-représentation de Weil de K de rang 1 revient à se donner un homomorphisme localement constant $K^* \to C^*$. Un tel homomorphisme est classiquement appelé *quasi-caractère*. Il est dit non ramifié s'il est trivial sur $\mathcal{O}_K^*$; il correspond alors à une C-représentation de Weil non-ramifiée de rang 1.

DÉFINITION 1.1.5. Une C-représentation de Weil-Deligne de K est la donnée d'une représentation de Weil (V, ρ) de K, munie d'une application C-linéaire $N \colon V \to V$ nilpotente, telle que pour tout w dans W_K, on ait

$$\rho(w)N\rho(w)^{-1} = q^{\nu(w)}N.$$

On note $\mathrm{Rep}_C(WD_K)$ la catégorie des C-représentations de Weil-Deligne de K, les morphismes étant les applications linéaires qui commutent aux actions de W_K et N.

1.1.6. Une C-représentation de Weil de K est une représentation de Weil-Deligne en prenant $N = 0$. On identifie ainsi $\mathrm{Rep}_C(W_K)$ à une sous catégorie strictement pleine de $\mathrm{Rep}_C(WD_K)$. Le foncteur $(V, \rho, N) \mapsto (\mathrm{Ker}\, N, \rho_{|\,\mathrm{Ker}\, N})$, de $\mathrm{Rep}_C(WD_K)$ dans $\mathrm{Rep}_C(W_K)$, est un adjoint à droite de l'inclusion et aussi un quasi-inverse à gauche.

1.1.7. Soit Γ un groupe commutatif. On note Γ_p (resp. Γ_{p^∞}) le sous-groupe de Γ des éléments d'ordre p (resp. une puissance de p). On appelle *caractère additif de K à valeurs dans Γ* un homomorphisme localement constant du groupe additif de K dans Γ, K étant muni de la topologie induite par la valuation v_K. Un tel homomorphisme se factorise par Γ_{p^∞} (en fait par Γ_p si K est de caractéristique p). On s'intéresse surtout aux cas $\Gamma = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ et $\Gamma = C^*$. Dans le second cas, on notera $\mu_{p^\infty}(C) = \Gamma_{p^\infty}$ et $\mu_p(C) = \Gamma_p$. On note $\mathrm{Hom}_{\mathrm{c}}(K, \Gamma)$ le groupe des caractères additifs de K à valeurs dans Γ.

Soit ψ un caractère additif non-trivial de K à valeurs dans Γ. On appelle codifférente de ψ et on note $\mathcal{D}(\psi)^{-1}$, l'idéal fractionnaire de K défini par,

$$\mathcal{D}(\psi)^{-1} = \{x \in K \mid \forall y \in \mathcal{O}_K, \psi(xy) = 1\}.$$

L'inverse de la codifférente, noté $\mathcal{D}(\psi)$, est appelé différente ; on prolonge cette définition en posant $\mathcal{D}(1_K) = (0)$, où 1_K est le caractère trivial. On appelle ordre de ψ et on note $d(\psi)$, l'entier

$$d(\psi) = \mathrm{v}_K\big(\mathcal{D}(\psi)\big) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid \psi(\mathfrak{m}_K^{-n}) = 1\}.$$

1.1.8. L'action de K sur lui même par multiplication induit une action de K sur $\mathrm{Hom}_c(K, \Gamma)$ qui en fait un K-espace vectoriel.

La dimension de $\mathrm{Hom}_c(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ sur K est inférieure ou égale à 1. En effet, le groupe additif de K, muni de la topologie induite par la valuation v_K, est un groupe topologique commutatif localement compact. Le dual de Pontryagin $K^\wedge$ de K est le groupe des homomorphismes continus de K dans le groupe topologique $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. L'action de K sur lui même par multiplication fait de $K^\wedge$ un K-espace vectoriel, qui est de dimension 1 par dualité de Pontryagin (cf. [**Pon66**, Ch.6 §40 Th.52]) . L'inclusion canonique $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ identifie $\mathrm{Hom}_c(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ à un sous-K-espace vectoriel de $K^\wedge$, ce qui prouve notre assertion.

La dimension de $\mathrm{Hom}_c(K, C^*)$ sur K est inférieure ou égale à 1. En effet, on peut se borner au cas où C est algébriquement clos, puis se ramener à $\Gamma = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ en choisissant un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ sur $\mu_{p^\infty}(C)$.

Exemple 1.1.9. Si K est de caractéristique 0, il est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, et un caractère additif non-trivial de K à valeurs dans $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est obtenu en composant la trace de K à $\mathbb{Q}_p$ avec la projection canonique :

$$K \xrightarrow{\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}_p}} \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p.$$

La différente de ce caractère est égale à la différente de l'extension $K/\mathbb{Q}_p$.

1.1.10. Supposons K de caractéristique p. Il existe alors un homomorphisme canonique $k \to \mathcal{O}_K$ inverse à gauche de l'homomorphisme de reduction $\mathcal{O}_K \to k$. On désigne par $\Omega^1_{K/k}$ l'espace vectoriel des différentielles de K/k, et par $d\colon K \to \Omega^1_{K/k}$ la dérivation canonique. Observons que $\Omega^1_{K/k}$ est un K-espace vectoriel de dimension 1 car k est parfait.

Il existe un homomorphisme canonique, $\mathcal{O}_K$-linéaire,

$$\mathrm{Res}_k \colon \Omega^1_{K/k} \longrightarrow k,$$

appelé résidu, défini par la propriété suivante : pour toute uniformisante π de K et tout entier m, $\mathrm{Res}_k(\pi^m d\pi) = \delta_{m,-1}$, où $\delta_{m,-1}$ est le symbole de Kronecker.

Il existe une application canonique, notée abusivement

$$\mathrm{v}_K \colon \Omega^1_{K/k} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\},$$

définie par la propriété suivante : pour tout $a \in K$ et toute uniformisante π de K, $\mathrm{v}_K(a d\pi) = \mathrm{v}_K(a)$.

On observe que tout caractère additif $K \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ se factorise par le sous-groupe $\frac{1}{p}\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, qui est canoniquement isomorphe à $\mathbb{F}_p$.

Lemme 1.1.11. [**Lau87**, Rem. 3.1.3.6] *Supposons K de caractéristique p. L'application de $\Omega^1_{K/k}$ dans $\mathrm{Hom}_c(K, \mathbb{F}_p)$ qui associe à ω le caractère additif*

$$\psi_\omega \colon x \mapsto \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\big(\mathrm{Res}_k(x\omega)\big),$$

est un isomorphisme. L'ordre de ψ_ω est égal à $\mathrm{v}_K(\omega)$.

Dém. Il est évident que $\omega \mapsto \psi_\omega$ est un homomorphisme. Si ψ_ω est trivial, alors pour tout $a \in k$ et pour tout entier n, $\mathrm{Res}_k(a\pi^n\omega) = a\mathrm{Res}_k(\pi^n\omega) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p})$, où π est une uniformisante de K. Donc pour tout entier n, $\mathrm{Res}_k(\pi^n\omega) = 0$; d'où $\omega = 0$. Cela montre l'injectivité ; la surjectivité suit de (1.1.8). L'assertion sur l'ordre de ψ_ω est évidente. $\square$

Proposition 1.1.12. [**Ta67**, 2.2.1] *La dimension de* $\mathrm{Hom_c}(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ *sur* K *est égale à* 1. *La dimension de* $\mathrm{Hom_c}(K, C^*)$ *sur* K *est inférieure ou égale à* 1 *; si* C *est algébriquement clos, elle vaut* 1.

Dém. Cela résulte de (1.1.8) et (1.1.9) si K est de caractéristique 0 et de (1.1.8) et (1.1.11) si K est de caractéristique p. $\square$

1.1.13. Soit $\phi\colon K \to C^*$ un caractère additif non-trivial d'ordre d. Par (1.1.12), l'homomorphisme

$$\Phi(\phi)\colon K \longrightarrow \mathrm{Hom_c}(K, C^*),$$

qui associe à η le caractère $x \mapsto \phi(\eta x)$ est un isomorphisme. Si $\eta \in K$, alors $d(\Phi(\phi)(\eta)) = d + \mathrm{v}_K(\eta)$. Donc $\Phi(\phi)$ envoie $\mathcal{O}_K$ dans le sous-groupe $\mathrm{Hom}\big(K/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*\big)$ de $\mathrm{Hom_c}(K, C^*)$. On note abusivement cette restriction

$$\Phi(\phi)\colon \mathcal{O}_K \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(K/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*\big).$$

On vérifie facilement que c'est un isomorphisme. Pour tout $n \le -d$, l'homomorphisme composé de $\Phi(\phi)$ avec la restriction $\mathrm{res}_n\colon \mathrm{Hom}\big(K/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*\big) \to \mathrm{Hom}\big(\mathfrak{m}_K^n/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*\big)$ a pour noyau

$$\mathrm{Ker}\big(\mathrm{res}_n \circ \Phi(\phi)\big) = \{\eta \in \mathcal{O}_K \mid \phi(\eta\mathfrak{m}_K^n) = 1\} = \mathfrak{m}_K^{-n}\mathcal{D}(\phi)^{-1} = \mathfrak{m}_K^{-n-d}.$$

On obtient ainsi un monomorphisme

$$\Phi_n(\phi)\colon \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K^{-n-d} \hookrightarrow \mathrm{Hom}\big(\mathfrak{m}_K^n/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*\big)$$

entre groupes de même ordre, donc un isomorphisme. Pour résumer, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, "\Phi(\phi)"', "\wr"] & \mathcal{O}_K \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\Phi(\phi)"', "\wr"] & \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K^{-n-d} \arrow[d, "\Phi_n(\phi)"', "\wr"] \\
\mathrm{Hom_c}(K, C^*) & \mathrm{Hom}\big(K/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*\big) \arrow[l, hook'] \arrow[r, two heads, "\mathrm{res}_n"] & \mathrm{Hom}\big(\mathfrak{m}_K^n/\mathfrak{m}_K^{-d}, C^*\big)
\end{tikzcd}$$

1.2. Constantes locales

1.2.1. Soit (V, ρ) une C-représentation de Weil de W_K. On note $\mathrm{sw}(V)$ (resp. $\mathrm{ar}(V)$) le conducteur de Swan (resp. Artin) de la restriction de ρ à I_K (cf. [**Ser67**, §19]). Si F^* est un Frobenius géométrique de W_K, on pose,

$$L(V, t) = \det_C(1 - t\rho(\mathrm{F}^*)|V^{I_K})^{-1} \in C[\![t]\!].$$

Cette série formelle ne dépend évidemment pas du Frobenius choisi.

1.2.2. Soit μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C (cf. [**De73**, 6.1]). Pour tout $x, y \in K$, on a

$$\mu(x + y\mathcal{O}_K) = \|y\|_K \mu(\mathcal{O}_K).$$

Donc μ est déterminé par $\mu(\mathcal{O}_K)$, et si μ' est une mesure de Haar sur K, il existe $a \in C^*$, tel que $\mu' = a\mu$.

Définition 1.2.3. [**De73**, 3.3–3.4.3] Soient $\chi \colon K^* \to C^*$ un quasi-caractère, $\psi \colon K \to C^*$ un caractère additif non-trivial, μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C et π une uniformisante de K. On appelle *facteur epsilon* de (χ, ψ, μ) l'élément de C^* défini par

$$\varepsilon(\chi, \psi, \mu) = \begin{cases} \chi(\pi)^{d(\psi)} q^{d(\psi)} \mu(\mathcal{O}_K) & \text{si } \chi \text{ est non-ramifié ;} \\ \int_{K^*} \chi^{-1} \psi \mu & \text{si } \chi \text{ est ramifié.} \end{cases}$$

Cela ne dépend pas du choix de l'uniformisante π.

1.2.4. Pour une catégorie abélienne A, on notera $\mathbf{Gr}\,(A)$ son groupe de Grothendieck. C'est le groupe abélien libre engendré par les objets de A modulo la relation suivante : pour toute suite exacte courte $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ de A, $[V] = [V'] + [V'']$, où $[V]$ désigne le générateur associé à V. On appelle C-représentation *virtuelle* de Weil de K un élément de $\mathbf{Gr}\,(\mathrm{Rep}_C(W_K))$.

Théorème 1.2.5. [**De73**, Th.4.1] *Soient $\psi \colon K \to C^*$ un caractère additif non-trivial et μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C. Il existe un unique homomorphisme*

$$\varepsilon(\,\cdot\,, \psi, \mu) \colon \mathbf{Gr}\,(\mathrm{Rep}_C(W_K)) \longrightarrow C^*$$

vérifiant les conditions suivantes :

(1) *pour tout $a \in C^*$ et toute C-représentation virtuelle de Weil λ de K, on a*

$$\varepsilon(\lambda, \psi, a\mu) = a^{\dim \lambda} \varepsilon(\lambda, \psi, \mu);$$

(2) *pour toute extension séparable finie L de K contenue dans K^{sep}, pour toute C-représentation virtuelle de Weil λ de L de rang* 0*, on a*

$$\varepsilon(\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K} \lambda, \psi, \mu) = \varepsilon(\lambda, \psi \circ \mathrm{tr}_{L/K}, \mu),$$

où on a noté $\mathrm{tr}_{L/K}$ la trace de L à K et $\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K} \lambda$ la C-représentation virtuelle de Weil de K induite par λ ;

(3) *si V est de rang* 1*, de quasi-caractère associé $\chi \colon K^* \to C^*$, alors $\varepsilon([V], \psi, \mu)$ est la constante $\varepsilon(\chi, \psi, \mu)$ définie dans* (1.2.3).

Remarque 1.2.6. i) Dans *loc.cit.* Th. 4.1, le corps C est supposé algébriquement clos. On montre immédiatement par descente galoisienne que cette hypothèse est superflue (cf. aussi *loc.cit.* Th. 6.5).

ii) Si λ est de dimension zéro, $\varepsilon(\lambda, \psi, \mu)$ ne dépend pas de μ en vertu de (2) ; on le notera $\varepsilon(\lambda, \psi)$. Pour $V \in \mathrm{Rep}_C(W_K)$, on notera simplement $\varepsilon(V, \psi, \mu)$ au lieu de $\varepsilon([V], \psi, \mu)$ et on l'appellera *facteur epsilon* de la C-représentation de Weil V.

1.2.7. [**De73**, 8.12] Soit (V, ρ, N) une C-représentation de Weil-Deligne de K. On note abusivement par V la C-représentation de Weil-Deligne (V, ρ, N) et par V° la C-représentation de Weil (V, ρ). Soit F^* un Frobenius géométrique de W_K. On définit les conducteurs d'Artin et de Swan de V par les formules :

$$\begin{aligned} \mathrm{ar}(V) &= \mathrm{sw}(V^\circ) + \dim_C V - \dim_C (\mathrm{Ker}\, N)^{I_K}, \\ \mathrm{sw}(V) &= \mathrm{sw}(V^\circ). \end{aligned}$$

On appelle *fonction* L de V et on note $L(V, t)$, la série formelle définie par

$$L(V, t) = \det_C(1 - t\rho(\mathrm{F}^*)|(\mathrm{Ker}\, N)^{I_K})^{-1} \in C[\![t]\!].$$

Pour un caractère additif non-trivial $\psi \colon K \to C^*$ et μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C, on pose

$$\varepsilon(V, \psi, \mu) = \varepsilon(V^\circ, \psi, \mu)\det_C\Big(-\rho(\mathrm{F}^*)\,\Big|\big(V^{I_K}/(\mathrm{Ker}\, \mathrm{N})^{I_K}\big)\Big).$$

On définit aussi le *facteur epsilon modifié* par la formule

$$\varepsilon_0(V, \psi, \mu) = \varepsilon(V, \psi, \mu)\det_C\big(-\rho(\mathrm{F}^*)\big|(\mathrm{Ker}\, N)^{I_K}\big).$$

Ces définitions ne dépendent pas du choix du Frobenius géométrique F^*. Lorsque $N = 0$, elles coïncident avec les définitions données plus haut pour une représentation de Weil (cf. 1.1.6, 1.2.1 et 1.2.5).

1.3. Formulaire

1.3.1. On pose $U_K(0) = \mathcal{O}_K^*$ et pour tout entier $n \geq 0$, $U_K(n) = 1 + \mathfrak{m}_K^n$. Soit $\chi \colon K^* \to C^*$ un quasi-caractère. On note $\mathrm{ar}(\chi)$ le plus petit nombre naturel tel que $U_K(\mathrm{ar}(\chi)) \subseteq \mathrm{Ker}\,\chi$; c'est le conducteur d'Artin de la C-représentation de Weil de rang 1 associée à χ.

1.3.2. Soient $\chi \colon K^* \to C^*$ un quasi-caractère et $\psi \colon K \to C^*$ un caractère additif non-trivial. On note c la partie entière de $\frac{\mathrm{ar}(\chi)}{2}$ et $c^+ = \mathrm{ar}(\chi) - c \geq c$. Pour tout $y, z \in K$ tels que $\mathrm{v}_K(y) \geq c^+$ et $\mathrm{v}_K(z) \geq c^+$, on a

$$\chi(1 + y + z) = \chi(1 + y)\chi(1 + z).$$

En effet, la relation est évidente si χ et non ramifié ; sinon, $\mathrm{v}_K\big(\frac{yz}{1+y+z}\big) \geq \mathrm{ar}(\chi) > 0$ et par suite

$$\begin{aligned} \chi(1 + y + z) &= \chi(1 + y)\chi(1 + z)\chi\Big(\frac{1 + y + z}{1 + y + z + yz}\Big) \\ &= \chi(1 + y)\chi(1 + z)\chi\Big(1 + \frac{yz}{1 + y + z}\Big)^{-1} \\ &= \chi(1 + y)\chi(1 + z). \end{aligned}$$

On en déduit un homomorphisme

$$\begin{aligned} \overline{\chi} : \mathfrak{m}_K^{c^+}/\mathfrak{m}_K^{\mathrm{ar}(\chi)} &\longrightarrow C^* \\ \mathrm{cl}(y) &\longmapsto \chi(1 + y). \end{aligned}$$

Il existe un élément $a \in K^*$ tel que :

$$\forall y \in K |\, 2\mathrm{v}_K(y) \geq \mathrm{ar}(\chi), \qquad \chi(1+y) = \psi(ay) \tag{1.3.2.1}$$

On peut le construire de la façon suivante. Soient $\pi \in K$ une uniformisante et $\psi'(x) = \psi(\pi^{-\mathrm{ar}(\chi)-d(\psi)}x)$, de sorte que $d(\psi') = -\mathrm{ar}(\chi)$. Par 1.1.13, il existe $a' \in \mathcal{O}_K^*$, tel que $\overline{\chi}(y) = \psi'(a'y)$. On prend alors $a = \pi^{-\mathrm{ar}(\chi)-d(\psi)}a'$. On appelle un élément $a \in K^*$ satisfaisant (1.3.2.1) une *ψ-jauge* de χ. On vérifie que $\mathrm{v}_K(a) = -\mathrm{ar}(\chi) - d(\psi)$, que sa classe dans $K^*/U_K(c)$ est uniquement déterminée et que tout élément de cette classe est une ψ-jauge (cf. 1.1.13).

Proposition 1.3.3. [**DH81**, §1.2] *Soient $\chi\colon K^* \to C^*$ un quasi-caractère, $\psi\colon K \to C^*$ un caractère additif non-trivial et a une ψ-jauge de χ. On note 1_K le quasi-caractère trivial de K.*

(1) *Si* $\mathrm{ar}(\chi) = 2c$ *est pair, on a*

$$\varepsilon([\chi] - [1_K], \psi) = q^c \frac{\psi(a)}{\chi(a)}.$$

(2) *Si* $\mathrm{ar}(\chi) = 2c+1$ *est impair, on a*

$$\varepsilon([\chi] - [1_K], \psi) = q^c \sum_{\overline{\beta} \in U_K(c)/U_K(c+1)} \frac{\psi(a\beta)}{\chi(a\beta)},$$

où β est un relèvement de $\overline{\beta}$ dans $U_K(c)$.

Proposition 1.3.4. [**De73**, §5 (5.4) et (5.5.3)] *Soient V une C-représentation de Weil de K, $\psi\colon K \to C^*$ un caractère additif non-trivial et μ une mesure de Haar sur K à valeurs dans C.*

(1) *Pour tout $a \in K^*$,*

$$\begin{aligned} \varepsilon(V, \psi(a\cdot\ ), \mu) &= \det V(a) q^{\mathrm{v}_K(a) \dim V} \varepsilon(V, \psi, \mu), \\ \varepsilon_0(V, \psi(a\cdot\ ), \mu) &= \det V(a) q^{\mathrm{v}_K(a) \dim V} \varepsilon_0(V, \psi, \mu), \end{aligned}$$

où $\det V(a)$ *désigne la valeur en a du quasi-caractère associé à* $\det V$.

(2) *Si (W, ρ) est une C-représentation de Weil de K non ramifiée, alors*

$$\begin{aligned} \varepsilon(V \otimes W, \psi, \mu) &= \det \rho(\mathrm{F}^{*\mathrm{ar}(V)+d(\psi)\dim V}) \varepsilon(V, \psi, \mu)^{\dim W}, \\ \varepsilon_0(V \otimes W, \psi, \mu) &= \det \rho(\mathrm{F}^{*\mathrm{sw}(V)+(d(\psi)+1)\dim V}) \varepsilon_0(V, \psi, \mu)^{\dim W}; \end{aligned}$$

où F^* *est un Frobenius géométrique de W_K. En particulier,*

$$\begin{aligned} \varepsilon(W, \psi, \mu) &= \det \rho(\mathrm{F}^{*d(\psi)}) q^{d(\psi)\dim W} \mu(\mathcal{O}_K)^{\dim W}, \\ \varepsilon_0(W, \psi, \mu) &= \det \rho(\mathrm{F}^{*d(\psi)+1}) (-1)^{\dim W} q^{d(\psi)\dim W} \mu(\mathcal{O}_K)^{\dim W}. \end{aligned}$$

1.4. Un exemple : le facteur epsilon d'un caractère d'Artin-Schreier

1.4.1. Dans cette section, on supposera K de caractéristique p, et on reprend les notations de (1.1.10). Soient $u \in K$ de valuation strictement négative et première à p, et L l'extension de K obtenue en ajoutant une racine x du polynôme $X^p - X - u$. C'est une extension galoisienne de dégré p totalement ramifiée ; on note $\mathrm{Gal}(L/K)$ son groupe de Galois. Le choix de x détermine un isomorphisme $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathbb{F}_p$. En effet, pour tout $g \in W_K$, on a $gx - x \in \mathbb{F}_p$. Donc l'homomorphisme $W_K \to \mathbb{F}_p$, $g \mapsto gx - x$ se factorise par un isomorphisme $\mathrm{Gal}(L/K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_p$. Pour tout $b \in K^*$, on pose $[u, b) = r_K^{-1}(b)x - x \in \mathbb{F}_p$, où r_K est l'isomorphisme de réciprocité $r_K \colon W_K^{\mathrm{ab}} \to K^*$ (1.1.4). On pose pour tout $b \in K^*$, $\operatorname{dlog} b = b^{-1} db \in \Omega^1_{K/k}$.

Proposition 1.4.2. [**CL**, XIV §5 Prop. 15] *Pour tout $b \in K^*$, on a*

$$[u, b) = \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\Big(\mathrm{Res}_k\big(u \operatorname{dlog} b\big)\Big).$$

1.4.3. On supposera désormais que C contienne une racine primitive p-ième ξ de 1. On note $\chi \colon K^* \to C^*$ le quasi-caractère $b \mapsto \xi^{[u,b)}$. On sait que $\mathrm{ar}(\chi) = -\mathrm{v}_K(u) + 1$, cf. [**Ser61**, 4.4]. On reprend les notations de (1.3.2) : on note c la partie entière de $\mathrm{ar}(\chi)/2$ et $c^+ = \mathrm{ar}(\chi) - c$; par conséquent, $\mathrm{v}_K(u) = -c - c^+ + 1$.

Pour tout $\omega \in \Omega^1_{K/k} \backslash \{0\}$, on pose $\theta_\omega \colon K \to C^*$, $b \mapsto \xi^{\psi_\omega(b)}$, où $\psi_\omega \colon K \to \mathbb{F}_p$ est le caractère additif associé à ω par (1.1.11).

Lemme 1.4.4. *Soient $\omega \in \Omega^1_{K/k} \backslash \{0\}$, $a \in K$ tels que $du = -a\omega$. Alors a est une θ_ω-jauge de χ* (1.3.2.1).

Dém. Par (1.1.11) et (1.4.2) il suffit de vérifier que pour tout $y \in K$, avec $\mathrm{v}_K(y) \geq c^+$,

$$[u, 1+y) = \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\Big(\mathrm{Res}_k\big(\tfrac{udy}{1+y}\big)\Big) = \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\big(\mathrm{Res}_k(-ydu)\big) = \psi_\omega(ay).$$

Par hypothèse, L/K est totalement (sauvagement) ramifiée et donc $c^+ \geq c \geq 1$. On a $(1+y)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n y^n$. On a

$$\mathrm{Res}_k\big(u(1+y)^{-1}dy\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Res}_k\big((-1)^n y^n u dy\big),$$

et $\mathrm{v}_K((-1)^n y^n u dy) \geq nc^+ - c$, qui est ≥ 0 pour $n \geq 1$. D'où $\mathrm{Res}_k(u(1+y)^{-1}dy) = \mathrm{Res}_k(udy)$. Donc il suffit de montrer que

$$\mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\big(\mathrm{Res}_k(udy)\big) = \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\big(\mathrm{Res}_k(-ydu)\big).$$

On a $\mathrm{Res}_k(udy + ydu) = \mathrm{Res}_k(d(uy)) = 0$. □

Proposition 1.4.5. *Soient π une uniformisante de K et $\omega = \alpha d\pi$, avec $\alpha \in K^*$. On note $du = u' d\pi$. On a*

$$\varepsilon([\chi] - [1_K], \theta_\omega) = q^c \xi^{\mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\left(\mathrm{Res}_k\left(u \operatorname{dlog} \frac{\alpha}{u'}\right)\right)} \sum_{\overline{\beta}} \xi^{\mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}(\mathrm{Res}_k(u(\beta-1)d\beta))},$$

où la somme est prise relativement aux $\overline{\beta} \in U_K(c)/U_K(c^+)$ et β est un relèvement de $\overline{\beta}$ dans $U_K(c)$.

DÉM. Soit $a \in K^*$ une θ_ω-jauge de χ. Par (1.3.3), on a

$$\begin{aligned}\varepsilon([\chi]-[1_K],\theta_\omega) &= q^c \sum_{\overline{\beta}} \frac{\theta_\omega(a\beta)}{\chi(a\beta)} \\ &= q^c \frac{\theta_\omega(a)}{\chi(a)} \sum_{\overline{\beta}} \frac{\theta_\omega(a(\beta-1))}{\chi(\beta)} \\ &= q^c \xi^{\psi_\omega(a)-[u,a)} \sum_{\overline{\beta}} \xi^{\psi_\omega(a(\beta-1))-[u,\beta)}\end{aligned}$$

où les sommes sont prises relativement aux $\overline{\beta} \in U_K(c)/U_K(c^+)$ et β est un relèvement de $\overline{\beta}$ dans $U_K(c)$. Par (1.4.4), on peut prendre $a = -\alpha^{-1}u'$, d'où

$$\begin{aligned}\psi_\omega(a) - [u,a) &= \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\left(\mathrm{Res}_k(a\omega - u\,\mathrm{dlog}\,a)\right) \\ &= \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\left(\mathrm{Res}_k\left(-du + u\,\mathrm{dlog}\,\frac{\alpha}{u'}\right)\right) \\ &= \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\left(\mathrm{Res}_k\Big(u\,\mathrm{dlog}\,\frac{\alpha}{u'}\Big)\right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi_\omega\big(a(\beta-1)\big) - [u,\beta) &= \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\left(\mathrm{Res}_k(a(\beta-1)\omega - u\,\mathrm{dlog}\,\beta)\right) \\ &= \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\left(\mathrm{Res}_k(-(\beta-1)du - u\,\mathrm{dlog}\,\beta)\right).\end{aligned}$$

On a $u\,\mathrm{dlog}\,\beta = u\beta^{-1}d\beta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u(\beta-1)^n d\beta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u(\beta-1)^n(\beta-1)'d\pi$. Si $n \geq 2$, alors $\mathrm{v}_K\big((-1)^n u(\beta-1)^n(\beta-1)'\big) \geq 0$. D'où

$$\mathrm{Res}_k(u\,\mathrm{dlog}\,\beta) = \mathrm{Res}_k(ud\beta - u(\beta-1)d\beta).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\left(\mathrm{Res}_k(-(\beta-1)du - u\,\mathrm{dlog}\,\beta)\right) &= \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\left(\mathrm{Res}_k(-(\beta-1)du - ud\beta + u(\beta-1)d\beta)\right) \\ &= \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\left(\mathrm{Res}_k(-d(u(\beta-1)) + u(\beta-1)d\beta)\right) \\ &= \mathrm{tr}_{k/\mathbb{F}_p}\left(\mathrm{Res}_k(u(\beta-1)d\beta)\right).\end{aligned}$$

□

CHAPITRE 2

Facteurs epsilon et corps des normes

2.1. Rappels et compléments sur le corps des normes et sur la ramification

2.1.1. Comme dans le premier chapitre, on désigne par K un corps de valuation discrète complet, à corps résiduel fini, et on reprend les notations de (0.1) et (1.1). A partir de (2.1.5) on supposera K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit L une extension séparable finie de K. On note $\mathcal{D}_{L/K}$ la différente de l'extension L/K, $e_{L/K}$ l'indice de ramification et $\mathrm{tr}_{L/K}$ (resp. $N_{L/K}$) la trace (resp. la norme) de L dans K. Soient m, t deux entiers. Pour que $\mathrm{tr}_{L/K}(\mathfrak{m}_L^m) \subseteq \mathfrak{m}_K^t$, il faut et il suffit que [**CL**, Ch.III §3, Prop.7]

$$\mathfrak{m}_L^m \subseteq \mathcal{D}_{L/K}^{-1}\mathfrak{m}_K^t = \mathcal{D}_{L/K}^{-1}\mathfrak{m}_L^{e_{L/K}t}.$$

Par conséquent,

(2.1.1.1) $$\mathrm{tr}_{L/K}(\mathfrak{m}_L^m) = \mathfrak{m}_K^{t_{L/K}(m)}, \text{ où } t_{L/K}(m) = \left[\frac{m + \mathrm{v}_L(\mathcal{D}_{L/K})}{e_{L/K}}\right].$$

(Pour tout nombre rationnel x, on a noté $[x]$ la partie entière de x.)

2.1.2. Supposons L contenue dans K^{sep} et notons $\mathrm{Hom}_K\big(L, K^{\mathrm{sep}}\big)$ l'ensemble pointé des K-plongements de L dans K^{sep}. Pour $\gamma \in \mathrm{Hom}_K\big(L, K^{\mathrm{sep}}\big)$, on pose [**Win83**, 1.1.1]

$$i_{L/K}(\gamma) = \min_{x \in \mathcal{O}_L}\big(\mathrm{v}'_L(\gamma(x) - x)\big),$$

où v'_L est l'unique valuation de K^{sep} prolongeant v_L.

Lemme 2.1.3. [**Win83**, Prop. 2.2.1] *Soient L/K une extension séparable, totalement ramifiée, cyclique de degré une puissance de p et $\nu(L/K)$ le plus petit saut de ramification supérieure. Alors pour tous $x, y \in L$, on a*

$$\mathrm{v}_K\big(N_{L/K}(x+y) - N_{L/K}(x) - N_{L/K}(y)\big) \geq \min\big(\mathrm{v}_L(x), \mathrm{v}_L(y)\big) + \frac{p-1}{p}\nu(L/K).$$

Dém. Il suffit de traiter le cas $\min\big(\mathrm{v}_L(x), \mathrm{v}_L(y)\big) = 0$, qui est un cas particulier de [**Win83**, Prop. 2.2.1-(i)]. □

2.1.4. [**CL**, Ch.V §3] Soient L/K une extension séparable, totalement ramifiée, cyclique de degré p et i le nombre de ramification inférieure. La fonction d'Herbrand ψ de L/K, est donnée par

$$\psi(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x \leq i; \\ i + p(x-i) & \text{si } x \geq i. \end{cases}$$

Donc i est aussi le saut (unique) de la ramification supérieure de L/K. Quand il n'y a aucun risque de confusion, on laissera tomber les indices L/K dans la notation $N_{L/K}$. Pour tout entier $c \geq 0$, suivant les notations de (1.3.1), on a, cf. [*loc. cit.* Prop. 4],

$$N\big(U_L(\psi(c))\big) \subseteq U_K(c) \quad \text{et} \quad N\big(U_L(\psi(c)+1)\big) \subseteq U_K(c+1).$$

On en déduit un homomorphisme

$$N(c)\colon U_L\big(\psi(c)\big)/U_L\big(\psi(c)+1\big) \longrightarrow U_K(c)/U_K(c+1).$$

Pour $c < i$, $N(c)$ est un isomorphisme de $U_L(c)/U_L(c+1)$ vers $U_K(c)/U_K(c+1)$, cf. [*loc. cit.* Cor. 1–2 de Prop. 5]. Par conséquent, pour tout $c \leq i$, la norme induit un isomorphisme [*loc. cit.* Cor. 6 de Prop. 5]

$$\mathcal{O}_L^*/U_L(c) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_K^*/U_K(c). \tag{2.1.4.1}$$

On a $\mathrm{v}_L(\mathcal{D}_{L/K}) = (i+1)(p-1)$, cf. [*loc. cit.* Lemme 3]. Donc, compte tenu de (2.1.1.1), on obtient

$$e_K := \mathrm{v}_K(p) = \mathrm{v}_K\big(\mathrm{tr}_{L/K}(1)\big) \geq \left[\frac{(i+1)(p-1)}{p}\right] \geq \frac{p-1}{p} i. \tag{2.1.4.2}$$

2.1.5. On supposera désormais K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On désignera par K_∞/K une $\mathbb{Z}_p$-extension ramifiée, i.e. une extension galoisienne ramifiée de groupe de Galois Γ isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Comme tout sous-groupe non-trivial de $\mathbb{Z}_p$ est d'indice fini, l'extension maximale non-ramifiée K_0 de K dans K_∞ est finie. Pour $r \geq 0$, on note K_r l'unique extension de K_0 dans K_∞ de degré p^r, $1_r\colon K_r^* \to C^*$ le quasi-caractère trivial et on pose $\mathcal{O}_r = \mathcal{O}_{K_r}$, $\mathfrak{m}_r = \mathfrak{m}_{K_r}$, $U_r = U_{K_r}$.

L'extension K_∞/K est arithmétiquement profinie dans le sens que pour tout nombre réel u, le sous-groupe de ramification supérieur Γ^u de Γ est d'indice fini. On peut alors définir une fonction de Herbrand, $\Psi_{K_\infty/K}$, par la formule [**Win83**, 1.2.1]

$$\Psi_{K_\infty/K}(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x \leq 0; \\ \int_0^x |\Gamma^0 : \Gamma^\nu| d\nu & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On note $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite strictement croissante des nombres de ramification supérieure de l'extension K_∞/K_0. Ce sont des entiers par le théorème de Hasse-Arf. On définit la suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres de ramification inférieure de l'extension K_∞/K, en posant $i_n = \Psi_{K_\infty/K}(\nu_n)$. C'est une suite strictement croissante d'entiers. Pour tout $r > 0$, $i_0, \ldots, i_{r-1}$ sont les nombres de ramification inférieure de l'extension K_r/K_0 ; en particulier, i_r est le nombre de ramification (inférieure) de K_{r+1}/K_r.

2.1.6. Soit E_K le corps des normes associé à l'extension K_∞/K, cf. [**Win83**, §2]. C'est un corps de caractéristique p, complet pour une valuation discrète. Son corps résiduel est canoniquement isomorphe à celui de K_0 ; on note q_0 son cardinal. On rappelle qu'en tant qu'ensembles, $\mathrm{E}_K = \varprojlim_r K_r$, la limite étant prise suivant les applications normes. Pour

$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E_K, l'addition et la multiplication sont définies par

$$\begin{aligned} x + y &= (z_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{où } z_n = \lim_{m\to+\infty} N_{K_m/K_n}(x_m + y_m), \\ xy &= (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Pour $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}_K^*$, $\mathrm{v}_{\mathrm{E}_K}(y) = \mathrm{v}_{K_n}(y_n)$, pour tout $n \geq 0$.

2.1.7. Dans la suite de ce chapitre, par extension algébrique de K, on sous-entend une extension de K contenue dans K^{sep}. Pour des extensions algébriques L et F de K, on notera $L \cdot F$ la plus petite extension de K contenant L et F. Pour toute extension finie L de K on posera $L_\infty = K_\infty \cdot L$; c'est une $\mathbb{Z}_p$-extension de L et le corps des normes E_L de L_∞/L est une extension séparable finie de E_K. La formation du corps des normes est fonctorielle et la limite inductive de E_L, pour L variant parmi les extensions finies de K, est une clôture séparable de E_K, qui sera notée $\mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}$. Le groupe de Galois G_K agit par fonctorialité sur $\mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}$, identifiant $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)$ au groupe de Galois de $\mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}$ sur E_K. Pour tout r assez grand (il suffit que K_r contienne $L \cap K_\infty$), la restriction induit une bijection d'ensembles pointés $\mathrm{Hom}_{K_{r+1}}\big(L \cdot K_{r+1}, K^{\mathrm{sep}}\big) \to \mathrm{Hom}_{K_r}\big(L \cdot K_r, K^{\mathrm{sep}}\big)$. On en déduit, par fonctorialité, une bijection d'ensembles pointés

$$f_r\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{E}_K}\big(\mathrm{E}_L, \mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}\big) \to \mathrm{Hom}_{K_r}\big(L \cdot K_r, K^{\mathrm{sep}}\big). \tag{2.1.7.1}$$

Si de plus L/K est galoisienne, alors ces bijections sont des isomorphismes de groupes et pour tout $\gamma \in \mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$, on a

$$N_{L\cdot K_{r+1}/L\cdot K_r} \circ f_{r+1}(\gamma) = f_r(\gamma) \circ N_{L\cdot K_{r+1}/L\cdot K_r}. \tag{2.1.7.2}$$

LEMME 2.1.8. [**Win83**, 3.3.2] *Soient L une extension finie de K et $\gamma\colon \mathrm{E}_L \hookrightarrow \mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}$ un E_K-plongement. Alors*

$$i_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}(\gamma) = \lim_{r\to+\infty} i_{L\cdot K_r/K_r}\big(f_r(\gamma)\big).$$

2.1.9. L'extension finie L/K est dite admissible (par rapport à K_∞) si $L \cap K_\infty = K$ et si $L \cdot K_0$ est l'extension maximale non-ramifiée de L dans L_∞. Dans ce cas, pour tout $r \geq 0$, $L \cdot K_r = L_r$. On remarque que, quitte à remplacer L et K par des extensions finies contenues respectivement dans L_∞ et K_∞, on peut toujours supposer l'extension L/K admissible.

2.1.10. Pour tout entiers $c, r \geq 0$ tels que $i_r \geq c$, on a un morphisme de suites exactes courtes induit par la norme (2.1.4),

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r] & U_{r+1}(c) \arrow[r] \arrow[d, "N"] & K_{r+1}^* \arrow[r] \arrow[d, "N"] & K_{r+1}^*/U_{r+1}(c) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \arrow[r] & U_r(c) \arrow[r] & K_r^* \arrow[r] & K_r^*/U_r(c) \arrow[r] & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

Pour c fixé et r variable, ces diagrammes définissent une suite exacte courte de systèmes projectifs. Par passage à la limite, on obtient la suite exacte

$$\mathbf{1} \longrightarrow \varprojlim_{i_r\geq c} U_r(c) \longrightarrow \varprojlim_{i_r\geq c} K_r^* \longrightarrow \varprojlim_{i_r\geq c} K_r^*/U_r(c). \tag{2.1.10.1}$$

De façon analogue, on dispose de la suite exacte courte de systèmes projectifs :

$$\mathbf{1} \longrightarrow \big(U_r(c+1)\big)_{i_r>c} \longrightarrow \big(U_r(c)\big)_{i_r>c} \longrightarrow \big(U_r(c)/U_r(c+1)\big)_{i_r>c} \longrightarrow \mathbf{1}\ ,$$

les morphismes de transition étant induits par la norme. Par passage à la limite, on obtient la suite exacte

$$\mathbf{1} \longrightarrow \varprojlim_{i_r>c} U_r(c+1) \longrightarrow \varprojlim_{i_r>c} U_r(c) \longrightarrow \varprojlim_{i_r>c} U_r(c)/U_r(c+1). \tag{2.1.10.2}$$

Lemme 2.1.11. *Soit $c \geq 0$ un entier.*

(1) *La limite projective $\varprojlim_{i_r\geq c} U_r(c)$ est canoniquement isomorphe à $U_{\mathrm{E}_K}(c)$.*

(2) *Le système projectif $\big(K_r^*/U_r(c)\big)_{i_r\geq c}$ est constant, i.e. les applications de transition sont des isomorphismes. La suite* (2.1.10.1) *est exacte à droite et s'identifie à*

$$\mathbf{1} \longrightarrow U_{\mathrm{E}_K}(c) \longrightarrow \mathrm{E}_K^* \longrightarrow \mathrm{E}_K^*/U_{\mathrm{E}_K}(c) \longrightarrow \mathbf{1}\ .$$

(3) *Le système projectif $\big(U_r(c)/U_r(c+1)\big)_{i_r>c}$ est constant. La suite* (2.1.10.2) *est exacte à droite et s'identifie à*

$$\mathbf{1} \longrightarrow U_{\mathrm{E}_K}(c+1) \longrightarrow U_{\mathrm{E}_K}(c) \longrightarrow U_{\mathrm{E}_K}(c)/U_{\mathrm{E}_K}(c+1) \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Dém. En tant que groupes, $\mathrm{E}_K^* = \varprojlim_{r\in\mathbb{N}} K_r^*$, cf. (2.1.6). Montrons (1). Par fonctorialité, on a un monomorphisme canonique $\varprojlim_{i_r\geq c} U_r(c) \hookrightarrow U_{\mathrm{E}_K}(c)$. Montrons qu'il est surjectif. C'est évident si $c=0$. Supposons $c>0$. Soient $x=(x_r)_{r\in\mathbb{N}} \in U_{\mathrm{E}_K}(c)$, et $y=(y_r)_{r\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{m}_{\mathrm{E}_K}^c$, tels que $x=1+y$. Pour tout entier $r\geq 0$,

$$\mathrm{v}_{K_r}(x_r-1) = \mathrm{v}_{K_r}\Big(\lim_{n\to+\infty} N_{K_n/K_r}(1+y_n)-1\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{v}_{K_r}(N_{K_n/K_r}(1+y_n)-1).$$

Appliquant le lemme 2.1.3, compte tenu que $\nu(K_n/K_r) = \nu(K_{r+1}/K_r) = \nu_r$ tend vers l'infini avec r, on voit qu'il existe un entier s, tel que pour tout $n \geq r \geq s$, on a $\mathrm{v}_{K_r}(N_{K_n/K_r}(1+y_n)-1) = \mathrm{v}_{K_r}(y_r) = \mathrm{v}_{\mathrm{E}_K}(y) \geq c$. Donc pour tout $r\geq s$, $x_r \in U_r(c)$, et par (2.1.4), cela vaut aussi pour tout r tel que $i_r \geq c$. D'où $x \in \varprojlim_{i_r\geq c} U_r(c)$ et l'assertion est démontrée. Montrons (2). On remarque d'abord que le système $(U_r(c))_{i_r\geq c}$ ne vérifie pas la condition de Mittag-Leffler ; donc l'exactitude à droite de (2.1.10.1) n'est pas une conséquence du critère usuel [**EGA**, III 0.13.2]. Comme la suite (2.1.10.1) est exacte, on obtient par (1), un monomorphisme $\mathrm{E}_K^*/U_{\mathrm{E}_K}(c) \hookrightarrow \varprojlim_{i_r\geq c} K_r^*/U_r(c)$. Supposons d'abord $c=0$. Pour tout r, la valuation v_{K_r} induit un isomorphisme de $K_r^*/U_r(0)$ sur $\mathbb{Z}$ et les applications de transitions induisent l'identité de $\mathbb{Z}$. D'où un monomorphisme $\mathrm{E}_K^*/U(0) \hookrightarrow \mathbb{Z}$, qui est un isomorphisme car la classe d'une uniformisante est envoyée sur 1. Ceci montre (2) dans le cas $c=0$. Supposons $c\geq 1$. Les applications normes induisent, pour tout entier r tel que

$i_r \geq c$, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r] & U_{r+1}(0)/U_{r+1}(c) \arrow[r] \arrow[d, "N'"] & K^*_{r+1}/U_{r+1}(c) \arrow[r] \arrow[d, "N"] & K^*_{r+1}/U_{r+1}(0) \arrow[r] \arrow[d, "N''"] & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \arrow[r] & U_r(0)/U_r(c) \arrow[r] & K^*_r/U_r(c) \arrow[r] & K^*_r/U_r(0) \arrow[r] & \mathbf{1} \end{tikzcd}$$

On vient de voir que N'' est un isomorphisme. Comme $i_r \geq c$, N' est un isomorphisme, cf. (2.1.4). Il est alors de même pour N et le système projectif $\big(K^*_r/U_r(c)\big)_{i_r\geq c}$ est constant. Pour r tel que $i_r \geq c$, on note pr_r le monomorphisme composée

$$\mathrm{pr}_r\colon \mathrm{E}^*_K/U_{\mathrm{E}_K}(c) \hookrightarrow \varprojlim_{i_r\geq c} K^*_r/U_r(c) \xrightarrow{\sim} K^*_r/U_r(c).$$

La restriction de pr_r à $U_{\mathrm{E}_K}(0)/U_{\mathrm{E}_K}(c)$ se factorise par $U_r(0)/U_r(c) \subset K^*_r/U_r(c)$; on en déduit le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U_{\mathrm{E}_K}(0)/U_{\mathrm{E}_K}(c) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{E}^*_K/U_{\mathrm{E}_K}(c) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\mathrm{pr}_r"] & \mathrm{E}^*_K/U_{\mathrm{E}_K}(0) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U_r(0)/U_r(c) \arrow[r] & K^*_r/U_r(c) \arrow[r] & K^*_r/U_r(0) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On a démontré que la flèche de droite est un isomorphisme (cas $c = 0$). Celle de gauche l'est aussi, car elle est injective et les deux groupes sont finis de même cardinal égal à $(q_0-1)q_0^{c-1}$. Donc l'application du milieu est un isomorphisme et on a démontré l'assertion (2). La démonstration de (3) est analogue à celle de (2). □

2.2. Tours admissibles de caractères additifs

2.2.1. Conservons les hypothèses de (2.1.5) et considérons un corps C algébriquement clos de caractéristique 0. Il sera commode de noter j_r le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{p-1}{p}i_r$; on appelle $(j_r)_{r\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres de ramification inférieure *modifiée* de K_∞/K.

Soient $n \leq -d$ et $r \geq 0$ des entiers. Le groupe $\mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d}$ est fini d'ordre q_0^{-n-d}. Si $j_r \geq -n-d$, alors il est annulé par p. En effet, par (2.1.4.2), $e_{K_r} \geq -n-d$; d'où pour tout $x \in \mathfrak{m}_r^n$, $px \in \mathfrak{m}_r^{-d}$. De plus, sous les mêmes hypothèses, il résulte de (2.1.3) que la norme $N_{K_{r+1}/K_r}\colon K_{r+1} \to K_r$ induit un homomorphisme de groupes

$$N\colon \mathfrak{m}_{r+1}^n/\mathfrak{m}_{r+1}^{-d} \longrightarrow \mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d}. \tag{2.2.1.1}$$

En effet N est un isomorphisme car les groupes sont finis de même cardinal et N est injectif compte tenu que $\mathrm{v}_{K_{r+1}} = \mathrm{v}_{K_r} \circ N_{K_{r+1}/K_r}$.

Soit $\psi\colon K \to C^*$ un caractère additif d'ordre d. On note $\overline{\psi}\colon K/\mathfrak{m}_K^{-d} \to C^*$ sa réduction (si $d = +\infty$, on pose $\mathfrak{m}_K^{-d} = K$). Par abus, on notera encore $\overline{\psi}$ la restriction de $\overline{\psi}$ à $\mathfrak{m}_K^n/\mathfrak{m}_K^{-d}$ pour tout $n \leq -d$. Si $j_r \geq -n-d$, on a $\overline{\psi}_r(\mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d}) \subseteq \mu_p(C)$.

Définition 2.2.2. On dit qu'une suite $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ de caractères additifs $\psi_r\colon K_r \to C^*$ est une *tour admissible* si elle vérifie les conditions suivantes :

i) il existe un entier $s \geq 0$, tel que pour tout $r \geq s$, $d(\psi_r) = d(\psi_s) = d$;
ii) pour tout $n \leq -d$ et $r \geq s$ tels que $j_r \geq -n - d$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{m}_{r+1}^{n}/\mathfrak{m}_{r+1}^{-d} \arrow[r, "\overline{\psi}_{r+1}"] \arrow[d, "N"', "\wr"] & \mu_p(C) \arrow[d, equal] \\ \mathfrak{m}_{r}^{n}/\mathfrak{m}_{r}^{-d} \arrow[r, "\overline{\psi}_{r}"] & \mu_p(C) \end{tikzcd}$$

est commutatif. On appelle d l'ordre de la tour.

REMARQUE 2.2.3. Il est clairement suffisant de vérifier la condition 2.2.2-ii) pour tout $r \geq s$ et $n = -j_r - d$.

DÉFINITION 2.2.4. Soit $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ une tour admissible d'ordre d. On lui associe un caractère additif $\psi_\infty \colon \mathrm{E}_K \to \mu_p(C)$ d'ordre d comme suit. Soit $x = (x_r)_{r\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}_K$, où $x_r \in K_r$. On pose

$$\psi_\infty(x) = \psi_r(x_r), \quad \text{pour } r \geq s \text{ tel que } j_r \geq -\mathrm{v}_{\mathrm{E}_K}(x) - d.$$

Par la définition d'une tour admissible, $\psi_r(x_r)$ appartient à $\mu_p(C)$ et ne dépend pas de r. On vérifie immédiatement que ψ_∞ est un caractère additif d'ordre d. On l'appelle la *limite de la tour* $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$.

PROPOSITION 2.2.5. *Soient s un entier positif, $\psi \colon K_s \to C^*$ et $\theta \colon \mathrm{E}_K \to \mu_p(C)$ des caractères additifs de même ordre d. Alors il existe une tour admissible $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ telle que $\psi_\infty = \theta$, $\psi_s = \psi$, et pour tout $r \geq s$, $d(\psi_r) = d$.*

DÉM. Comme ψ et θ ont même ordre, si l'un de deux est trivial l'autre aussi et dans ce cas l'énoncé est évident. Supposons ψ et θ non-triviaux. On prouve d'abord qu'il suffit de construire une tour admissible $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ telle que $\psi_s = \psi$, et pour tout $r \geq s$, $d(\psi_r) = d$. En effet, si $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ est une telle tour, par (1.1.12) il existe $a = (a_r)_{r\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}_K$ tel que $\theta(x) = \psi_\infty(ax)$. Comme ψ_∞ et θ ont le même ordre, a appartient à $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K}^*$ et par conséquent, $a_r \in \mathcal{O}_r^*$, pour tout $r \in \mathbb{N}$. On considère la tour $(\psi'_r)_{r\in\mathbb{N}}$, définie par

$$\psi'_r(x) = \begin{cases} \psi_r(x) & \text{si } 0 \leq r \leq s; \\ \psi_r(a_r x) & \text{si } r > s. \end{cases}$$

Par construction $(\psi'_r)_{r\in\mathbb{N}}$ est la tour admissible recherchée.

Il reste à construire la tour admissible $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$. On procède par récurrence sur r. On choisit d'abord, pour tout entier $r \geq 0$, une base $\phi_r \in \mathrm{Hom_c}(K_r, C^*)$, telle que $\phi_s = \psi$ et que pour tout $r \geq s$, ϕ_r ait ordre d ; c'est toujours possible par (1.1.13). Pour tout $0 \leq r \leq s$, on peut prendre $\psi_r = \phi_r$, la condition 2.2.2-ii) étant vide. On suppose donnée, pour $h \geq s$, une tour finie $(\psi_i)_{0\leq i\leq h}$, avec $\psi_s = \psi$, $d(\psi_i) = d$ pour $s \leq i \leq h$, et satisfaisant à la condition 2.2.2-ii) ; on doit définir un caractère additif ψ_{h+1} d'ordre d tel que la condition 2.2.2-ii) soit vérifiée pour $r = h$ et $n = -j_h - d$, cf. (2.2.3). Avec les notations de (2.2.1), il faut que la restriction de $\overline{\psi}_{h+1}$ à $\mathfrak{m}_{h+1}^{-j_h-d}/\mathfrak{m}_{h+1}^{-d}$, se factorise comme suit :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{m}_{h+1}^{-j_h-d}/\mathfrak{m}_{h+1}^{-d} \arrow[r, "\overline{\psi}_{h+1}"] \arrow[d, "N"', "\wr"] & \mu_p(C) \arrow[d, equal] \\
\mathfrak{m}_{h}^{-j_h-d}/\mathfrak{m}_{h}^{-d} \arrow[r, "\overline{\psi}_{h}"] & \mu_p(C)
\end{tikzcd}$$

Soit $\overline{\eta}_{h+1} = \Phi_{-j_h-d}(\phi_{h+1})^{-1}(\overline{\psi}_h \circ N) \in \mathcal{O}_{h+1}/\mathfrak{m}_{h+1}^{j_h}$, cf. (1.1.13). La restriction de $\overline{\psi}_h \circ N$ à $\mathfrak{m}_{h+1}^{-d-1}/\mathfrak{m}_{h+1}^{-d}$ est non triviale car $d(\psi_h) = d$ et N induit un isomorphisme de $\mathfrak{m}_{h+1}^{-d-1}/\mathfrak{m}_{h+1}^{-d}$ vers $\mathfrak{m}_{h}^{-d-1}/\mathfrak{m}_{h}^{-d}$, cf. (2.2.1.1). On en déduit par (1.1.13) que $\overline{\eta}_{h+1} \in \big(\mathcal{O}_{h+1}/\mathfrak{m}_{h+1}^{j_h}\big)^*$. On choisit $\eta_{h+1} \in \mathcal{O}_{h+1}^*$ relevant $\overline{\eta}_{h+1}$ et on prend $\psi_{h+1} = \Phi(\phi_{h+1})(\eta_{h+1})$. $\square$

Proposition 2.2.6. *Soient $(\psi_r \colon K_r \to C^*)_{r\in\mathbb{N}}$ une tour admissible de caractères additifs et L/K une extension finie admissible* (2.1.9). *Alors la suite de caractères additifs $(\phi_r = \psi_r \circ \mathrm{tr}_{L_r/K_r})_{r\in\mathbb{N}}$ est une tour admissible et $\phi_\infty = \psi_\infty \circ \mathrm{tr}_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}$.*

Dém. On note $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{n}_r$) l'idéal maximal de $\mathcal{O}_L$ (resp. $\mathcal{O}_{L_r}$) et $(j_r(L_\infty/L))_{r\in\mathbb{N}}$ la suite des nombres de ramification inférieure modifiée de L_∞/L. Il resulte de (2.1.8), qu'il existe $s \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $r \geq s$, $\mathrm{v}_{L_r}(\mathcal{D}_{L_r/K_r}) = \mathrm{v}_{\mathrm{E}_L}(\mathcal{D}_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K})$ et $e_{L_r/K_r} = e_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}$. Pour tous entiers $m \leq -d$ et r assez grand, considérons le diagramme

(2.2.6.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{n}_{r+1}^{m}/\mathfrak{n}_{r+1}^{-d} \arrow[r, "\overline{\mathrm{tr}}_{r+1}"] \arrow[d, "N_{L_{r+1}/L_r}"'] & \mathfrak{m}_{r+1}^{t(m)}/\mathfrak{m}_{r+1}^{t(-d)} \arrow[d, "N_{K_{r+1}/K_r}"] \\
\mathfrak{n}_{r}^{m}/\mathfrak{n}_{r}^{-d} \arrow[r, "\overline{\mathrm{tr}}_{r}"'] & \mathfrak{m}_{r}^{t(m)}/\mathfrak{m}_{r}^{t(-d)}
\end{tikzcd}$$

où les homomorphismes horizontaux sont induits par la trace $\mathrm{tr}_{L/K}$, les homomorphismes verticaux sont induits par les normes et $t(m) = t_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}(m)$, cf. (2.1.1.1). Montrons d'abord que (2.2.6.1) est commutatif. On note L'/K la clôture galoisienne de L/K dans K^{sep}. Quitte à remplacer L', L par des extensions finies contenues respectivement dans L'_∞, L_∞, on peut supposer L'/L admissible, puis, quitte à remplacer K par une extensions finie contenues dans K_∞, on peut supposer à nouveau L/K admissible ; donc $L_r = L \cdot K_r$ et $L'_r = L' \cdot L_r = L' \cdot K_r$. Le groupe $\mathrm{Gal}(L'_{r+1}/L'_r)$ s'identifie par restriction à $\mathrm{Gal}(L_{r+1}/L_r)$ et à $\mathrm{Gal}(K_{r+1}/K_r)$; par conséquent la restriction de $N_{L'_{r+1}/L'_r}$ à L_{r+1} (resp. K_{r+1}) est égale à N_{L_{r+1}/L_r} (resp. N_{K_{r+1}/K_r}). On pose, pour $r \geq 0$, $\mathcal{F}_r = \mathrm{Hom}_{K_r}\big(L_r, K^{\mathrm{sep}}\big)$ (resp. $\mathcal{F} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{E}_K}\big(\mathrm{E}_L, \mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}\big)$). On rappelle qu'on dispose d'une bijection $f_r \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}_r$, cf. (2.1.7.1).

Soient $x \in \mathfrak{n}_{r+1}^m$ et $\overline{x}$ sa classe dans $\mathfrak{n}_{r+1}^m/\mathfrak{n}_{r+1}^{-d}$. Si r est un entier assez grand, on a

$$\begin{aligned}
N_{K_{r+1}/K_r}\big(\overline{\mathrm{tr}}_{r+1}(\overline{x})\big) &= N_{K_{r+1}/K_r}\Big(\sum_{\gamma\in\mathcal{F}} \overline{f_{r+1}(\gamma)(x)}\Big)\\
&= N_{L'_{r+1}/L'_r}\Big(\sum_{\gamma\in\mathcal{F}} \overline{f_{r+1}(\gamma)(x)}\Big)\\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{F}} N_{L'_{r+1}/L'_r}\Big(\overline{f_{r+1}(\gamma)(x)}\Big)\\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{F}} \overline{f_r(\gamma)(N_{L'_{r+1}/L'_r}(x))} && \text{(par 2.1.7.2)}\\
&= \sum_{\gamma\in\mathcal{F}} \overline{f_r(\gamma)(N_{L_{r+1}/L_r}(x))} = \overline{\mathrm{tr}}_r(N_{L_{r+1}/L_r}(\overline{x})).
\end{aligned}$$

Ceci montre la commutativité de (2.2.6.1).

On note $\mathfrak{m}_\infty$ (resp. $\mathfrak{n}_\infty$) l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_L}$). Pour tout $n \leq -d$, le groupe $\mathfrak{m}_\infty^n/\mathfrak{m}_\infty^{-d}$ est la limite du système projectif $(\mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d})_{j_r\geq -n-d}$, suivant les applications normes. Le diagramme commutatif (2.2.6.1) définit par passage à la limite un homomorphisme $\mathfrak{n}_\infty^m/\mathfrak{n}_\infty^{-d} \to \mathfrak{m}_\infty^{t(m)}/\mathfrak{m}_\infty^{t(-d)}$ qui est l'homomorphisme induit par la trace $\mathrm{tr}_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}$. Soit d l'ordre de la tour admissible $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$. Avec les notations de (2.2.1), pour tout $n \leq -d$, l'application $\overline{\psi}_\infty\colon \mathfrak{m}_{\mathrm{E}_K}^n/\mathfrak{m}_{\mathrm{E}_K}^{-d} \to \mu_p(C)$ est la limite projective des $\overline{\psi}_r\colon \mathfrak{m}_r^n/\mathfrak{m}_r^{-d} \to \mu_p(C)$. Par la définition de ordre et par (2.1.1),

$$d(\phi_r) = \max\Big\{n\in\mathbb{Z}\,\Big|\, \mathrm{tr}(\mathfrak{n}_r^{-n}) \subseteq \mathfrak{m}_r^{-d(\psi_r)}\Big\} = -\mathrm{v}_{L_r}\left(\mathcal{D}_{L_r/K_r}^{-1}\mathfrak{m}_r^{-d(\psi_r)}\right).$$

Quitte à agrandir s, on a $d(\psi_r) = d$ et $d(\phi_r)$ est égal à $d_L = \mathrm{v}_{\mathrm{E}_L}(\mathcal{D}_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}) + e_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K} d$. Pour conclure, il suffit de vérifier que pour $m \leq -d_L$ et $r \geq s$ tel que $j_r(L_\infty/L) \geq -m - d_L$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{n}_{r+1}^m/\mathfrak{n}_{r+1}^{-d_L} \arrow[r, "\overline{\phi}_{r+1}"] \arrow[d, "N_{L_{r+1}/L_r}"] & \mu_p(C) \arrow[d, equal] \\
\mathfrak{n}_r^m/\mathfrak{n}_r^{-d_L} \arrow[r, "\overline{\phi}_r"] & \mu_p(C)
\end{tikzcd}$$

commute. Quitte à agrandir encore s le diagramme précédent s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\overline{\phi}_{r+1}\colon \mathfrak{n}_{r+1}^m/\mathfrak{n}_{r+1}^{-d_L} \arrow[r, "\overline{\mathrm{tr}}_{r+1}"] \arrow[d, "N_{L_{r+1}/L_r}"] & \mathfrak{m}_{r+1}^{t(m)}/\mathfrak{m}_{r+1}^{-d} \arrow[r, "\overline{\psi}_{r+1}"] \arrow[d, "N_{K_{r+1}/K_r}"] & \mu_p(C) \arrow[d, equal] \\
\overline{\phi}_r\colon \mathfrak{n}_r^m/\mathfrak{n}_r^{-d_L} \arrow[r, "\overline{\mathrm{tr}}_r"] & \mathfrak{m}_r^{t(m)}/\mathfrak{m}_r^{-d} \arrow[r, "\overline{\psi}_r"] & \mu_p(C)
\end{tikzcd}$$

On a déjà démontré que le carré de gauche commute et celui de droite commute par l'admissibilité de $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$, ce qui achève la preuve. $\square$

Remarque 2.2.7. C'est évident que les résultats de cette section restent vrais pour des caractères additifs à valeurs dans $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Les définitions 2.2.2 et 2.2.4 gardent un sens aussi pour les caractères additifs à valeurs dans un groupe abélien quelconque et la proposition 2.2.6 reste vrais. Par contre la proposition 2.2.5 n'est pas vrais en général. Cette remarque ne sera pas utilisée dans la suite.

2.3. Stabilisation des facteurs epsilon

2.3.1. Conservons les hypothèses et les notations de (2.1.5) et de (2.2.1). L'image de W_{E_K} par l'isomorphisme canonique (2.1.7)

$$G_{\mathrm{E}_K} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)$$

est contenue dans W_K ; on la note $W(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)$. La suite $(W_{K_r})_{r\in\mathbb{N}}$ est une suite decroissante de sous-groupes de W_K (1.1.1) ; leurs intersection coïncide avec $W(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)$.

Soit $V=(V,\rho)$ une C-représentation de Weil de K. On pose, pour tout $r\geq 0$, $\rho_r=\rho_{|W_{K_r}}$, $V_r=(V,\rho_r)$. On définit une C-représentation de Weil de E_K, notée $V_\infty=(V,\rho_\infty)$, par

$$\rho_\infty\colon W_{\mathrm{E}_K} \xrightarrow{\sim} W(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty) \xrightarrow{\rho_{|W(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)}} \mathrm{GL}_C(V).$$

On appelle V_∞ la *déformation de V au corps des normes*. C'est évidemment un foncteur exact de $\mathrm{Rep}_C(W_K)$ dans $\mathrm{Rep}_C(W_{\mathrm{E}_K})$; on note encore $\lambda\mapsto\lambda_\infty$ l'homomorphisme $\mathbf{Gr}\,(\mathrm{Rep}_C(W_K))\to\mathbf{Gr}\,(\mathrm{Rep}_C(W_{\mathrm{E}_K}))$ induit sur les groupes de Grothendieck. Il résulte de (2.1.8) que la suite $(\mathrm{ar}(\rho_r))_{r\in\mathbb{N}}$ est stationnaire de limite égale à $\mathrm{ar}(\rho_\infty)$; voir aussi [**Mar04**, 5.4 et 5.5].

Soient L/K une extension finie et V une C-représentation de Weil de L. On vérifie que

$$\left(\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K} V\right)_\infty = \mathrm{Ind}_{W_{\mathrm{E}_L}}^{W_{\mathrm{E}_K}}\left(V_\infty\right)^{\oplus|L\cap K_\infty:K|}$$

En particulier, si L/K est admissible, on a $\left(\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K} V\right)_\infty = \mathrm{Ind}_{W_{\mathrm{E}_L}}^{W_{\mathrm{E}_K}}\left(V_\infty\right)$.

Soient (V,ρ,N) une représentation de Weil-Deligne de K. Pour tout $r\geq 0$, on note V_r la C-représentation de Weil-Deligne (V,ρ_r,N) de K_r. On définit la déformation de (V,ρ,N) au corps des normes, notée abusivement V_∞, comme la C-représentation de Weil-Deligne (V,ρ_∞,N) de E_K.

2.3.2. Soit $\chi\colon K^*\to C^*$ un quasi-caractère. Pour tout entier $r\geq 0$, on note $\chi_r=\chi\circ N_{K_r/K}$ et $\chi_\infty\colon \mathrm{E}_K^*\to C^*$ le quasi-caractère défini par $\chi_\infty((x_r)_{r\in\mathbb{N}})=\chi_r(x_r)=\chi_0(x_0)$. Soient $V(\chi)$ (resp. $V(\chi_r)$, resp. $V(\chi_\infty)$) la C-représentation de Weil de K (resp. K_r, resp. E_K) de rang 1 associée à χ (resp. χ_r, resp. χ_∞). On a alors $V(\chi)_\infty=V(\chi_\infty)$ et $V(\chi)_r=V(\chi_r)$, pour tout $r\geq 0$. On en déduit que la suite $(\mathrm{ar}(\chi_r))_{r\in\mathbb{N}}$ est stationnaire de limite égale à $\mathrm{ar}(\chi_\infty)$. On note c la partie entière de $\frac{\mathrm{ar}(\chi_\infty)}{2}$ et $c^+=\mathrm{ar}(\chi_\infty)-c$, de sorte que $c^+=c$ si $\mathrm{ar}(\chi_\infty)$ est pair et $c^+=c+1$ sinon.

LEMME 2.3.3. *Soient* $\chi\colon K^* \to C^*$ *un quasi-caractère,* $(\psi_r\colon K_r \to C^*)_{r\in\mathbb{N}}$ *une tour admissible d'ordre* d *de caractères additifs non-triviaux et, pour* $r \geq 0$, $a_r \in K_r$ *une* ψ_r*-jauge de* χ_r (1.3.2). *Il existe alors un entier* $s \geq 0$ *tel que pour* $r \geq s$,

$$\begin{aligned} \frac{N(a_{r+1})}{a_r} &\in U_r(c) \\ N(a_{r+1}) - a_r &\in \mathfrak{m}_r^{-d-c^+} \end{aligned}$$

où on a noté N *la norme* $N_{K_{r+1}/K_r}\colon K_{r+1} \to K_r$.

DÉM. Pour tout entier $r \geq 0$, on choisit une uniformisante π_r de $\mathcal{O}_r$ telle que $N(\pi_{r+1}) = \pi_r$. Soit s tel que pour $r \geq s$, $\mathrm{ar}(\chi_r)$ et $d(\psi_r)$ soient constants. Si $\mathrm{ar}(\chi_s) = 0$, alors, pour $r \geq s$, π_r^{-d} est une ψ_r-jauge de χ_r et le lemme est évident. On suppose $\mathrm{ar}(\chi_s) > 0$. On déduit la première équation de la deuxième en divisant par a_r. Si $y \in \mathcal{O}_{r+1}$, alors $\mathrm{v}_{K_r}(N(1+y) - 1 - N(y)) \geq j_r$, cf. (2.1.3). Donc pour $r \geq s$, tel que $j_r \geq \mathrm{ar}(\chi_r) = c + c^+$, et pour $y \in \mathcal{O}_{r+1}$ de valuation $\mathrm{v}_{K_{r+1}}(y) \geq c^+ > 0$, on a

$$\begin{aligned} \psi_{r+1}(a_{r+1}y) = \chi_{r+1}(1+y) &= \chi_r\big(N(1+y)\big) \\ &= \chi_r\left(1 + \frac{N(1+y) - 1 - N(y)}{1 + N(y)}\right)\chi_r\big(1 + N(y)\big) \\ &= \chi_r\big(1 + N(y)\big) \\ &= \psi_r\big(a_r N(y)\big). \end{aligned}$$

Par définition de tour admissible, pour r et y comme ci-dessus, on a

$$\psi_{r+1}(a_{r+1}y) = \psi_r\big(N(a_{r+1})N(y)\big).$$

Donc, quitte à agrandir s, pour tout $r \geq s$ et tout $y \in \mathcal{O}_{r+1}$ de valuation $\mathrm{v}_{K_{r+1}}(y) \geq c^+$, on a $\psi_r\big(\big(a_r - N(a_{r+1})\big)N(y)\big) = 1$. Pour conclure il suffit de prouver que

$$\psi_r\big((a_r - N(a_{r+1}))\mathfrak{m}_r^{c^+}\big) = \{1\}.$$

Soit $z \in \mathfrak{m}_r^{c^+}$. On pose $m = \mathrm{v}_{K_r}(z)$ et $z = \alpha\pi_r^m$, où $\alpha \in \mathcal{O}_r^*$. Par (2.1.4.1), il existe $\beta \in \mathcal{O}_{r+1}^*$ tel que $N(\beta) = \alpha(1+u)$, avec $u \in \mathfrak{m}_r^{i_r}$. Si on prend $y = \beta\pi_{r+1}^m$, alors $N(y) = N(\beta\pi_{r+1}^m) = z + zu$. Comme $i_r \geq j_r \geq c + c^+ > c$, alors

$$\psi_r\big((a_r - N(a_{r+1}))z\big) = \psi_r\big((a_r - N(a_{r+1}))N(y)\big)\psi_r\big((a_r - N(a_{r+1}))zu\big)^{-1} = 1.$$

□

PROPOSITION 2.3.4. *Soient* $\chi\colon K \to C^*$ *un quasi-caractère et* $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ *une tour admissible de caractères additifs non-triviaux. Alors il existe un entier positif* s *tel que pour tout* $r \geq s$, *on a*

$$\varepsilon\big([\chi_r] - [1_r], \psi_r\big) = \varepsilon\big([\chi_\infty] - [1_{\mathrm{E}_K}], \psi_\infty\big).$$

DÉM. Soit s tel que pour $r \geq s$, $\mathrm{ar}(\chi_r)$ et $d(\psi_r)$ soient constants. L'énoncé est évident si χ_s est non ramifié. Pour tout $r \geq s$, soit $a_r \in K_r$ une ψ_r-jauge de χ_r ; la classe $\overline{a}_r$ de a_r dans $K_r^*/U_r(c)$ est uniquement déterminée (1.3.2). Par le lemme 2.3.3, quitte à agrandir s, on a, pour $r \geq s$, $N(\overline{a}_{r+1}) = \overline{a}_r$. On en déduit par (2.1.11-2), un élément

$\overline{a}_\infty = (\overline{a}_r)_{r\geq s} \in \mathrm{E}_K^*/U_{\mathrm{E}_K}(c)$. Soit $a_\infty \in \mathrm{E}_K^*$ un relèvement de $\overline{a}_\infty$. Montrons que a_∞ est une ψ_∞-jauge de χ_∞. D'après (1.3.2), on peut supposer que $a_r = (a_\infty)_r$; pour tout $r \geq s$, a_r est une ψ_r-jauge de χ_r et $N(a_{r+1}) = a_r$. Soit $y = (y_r)_{r\in\mathbb{N}} \in \mathrm{E}_K$, de valuation $\mathrm{v}_{\mathrm{E}_K}(y) \geq c^+$. On a,

$$\chi_\infty(1+y) = \chi_0((1+y)_0) = \chi_0(\lim_{r\to+\infty} N_{K_r/K_0}(1+y_r)) = \lim_{r\to+\infty} \chi_r(1+y_r) = \lim_{r\to+\infty} \psi_r(a_r y_r).$$

Comme $N(a_{r+1}y_{r+1}) = a_r y_r$, $\psi_r(a_r y_r)$ est constant égal à $\psi_\infty(a_\infty y)$, cf. (2.2.4). Par (1.3.3), on a

$$\varepsilon\big([\chi_\infty] - [1_{\mathrm{E}_K}], \psi_\infty\big) = q_0^c \sum_{\overline{\beta}\in U(c)/U(c^+)} \frac{\psi_\infty(a_\infty\beta)}{\chi_\infty(a_\infty\beta)},$$

où $U(c)/U(c^+)$ désigne $U_{\mathrm{E}_K}(c)/U_{\mathrm{E}_K}(c^+)$ et β est un relèvement de $\overline{\beta}$. En vertu de (2.1.11-3), pour tout r assez grand, l'application $U_{\mathrm{E}_K}(c)/U_{\mathrm{E}_K}(c^+) \to U_r(c)/U_r(c^+)$, $\overline{\beta} \mapsto \overline{\beta}_r$ est un isomorphisme et comme $\psi_\infty(a_\infty\beta)\chi_\infty(a_\infty\beta)^{-1} = \psi_r(a_r\beta_r)\chi_r(a_r\beta_r)^{-1}$, la proposition s'en suit. □

On note C la C-représentation de Weil triviale de rang 1.

Théorème 2.3.5. *Soient $V = (V, \rho) \in \mathrm{Rep}_C(W_K)$ et $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ une tour admissible de caractères additifs non-triviaux. Alors il existe s tel que pour tout $r \geq s$, on a*

$$\varepsilon\big([V_r] - \dim V[C], \psi_r\big) = \varepsilon\big([V_\infty] - \dim V[C], \psi_\infty\big).$$

Dém. On peut supposer V irréductible. Par (1.1.3), C étant algébriquement clos, on a $\rho = \rho' \otimes \gamma$, où $\rho' \colon W_K \to \mathrm{GL}_C(V)$ est une représentation qui se factorise par un quotient fini et $\gamma \colon W_K \to C^*$ est un caractère non-ramifié. On pose $V' = (V, \rho')$. On se donne, pour tout $r \geq 0$, un Frobenius géométrique F_r^* de W_{K_r} et un Frobenius géométrique de W_{E_K}, qu'on note F_∞^*. En appliquant (1.3.4-2), on obtient

$$\varepsilon\big([V_r] - \dim V[C], \psi_r\big) = \gamma_r\big(F_r^{*(\mathrm{ar}(\rho_r') + d(\psi_r)\dim V)}\big)\varepsilon\big([V_r'] - \dim V[C], \psi_r\big),$$

Par (2.3.1) la suite $(\mathrm{ar}(\rho_r'))_{r\in\mathbb{N}}$ est stationnaire de limite égale à $\mathrm{ar}(\rho_\infty')$. Par définition la suite $(d(\psi_r))_{r\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\gamma(F_r^*))_{r\in\mathbb{N}}$) est stationnaire (resp. constante) de limite égale à $d(\psi_\infty)$ (resp. $\gamma_\infty(F_\infty^*)$). Donc, quitte à changer les notations, on peut supposer que $\rho \colon W_K \to \mathrm{GL}_C(V)$ se factorise par un quotient fini G. Par le théorème d'induction de Brauer [**De73**, Prop.1.5], on écrit

$$[V] - \dim V[C] = \sum_{H\leq G, V_H} n(V_H)\,\mathrm{Ind}_H^G\big([V_H] - [C]\big),$$

où H (resp. V_H) varie parmi les sous-groupes de G (resp. les C-représentations de H de rang 1) et les $n(V_H)$ sont des entiers. Par linéarité du facteur epsilon, on est ramené à démontrer le théorème pour les représentations virtuelles de la forme $\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K}([V] - [C])$, où L est une extension finie de K et V est une C-représentation de Weil de L, de rang 1, qui se factorise par un quotient fini H de W_L. Comme on s'interesse à la restriction de $\mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K}([V] - [C])$ à W_{K_r} pour r assez grand, quitte à remplacer K par une extension finie dans K_∞, on peut supposer $L \cap K_\infty = K$. On vérifie que

$$\mathrm{Res}_{W_K}^{W_{K_r}} \mathrm{Ind}_{W_L}^{W_K}\big([V] - [C]\big) = \mathrm{Ind}_{W_{L\cdot K_r}}^{W_{K_r}} \mathrm{Res}_{W_L}^{W_{L\cdot K_r}}\big([V] - [C]\big),$$

en utilisant le cas particulier suivant du théorème de Mackey :

Lemme 2.3.6. [**Isa94**, Ch.5, Pr.(5.2)]. *Soient G un groupe fini , $H \leq G$ et V une C-représentation de H. Si $S \leq G$ tel que $HS = G$, alors* $\operatorname{Res}^S_G \operatorname{Ind}^G_H V = \operatorname{Ind}^S_{S\cap H} \operatorname{Res}^{S\cap H}_H V$.

D'où, par 1.2.5-(2),

$$\begin{aligned}\varepsilon\big(\operatorname{Res}^{W_{K_r}}_{W_K} \operatorname{Ind}^{W_K}_{W_L}\big([V]-[C]\big),\psi_r\big) &= \varepsilon\big(\operatorname{Ind}^{W_{K_r}}_{W_{L\cdot K_r}} \operatorname{Res}^{W_{L\cdot K_r}}_{W_L}\big([V]-[C]\big),\psi_r\big)\\ &= \varepsilon\big(\operatorname{Res}^{W_{L\cdot K_r}}_{W_L}\big([V]-[C]\big),\psi_r\circ \operatorname{tr}_{L\cdot K_r/K_r}\big).\end{aligned}$$

On note $\chi\colon L^* \to C^*$ le quasi-caractère associé à V. Quitte à remplacer L et K par une extension finie contenue respectivement dans L_∞ et K_∞, on peut supposer L/K admissible (2.1.9), donc $L \cdot K_r = L_r$. Avec les notations de (2.3.2), on a

$$\varepsilon\big(\operatorname{Res}^{W_{L_r}}_{W_L}\big([V]-[C]\big),\psi_r\circ \operatorname{tr}_{L_r/K_r}\big) = \varepsilon\big([\chi_r]-[1_r],\psi_r\circ \operatorname{tr}_{L_r/K_r}\big).$$

Par 2.2.6 et 2.3.4, il existe un $s\in\mathbb{N}$, tel que pour $r\geq s$, on a

$$\varepsilon\big([\chi_r]-[1_r],\psi_r\circ \operatorname{tr}_{L_r/K_r}\big) = \varepsilon\big([\chi_\infty]-[1_{\mathrm{E}_L}],\psi_\infty\circ \operatorname{tr}_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}\big).$$

On note $V(\chi_\infty)$ la C-représentation de Weil de E_L de rang 1, associée à χ_∞. Par (1.2.5), on a

$$\varepsilon\big([\chi_\infty]-[1_{\mathrm{E}_L}],\psi_\infty\circ \operatorname{tr}_{\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K}\big) = \varepsilon\big(\operatorname{Ind}^{W_{\mathrm{E}_K}}_{W_{\mathrm{E}_L}}\big([V(\chi_\infty)]-[C]\big),\psi_\infty\big),$$

et par (2.3.1), $\operatorname{Ind}^{W_{\mathrm{E}_K}}_{W_{\mathrm{E}_L}}\big([V(\chi_\infty)]-[C]\big) = \Big(\operatorname{Ind}^{W_K}_{W_L}\big([V]-[C]\big)\Big)_\infty$, ce qui achève la preuve. □

2.3.7. Pour toute mesure de Haar ν_∞ sur E_K, on note ν_r l'unique mesure de Haar sur K_r telle que $\nu_r(\mathcal{O}_{K_r}) = \nu_\infty(\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K})$.

Corollaire 2.3.8. *Soient (V,ρ,N) une C-représentation de Weil-Deligne de K, $\theta\colon \mathrm{E}_K \to \mu_p(C)$ un caractère additif non-trivial et ν_∞ une mesure de Haar sur E_K. On se donne une tour admissible de caractères additifs $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ telle que $\psi_\infty = \theta$ (2.2.5). Alors il existe un entier $s\geq 0$ tel que pour tout $r\geq s$, on a*

$$\begin{aligned}\varepsilon(V_r,\psi_r,\nu_r) &= \varepsilon(V_\infty,\theta,\nu_\infty)\\ \varepsilon_0(V_r,\psi_r,\nu_r) &= \varepsilon_0(V_\infty,\theta,\nu_\infty).\end{aligned}$$

Dém. Supposons d'abord $N=0$. On a alors

$$\begin{aligned}\varepsilon(V_r,\psi_r,\nu_r) &= \varepsilon\big([V_r]-\dim V[C],\psi_r\big)\varepsilon(C,\psi_r,\nu_r)^{\dim V}\\ &= \varepsilon\big([V_r]-\dim V[C],\psi_r\big)\nu_r(\mathcal{O}_{K_r})^{\dim V} q_0^{d(\psi_r)\dim V}.\end{aligned}$$

Par construction, $d(\psi_r)$ se stabilise à $d(\theta)$ et $\nu_r(\mathcal{O}_{K_r})$ est constant égal à $\nu_\infty(\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K})$. On conclut en appliquant le théorème 2.3.5. Pour le cas général, il suffit de remarquer que $\det(-\rho(F_n^*)|V^{I_{K_n}}/\operatorname{Ker} N^{I_{K_n}})$ se stabilise en $\det(-\rho(F_\infty^*)|V^{I_{\mathrm{E}_K}}/\operatorname{Ker} N^{I_{\mathrm{E}_K}})$, où F_n^* (resp. F_∞^*) désigne un Frobenius géométriques quelconque de W_{K_n} (resp. W_{E_K}). L'assertion pour ε_0 s'ensuit. □

2.4. Applications aux représentations de de Rham

2.4.1. Dans cette section, on suppose que C contienne K^{sep}. On pose $K_{\mathrm{a}} = \mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k)$ et on note $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$ son extension maximale non-ramifiée dans K^{sep} et B_{st} l'anneau des périodes des représentations semi-stables de G_K.

Soit V une représentation galoisienne p-adique, i.e. un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_K. On pose

$$\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \varinjlim_{G' \leq G_K} (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{st}})^{G'},$$

où la limite est prise sur les sous-groupes ouverts de G_K. C'est un $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$. Il est muni d'une action

$$\tilde{\rho}\colon G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}_{K_{\mathrm{a}}}\big(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)\big),$$

semi-linéaire par rapport à l'action naturelle de G_K sur $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$, d'une application σ-linéaire équivariante $\varphi\colon \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ et d'un endomorphisme nilpotent équivariant N tels que $N \circ \varphi = p\varphi \circ N$ (cf. la première partie de cette thèse [**Mar04**, §2], pour plus de détails).

Suivant Fontaine et Perrin-Riou [**PR95**, App. C.1.4], on muni $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ d'une action linéaire ρ de W_K en posant

$$\forall w \in W_K, \quad \rho(w) = \tilde{\rho}(w)\varphi^{f\nu(w)}.$$

Le triplet $(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V), \rho, N)$ est une $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$-représentation de Weil-Deligne de K qu'on note abusivement $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$.

Soient $\psi\colon K \to C^*$ un caractère additif non trivial et μ une mesure de Haar sur K à valeur dans C. On pose

$$\varepsilon(V, \psi, \mu) = \varepsilon(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) \otimes_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} C, \psi, \mu).$$

Ces définitions prennent tout leur intérêt dans le cas d'une représentation de de Rham V où on a $\dim_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

Pour tout entier $r \geq 0$, on note V_r la restriction de V à G_{K_r}. Comme, $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V_r) = \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|W_{K_r}}$, on obtient par (2.3.8), le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.2. *Soient V une représentation de de Rham de G_K, $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_\infty$ la déformation au corps des normes* (2.3.1) *de $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$, $\theta\colon \mathrm{E}_K \to \mu_p(C)$ un caractère additif non-trivial et ν_∞ une mesure de Haar sur E_K à valeurs dans $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}(\mu_p(C))$. On se donne une tour admissible de caractères additifs $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ telle que $\psi_\infty = \theta$, cf.* (2.2.5). *Alors il existe un entier positif s, tel que pour tout $r \geq s$,*

$$\begin{aligned}
\varepsilon(V_r, \psi_r, \nu_r) &= \varepsilon\big(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_\infty \otimes_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}\big(\mu_p(C)\big), \theta, \nu_\infty\big),\\
\varepsilon_0(V_r, \psi_r, \nu_r) &= \varepsilon_0\big(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_\infty \otimes_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}\big(\mu_p(C)\big), \theta, \nu_\infty\big).
\end{aligned}$$

Anticipant sur les définitions du chapitre 3, on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.4.3. *Soient K_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K, V une représentation de de Rham de G_K, $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ le (φ, ∇)-module de Berger associé à V* [**Berg02**, 5.20],

$\theta\colon \mathrm{E}_K \to \mu_p(C)$ un caractère additif non-trivial et ν_∞ une mesure de Haar sur E_K à valeurs dans $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}(\mu_p(C))$. Alors, avec les définitions de (3.6.4)*, on a*

$$\mathrm{WD}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) = \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_\infty \tag{2.4.3.1}$$

$$\varepsilon\big(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_\infty \otimes_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}\big(\mu_p(C)\big), \theta, \nu_\infty\big) = \varepsilon(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V), \theta, \nu_\infty) \tag{2.4.3.2}$$

et de même pour ε_0.

Dém. Dans la première partie, cf. (partie 1, 5.3), on a noté $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^\infty(V)$ la représentation semi-linéaire de G_{E_K} obtenue à partir de $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty)}$ via l'isomorphisme canonique $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K_\infty) \cong G_{\mathrm{E}_K}$. Par (partie 1, 5.9-i), on a $S(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) \cong \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^\infty(V)$ en tant que $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$-modules de Deligne de E_K, cf. (3.2.4) et (3.3.16.1). En recopiant (2.4.1), on peut considérer $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^\infty(V)$ (resp. $S(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))$) comme une $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$-représentation de Weil-Deligne de E_K ; elle est alors égale à la déformation au corps des normes $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_\infty$ de $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ (resp. à $\mathrm{WD}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))$), d'où (2.4.3.1). On en déduit immédiatement (2.4.3.2). □

CHAPITRE 3

F-isocristaux sur un corps local

3.1. Les anneaux de fonctions

3.1.1. Dans tout ce chapitre, K désigne un corps de valuation discrète, complet de caractéristique $p > 0$, à corps résiduel k parfait. A partir de la section 3.6, on supposera k fini de cardinal $q = p^f$. On reprend les notations de (0.1). On fixe une uniformisante de K, ce qui détermine un isomorphisme $\mathcal{O}_K \cong k[\![T]\!]$. Par extension finie séparable de K, on sous-entend une extension finie contenue dans K^{sep}. Pour une telle extension L, on notera $\mathcal{O}_L$ son anneau d'entiers, k_L (resp. $\mathfrak{m}_L$) le corps résiduel (resp. l'idéal maximal) de $\mathcal{O}_L$ et G_L le groupe de Galois de K^{sep} sur L.

3.1.2. Soient $h \geq 1$ un entier tel que k contienne un sous-corps de cardinal[1] p^h qu'on note $\mathbb{F}$, et Λ une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}$. On pose $C = \Lambda \otimes_{\mathrm{W}(\mathbb{F})} \mathrm{W}(k)$. C'est un corps de valuation discrète complet de corps résiduel k. On note $\mathcal{O}_C$ (resp. $\mathfrak{m}_C$) l'anneau des entiers de C (resp. l'idéal maximal de $\mathcal{O}_C$), v_C la valuation de C normalisée par $\mathrm{v}_C(C^*) = \mathbb{Z}$ et $\|x\| = p^{-h\mathrm{v}_C(x)}$ la valeur absolue d'un élément $x \in C$. On munit C de l'endomorphisme $\sigma_C = \mathrm{Id}_\Lambda \otimes \sigma^h$, où σ est l'endomorphisme de Frobenius de $\mathrm{W}(k)$. Le sous-corps de C fixé par σ_C est Λ. On dit que σ_C est un Frobenius *d'ordre* h de C. Les corps C et Λ apparaîtront dans la suite comme des *corps de coefficients*.

3.1.3. Pour tout nombre rationnel $0 \leq \rho < 1$, on pose

$$\mathcal{A}([\rho, 1[) = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{Z},\, a_n \in C,\, \forall \rho' \in [\rho, 1[,\, \lim_{n\to\pm\infty} \|a_n\|\rho'^n = 0 \right\}$$

l'anneau des séries convergentes sur la couronne $[\rho, 1[$ à coefficients dans C. C'est une C-algèbre topologique qui est un espace de Fréchet pour la topologie donnée par la famille des normes $\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n\|_{\rho'} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|\rho'^n$, pour $\rho \leq \rho' < 1$. On l'appelle anneau des *fonctions analytiques* sur la couronne $[\rho, 1[$. On appelle *anneau de Robba*, et on note $\mathcal{R}$, la réunion des $\mathcal{A}([\rho, 1[)$ pour ρ dans un voisinage (à gauche) de 1,

$$\mathcal{R} = \varinjlim_{\rho<1} \mathcal{A}([\rho, 1[).$$

C'est une C-algèbre topologique pour la topologie limite inductive.

[1] Il est usuel de poser $q = p^h$. Nous n'utilisons pas cette notation pour éviter toute confusion avec le cardinal de k dans le cas où ce dernier est fini.

3.1.4. On pose

$$\mathcal{E}^\dagger = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n \in \mathcal{R} \,\middle|\, \exists b \in \mathbb{R} \text{ t.q } \forall n \in \mathbb{Z},\ \|a_n\| < b \right\}.$$

C'est un corps dit *corps des fonctions surconvergentes bornées*. Il est muni de la valuation discrète donnée par $\mathrm{v}_1(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n) = \min_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{v}_C(a_n)$. On note $\|\cdot\|_1 = p^{-h\mathrm{v}_1(\cdot)}$ la norme associée à v_1, dite *norme de Gauss*. L'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ de $\mathcal{E}^\dagger$ est hensélien. Son corps résiduel est canoniquement isomorphe à $k[\![T]\!]$, donc à $\mathcal{O}_K$ par l'isomorphisme $\mathcal{O}_K \cong k[\![T]\!]$ fixé dans (3.1.1). L'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ est une $\mathcal{O}_C[\![T]\!][T^{-1}]$-algèbre et s'identifie à un sous-anneau du complété de $\mathcal{O}_C[\![T]\!][T^{-1}]$ pour la topologie $(\mathfrak{m}_C)$-adique.

On appelle *Frobenius d'ordre h* de $\mathcal{E}^\dagger$ un relèvement σ_C-linéaire et continu à $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ du Frobenius $\sigma^h \colon x \mapsto x^{p^h}$ de K. Un tel homomorphisme se prolonge évidemment de façon unique à $\mathcal{E}^\dagger$. L'homomorphisme σ_C-linéaire continu de $\mathcal{E}^\dagger$ envoyant T sur $(1+T)^{p^h} - 1$ est un exemple naturel de Frobenius d'ordre h. Un autre exemple est obtenu en envoyant T sur T^{p^h}. Tout Frobenius de $\mathcal{E}^\dagger$ se prolonge de façon unique en un endomorphisme continu de $\mathcal{R}$, cf. [**Mat02**, 2.2] ; on l'appelle *Frobenius* de $\mathcal{R}$. Dans la suite, on fixe un Frobenius $\sigma_{\mathcal{E}^\dagger}$ d'ordre h de $\mathcal{E}^\dagger$, qui laisse stable le sous-anneau $\mathcal{O}_C[\![T]\!]$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$; on notera $\sigma_{\mathcal{R}}$ son prolongement à $\mathcal{R}$.

3.1.5. Pour A un des anneaux $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{E}^\dagger$, on note $\widehat{\Omega}^1_{A/C}$ le A-module des différentielles continues de A sur C, $d \colon A \to \widehat{\Omega}^1_{A/C}$ la dérivation canonique. Par construction C s'identifie au *corps des constantes* $\mathrm{Ker}(d)$ de A. Par universalité, il existe un morphisme σ_A-linéaire $d\sigma_A \colon \widehat{\Omega}^1_{A/C} \to \widehat{\Omega}^1_{A/C}$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\sigma_A"'] & \widehat{\Omega}^1_{A/C} \arrow[d, "d\sigma_A"] \\ A \arrow[r, "d"] & \widehat{\Omega}^1_{A/C} \end{tikzcd}$$

3.1.6. Par la définition de Frobenius, la série $\sigma_{\mathcal{R}}(T)/T^{p^h}$ appartient à $1 + \mathfrak{m}_C\mathcal{O}_C[\![T]\!]$. Donc la série $\log(\sigma_{\mathcal{R}}(T)/T^{p^h})$ appartient à $\mathcal{O}_C[\![T]\!]$. Soit $\mathcal{R}[X]$ l'anneau des polynômes en une variable à coefficients dans $\mathcal{R}$. On prolonge $\sigma_{\mathcal{R}}$ et $d \colon \mathcal{R} \to \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C}$ en un homomorphisme d'anneaux $\sigma_{\mathcal{R}} \colon \mathcal{R}[X] \to \mathcal{R}[X]$ et une C-dérivation $d \colon \mathcal{R}[X] \to \mathcal{R}[X] \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C}$, en posant

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{R}}(X) &= p^h X + \log \frac{\sigma_{\mathcal{R}}(T)}{T^{p^h}}, \\ dX &= \frac{dT}{T}. \end{aligned}$$

Dans la suite, on désignera par $\log T$ la variable X. On appelle *monodromie* de $\mathcal{R}[\log T]$, et on note $N \colon \mathcal{R}[\log T] \to \mathcal{R}[\log T]$, la $\mathcal{R}$-dérivation qui envoie $\log T$ en 1. On a $N\sigma_{\mathcal{R}} =$

$p^h \sigma_{\mathcal{R}} N$. On définit, de façon analogue, un anneau $\mathcal{E}^\dagger[\log T]$ muni d'un Frobenius, d'un opérateur de monodromie, et une dérivation $d\colon \mathcal{E}^\dagger[\log T] \to \mathcal{E}^\dagger[\log T] \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{E}^\dagger/C}$.

3.1.7. Soit L une extension finie séparable de K. On note C_L l'extension finie non-ramifiée de C de corps résiduel k_L. Elle est unique à isomorphisme unique près. En fait C_L est isomorphe à $C \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathrm{W}(k_L)$, car C et $\operatorname{Fr} \mathrm{W}(k_L)$ sont linéairement disjoints sur $\operatorname{Fr} \mathrm{W}(k)$. Comme $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ est hensélien de corps résiduel K, il existe une extension finie, séparable et non-ramifiée $\mathcal{E}^\dagger(L)$ de $\mathcal{E}^\dagger$ de corps résiduel L ; elle est unique à isomorphisme unique près. L'injection canonique $k_L \hookrightarrow L$ détermine un homomorphisme $\mathrm{W}(k_L) \hookrightarrow \mathcal{E}^\dagger(L)$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{W}(k_L) \arrow[r, hook] & \mathcal{E}^\dagger(L) \\ \mathrm{W}(k) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \mathcal{E}^\dagger \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

On a donc un homomorphisme injectif $C_L \hookrightarrow \mathcal{E}^\dagger(L)$ fonctoriel en L, qui prolonge celui de C dans $\mathcal{E}^\dagger$.

On pose $\mathcal{R}(L) = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger(L)$; c'est une extension étale finie de $\mathcal{R}$, donc $\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(L)/C_L} = \mathcal{R}(L) \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C}$. Comme $\mathcal{E}^\dagger$ est hensélien, les Frobenius $\sigma_{\mathcal{E}^\dagger}$ et $\sigma_{\mathcal{R}}$ s'étendent de façon unique à $\mathcal{E}^\dagger(L)$ et $\mathcal{R}(L)$ respectivement, cf. [**Mat02**, 2.2].

3.1.8. On pose $C^{\mathrm{nr}} = \varinjlim C_L$, où la limite est prise sur toutes les extensions L/K finies et séparables contenues dans K^{sep}. On note $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ le complété p-adique de C^{nr}, il s'identifie à $C \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathrm{W}(k^{\mathrm{sep}})$. On munit $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ de l'action de G_K produit tensoriel de l'action triviale sur C et de l'action naturelle sur $\mathrm{W}(k^{\mathrm{sep}})$ via $G_K \to \operatorname{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)$. Le groupe de cohomologie $H^1_{\mathrm{cont}}\big(\operatorname{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k), \mathrm{W}(k^{\mathrm{sep}})\big)$ est trivial, cf. [**Ser68**, III-33]. On en déduit que, pour toute extension séparable finie L de K, le sous-corps de $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ fixé par G_L est

$$\big(\widehat{C}^{\mathrm{nr}}\big)^{G_L} = \big(C^{\mathrm{nr}}\big)^{G_L} = C_L.$$

Le Frobenius σ_C de C s'étend de façon unique à C^{nr} et par continuité à $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$; on le note encore σ_C. On pose $\mathcal{E}^{\dagger^{\mathrm{nr}}} = \varinjlim \mathcal{E}^\dagger(L)$, où la limite est prise sur les extensions finies séparables de K. Suivant [**Cr04a**], on note

$$\mathcal{B}_0 = \varinjlim_{L/K} \mathcal{R}(L) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B} = \mathcal{B}_0[\log T]$$

où la limite est prise sur les extensions finies séparables de K. On appelle $\mathcal{B}$ l'anneau des *hyperfonctions*. Par construction, les anneaux $\mathcal{E}^{\dagger^{\mathrm{nr}}}$, $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont des C^{nr}-algèbres. On a $\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{B}_0/C^{\mathrm{nr}}} = \varinjlim_{L/K} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(L)/C_L} = \mathcal{B}_0 dT$, et de même pour $\mathcal{E}^{\dagger^{\mathrm{nr}}}$. On définit une C^{nr}-dérivation $d\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{B}_0} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{B}_0/C^{\mathrm{nr}}}$ en posant $d \log T = \frac{dT}{T}$.

3.2. Modules de Deligne

DÉFINITION 3.2.1. Un φ-module sur C est un C-espace vectoriel de dimension finie M muni d'une application σ_C-linéaire injective $\varphi\colon M \to M$. Comme M est de dimension finie et σ_C est un isomorphisme, φ est isomorphisme σ_C-linéaire, qu'on appelle *Frobenius* de M. Un morphisme de φ-modules sur C est une application linéaire commutant aux Frobenius. On désigne par $\Phi M(C)$ la catégorie des φ-modules sur C.

3.2.2. La catégorie des φ-modules sur C est équivalente à la catégorie des F-isocristaux sur $\mathrm{Spec}(k)|C$, au sens de [**Bert96a**, (2.5.8)].

DÉFINITION 3.2.3. Un (φ, N)-module sur C est un φ-module M sur C, muni d'un endomorphisme N du C-espace vectoriel sous-jacent à M, tel que

$$N \circ \varphi = p^h \varphi \circ N.$$

Comme M est de dimension finie, N est nilpotent. On appellera N l'*opérateur de monodromie* de M. Un morphisme de (φ, N)-modules sur C est un morphisme de φ-modules commutant aux opérateurs de monodromie. On désigne par $\Phi M_{\log}(C)$ la catégorie des (φ, N)-modules sur C.

DÉFINITION 3.2.4. [**Fon94c**, §1] (1) Un $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne de K est la donnée d'un $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-espace vectoriel V de dimension finie muni des structures suivantes :

i) une action semi-linéaire continue de G_K triviale sur un sous-groupe ouvert de I_K ;

ii) un endomorphisme $N\colon V \to V$ nilpotent et équivariant ;

iii) une application σ_C-linéaire $\varphi\colon V \to V$ injective et équivariante telle que

$$N \circ \varphi = p^h \varphi \circ N.$$

(2) Un C^{nr}-module de Deligne de K est la donnée d'un C^{nr}-espace vectoriel V de dimension finie muni des structures suivantes :

i) une action semi-linéaire discrète de G_K, i.e. telle que le stabilisateur de tout élément de V soit ouvert dans G_K ;

ii) un endomorphisme $N\colon V \to V$ nilpotent et équivariant ;

iii) une application σ_C-linéaire $\varphi\colon V \to V$ injective et équivariante telle que

$$N \circ \varphi = p^h \varphi \circ N.$$

(3) Soit L une extension finie galoisienne de K. Un C_L-module de Deligne de K est la donnée d'un C_L-espace vectoriel V de dimension finie muni des structures suivantes :

i) une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(L/K)$;

ii) un endomorphisme $N\colon V \to V$ nilpotent et équivariant ;

iii) une application σ_C-linéaire $\varphi\colon V \to V$ injective et équivariante telle que

$$N \circ \varphi = p^h \varphi \circ N.$$

Dans chacun de ces cas, on appelle N (resp. φ) l'*opérateur de monodromie* (resp. le *Frobenius*) de V.

Un morphisme de modules de Deligne de K est une application linéaire équivariante qui commute aux Frobenius et aux opérateurs de monodromie. On note $\mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K))$

la catégorie des C_L-modules de Deligne de K, $\mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K)$ la catégorie des C^{nr}-modules de Deligne de K, et de même pour $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$. On vérifie aisément que ces catégories sont abéliennes et Λ-linéaires.

REMARQUE 3.2.5. Fontaine a introduit les modules de Deligne pour un corps local K d'inégale caractéristique [**Fon94c**, §1]. Il appelle (φ, N, G_K)-modules les C^{nr}-modules de Deligne de K et p-modules de Deligne les $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-modules de Deligne de K. On uniformise ici la nomenclature en raison du rôle similaire que ces objets joueront dans la suite.

EXEMPLE 3.2.6. On note $C^{\mathrm{nr}}(1)$ le C^{nr}-module de Deligne $(C^{\mathrm{nr}}, p^{-h}\sigma_C, 0)$ de K. Pour tout C^{nr}-module de Deligne (V, φ, N) de K et tout entier n, on note $V(n)$ le C^{nr}-module $(V, p^{-nh}\varphi, N)$. De même pour les $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-modules (resp. C_L-modules) de Deligne de K.

3.2.7. Soient L une extension galoisienne finie de K, $\widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$ l'un des corps C^{nr} ou $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$. L'extension des scalaires $V \mapsto V \otimes_{C_L} \widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$ induit un foncteur

$$- \otimes_{C_L} \widetilde{C}^{\mathrm{nr}} \colon \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K)) \longrightarrow \mathrm{Del}_{\widetilde{C}^{\mathrm{nr}}}(G_K)$$

définit comme suit : soit $(V, \varphi_V, N_V) \in \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K))$, on muni $W = V \otimes_{C_L} \widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$ de l'opérateur de monodromie $N_W = N_V \otimes \mathrm{Id}$, du Frobenius $\varphi_W = \varphi_V \otimes_{\sigma_C} \sigma_C$ et de l'action semi-linéaire diagonale de G_K. On vérifie facilement que (W, φ_W, N_W) est un $\widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne de K. Comme $(\widetilde{C}^{\mathrm{nr}})^{G_L} = C_L$, ce foncteur est pleinement fidèle.

De façon analogue, l'extension des scalaires de C^{nr} à $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ induit un foncteur de complétion [**Fon94c**, 1.2.1]

$$\underline{Co} \colon \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \longrightarrow \mathrm{Del}_{\widehat{C}^{\mathrm{nr}}}(G_K).$$

PROPOSITION 3.2.8. [**Fon94c**, Prop 1.2.2] (1) *Soient $\widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$ l'un des corps C^{nr} ou $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$, V un $\widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne de K. Il existe une extension galoisienne finie L/K et un C_L-module de Deligne W de K, tel que $W \otimes_{C_L} \widetilde{C}^{\mathrm{nr}} \cong V$. On dit que V est* trivialisé *par L et que W est* une descente *de V à L.*

(2) *Le foncteur $\underline{Co}$ est une équivalence de catégories. Un quasi-inverse est donné par*

$$\underline{D\acute{e}co} \colon \mathrm{Del}_{\widehat{C}^{\mathrm{nr}}}(G_K) \longrightarrow \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K),$$

où, pour tout $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne V, $\underline{D\acute{e}co}(V)$ est le sous-ensemble de V formé des éléments de stabilisateur ouvert.

DÉM. (1) Soient V un C^{nr}-module de Deligne de K et $v_1, \ldots, v_n$ une base de V. Par définition, le stabilisateur de $v_1, \ldots, v_n$ est un sous-groupe ouvert de G_K. Il existe donc un sous-groupe ouvert distingué H de G_K qui stabilise les éléments $v_1, \ldots, v_n$. Soient $L = (K^{\mathrm{sep}})^H$ et W le sous-C_L-espace vectoriel de V engendré par $v_1, \ldots, v_n$. Comme N et φ sont équivariants, W est stable sous leurs action et c'est clairement un C_L-module de Deligne de K tel que $W \otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}} \cong V$.

Supposons maintenant que V soit un $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne de K, J un sous-groupe distingué ouvert de I_K qui agit trivialement sur V et L/K une extension galoisienne finie telle que $J = I_L$. L'action de G_L sur V se factorise à travers $\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k_L)$. On prend $W = V^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k_L)}$. C'est un C_L-espace vectoriel muni d'une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(L/K)$

et d'applications N et φ déduites de celles de V. Comme $H^1_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k_L), \mathrm{GL}_n(\widehat{C}^{\mathrm{nr}}))$ est trivial [**Ser68**, III-33], on a $W \otimes_{C_L} \widehat{C}^{\mathrm{nr}} \cong V$.

(2) Il est évident que $\underline{\textit{Déco}}(V) = W \otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}}$ et que $\underline{\textit{Déco}}$ est un foncteur. Le reste de l'assertion s'ensuit facilement, en raisonnant comme dans [**Fon94c**, 1.2.3]. □

3.2.9. Soient $\widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$ l'un des corps C^{nr} ou $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ et V un $\widetilde{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne de K. Par hypothèse, l'action de I_K sur V est linéaire et se factorise par un quotient fini. On peut donc définir son conducteur et ses pentes de Swan, cf. [**Kat88**, 1.2–1.6] ; ces définitions ne dépendent pas du quotient choisi. On appelle ces invariants le *conducteur* et les *pentes de Swan* de V ; on note le premier $\mathrm{sw}(V)$.

3.3. (φ, ∇)-modules

DÉFINITION 3.3.1. Un (φ, ∇)-module sur $\mathcal{R}$ est la donnée d'un triplet (M, ∇, φ) où :

i) M est un $\mathcal{R}$-module libre de type fini ;

ii) $\nabla \colon M \to M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C}$ est une connexion ;

iii) $\varphi \colon M \to M$ est un *Frobenius horizontal*, c'est-à-dire une application $\sigma_{\mathcal{R}}$-linéaire telle que $\varphi(M)$ engendre M sur $\mathcal{R}$ et telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\nabla} & M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi\otimes d\sigma_{\mathcal{R}}} \\ M & \xrightarrow{\nabla} & M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C} \end{array}$$

On note $\Phi M(\mathcal{R})$ la catégorie des (φ, ∇)-modules sur $\mathcal{R}$, les morphismes étant les applications linéaires horizontales commutant aux Frobenius. On notera abusivement M au lieu de (M, ∇, φ).

3.3.2. On définit de même qu'en (3.3.1), les notions de (φ, ∇)-module sur $\mathcal{E}^\dagger$, ou sur $\mathcal{E}^\dagger(L)$, ou sur $\mathcal{R}(L)$ (pour une extension séparable finie L de K), ou sur $\mathcal{B}_0$ (3.1.8). On notera respectivement $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)$, $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger(L))$, $\Phi M(\mathcal{R}(L))$ et $\Phi M(\mathcal{B}_0)$ les catégories des (φ, ∇)-modules sur ces anneaux.

On appelle aussi $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)$ (resp. $\Phi M(\mathcal{R})$) la catégorie des *F-isocristaux surconvergents* (resp. *analytiques*) sur $\mathrm{Spec}(K)|C$.

DÉFINITION 3.3.3. Un (φ, ∇, N)-module sur $\mathcal{R}[\log T]$ est la donnée du quadruplet $(M, \nabla, \varphi, N_M)$ où :

i) M est un $\mathcal{R}[\log T]$-module libre de type fini ;

ii) $\nabla \colon M \to M \otimes_{\mathcal{R}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C}$ est une connexion ;

iii) $\varphi\colon M\to M$ est un *Frobenius horizontal*, c'est-à-dire une application $\sigma_{\mathcal{R}}$-linéaire telle que $\varphi(M)$ engendre M sur $\mathcal{R}[\log T]$ et telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\varphi"'] & M\otimes_{\mathcal{R}}\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C} \arrow[d, "\varphi\otimes d\sigma_{\mathcal{R}}"] \\ M \arrow[r, "\nabla"] & M\otimes_{\mathcal{R}}\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/C} \end{tikzcd}$$

iv) $N_M\colon M\to M$ est une N-dérivation de M (i.e. une application additive telle que, pour tout $m\in M$, $\alpha\in\mathcal{R}[\log T]$, on a $N_M(\alpha m)=N(\alpha)m+\alpha N_M(m)$), qui soit horizontale et telle que

$$N_M\circ\varphi=p^h\varphi\circ N_M.$$

On appelle N_M l'*opérateur de monodromie* de M. On note $\Phi M(\mathcal{R}[\log T])$ la catégorie des (φ,∇,N)-modules sur $\mathcal{R}[\log T]$, les morphismes étant les applications linéaires horizontales commutant aux Frobenius et aux opérateurs de monodromie. On notera abusivement M au lieu de (M,∇,φ,N_M).

3.3.4. On définit de même qu'en (3.3.3), les notions de (φ,∇,N)-modules sur $\mathcal{E}^\dagger[\log T]$, ou sur $\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T]$, ou sur $\mathcal{R}(L)[\log T]$ (pour une extension séparable finie L de K), ou sur $\mathcal{B}$ (3.1.8). On notera respectivement $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger[\log T])$, $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T])$, $\Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])$ et $\Phi M(\mathcal{B})$ les catégories des (φ,∇,N)-modules sur ces anneaux.

3.3.5. On donne dans ce numéro une variante équivariante de la définition (3.3.4), qui sera cruciale pour la classification des (φ,∇)-modules sur $\mathcal{R}$. Soient L/K une extension galoisienne finie, (M,φ,∇,N_M) un (φ,∇,N)-module sur $\mathcal{R}(L)[\log T]$. Une *donnée de descente* sur M est la donnée d'une action semi-linéaire ρ de $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur M, commutant à φ et à N_M et qui soit horizontale au sens semi-linéaire, c'est-à-dire que pour tout γ dans $\mathrm{Gal}(L/K)$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\rho(\gamma)"'] & M\otimes_{\mathcal{R}(L)}\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(L)/C_L} \arrow[d, "\rho(\gamma)\otimes d\gamma"] \\ M \arrow[r, "\nabla"] & M\otimes_{\mathcal{R}(L)}\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(L)/C_L} \end{tikzcd}$$

où $d\gamma\colon\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(L)/C_L}\to\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(L)/C_L}$ est l'application γ-linéaire induite par universalité de l'action de γ sur $\mathcal{R}(L)$. On note $\Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\mathrm{ds}}$ la catégorie des (φ,∇,N)-modules sur $\mathcal{R}(L)[\log T]$ muni d'une donnée de descente, les morphismes étant les morphismes de (φ,∇,N)-modules qui sont équivariants par rapport aux données de descente. De même, on définit, *mutatis mutandis*, les catégories $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T])_{\mathrm{ds}}$ et $\Phi M(\mathcal{B})_{\mathrm{ds}}$.

3.3.6. On résume dans le tableau suivant les anneaux introduits avec leurs opérateur de monodromie et leurs corps des constantes :

Anneau	N	$\operatorname{Ker} d$
$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{E}^\dagger$	0	C
$\mathcal{R}(L)$ ou $\mathcal{E}^\dagger(L)$	0	C_L
$\mathcal{R}[\log T]$ ou $\mathcal{E}^\dagger[\log T]$	$N \neq 0$	C
$\mathcal{R}(L)[\log T]$ ou $\mathcal{E}^\dagger(L)[\log T]$	$N \neq 0$	C_L
$\mathcal{B}_0$	0	C^{nr}
$\mathcal{B}$	$N \neq 0$	C^{nr}

3.3.7. Soit M un (φ, ∇)-module sur $\mathcal{R}$. On note M^∇ le C-espace vectoriel $\operatorname{Ker} \nabla$ des *sections horizontales* de M. On montre facilement que la dimension sur C de M^∇ est inférieure ou égale au rang de M et cet espace hérite de M d'une structure de φ-module sur C cf. (3.2.1). Ceci définit un foncteur additif et exact à gauche

(3.3.7.1)
$$\begin{aligned} (-)^\nabla \colon \Phi M(\mathcal{R}) &\longrightarrow \Phi M(C) \\ (M, \nabla, \varphi) &\longmapsto (M^\nabla, \varphi) \end{aligned}$$

De même, on a

(3.3.7.2)
$$(-)^\nabla \colon \Phi M(\mathcal{R}(L)) \longrightarrow \Phi M(C_L)$$

(3.3.7.3)
$$(-)^\nabla \colon \Phi M(\mathcal{B}_0) \longrightarrow \Phi M(C^{\mathrm{nr}})$$

3.3.8. Soit M un (φ, ∇, N)-module sur $\mathcal{R}[\log T]$. De façon analogue à (3.3.7), le C-espace vectoriel M^∇ des sections horizontales de M hérite d'une structure de (φ, N)-module. On en déduit un foncteur additif, exacte à gauche,

(3.3.8.1)
$$(-)^\nabla \colon \Phi M(\mathcal{R}[\log T]) \longrightarrow \Phi M_{\log}(C)$$

On montre que pour tout (φ, ∇, N)-module M sur $\mathcal{R}[\log T]$, la dimension de M^∇ sur C est inférieure ou égale au rang de M sur $\mathcal{R}[\log T]$.

De même, on a

(3.3.8.2)
$$(-)^\nabla \colon \Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T]) \longrightarrow \Phi M_{\log}(C_L)$$

(3.3.8.3)
$$(-)^\nabla \colon \Phi M(\mathcal{B}) \longrightarrow \Phi M_{\log}(C^{\mathrm{nr}})$$

3.3.9. Un (φ, ∇)-module sur $\mathcal{R}$ est dit $\mathcal{R}$-*soluble* s'il admet une base de sections horizontales. Pour un tel module M, l'inclusion de M^∇ dans M induit par linéarisation un isomorphisme de (φ, ∇)-modules

(3.3.9.1)
$$M^\nabla \otimes_C \mathcal{R} \longrightarrow M;$$

en particulier, on a $\dim_C M^\nabla = \operatorname{rg} M$. On note $\Phi M(\mathcal{R})^{\mathrm{sol}}$ la sous-catégorie pleine de $\Phi M(\mathcal{R})$ des modules $\mathcal{R}$-solubles. La restriction du foncteur (3.3.7.1) des sections horizontales à $\Phi M(\mathcal{R})^{\mathrm{sol}}$ est une équivalence de catégories dont un quasi-inverse est :

(3.3.9.2)
$$\begin{aligned} - \otimes_C \mathcal{R} \colon \Phi M(C) &\longrightarrow \Phi M(\mathcal{R})^{\mathrm{sol}} \\ (M, \varphi) &\longmapsto (M \otimes_C \mathcal{R}, \mathrm{Id}_M \otimes d, \varphi \otimes_{\sigma_C} \sigma_{\mathcal{R}}) \end{aligned}$$

EXEMPLE 3.3.10. On note $\mathcal{R}(1)$ le (φ,∇)-module $\mathcal{R}$-soluble $(\mathcal{R}, p^{-h}\sigma_{\mathcal{R}}, d_{\mathcal{R}})$. Pour tout (φ,∇)-module (M,φ,∇) et tout entier n, on note $M(n)$ le (φ,∇)-module $(M, p^{-nh}\varphi, \nabla)$.

3.3.11. On dit qu'un (φ,∇)-module M sur $\mathcal{R}$ est *unipotent* si M est une extension itérée de (φ,∇)-modules $\mathcal{R}$-solubles. On dit que un (φ,∇)-module M sur $\mathcal{R}$ est *quasi-unipotent* s'il existe une extension galoisienne finie L/K telle que $M\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{R}(L)$ soit unipotent comme (φ,∇)-module sur $\mathcal{R}(L)$. On vérifie que :

(1) M est unipotent si et seulement si $\mathrm{rg}(M) = \dim_C \left(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}[\log T]\right)^{\nabla}$.

(2) M est quasi-unipotent si et seulement si $\mathrm{rg}(M) = \dim_{C^{\mathrm{nr}}} \left(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B}\right)^{\nabla}$.

THÉORÈME 3.3.12 (Monodromie p-adique [**An02a**],[**Ked04**],[**Meb02**]). *Tout (φ,∇)-module sur $\mathcal{R}$ est quasi-unipotent.*

3.3.13. Soit L/K une extension galoisienne finie. Le foncteur des sections horizontales (3.3.8.2) induit un foncteur :

$$\begin{aligned} (-)^{\nabla} \colon \Phi M\big(\mathcal{R}(L)[\log T]\big)_{\mathrm{ds}} &\longrightarrow \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K)) \\ (M,\varphi,\nabla,N_M;\rho) &\longmapsto (M^{\nabla},\varphi,N_{M|M^{\nabla}};\rho_{|M^{\nabla}}) \end{aligned} \tag{3.3.13.1}$$

De même, (3.3.8.3) induit un foncteur :

$$(-)^{\nabla} \colon \Phi M(\mathcal{B})_{\mathrm{ds}} \longrightarrow \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \tag{3.3.13.2}$$

3.3.14. On a un foncteur d'extension des scalaires :

$$- \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B} \colon \Phi M(\mathcal{R}) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{B})_{\mathrm{ds}} \tag{3.3.14.1}$$

qui envoie (M,∇,φ) sur le quintuplet

$$(M\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{B}, \varphi\otimes_{\sigma_{\mathcal{R}}}\sigma_{\mathcal{B}}, \nabla\otimes\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes d, \mathrm{Id}_M\otimes N; \mathrm{Id}_M\otimes\rho).$$

Soit $(M,\nabla,\varphi,N_M;\rho)\in\Phi M(\mathcal{B})_{\mathrm{ds}}$. D'après la définition de $\mathcal{B}$, on a $(\mathrm{Ker}\,N)^{G_K} = \mathcal{R}$; donc $(\mathrm{Ker}\,N_M)^{G_K}$ est un $\mathcal{R}$-module. Il hérite de M d'une connexion et d'un Frobenius. S'il est projectif et de type fini sur $\mathcal{R}$, il est libre et appartient donc à $\Phi M(\mathcal{R})$. Dans ce cas, on pose

$$\mathrm{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}(M) = \big((\mathrm{Ker}\,N_M)^{G_K},\nabla,\varphi\big) \tag{3.3.14.2}$$

De la même façon, pour toute extension galoisienne finie L de K, on a

$$- \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}(L) \colon \Phi M(\mathcal{R}) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\mathrm{ds}} \tag{3.3.14.3}$$

qui envoie (M,∇,φ) sur le quintuplet

$$(M\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{R}(L)[\log T], \varphi\otimes_{\sigma_{\mathcal{R}}}\sigma_{\mathcal{R}}, \nabla\otimes\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes d, \mathrm{Id}_M\otimes N; \mathrm{Id}_M\otimes\rho)$$

Soit $(M,\nabla,\varphi,N_M;\rho)\in\Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\mathrm{ds}}$. Si le $\mathcal{R}$-module $(\mathrm{Ker}\,N_M)^{G_K}$ est projectif de type fini, on pose

$$\mathrm{Des}_{\mathcal{R}(L)[\log T]/\mathcal{R}}(M) = \big((\mathrm{Ker}\,N_M)^{\mathrm{Gal}(L/K)},\nabla,\varphi\big)\in\Phi M(\mathcal{R}) \tag{3.3.14.4}$$

LEMME 3.3.15. (1) *Les foncteurs* (3.3.14.1) *et* (3.3.14.3) *sont pleinement fidèles.*

(2) *Pour tout* $M \in \Phi M(\mathcal{R})$, *le* (φ, ∇)*-module* $\mathrm{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B})$ *est défini et canoniquement isomorphe à* M.

(3) *Pour tout extension finie et séparable* L *de* K *et tout* $M \in \Phi M(\mathcal{R})$, *on a* $\mathrm{Des}_{\mathcal{R}(L)[\log T]/\mathcal{R}}(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}(L)[\log T]) \cong M$.

DÉM. Il est évident que ces foncteurs sont fidèles. Soient M un (φ, ∇)-module sur $\mathcal{R}$, et $\widetilde{M} = M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B}$ l'image de M par (3.3.14.1). Il est clair que $\mathrm{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B})$ est défini et canoniquement isomorphe à M. Comme les morphismes dans $\Phi M(\mathcal{B})_{\mathrm{ds}}$ sont compatibles à la monodromie et aux données de descentes, le foncteur (3.3.14.1) est plein. *Idem* pour (3.3.14.3) et $\mathrm{Des}_{\mathcal{R}(L)[\log T]/\mathcal{R}}(M \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}(L)[\log T])$. □

3.3.16. On pose S le foncteur composé :

$$S\colon \Phi M(\mathcal{R}) \xrightarrow{(3.3.14.1)} \Phi M(\mathcal{B})_{\mathrm{ds}} \xrightarrow{(3.3.13.2)} \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \tag{3.3.16.1}$$

Il résulte du théorème de monodromie p-adique (3.3.12) que pour tout $M \in \Phi M(\mathcal{R})$, la dimension de $S(M)$ est égale au rang de M.

Pour une extension galoisienne finie L de K, on note $\Phi M(\mathcal{R})_L$ la sous-catégorie pleine de $\Phi M(\mathcal{R})$ des modules qui sont unipotents sur $\mathcal{R}(L)$. On pose S_L le foncteur composé :

$$S_L\colon \Phi M(\mathcal{R})_L \xrightarrow{(3.3.14.3)} \Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\mathrm{ds}} \xrightarrow{(3.3.13.1)} \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K)) \tag{3.3.16.2}$$

Par construction, pour tout $M \in \Phi M(\mathcal{R})_L$, la dimension de $S_L(M)$ est égale au rang de M. Soit $M \in \Phi M(\mathcal{R})$. L'inclusion $S_L(M) \subset S(M)$ induit par linéarisation un monomorphisme de C^{nr}-modules de Deligne

$$S_L(M) \otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}} \longrightarrow S(M)$$

qui est un isomorphisme puisque les deux membres ont même dimension. Par suite $S_L(M)$ est une descente de $S(M)$ à L, cf. (3.2.8). On a donc un diagramme de foncteurs commutatif (à isomorphisme près)

$$\begin{tikzcd} \Phi M(\mathcal{R}) \arrow[r, "S"] & \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \\ \Phi M(\mathcal{R})_L \arrow[u, hook] \arrow[r, "S_L"] & \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K)) \arrow[u, "- \otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}}"'] \end{tikzcd} \tag{3.3.16.3}$$

On appelle usuellement $S(M)$ l'espace des *cycles proches* de M. On se propose dans la suite de cette section de montrer que S et S_L sont des équivalences de catégories et de construire des quasi-inverses.

3.3.17. Soit L/K une extension galoisienne finie. On définit d'abord les foncteurs

$$\widetilde{M}\colon \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{E}^\dagger),$$

$$\widetilde{M}_L\colon \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K)) \longrightarrow \Phi M(\mathcal{E}^\dagger),$$

par

$$V \longmapsto \widetilde{M}(V) = \left\{ x \in V \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger\mathrm{nr}}[\log T] \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall g \in G_K,\ g(x) = x \\ (N_V \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

$$W \longmapsto \widetilde{M}_L(W) = \left\{ x \in W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger}(L)[\log T] \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall g \in \mathrm{Gal}(L/K),\ g(x) = x \\ (N_W \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

On vérifie facilement que pour tout C_L-module de Deligne W de K, on a

$$\widetilde{M}(W \otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}}) \cong \widetilde{M}_L(W)$$

Lemme 3.3.18. *Soient L/K une extension galoisienne finie et (W, N_W, φ_W) un C_L-module de Deligne de K.*

(1) *On a $\mathrm{rg}\,\widetilde{M}_L(W) = \dim_{C_L} W$; donc $\widetilde{M}_L$ est un foncteur exact.*

(2) *L'inclusion $\widetilde{M}_L(W) \subset W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger}(L)[\log T]$, induit par linéarisation un morphisme*

$$i\colon \widetilde{M}_L(W) \otimes_{\mathcal{E}^{\dagger}} \mathcal{E}^{\dagger}(L)[\log T] \longrightarrow W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger}(L)[\log T] \tag{3.3.18.1}$$

de $\Phi M(\mathcal{E}^{\dagger}(L)[\log T])_{\mathrm{ds}}$, qui est en fait un isomorphisme. En particulier, $\widetilde{M}_L(W)$ est unipotent sur $\mathcal{E}^{\dagger}(L)$.

Dém. Pour alléger les notations, on pose $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ et $U = W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger}(L)$. Montrons (1). D'abord on définit un isomorphisme de $\mathcal{E}^{\dagger}$-espaces vectoriels

$$f\colon (W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger}(L))^G \longrightarrow \widetilde{M}_L(W)$$

en posant $f(\sum_l v_l \otimes \alpha_l) = \sum_l \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i N_W^i(v_l) \otimes \alpha_l \frac{(\log T)^i}{i!}$, ou r est un entier tel que $N_W^r = 0$. L'application inverse $g\colon \widetilde{M}_L(W) \to (W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger}(L))^G$, est induite par la projection $\mathcal{E}^{\dagger}(L)[\log T] \to \mathcal{E}^{\dagger}(L)$ qui envoie $\log T$ en 0. Par construction, on a $gf = \mathrm{Id}$. Donc il suffit de montrer que g est injective. Soit $x = \sum_l v_l \otimes (\sum_{i=0}^{d} \alpha_{i,l} (\log T)^i)$. Supposons que $g(x) = \sum_l v_l \otimes \alpha_{0,l} = 0$. La relation $(N_W \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)(x) = 0$ équivaut à

$$\sum_l N_W(v_l) \otimes \alpha_{i,l} = -\sum_l v_l \otimes (i+1)\alpha_{i+1,l} \quad \forall i = 0, \dots, d. \tag{3.3.18.2}$$

Comme $\sum_l v_l \otimes \alpha_{0,l} = 0$, en appliquant $N_W \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N$, on obtient $\sum_l N_W(v_l) \otimes \alpha_{0,l} = 0$. D'où par (3.3.18.2), $\sum_l v_l \otimes \alpha_{1,l} = 0$. On en déduit par récurrence que $x = 0$.

Pour terminer la preuve de (1), il suffit de montrer que $\dim_{\mathcal{E}^{\dagger}} \left(W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger}(L)\right)^G = \dim_{C_L} W$. On pose $n = \dim_{C_L} W$. Comme $\mathrm{Gal}(\mathcal{E}^{\dagger}(L)/\mathcal{E}^{\dagger}) = G$, l'ensemble pointé de cohomologie non-commutative $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{GL}_n(\mathcal{E}^{\dagger}(L)))$ est trivial [**CL**, Ch.X Prop.3] ; donc $\dim_{\mathcal{E}^{\dagger}} (W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger}(L))^G = \dim_{\mathcal{E}^{\dagger}(L)} (W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger}(L)) = n$.

Montrons (2). Posons $B = \mathcal{E}^{\dagger}(L)[\log T]$. Comme B est un anneau de polynômes à coefficients dans un corps, en tensorisant (3.3.18.1) par $\mathrm{Fr}\, B$ au dessus de B, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{M}_L(W)\otimes_{\mathcal{E}^\dagger} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, hook] & W\otimes_{C_L} B \arrow[d, hook] \\
\widetilde{M}_L(W)\otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \operatorname{Fr} B \arrow[r, "i\otimes_B \mathrm{Id}"] & W\otimes_{C_L} \operatorname{Fr} B
\end{tikzcd}$$

On va montrer que $i\otimes_B\mathrm{Id}$ est injective ; donc par (1) c'est un isomorphisme. Par conséquent i est injective et son conoyau est un B-module de torsion qu'on note Q. Comme i est horizontal, le module Q est muni d'une connexion ; on montre facilement que ceci force Q a être nul. Montrons l'injectivité de $i\otimes_B \mathrm{Id}$. Soit $x=\sum_i^m v_i\otimes a_i$ un élément non-nul du noyau de $i\otimes_B \mathrm{Id}$, de longueur minimale m. On peut supposer $a_m=1$. L'élément $|G|x-\sum_{g\in G} g(x)$ appartient au noyau de $i\otimes_B \mathrm{Id}$ et a pour longueur $m-1$, ce qui mène à un contradiction. $\square$

3.3.19. Soit L/K une extension galoisienne finie. On définit des foncteurs :

$$M\colon \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K)\longrightarrow \Phi M(\mathcal{R}),$$
$$M_L\colon \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K))\longrightarrow \Phi M(\mathcal{R}),$$

par

$$V\longmapsto M(V)=\left\{x\in V\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\mathcal{B}\;\middle|\;\begin{array}{l}\forall g\in G_K,\ g(x)=x\\ (N_V\otimes\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes N)(x)=0\end{array}\right\}$$
$$W\longmapsto M_L(W)=\left\{x\in W\otimes_{C_L}\mathcal{R}(L)[\log T]\;\middle|\;\begin{array}{l}\forall g\in \mathrm{Gal}(L/K),\ g(x)=x\\ (N_W\otimes\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes N)(x)=0\end{array}\right\}.$$

On vérifie facilement que pour tout C_L-module de Deligne W de K, on a

$$M(W\otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}})\cong M_L(W)$$

Lemme 3.3.20. *Soit* $W\in\mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K))$.

(1) *L'inclusion* $\widetilde{M}_L(W)\subset M_L(W)$ *induit par linéarisation un isomorphisme canonique de* $\Phi M(\mathcal{R})$

$$\widetilde{M}_L(W)\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}\xrightarrow{\sim} M_L(W).$$

(2) *On a* $\operatorname{rg} M_L(W)=\dim_{C_L} W$, *donc* M_L *est un foncteur exact.*

(3) *L'inclusion* $M_L(W)\subset W\otimes_{C_L}\mathcal{R}(L)[\log T]$, *induit par linéarisation un morphisme*

$$M_L(W)\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{R}(L)[\log T]\longrightarrow W\otimes_{C_L}\mathcal{R}(L)[\log T] \tag{3.3.20.1}$$

de $\Phi M(\mathcal{R}(L)[\log T])_{\mathrm{ds}}$, *qui est en fait un isomorphisme. En particulier,* $M_L(W)$ *est unipotent sur* $\mathcal{R}(L)$, *ou de façon équivalente,* M_L *se factorise par* $\Phi M(\mathcal{R})_L$.

Dém. Montrons d'abord (1). On pose $G=\mathrm{Gal}(L/K)$. Comme $\widetilde{M}_L$ est exact, on peut supposer W simple, donc $N_W=0$, $\widetilde{M}_L(W)=\big(W\otimes_{C_L}\mathcal{E}^\dagger(L)\big)^G$ et $M_L(W)=\big(W\otimes_{C_L}\mathcal{R}(L)\big)^G$. On doit montrer que

$$\big(W\otimes_{C_L}\mathcal{E}^\dagger(L)\big)^G\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}=\big(W\otimes_{C_L}\mathcal{R}(L)\big)^G$$

On pose $U = W \otimes_{C_L} \mathcal{E}^\dagger(L)$. Comme $\mathcal{R}(L) = \mathcal{E}^\dagger(L) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$, il suffit de montrer que

$$U^G \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R} = (U \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^G.$$

On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow U^G \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R} \longrightarrow (U \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^G \longrightarrow \left(U/U^G \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}\right)^G.$$

Donc on peut supposer $U^G = 0$; il suffit de montrer que $(U \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^G = 0$. Soient $v_1, \ldots, v_n$ une base de U sur $\mathcal{E}^\dagger$ et $v = \sum_{i=1}^n v_i \otimes a_i \in (U \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^G$. Pour tout $g \in G$, on a

$$\sum_{i=1}^n \big(v_i - g(v_i)\big) \otimes a_i = 0.$$

En prenant la somme sur $g \in G$, on a

$$0 = \sum_{g\in G} \Big(\sum_{i=1}^n \big(v_i - g(v_i)\big) \otimes a_i \Big) = \sum_{i=1}^n \Big(|G| v_i - \sum_{g \in G} g(v_i) \Big) \otimes a_i.$$

Pour tout i, on a $\sum_{g\in G} g(v_i) \in U^G = 0$, d'où $v = 0$.

Les assertions (2) et (3) sont des conséquences immédiate de (1) et (3.3.18). $\square$

THÉORÈME 3.3.21. *Les foncteurs S et M (resp. S_L et M_L) sont des équivalences des catégories quasi-inverses l'une de l'autre. De plus, on a un diagramme commutatif de foncteurs (à isomorphisme près)*

(3.3.21.1)
$$\begin{tikzcd} \Phi M(\mathcal{R}) \arrow[r, shift right, "S"'] & \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \arrow[l, shift right, "M"'] \\ \Phi M(\mathcal{R})_L \arrow[u, hook] \arrow[r, shift right, "S_L"'] & \mathrm{Del}_{C_L}(\mathrm{Gal}(L/K)) \arrow[l, shift right, "M_L"'] \arrow[u, "-\otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}}"'] \end{tikzcd}$$

DÉM. La commutation du diagramme a déjà été montrée. Il suffit de montrer l'assertion pour S_L et M_L, car tout (φ, ∇)-module sur $\mathcal{R}$ est quasi-unipotent (3.3.12), tout C^{nr}-module de Deligne admet une descente (3.2.8)-(1), et le foncteur d'extension des scalaires $-\otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}}$ est pleinement fidèle (3.2.7). Posons $B = \mathcal{R}(L)[\log T]$. Soit M un objet de $\Phi M(\mathcal{R})_L$. L'inclusion $S_L(M) \subset M \otimes_{\mathcal{R}} B$ induit par linéarisation un morphisme de $\Phi M(B)_{\mathrm{ds}}$

(3.3.21.2)
$$S_L(M) \otimes_{C_L} B \longrightarrow M \otimes_{\mathcal{R}} B$$

qui est un isomorphisme par (3.3.9.1), car M unipotent sur $\mathcal{R}(L)$ par hypothèse. En composant les isomorphismes (3.3.20.1) et (3.3.21.2) on obtient

$$M_L(S_L(M)) \otimes_{\mathcal{R}} B \xrightarrow{\sim} S_L(M) \otimes_{C_L} B \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathcal{R}} B.$$

En appliquant la descente $\mathrm{Des}_{B/\mathcal{R}}$ on obtient un isomorphisme $M_L \circ S_L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$, cf. (3.3.15). Soit W un C_L-module de Deligne de K, en composant les isomorphismes (3.3.21.2) et (3.3.20.1) on obtient

$$S_L(M_L(W)) \otimes_{C_L} B \xrightarrow{\sim} M_L(W) \otimes_{\mathcal{R}} B \xrightarrow{\sim} W \otimes_{C_L} B.$$

En prenant les sections horizontales on obtient un isomorphisme $S_L \circ M_L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Id}$. □

REMARQUE 3.3.22. On note $\Phi M(\mathcal{B})^{\mathrm{sol}}_{\mathrm{eff}}$ la sous-catégorie pleine de $\Phi M(\mathcal{B})_{\mathrm{ds}}$ des objets $\mathcal{B}$-solubles et effectifs, i.e. les modules M admettant une base de sections horizontales et tels que $\mathrm{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}(M)$ soit défini et de rang égal au rang de M. Il est utile de résumer la classification du théorème précédent par le diagramme de foncteurs commutatif (à isomorphisme près)

$$\begin{tikzcd}
& \Phi M(\mathcal{B})^{\mathrm{sol}}_{\mathrm{eff}} \arrow[dl, shift right, "\mathrm{Des}_{\mathcal{B}/\mathcal{R}}"'] \arrow[dr, shift left, "(-)^{\nabla}"] & \\
\Phi M(\mathcal{R}) \arrow[ur, shift right, "-\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{B}"'] \arrow[rr, shift left, "S"] & & \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \arrow[ul, shift left, "-\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\mathcal{B}"'] \arrow[ll, shift left, "M"]
\end{tikzcd}$$

où les trois couples des foncteurs opposés sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

3.3.23. Analytification. On ne dispose pas en général de théorèmes de classification pour les (φ, ∇)-modules sur $\mathcal{E}^\dagger$ analogues à (3.3.12) et (3.3.21). Toutefois, on peut considérer le foncteur d'extension des scalaires $- \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}\colon \Phi M(\mathcal{E}^\dagger) \to \Phi M(\mathcal{R})$, et attacher des C^{nr}-modules de Deligne de K aux (φ, ∇)-modules sur $\mathcal{E}^\dagger$. Suivant [**Cr04a**, 4.1], on appelle le foncteur $- \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$ foncteur d'*analytification*. On verra que c'est un foncteur essentiellement surjectif, cf. (3.3.25) et [**Tsu98c**, 4.2.1]. C'est évident qu'il est fidèle, mais il n'est pas plein en général, comme le montre l'exemple ci-dessus.

EXEMPLE 3.3.24. Les groupes $\mathrm{Ext}^1_{\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)}(\mathcal{E}^\dagger(1), \mathcal{E}^\dagger)$ et $\mathrm{Ext}^1_{\Phi M(\mathcal{R})}(\mathcal{R}(1), \mathcal{R})$ ne sont pas isomorphes. Soit R un des deux anneaux $\mathcal{E}^\dagger$ ou $\mathcal{R}$. Considérons d'abord des modules à connexion sur R, sans donnée de Frobenius. Crew observe [**Cr04a**, pg. 28] que l'ensemble des extensions $\mathrm{Ext}^1_{\nabla}(R, R)$ du module à connexion trivial R de rang 1 par lui-même, est égal à $H^1_{dR}(R) := \mathrm{Coker}\big(R \xrightarrow{d} \widehat{\Omega}^1_{R/C}\big)$. Or $\dim_C H^1_{dR}(\mathcal{R}) = 1$ et $\dim_C H^1_{dR}(\mathcal{E}^\dagger) = +\infty$. Ceci montre en particulier que l'extension des scalaires $- \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$ n'est pas pleinement fidèle entre les catégories des modules à connexion. Pour conclure on construit l'exemple suivant ; supposons pour simplifier que $\sigma(T) = T^p$. Soit M un $\mathcal{E}^\dagger$-espace vectoriel de base e_1, e_2. On le muni de la connexion $\nabla(e_1) = 0$, $\nabla(e_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} T^{p^n} e_1 \otimes \frac{dT}{T}$ et du Frobenius $\varphi(e_1) = p^{-1}e_1$, $\varphi(e_2) = -Te_1 + e_2$. On vérifie facilement que M est un (φ, ∇)-module sur $\mathcal{E}^\dagger$, extension de $\mathcal{E}^\dagger(1)$ par $\mathcal{E}^\dagger$. Comme la différentielle $\sum_{n\in\mathbb{N}} T^{p^n} \otimes \frac{dT}{T}$ n'est pas intégrable dans $\mathcal{E}^\dagger$, M n'est pas une extension triviale de $\mathcal{E}^\dagger(1)$ par $\mathcal{E}^\dagger$ en tant que module à connexion et à fortiori en tant que (φ, ∇)-module. Par contre, comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} T^{p^n} \otimes \frac{dT}{T}$ est intégrable dans $\mathcal{R}$, l'analytification $M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}$ de M est $\mathcal{R}$-soluble. Donc $S(M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R}) = (M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})^{\nabla} \otimes_C C^{\mathrm{nr}}$ muni de la monodromie triviale, de l'action semi-linéaire triviale de G_K et du Frobenius induit par le Frobenius de M. Par construction les pentes du Frobenius sont 0 et 1, donc par Dieudonné-Manin on a

$$\underline{Co}\big(S(M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{R})\big) = \widehat{C}^{\mathrm{nr}}(1) \oplus \widehat{C}^{\mathrm{nr}}$$

en tant que φ-modules sur $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$, mais aussi comme $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-modules de Deligne de K, car la monodromie et l'action de G_K sont triviales. Comme $\underline{Co}$ et S sont des équivalences, on conclut que $M\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}$ est une extension triviale de $\mathcal{R}(1)$ par $\mathcal{R}$ dans $\Phi M(\mathcal{R})$.

COROLLAIRE 3.3.25. *On a un triangle commutatif (à isomorphismes près) de foncteurs*

$$\begin{tikzcd} \Phi M(\mathcal{R}) & \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \arrow[l, "\sim"', "M"] \arrow[dl, "\widetilde{M}"] \\ \Phi M(\mathcal{E}^\dagger) \arrow[u, "-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}"] & \end{tikzcd}$$

Par conséquent, le foncteur d'extension des scalaires $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}$ est essentiellement surjectif. Le foncteur $\widetilde{M}$ est pleinement fidèle, mais il n'est pas essentiellement surjectif.

DÉM. Soient V un C^{nr}-module de Deligne de K, L/K une extension galoisienne finie trivialisant V et W une descente de V à L (cf. 3.2.8). On a $\widetilde{M}(V)=\widetilde{M}_L(W)$ et $M(V)=M_L(W)$, cf. (3.3.17). Donc le diagramme commute par le lemme 3.3.18-(2). Le foncteur $\widetilde{M}$ est pleinement fidèle car M est une équivalence et $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}$ est fidèle. Il n'est pas essentiellement surjectif car sinon $-\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}$ serait une équivalence. □

3.4. (φ,∇)-modules unités

3.4.1. On dit que un (φ,∇)-module M sur $\mathcal{E}^\dagger$ est unité[2] si le φ-module sous-jacent est unité, i.e. s'il existe un sous-$\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$-module M' de M, stable par φ, tel que [**Mat02**, 5.2] :

(1) $M\cong\mathcal{E}^\dagger\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}}M'$;

(2) la linéarisation $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}\otimes_{\sigma_{\mathcal{E}^\dagger}}M'\to M'$ de φ est un isomorphisme.

Un (φ,∇)-module M sur $\mathcal{R}$ est dit unité s'il existe un (φ,∇)-module unité $\widetilde{M}$ sur $\mathcal{E}^\dagger$ tel que $M\cong\widetilde{M}\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}$.

On dit qu'un module de Deligne est unité si le φ-module sous-jacent est un φ-module unité.

On note $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)^u$ (resp. $\Phi M(\mathcal{R})^u$) la sous-catégorie pleine de $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)$ (resp. $\Phi M(\mathcal{R})$) dont les objets sont unités. De même, l'exposant ^{u} pour une catégorie de modules de Deligne désignera la sous-catégorie pleine dont les objets sont unités.

3.4.2. On rappelle qu'on a noté Λ le sous-corps de C des éléments fixés par σ_C, cf. (3.1.2). On note $\mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_\Lambda(G_K)$ la catégorie de Λ-représentations de G_K à *monodromie géométrique finie*, i.e. telle que la restriction de l'action à I_K se factorise par un quotient fini.

THÉORÈME 3.4.3. [**Tsu98a**] *Le foncteur $D^\dagger\colon \mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_\Lambda(G_K)\to\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)^u$ défini par*

$$D^\dagger(V)=\left(V\otimes_\Lambda\mathcal{E}^{\dagger\mathrm{nr}}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}\right)^{G_K}$$

est une équivalence de catégories.

Les énoncés qui suivent, relient les théorèmes 3.4.3 et 3.3.21.

[2] *unit-root* en anglais

3.4.4. Soit (D,φ,N) un $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne unité. La relation $N\circ\varphi = p^h\varphi\circ N$ implique que $N=0$. On considère le foncteur

$$- \otimes_\Lambda \widehat{C}^{\mathrm{nr}} \colon \mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_\Lambda(G_K) \longrightarrow \mathrm{Del}_{\widehat{C}^{\mathrm{nr}}}(G_K)^u, \tag{3.4.4.1}$$

qui associe à une Λ-représentation V de G_K à monodromie géométrique finie le module de Deligne $V\otimes_\Lambda \widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ muni du Frobenius induit par le Frobenius σ_C de $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ et de la monodromie triviale. En sens inverse, on considère le foncteur

$$(\cdot)^{\varphi=\mathrm{Id}} \colon \mathrm{Del}_{\widehat{C}^{\mathrm{nr}}}(G_K)^u \longrightarrow \mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_\Lambda(G_K) \tag{3.4.4.2}$$

qui associe à un $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne unité $(D,\varphi,0)$ de K, la représentation $D^{\varphi=\mathrm{Id}}$ de G_K des points fixes par φ.

LEMME 3.4.5. (1) *Le foncteur* (3.4.4.1) *est une équivalence de catégories dont un quasi-inverse est* (3.4.4.2).

(2) *Soient V une Λ-représentation de G_K à monodromie géométrique finie et $M = D^\dagger(V)$ le (φ,∇)-module unité sur $\mathcal{E}^\dagger$ correspondant à V. On a*

$$S(M\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R}) = \underline{\mathit{D\acute{e}co}}(V\otimes_\Lambda \widehat{C}^{\mathrm{nr}}).$$

(3) *Soit W un C^{nr}-module de Deligne unité de K. Alors*

$$D^\dagger\left(\left(W\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}\right)^{\varphi=\mathrm{Id}}\right) = \left(W\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}}\right)^{G_K} = \widetilde{M}(W).$$

DÉM. (1) Il est évident que pour tout V dans $\mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_\Lambda(G_K)$, $\left(V\otimes_\Lambda\widehat{C}^{\mathrm{nr}}\right)^{\varphi=\mathrm{Id}}$ est canoniquement isomorphe à V. Pour vérifier l'autre égalité il suffit de montrer que pour tout $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$-module de Deligne unité W de K, on a $\dim_\Lambda (W)^{\varphi=\mathrm{Id}} = \dim_{\widehat{C}^{\mathrm{nr}}} W$. Ceci se déduit du théorème de classification de Dieudonné-Manin appliqué au φ-module W sur le corps $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$. On remarque ici qu'il est nécessaire de travailler avec $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ plutôt que avec C^{nr}.

(2) Il est équivalent de montrer que $\underline{\mathit{Co}}(S(M\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R})) = V\otimes_\Lambda\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$. Par définition, on a

$$\underline{\mathit{Co}}\big(S(M\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{R})\big) = \left(\left(V\otimes_\Lambda\mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}\right)^{G_K}\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{B}\right)^\nabla\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$$

Le deuxième membre est contenu dans $\left(\left(V\otimes_\Lambda\mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}\right)^{G_K}\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{B}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}\right)^\nabla$; il lui est égal car ils sont de même dimension sur $\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$. Comme $\mathcal{B}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$ contient $\mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}$, en utilisant le théorème de Tsuzuki (3.4.3), on a

$$\begin{aligned}
&\left(V\otimes_\Lambda\mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}\right)^{G_K}\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{B}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}} = \\
&= \left(\left(V\otimes_\Lambda\mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}\right)^{G_K}\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\left(\mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}\right)\right)\otimes_{\mathcal{E}^{\dagger\,\mathrm{nr}}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}}\left(\mathcal{B}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}\right)\\
&= V\otimes_\Lambda\mathcal{B}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}.
\end{aligned}$$

On conclut par la relation

$$\left(V\otimes_\Lambda\mathcal{B}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}\right)^\nabla = V\otimes_\Lambda C^{\mathrm{nr}}\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\widehat{C}^{\mathrm{nr}} = V\otimes_\Lambda\widehat{C}^{\mathrm{nr}}.$$

(3) Par définition, on a

$$D^{\dagger}\left(\left(W \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}}\right)^{\varphi=\mathrm{Id}}\right)=\left(\left(W \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}}\right)^{\varphi=\mathrm{Id}} \otimes_{\Lambda} \widehat{C}^{\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \mathrm{nr}}\right)^{G_K}.$$

Par (1), le deuxième membre est égale à $(W \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \mathrm{nr}})^{G_K}$. Soit T une descente de W à L (3.2.8). Alors $(W \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \widehat{C}^{\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \mathrm{nr}})^{G_K} = (T \otimes_{C_L} \widehat{C}^{\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \mathrm{nr}})^{G_K}$. Le $\mathcal{E}^{\dagger}$-espace vectoriel $(T \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger}(L))^{\mathrm{Gal}(L/K)}$ est contenu dans $(T \otimes_{C_L} \widehat{C}^{\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \mathrm{nr}})^{G_K}$, et comme il est de dimension maximale les deux sont égaux. On a

$$\begin{aligned}
\left(T \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger}(L)\right)^{\mathrm{Gal}(L/K)} = \left(T \otimes_{C_L} \mathcal{E}^{\dagger \mathrm{nr}}\right)^{G_K} &= \left(T \otimes_{C_L} C^{\mathrm{nr}} \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \mathrm{nr}}\right)^{G_K} \\
&= \left(W \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \mathrm{nr}}\right)^{G_K} \subseteq \widetilde{M}(W).
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de noter que $\dim_{\mathcal{E}^{\dagger}} (W \otimes_{C^{\mathrm{nr}}} \mathcal{E}^{\dagger \mathrm{nr}})^{G_K} = \dim_{\mathcal{E}^{\dagger}} \widetilde{M}(W)$. □

PROPOSITION 3.4.6. *Le diagramme de foncteurs*

(3.4.6.1)
$$\begin{tikzcd}
\Phi M(\mathcal{R})^u \arrow[r, shift right, "S"'] & \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K)^u \arrow[l, shift right, "M"'] \arrow[d, shift right, "\underline{Co}"'] \arrow[ddl, "\widetilde{M}"'] \\
 & \mathrm{Del}_{\widehat{C}^{\mathrm{nr}}}(G_K)^u \arrow[u, shift right, "\underline{D\acute{e}co}"'] \arrow[d, shift right, "(\cdot)^{\varphi=\mathrm{Id}}"'] \\
\Phi M(\mathcal{E}^{\dagger})^u \arrow[uu, "-\otimes_{\mathcal{E}^{\dagger}}\mathcal{R}"] & \mathrm{Rep}_{\Lambda}^{\mathrm{gf}}(G_K) \arrow[l, "D^{\dagger}"] \arrow[u, shift right, "-\otimes_{\Lambda}\widehat{C}^{\mathrm{nr}}"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif (à isomorphisme près), et toutes les flèches sont des équivalences des catégories.

DÉM. Montrons d'abord que M et S induisent des foncteurs sur les sous-catégories des objets unités. Si un foncteur conserve la propriété d'être unité alors tout quasi-inverse la conserve aussi. Les foncteurs $- \otimes_{\mathcal{E}^{\dagger}} \mathcal{R}$ et $\underline{Co}$ conservent la propriété d'être unité par définition ; par conséquent $\underline{Déco}$ aussi. On déduit de (3.4.5-3) que le foncteur $\widetilde{M}$ conserve la propriété d'être unité ; par conséquent les foncteurs M et S aussi. Le triangle supérieur de (3.4.6.1) est commutatif par (3.3.25), le tringle inférieur est commutatif par le lemme (3.4.5-3) et le périmètre du carré par (3.4.5-2). Les équivalences verticales sur la droite sont données par (3.4.5-1) et (3.2.8-2), et $D^{\dagger}$ est une équivalence par (3.4.3). On en déduit que les restrictions de $- \otimes_{\mathcal{E}^{\dagger}} \mathcal{R}$ et $\widetilde{M}$ aux objets unités sont aussi des équivalences de catégories. □

COROLLAIRE 3.4.7. *La restriction du foncteur d'analytification*

$$- \otimes_{\mathcal{E}^{\dagger}} \mathcal{R} \colon \Phi M(\mathcal{E}^{\dagger})^u \longrightarrow \Phi M(\mathcal{R})^u$$

aux (φ, ∇)-modules unités est une équivalence de catégories. Un quasi-inverse est donné par la restriction de $\widetilde{M} \circ S$ au (φ, ∇)-modules unités.

DÉM. C'est une conséquence de (3.4.6). □

COROLLAIRE 3.4.8. *La restriction du foncteur d'analytification aux* (φ,∇)*-modules de rang* 1 *est une équivalence de catégories.*

DÉM. Par torsion du Frobenius on se ramène au cas unité. □

3.5. Modules de Crew

DÉFINITION 3.5.1. [**Cr04a**, §5] Un *module de Crew* de K est la donnée d'un couple de C^{nr}-espaces vectoriels de dimension finie V,W, munis des structures suivantes :

i) des actions semi-linéaires discrètes ρ_V et ρ_W de G_K sur V et W, i.e. telles que le stabilisateur de tout élément de V ou de W soit ouvert dans G_K ;

ii) un couple de Frobenius φ_V et φ_W de V et W ;

iii) une application linéaire $c\colon V \to W$ équivariante commutant aux Frobenius ;

iv) une application linéaire $v\colon W \to V$ équivariante telle que $\varphi_V \circ v = p^h v \circ \varphi_W$;

v) pour tout $\tau \in I_K$ une application $v(\tau)\colon W \to V$ commutant aux Frobenius telle que, pour tout $\tau \in I_K$, $\rho_V(\tau) = \mathrm{Id}_V + v(\tau)\circ c$ et $\rho_W(\tau) = \mathrm{Id}_W + c \circ v(\tau)$.

On appelle c l'*application canonique*, v la *variation* et les $v(\tau)$ les *variations de Galois*. Par abus, on notera $(V,W,c,v,v(\tau))$ la donnée d'un module de Crew, les Frobenius et l'action de G_K sur V et W étant sous-entendus.

Un morphisme de modules de Crew de K est un couple $f\colon V \to V'$, $g\colon W \to W'$ d'applications C^{nr}-linéaires équivariantes, commutant aux Frobenius, aux applications canoniques, aux variations et aux variations de Galois.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "c"'] & V' \arrow[d, shift right, "c'"'] \\
W \arrow[r, "g"] \arrow[u, shift right, "v"'] \arrow[u, bend right, "v(\tau)"'] & W' \arrow[u, shift right, "v'"'] \arrow[u, bend right, "v'(\tau)"']
\end{tikzcd}
$$

C'est-à-dire que

$$
g \circ c = c' \circ f, \qquad v' \circ g = f \circ v \quad \text{et} \quad v'(\tau) \circ g = f \circ v(\tau) \quad \forall \tau \in I_K \tag{3.5.1.1}
$$

On note $\mathrm{Cr}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K)$ la catégorie des modules de Crew de K.

REMARQUE 3.5.2. Dans [**Cr04a**], Crew note $\mathrm{Cr}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K)$ par Soln_C et appelle ses objets *Solution Data*.

3.5.3. Soit $(V,W,c,v,v(\tau))$ un module de Crew. On pose $N_V = v \circ c\colon V \to V$ (resp. $N_W = c \circ v\colon W \to W$). C'est une application linéaire équivariante telle que $N_V \circ \varphi_V = p^h \varphi_V \circ N_V$ (resp. $N_W \circ \varphi_W = p^h \varphi_W \circ N_W$) ; donc nilpotente. On déduit que (V,φ_V,N_V) et (W,φ_W,N_W) sont des C^{nr}-modules de Deligne de K. On rappelle qu'on note $V(-1)$ le C^{nr}-module de Deligne $(V,p^h\varphi_V,N_V)$ de K, cf. (3.2.6). Le lemme suivant est immédiat :

LEMME 3.5.4. (1) *La donnée d'un module de Crew de K est équivalente à la donnée d'un couple de C^{nr}-modules de Deligne de K*

$$
(V,\rho_V,\varphi_V,N_V) \;\; \textit{et} \;\; (W,\rho_W,\varphi_W,N_W) \in \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K),
$$

d'un couple de morphismes $c\colon V \to W$, $v\colon W \to V(-1)$ *et pour tout* $\tau \in I_K$, *d'un morphisme* $v(\tau)\colon W \to V$ *tel que :*

$$\rho_V(\tau) = \mathrm{Id}_V + v(\tau)\circ c \ \ et\ \ \rho_W(\tau) = \mathrm{Id}_W + c \circ v(\tau), \quad \forall \tau \in I_K.$$

(2) *La donnée d'un morphisme de modules de Crew est équivalente à la donnée d'un couple de morphismes de* C^{nr}*-modules de Deligne commutant avec* c, v *et* $v(\tau)$, *pour tout* $\tau \in I_K$.

3.5.5. Comme $\mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K)$ est abélienne et Λ-linéaire, il en est de même de $\mathrm{Cr}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K)$.

3.5.6. Un module de Crew $(V, W, c, v, v(\tau))$ est dit de *type connexion* si le morphisme c est bijectif, cf. [**Cr04a**, 5.6.1] ; dans ce cas il est isomorphe au module de Crew

$$(V, V, \mathrm{Id}_V, N_V, \rho(\tau) - \mathrm{Id}_V)$$

par l'isomorphisme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Id}"'] & V \arrow[r] \arrow[d, shift right, "c"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & V \arrow[r, "c", "\sim"'] \arrow[u, shift right, "N_V"'] \arrow[u, bend right, "\rho(\tau)-\mathrm{Id}"'] & W \arrow[r] \arrow[u, shift right, "v"'] \arrow[u, bend right, "v(\tau)"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Crew définit un foncteur *extension par zéro*, noté j_+,

$$\begin{array}{rcl} j_+\colon \mathrm{Del}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) & \longrightarrow & \mathrm{Cr}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \\ V & \longmapsto & (V, V, \mathrm{Id}, N, \rho(\tau) - \mathrm{Id}) \end{array}$$

qui est clairement pleinement fidèle, exact et son image essentielle est constitué des modules de type connexion.

3.5.7. Un module de Crew est dit *ponctuel* s'il est de la forme $(0, W, 0, 0, 0)$, cf. [**Cr04a**, 5.6.2] ; dans ce cas l'action de I_K sur W est forcement triviale car pour tout $\tau \in I_K$, $\rho_W(\tau) - \mathrm{Id}_W = c \circ v(\tau) = 0$. Comme l'ensemble pointé de cohomologie $H^1_{\mathrm{cont}}(G_k, \mathrm{GL}_n(C^{\mathrm{nr}}))$ est trivial, le φ-module W^{G_K} sur C est de dimension égale à $\dim_{C^{\mathrm{nr}}} W$ et $W \cong W^{G_K} \otimes_C C^{\mathrm{nr}}$. On définit un foncteur :

$$\begin{array}{rcl} i_+\colon \Phi M(C) & \longrightarrow & \mathrm{Cr}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \\ (V, \varphi) & \longmapsto & (0, V \otimes_C C^{\mathrm{nr}}, 0, 0, 0) \end{array}$$

où $V \otimes_C C^{\mathrm{nr}}$ est considéré comme un C^{nr}-module de Deligne muni du Frobenius $\varphi \otimes_{\sigma_C} \sigma_C$, de la monodromie nulle et de l'action de G_K déduite de son action sur C^{nr}. On vérifie facilement que ce foncteur est pleinement fidèle, exact, d'image essentielle formée par les modules ponctuels.

3.5.8. Pour tout module de Crew $(V, W, c, v, v(\tau))$ de K, on a la suite exacte, cf. [**Cr04a**, 5.6.2]

(3.5.8.1)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, shift right] & V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{Id}"'] & V \arrow[r] \arrow[d, shift right, "c"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, shift right] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\, c \arrow[r] \arrow[u, shift right] \arrow[u, bend right] & V \arrow[r, "c"] \arrow[u, shift right, "N_V"'] \arrow[u, bend right, "\rho(\tau)-\mathrm{Id}"'] & W \arrow[r] \arrow[u, shift right, "v"'] \arrow[u, bend right, "v(\tau)"'] & \mathrm{Coker}\, c \arrow[r] \arrow[u, shift right] \arrow[u, bend right] & 0
\end{tikzcd}$$

appelé *dévissage standard* de $(V, W, c, v, v(\tau))$.

LEMME 3.5.9. *Pour tout module de Crew* $(V, W, c, v, v(\tau))$ *de* K, *on a* $\mathrm{sw}(V) = \mathrm{sw}(W)$.

DÉM. On considère la suite exacte (3.5.8.1). Par (3.5.7), l'action de I_K sur $\mathrm{Ker}\, c$ et $\mathrm{Coker}\, c$ est triviale, donc leurs conducteurs de Swan sont nuls. Le conducteur de Swan étant additif sur les suites exactes, on obtient que $\mathrm{sw}(V) = \mathrm{sw}(W)$. □

3.6. Constantes locales

3.6.1. On suppose désormais que le corps résiduel k de K est fini, de cardinal $q = p^f$ et que l'entier h fixé dans (3.1.2) vaut 1, de sorte que $C = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{W}(k)$. Pour le reste, on conserve les notations de (0.1) et (1.1.1).

3.6.2. Soient M un (φ, ∇)-module sur $\mathcal{R}$, $S(M)$ le C^{nr}-module de Deligne de K associé. On muni $S(M)$ d'une action C^{nr}-linéaire $\rho\colon W_K \to \mathrm{Aut}_{C^{\mathrm{nr}}}\big(S(M)\big)$ en posant pour tout $g \in W_K$ et $m \in S(M)$,

$$\rho(g)(m) = g\big(\varphi^{f\nu(g)}(m)\big).$$

où $\nu(g)$ est l'entier définit dans (1.1.1).

PROPOSITION 3.6.3. *Le triplet* $(S(M), \rho, N)$ *est une* C^{nr}*-représentation de Weil-Deligne de* K.

DÉM. En effet ρ est linéaire et triviale sur un sous-groupe ouvert de l'inertie. La relation $\rho(w)N\rho(w)^{-1} = q^{\nu(w)}N$ résulte facilement de l'égalité $N\varphi = p\varphi N$ sur $S(M)$. □

3.6.4. Soit M un (φ, ∇)-module sur $\mathcal{R}$. On appelle C^{nr}-représentation de Weil-Deligne *associée à* M, et on note $\mathrm{WD}(M)$, le triplet $(S(M), \rho, N)$ de (3.6.3). On appelle *constantes locales de* M les constante locales de $\mathrm{WD}(M)$; plus précisément on pose, d'après (1.2.7) :

i) $L(M, t) = L(\mathrm{WD}(M), t)$;

ii) $\mathrm{ar}(M) = \mathrm{ar}(\mathrm{WD}(M))$;

iii) pour un caractère additif non-trivial $\psi\colon K \to C^*$ et une mesure de Haar μ sur K à valeur dans C,

$$\varepsilon(M, \psi, \mu) = \varepsilon(\mathrm{WD}(M), \psi, \mu)$$
$$\varepsilon_0(M, \psi, \mu) = \varepsilon_0(\mathrm{WD}(M), \psi, \mu)$$

REMARQUE 3.6.5. En inégale caractéristique, ces définitions sont dues à Fontaine et Perrin-Riou, cf. [**Fon94c**, 1.3.5] et [**PR95**, C.1.4].

PROPOSITION 3.6.6. *Soient* (M, φ, ∇) *un* (φ, ∇)*-module sur* $\mathcal{R}$, $S(M) = (S(M), \varphi, N)$ *le* C^{nr}*-module de Deligne associé et* $\mathrm{WD}(M) = (S(M), \rho, N)$ *la* C^{nr}*-représentation de Weil-Deligne associée. On désigne par* $\mathrm{Ker}\, N$ *le noyau de* N *sur* $S(M)$ *: il est stable sous l'action semi-linéaire de* G_K*, sous l'action* C^{nr}*-linéaire* ρ *de* W_K *et par le Frobenius.*

(1) *On a un isomorphisme canonique* $M^{\nabla} \cong (\mathrm{Ker}\, N)^{G_K}$ *de* φ*-modules sur* C.

(2) *On a un isomorphisme canonique,* G_k*-équivariant,* $M^{\nabla} \otimes_C C^{\mathrm{nr}} \cong (\mathrm{Ker}\, N)^{I_K}$, *de* φ*-modules sur* C^{nr}.

(3) *On a :*

$$\mathrm{ar}(M)=\mathrm{irr}(M)+\mathrm{rg}(M)-\dim_C(M^\nabla)\,; \tag{3.6.6.1}$$

$$L(M,t)=\det_C(1-t\varphi^f|M^\nabla)^{-1}\in 1+tC[\![t]\!]\,; \tag{3.6.6.2}$$

$$\det_{C^{\mathrm{nr}}}(-\rho(\mathrm{F}^*)|(\operatorname{Ker}N)^{I_K})=\det_C(-\varphi^f|M^\nabla),\ \textit{où}\ \mathrm{F}^*=\sigma^{-f}\in G_k\,; \tag{3.6.6.3}$$

$$\varepsilon(M,\psi,\mu)=\varepsilon_0(M,\psi,\mu)\det_C(-\varphi^f|M^\nabla)^{-1}; \tag{3.6.6.4}$$

$$\varepsilon_0(M,\psi,\mu)=\varepsilon_0(\mathrm{WD}(M)^\circ,\psi,\mu). \tag{3.6.6.5}$$

DÉM. Montrons (1). D'après (3.3.21), on a

$$M\cong M\big(S(M)\big)=\left\{x\in S(M)\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\mathcal{B}\;\middle|\;\begin{array}{l}\forall g\in G_K, g(x)=x\\ N\otimes\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes N(x)=0\end{array}\right\}.$$

D'où

$$\begin{aligned}M^\nabla&\cong\left\{x\in S(M)\otimes_{C^{\mathrm{nr}}}\mathcal{B}\;\middle|\;\begin{array}{l}\forall g\in G_K, g(x)=x\\ N\otimes\mathrm{Id}+\mathrm{Id}\otimes N(x)=0\\ \mathrm{Id}\otimes d(x)=0\end{array}\right\}\\ &=\left\{x\in S(M)\;\middle|\;\begin{array}{l}\forall g\in G_K, g(x)=x\\ N(x)=0\end{array}\right\}\\ &=(\operatorname{Ker}N)^{G_K}.\end{aligned}$$

Montrons (2). Fixons une extension galoisienne finie L/K qui rend M unipotent et on pose $D=S_L(M)$. D'après (3.3.21), on a $M\cong M_L(D)$ et $M^\nabla\cong(\operatorname{Ker}N)^{G_K}=(\operatorname{Ker}N_D)^{\mathrm{Gal}(L/K)}$. Comme $H^1\big(\mathrm{Gal}(k_L/k),\mathrm{GL}_r(C_L)\big)$ est trivial, on en déduit que

$$(\operatorname{Ker}N_D)^{\mathrm{Gal}(L/K)}\otimes_C C_L\cong(\operatorname{Ker}N_D)^{I(L/K)}.$$

D'où $M^\nabla\otimes_C C^{\mathrm{nr}}=(\operatorname{Ker}N_D)^{I(L/K)}\otimes_{C_L}C^{\mathrm{nr}}=(\operatorname{Ker}N)^{I_K}$. Par construction cet isomorphisme est équivariant et commute aux Frobenius respectifs.

(3.6.6.1) Par la définition $\mathrm{ar}(M)=\mathrm{sw}(\rho)+\dim_{C^{\mathrm{nr}}}\mathrm{WD}(M)-\dim_{C^{\mathrm{nr}}}(\operatorname{Ker}N)^{I_K}$. Par un théorème de Matsuda-Tsuzuki, cf. [**Mat02**, 8.6], [**Tsu98b**, 7.2.2] (rappelé dans cette thèse, cf. [**Mar04**, 4.7]), on a $\mathrm{irr}(M)=\mathrm{sw}(\rho)$; on conclut par (1) et (2).

(3.6.6.2) Par la définition de ρ, on a $\rho(\mathrm{F}^*)=\mathrm{F}^*\circ\varphi^f$ sur $(\operatorname{Ker}N)^{I_K}$, où $\mathrm{F}^*=\sigma^{-f}\in G_k$. En utilisant (2),

$$\begin{aligned}L(M,t)&=\det_{C^{\mathrm{nr}}}\big(1-t\rho(\mathrm{F}^*)|(\operatorname{Ker}N)^{I_K}\big)^{-1}\\ &=\det_{C^{\mathrm{nr}}}\big(1-t(\mathrm{F}^*\circ\varphi^f)|(\operatorname{Ker}N)^{I_K}\big)^{-1}\\ &=\det_{C^{\mathrm{nr}}}\big(1-t(\mathrm{Id}\otimes\sigma_C^{-f})\circ(\varphi^f\otimes\sigma_C^f)|M^\nabla\otimes_C C^{\mathrm{nr}}\big)^{-1}\\ &=\det_{C^{\mathrm{nr}}}\big(1-t(\varphi^f\otimes\mathrm{Id})|M^\nabla\otimes_C C^{\mathrm{nr}}\big)^{-1}\\ &=\det_C\big(1-t\varphi^f|M^\nabla\big)^{-1}.\end{aligned}$$

De même pour (3.6.6.3). Enfin, (3.6.6.4) et (3.6.6.5) sont évidents d'après (2) et (1.2.7). □

CHAPITRE 4

Calcul (micro)différentiel arithmétique sur un trait complet

4.1. Coefficients binomiaux modifiés

4.1.1. On rappelle dans cette section les définitions et quelques propriétés p-adiques des coefficients binomiaux dues à Berthelot [**Bert96b**, 1.1]. On note v_p la valuation p-adique de $\mathbb{Q}_p$, normalisée par $\mathrm{v}_p(p) = 1$. Pour tout entier $i \geq 0$, on note s_i la somme des chiffres de son développement p-adique. On a

$$\mathrm{v}_p(i!) = \frac{i - s_i}{p-1} \tag{4.1.1.1}$$

Soit $m \geq 0$ un entier. Pour $i = i' + i''$, avec $i', i'' \in \mathbb{N}$, on désigne $i = qp^m + r$, $i' = q'p^m + r'$, $i'' = q''p^m + r''$ les divisions euclidiennes de i, i' et i'' par p^m. On pose

$$\binom{i}{i'} = \frac{i!}{i'!i''!} \tag{4.1.1.2}$$

$$\left\{\begin{matrix} i \\ i' \end{matrix}\right\}_{(m)} = \frac{q!}{q'!q''!} \tag{4.1.1.3}$$

$$\left\langle\begin{matrix} i \\ i' \end{matrix}\right\rangle_{(m)} = \binom{i}{i'}\left\{\begin{matrix} i \\ i' \end{matrix}\right\}_{(m)}^{-1} \tag{4.1.1.4}$$

Nous omettrons l'indice (m) lorsque aucune confusion n'en résultera. Pour $m = 0$, on a

$$\left\{\begin{matrix} i \\ i' \end{matrix}\right\}_{(0)} = \binom{i}{i'}, \qquad \left\langle\begin{matrix} i \\ i' \end{matrix}\right\rangle_{(0)} = 1. \tag{4.1.1.5}$$

Pour tout $0 \leq i < p^m$, on a

$$\left\{\begin{matrix} i \\ i' \end{matrix}\right\}_{(m)} = 1, \qquad \left\langle\begin{matrix} i \\ i' \end{matrix}\right\rangle_{(m)} = \binom{i}{i'}.$$

Pour tout $i', i'' \in \mathbb{N}$, $i = i' + i''$, on a $\binom{i}{i'}$, $\left\{\begin{smallmatrix} i \\ i' \end{smallmatrix}\right\}_{(m)} \in \mathbb{N}$, $\left\langle\begin{smallmatrix} i \\ i' \end{smallmatrix}\right\rangle_{(m)} \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et

$$\mathrm{v}_p\left(\binom{i}{i'}\right) = \frac{s_{i'} + s_{i''} - s_i}{p-1} \geq 0 \tag{4.1.1.6}$$

$$\mathrm{v}_p\left(\left\{\begin{smallmatrix} i \\ i' \end{smallmatrix}\right\}_{(m)}\right) = \frac{q - q' - q'' + s_{q'} + s_{q''} - s_q}{p-1} \geq 0 \tag{4.1.1.7}$$

$$\mathrm{v}_p\left(\left\langle\begin{smallmatrix} i \\ i' \end{smallmatrix}\right\rangle_{(m)}\right) = \frac{q' + q'' - q + s_{r'} + s_{r''} - s_r}{p-1} \geq 0 \tag{4.1.1.8}$$

Il en résulte en particulier que si $i \leq p^m$,

$$\mathrm{v}_p\Big(\big\langle {p^m \atop i} \big\rangle_{(m)}\Big) = \mathrm{v}_p\Big(\big({p^m \atop i} \big)\Big) = m - \mathrm{v}_p(i) \quad \text{et} \quad \mathrm{v}_p\Big(\big\{ {p^m \atop i} \big\}_{(m)}\Big) = 0. \tag{4.1.1.9}$$

De même, si $i \geq p^m$,

$$\big\{ {i \atop p^m} \big\}_{(m)} = q \quad \text{et} \quad \mathrm{v}_p\Big(\big\langle {i \atop p^m} \big\rangle_{(m)}\Big) = 0. \tag{4.1.1.10}$$

4.2. Rappels de calcul différentiel sur un trait complet

4.2.1. On reprend les hypothèses et notations du chapitre 3, en dehors de celles de (3.6). On pose $S = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$, $s = \operatorname{Spec} k$ (resp. $\eta = \operatorname{Spec} K$) le point fermé (resp. générique) de S. On note $\mathscr{S}$ le $\mathcal{O}_C$-schéma formel $\operatorname{Spf} \mathcal{O}_C[\![T]\!]$, où $\mathcal{O}_C[\![T]\!]$ est muni de la topologie $\mathfrak{m}_C$-adique. Sa fibre spéciale $\mathscr{S} \times_{\operatorname{Spf} \mathcal{O}_C} \operatorname{Spec} k$ s'identifie à S en envoyant la classe de T sur l'uniformisante de $\mathcal{O}_K$ fixé dans (3.1.1). On note $i_S \colon S \hookrightarrow \mathscr{S}$ l'immersion fermé ainsi définie. On note $i_0 \colon \operatorname{Spf} \mathcal{O}_C \hookrightarrow \mathscr{S}$ l'immersion fermée d'idéal $T\mathcal{O}_C[\![T]\!]$, de sorte qu'on ait le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spf} \mathcal{O}_C & \mathscr{S} \arrow[l] & \operatorname{Spf} \mathcal{O}_C \arrow[l, hook', "i_0"'] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[u] & S \arrow[l] \arrow[u, "i_S"] & s \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Le Frobenius $\sigma_{\mathcal{E}^\dagger}$ fixé dans (3.1.4) laisse stable $\mathcal{O}_C[\![T]\!]$, donc il induit un relèvement $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$, qu'on note encore σ, du Frobenius algébrique (d'ordre h) de S.

4.2.2. Pour tout entier $n \geq 0$, posons $A_n = \mathcal{O}_C/\mathfrak{m}_C^n$ et $S_n = \mathscr{S} \times_{\operatorname{Spf} \mathcal{O}_C} \operatorname{Spec} A_n = \operatorname{Spec} A_n[\![T]\!]$. On munit A_n de la topologie discrète et $A_n[\![T]\!]$ de la topologie T-adique. On note $\widehat{\Omega}^1_{S_n/A_n}$ le module des différentielles continues de S_n au dessus de $\operatorname{Spec} A_n$. Comme S_n est formellement lisse sur A_n [**EGA**, IV 0.19.7.1], $\widehat{\Omega}^1_{S_n/A_n}$ est un $A_n[\![T]\!]$-module libre de rang 1 engendré par la différentielle dT [**EGA**, IV 0.20.4.10]. On note $\partial = d/dT \colon A_n[\![T]\!] \to A_n[\![T]\!]$ la dérivation duale de dT. On désigne par $A_n[\![T]\!]\widehat{\otimes}_{A_n} A_n[\![T]\!]$ le produit tensoriel complété [**EGA**, I 0.7.7.5]. La multiplication induit un homomorphisme surjectif $A_n[\![T]\!]\widehat{\otimes}_{A_n} A_n[\![T]\!] \to A_n[\![T]\!]$, de noyau monogène engendré par $(1 \otimes T - T \otimes 1)$. On note $\mathcal{P}^r_{S_n}$ le quotient de $A_n[\![T]\!]\widehat{\otimes}_{A_n} A_n[\![T]\!]$ par l'idéal engendré par $(1 \otimes T - T \otimes 1)^{r+1}$; on l'appelle *algèbre des parties principales continues* d'ordre r. On munit $\mathcal{P}^r_{S_n}$ de la topologie quotient de celle de $A_n[\![T]\!]\widehat{\otimes}_{A_n} A_n[\![T]\!]$.

On note $\operatorname{pr}_r \colon \mathcal{P}^{r+1}_{S_n} \to \mathcal{P}^r_{S_n}$ la projection canonique, et $\mathtt{i}_r$ (resp. $\mathtt{d}_r$) l'application A_n-linéaire continue $A_n[\![T]\!] \to \mathcal{P}^r_{S_n}$, qui envoie T sur la classe de $T \otimes 1$ (resp. $1 \otimes T$). Pour tout entier r positif, on munit $\mathcal{P}^r_{S_n}$ de la structure de $A_n[\![T]\!]$-module à gauche (resp. droite) via l'application $\mathtt{i}_r$ (resp. $\mathtt{d}_r$). La topologie de $\mathcal{P}^r_{S_n}$ coïncide avec la topologie T-adique induite par la structure de $A_n[\![T]\!]$-module à gauche (resp. à droite). En effet, la topologie de $\mathcal{P}^r_{S_n}$ est clairement moins fine que la topologie T-adique à gauche (resp. droite) ; inversement en développant la relation $(1 \otimes T - T \otimes 1)^{r+1} = 0$, on voit que $1 \otimes T^{r+1} \in T\mathcal{P}^r_{S_n}$ (resp. $T^{r+1} \otimes 1 \in \mathcal{P}^r_{S_n} T$). Sauf mention explicite du contraire, on munit $\mathcal{P}^r_{S_n}$ de la structure de

$A_n[\![T]\!]$-module à gauche. Les applications pr_r sont $A_n[\![T]\!]$-linéaires. On désigne par τ la classe de $1 \otimes T - T \otimes 1$ dans $\mathcal{P}^r_{S_n}$. Le $A_n[\![T]\!]$-module $\mathcal{P}^r_{S_n}$ est libre de rang $r+1$, de base $(1, \tau, \dots, \tau^r)$.

4.2.3. On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{S_n,r} &= \mathrm{Hom}_{A_n[\![T]\!]}\big(\mathcal{P}^r_{S_n}, A_n[\![T]\!]\big) \\ \mathcal{D}_{S_n} &= \varinjlim_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{S_n,r} = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{S_n,r} \end{aligned}$$

Ce sont des $A_n[\![T]\!]$-modules libres filtrés ; on note $(\partial^{[j]})_{0\le j\le r}$, la base de $\mathcal{D}_{S_n,r}$ duale de la base $(\tau^j)_{0\le j\le r}$. On définit une loi de multiplication dans $\mathcal{D}_{S_n}$, compatible à la structure de $A_n[\![T]\!]$-module filtré, comme dans [**EGA**, IV 16.8.9.1] : pour tout entiers $r, r' \ge 0$, il existe une unique application $A_n[\![T]\!]$-linéaire

$$\delta_{r,r'}\colon \mathcal{P}^{r+r'}_{S_n} \longrightarrow \mathcal{P}^r_{S_n} \otimes_{A_n[\![T]\!]} \mathcal{P}^{r'}_{S_n} \tag{4.2.3.1}$$

rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} A_n[\![T]\!] \arrow[r, "\mathtt{d}_{r+r'}"] \arrow[d, "\mathtt{d}_{r'}"] & \mathcal{P}^{r+r'}_{S_n} \arrow[d, "\delta_{r,r'}"] \\ \mathcal{P}^{r'}_{S_n} \arrow[r, "\mathtt{d}_r\otimes\mathrm{Id}"] & \mathcal{P}^r_{S_n} \otimes_{A_n[\![T]\!]} \mathcal{P}^{r'}_{S_n} \end{tikzcd} \tag{4.2.3.2}$$

où le produit tensoriel $\mathcal{P}^r_{S_n} \otimes_{A_n[\![T]\!]} \mathcal{P}^{r'}_{S_n}$ est pris par rapport à la structure de $A_n[\![T]\!]$-module à droite (resp. à gauche) sur $\mathcal{P}^r_{S_n}$ (resp. $\mathcal{P}^{r'}_{S_n}$), et $\mathtt{d}_r \otimes \mathrm{Id}$ désigne l'homomorphisme

$$\mathcal{P}^{r'}_{S_n} \cong A_n[\![T]\!] \otimes_{A_n[\![T]\!]} \mathcal{P}^{r'}_{S_n} \xrightarrow{\mathtt{d}_r\otimes\mathrm{Id}} \mathcal{P}^r_{S_n} \otimes_{A_n[\![T]\!]} \mathcal{P}^{r'}_{S_n}.$$

Le produit de $P\colon \mathcal{P}^r_{S_n} \to A_n[\![T]\!]$ et $Q\colon \mathcal{P}^{r'}_{S_n} \to A_n[\![T]\!]$ est défini comme l'homomorphisme composé

$$PQ\colon \mathcal{P}^{r+r'}_{S_n} \xrightarrow{\delta_{r,r'}} \mathcal{P}^r_{S_n} \otimes_{A_n[\![T]\!]} \mathcal{P}^{r'}_{S_n} \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes Q} \mathcal{P}^r_{S_n} \xrightarrow{P} A_n[\![T]\!]$$

On appelle $\mathcal{D}_{S_n}$ l'*algèbre des opérateurs différentiels continus* de S_n au dessus de A_n.

4.2.4. Comme me l'a signalé P.Berthelot, le module des différentielles algébriques $\Omega^1_{S_n/A_n}$ est égal à $\widehat{\Omega}^1_{S_n/A_n}$. Cela résulte de [**BeMe90**, 1.3.1], car $A_1 = k$ étant parfait, l'élément T donne une p-base de $A_1[\![T]\!]$. Par conséquent, les constructions de l'algèbre des parties principales continues (4.2.2), et de l'algèbre des opérateurs différentiels continus (4.2.3), coïncident avec les constructions algébriques [**EGA**, IV 16.8].

PROPOSITION 4.2.5. (1) *Pour tout $\alpha \in A_n[\![T]\!]$, on a*

$$\mathtt{d}_r(\alpha) = \sum_{0\le j\le r} \mathtt{i}_r\big(\partial^{[j]}(\alpha)\big)\tau^j. \qquad \textit{(formule de Taylor)} \tag{4.2.5.1}$$

Si on écrit $\alpha = \sum_{m\in\mathbb{N}} a_m T^m$, *alors*

$$\partial^{[j]}(\alpha) = \sum_{m\geq j} a_m \tbinom{m}{j} T^{m-j} \in A_n[\![T]\!]. \tag{4.2.5.2}$$

(2) *On a les relations :*

$$\partial^{[i']}\partial^{[i'']} = \partial^{[i'']}\partial^{[i']} = \tbinom{i'+i''}{i'}\partial^{[i'+i'']} \in \mathcal{D}_{S_n} \qquad \forall i', i'' \in \mathbb{N}, \tag{4.2.5.3}$$

$$\partial^{[i]}\alpha = \sum_{i'+i''=i} \tbinom{i}{i'}\partial^{[i']}(\alpha)\partial^{[i'']} \in \mathcal{D}_{S_n} \qquad \forall i \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in A_n[\![T]\!]. \tag{4.2.5.4}$$

(3) *On désigne par* $\mathrm{End}^{\mathrm{ct}}_{A_n}(A_n[\![T]\!])$ *la* $A_n[\![T]\!]$*-algèbre des endomorphismes continus du* A_n*-module* $A_n[\![T]\!]$. *Les applications* $\mathcal{D}_{S_n,r} \to \mathrm{End}^{\mathrm{ct}}_{A_n}(A_n[\![T]\!])$ *qui envoient* $P \mapsto P \circ \mathtt{d}_r$, *définissent un homomorphisme injectif* $\mathcal{D}_{S_n} \to \mathrm{End}^{\mathrm{ct}}_{A_n}(A_n[\![T]\!])$ *de* $A_n[\![T]\!]$*-algèbres. Dans la suite, on identifiera* $\mathcal{D}_{S_n}$ *à son image dans* $\mathrm{End}^{\mathrm{ct}}_{A_n}(A_n[\![T]\!])$.

(4) *En tant que* $A_n[\![T]\!]$*-algèbre* $\mathcal{D}_{S_n}$ *est engendrée par* $\partial^{[p^j]}$, *pour* $j \in \mathbb{N}$. *Pour tout* $i \in \mathbb{N}$, *on a* $i!\partial^{[i]} = \partial^i$ *; pour tout* $i > 0$, $\partial^{[i]}$ *est nilpotent.*

DÉM. Par (4.2.4), la démonstration est identique à celle de [**EGA**, IV 16.11] pour le cas lisse. Rappelons juste la preuve de (4). C'est évident par (4.2.5.2) que pour tout $i \geq 0$, on a $i!\partial^{[i]} = \partial^i$. Soit $j = \sum_{m=0}^d a_m p^m$ le développement p-adique d'un entier $j \geq 0$. On déduit de (4.2.5.3) que $c\partial^{[j]} = \prod_{m=0}^d \partial^{[p^m]^{a_m}}$, avec $c = j!\left(\prod_{m=0}^d (p^m!)^{a_m}\right)^{-1}$ qui est de valuation p-adique zéro. Ce qui prouve que $(\partial^{[p^j]})_{j\in\mathbb{N}}$ est un système de générateurs de la $A_n[\![T]\!]$-algèbre $\mathcal{D}_{S_n}$. Enfin, il suffit de montrer que pour tout $j \geq 0$, $\partial^{[p^j]}$ est nilpotent. On déduit de (4.2.5.3) que $(\partial^{[p^j]})^p = b_{p^j,p}\,\partial^{[p^{j+1}]}$, avec $b_{p^j,p} = p^{j+1}!/(p^j!)^p$, qu'on vérifie facilement être de valuation p-adique 1. Donc $\left(\partial^{[p^j]}\right)^{pi} = (b_{p^j,p})^i\left(\partial^{[p^{j+1}]}\right)^i$ est égale à zéro pour i tel que $(b_{p^j,p})^i = 0$ dans $A_n[\![T]\!]$. □

4.2.6. Pour tout $n' \geq n \geq 0$, la projection $A_{n'} \to A_n$ induit un homomorphisme $\mathcal{D}_{S_{n'}} \to \mathcal{D}_{S_n}$. On obtient ainsi un système projectif $\left(\mathcal{D}_{S_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} = \left(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{S_n}\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q},$$

qui est une algèbre sur l'anneau $C[\![T]\!]^b = \mathcal{O}_C[\![T]\!] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, car $\mathcal{O}_C[\![T]\!] = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A_n[\![T]\!]$. Par construction, on a une action à gauche, fidèle et continue, de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$ sur $C[\![T]\!]^b$. Comme $\mathcal{D}_{S_n}$ est libre de base $(\partial^{[i]})_{i\in\mathbb{N}}$, on a

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\partial^{[i]} \,\middle|\, a_i \in C[\![T]\!]^b, \lim_{i\to+\infty} \|a_i\|_1 = 0 \right\}, \tag{4.2.6.1}$$

où $\|\cdot\|_1$ désigne la norme de Gauss (3.1.4), et $\partial^{[i]}$ agit sur $C[\![T]\!]^b$ par

$$\frac{1}{i!}\frac{d^i}{dT^i} : C[\![T]\!]^b \longrightarrow C[\![T]\!]^b.$$

4.2.7. Soit, pour tout entier $m \geq 0$, $(\mathcal{P}_{S_n,(m)}, I, J, \gamma)$ la m-PD-enveloppe de l'anneau $A_n[\![T]\!]\widehat{\otimes}_{A_n} A_n[\![T]\!]$ relativement à l'idéal engendré par $1\otimes T - T\otimes 1$ [**Bert02**, 1.1.2]. C'est une $A_n[\![T]\!]\widehat{\otimes}_{A_n} A_n[\![T]\!]$-algèbre munie d'un m-PD-idéal (I, J, γ) tel que $(1\otimes T - T\otimes 1)\mathcal{P}_{S_n,(m)} \subseteq I$, vérifiant une propriété universelle.

On note τ l'image de $1 \otimes T - T \otimes 1$ dans $\mathcal{P}_{S_n,(m)}$, et, pour tout $i \geq 0$, $\tau^{\{i\}_{(m)}}$ la i-ième puissance divisée partielle de τ. On notera $\tau^{\{i\}}$ au lieu de $\tau^{\{i\}_{(m)}}$ lorsque il n'y a aucun ambiguïté sur le niveau m.

On note $(I^{\{n\}})_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration m-PD-adique de $\mathcal{P}_{S_n,(m)}$, cf. [**Bert02**, 1.1.3], [**Bert00**, A.3]. C'est la filtration d'anneau la plus fine telle que :

(i) $I^{\{0\}} = \mathcal{P}_{S_n,(m)}$ et $I^{\{1\}} = I$;

(ii) pour tout $i \geq 1$, $x \in I^{\{i\}}$ et $r \geq 0$, $x^{\{r\}} \in I^{\{ri\}}$;

(iii) pour tout $i \geq 0$, $(J + p\mathcal{P}_{S_n,(m)}) \cap I^{\{i\}}$ est un sous-PD-idéal de $J + p\mathcal{P}_{S_n,(m)}$.

On pose, pour tout $r \geq 0$, [**Bert02**, 1.1.3], [**Cr04a**, 3.1]

$$\mathcal{P}^r_{S_n,(m)} = \mathcal{P}_{S_n,(m)}/I^{\{r+1\}}.$$

On l'appelle l'*algèbre des parties principales continues* d'ordre r et niveau m. On note encore $\tau^{\{i\}}$ la classe de $\tau^{\{i\}}$ dans $\mathcal{P}^r_{S_n,(m)}$. On a un morphisme canonique $\mathcal{P}^r_{S_n} \to \mathcal{P}^r_{S_n,(m)}$. Par la propriété universelle [**Bert96b**, 1.4.2], $\mathcal{P}^r_{S_n,(m)}$ s'identifie à la m-PD-enveloppe de $\mathcal{P}^r_{S_n}$ relativement à l'idéal engendré par τ. Pour m variable, les $\mathcal{P}^r_{S_n,(m)}$ forment de façon naturelle un système projectif de $A_n[\![T]\!]\widehat{\otimes}_{A_n} A_n[\![T]\!]$-algèbres dont la limite projective s'identifie à $\mathcal{P}^r_{S_n}$ [**Bert96b**, 1.4.7, 2.1.2.1].

On désigne par $\mathtt{i}^{(m)}_r \colon A_n[\![T]\!] \to \mathcal{P}^r_{S_n,(m)}$ (resp. $\mathtt{d}^{(m)}_r \colon A_n[\![T]\!] \to \mathcal{P}^r_{S_n,(m)}$) l'application A_n-linéaire composée de $\mathtt{i}_r$ (resp. $\mathtt{d}_r$) et du morphisme canonique $\mathcal{P}^r_{S_n} \to \mathcal{P}^r_{S_n,(m)}$. On munit $\mathcal{P}^r_{S_n,(m)}$ d'une structure de $A_n[\![T]\!]$-module à gauche (resp. droite) par $\mathtt{i}^{(m)}_r$ (resp. $\mathtt{d}^{(m)}_r$). Sauf mention explicite du contraire, on munit $\mathcal{P}^r_{S_n,(m)}$ de la structure de $A_n[\![T]\!]$-module à gauche. On vérifie que $\mathcal{P}^r_{S_n,(m)}$ est libre de base $(\tau^{\{i\}})_{0\leq i\leq r}$; la preuve est identique à [**Bert96b**, 1.5.1], compte tenu de (4.2.4).

Par la fonctorialité des m-PD-enveloppes, pour $r, r' \in \mathbb{N}$, on obtient de $\delta_{r,r'}$, un homomorphisme

$$\delta^{(m)}_{r,r'} \colon \mathcal{P}^{r+r'}_{S_n,(m)} \longrightarrow \mathcal{P}^r_{S_n,(m)} \otimes_{A_n[\![T]\!]} \mathcal{P}^{r'}_{S_n,(m)} \tag{4.2.7.1}$$

où le produit tensoriel $\mathcal{P}^r_{S_n,(m)} \otimes_{A_n[\![T]\!]} \mathcal{P}^{r'}_{S_n,(m)}$ est pris par rapport à la structure de $A_n[\![T]\!]$-module à droite (resp. à gauche) sur $\mathcal{P}^r_{S_n,(m)}$ (resp. $\mathcal{P}^{r'}_{S_n,(m)}$).

4.2.8. On pose [**Bert02**, 1.2.2], [**Cr04a**, 3.1]

$$\mathcal{D}^{(m)}_{S_n,r} = \mathrm{Hom}_{A_n[\![T]\!]}\big(\mathcal{P}^r_{S_n,(m)}, A_n[\![T]\!]\big)$$
$$\mathcal{D}^{(m)}_{S_n} = \varinjlim_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{D}^{(m)}_{S_n,r} = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{D}^{(m)}_{S_n,r}$$

Ce sont des $A_n[\![T]\!]$-modules libres filtrés ; on note $(\partial^{\langle i\rangle_{(m)}})_{0\leq i\leq r}$, la base de $\mathcal{D}^{(m)}_{S_n,r}$ duale de $(\tau^{\{i\}_{(m)}})_{0\leq i\leq r}$. On définit une loi de multiplication, compatible à la structure de $A_n[\![T]\!]$-module filtré de la façon suivante. Le produit de $P\colon \mathcal{P}^r_{S_n,(m)} \to A_n[\![T]\!]$ et $Q\colon \mathcal{P}^{r'}_{S_n,(m)} \to A_n[\![T]\!]$ est défini comme l'homomorphisme composé

$$PQ\colon \mathcal{P}^{r+r'}_{S_n,(m)} \xrightarrow{\delta^{(m)}_{r,r'}} \mathcal{P}^r_{S_n,(m)} \otimes_{A_n[\![T]\!]} \mathcal{P}^{r'}_{S_n,(m)} \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes Q} \mathcal{P}^r_{S_n,(m)} \xrightarrow{P} A_n[\![T]\!]$$

On appelle $\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}$ l'*algèbre des opérateurs différentiels de niveau* m de S_n au dessus de A_n.

PROPOSITION 4.2.9. [**Bert96b**, 2.2.4] *Soit $m\in\mathbb{N}$. (1) Pour tout $\alpha\in A_n[\![T]\!]$, $s\in\mathbb{N}$, on a*

$$\mathtt{d}^{(m)}_s(\alpha) = \sum_{i=0}^{s} \mathtt{i}^{(m)}_s\big(\partial^{\langle i\rangle}(\alpha)\big)\tau^{\{i\}} \qquad \textit{(formule de Taylor dans } \mathcal{P}^s_{S_n,(m)}\textit{)}. \tag{4.2.9.1}$$

Si on écrit $\alpha=\sum_{j\in\mathbb{N}} a_jT^j$, $i=q_ip^m+r_i$, avec $0\leq r_i<p^m$, on a

$$\partial^{\langle i\rangle}(\alpha) = \sum_{j\geq i} a_j q_i! \tbinom{j}{i} T^{j-i} = q_i!\partial^{[i]}(\alpha) \tag{4.2.9.2}$$

(2) *On a les relations :*

$$\partial^{\langle i'\rangle}\partial^{\langle i''\rangle} = \partial^{\langle i''\rangle}\partial^{\langle i'\rangle} = \left\langle {i'+i'' \atop i'} \right\rangle \partial^{\langle i'+i''\rangle} \in \mathcal{D}^{(m)}_{S_n}, \qquad \forall i', i''\in\mathbb{N}, \tag{4.2.9.3}$$

$$\partial^{\langle i\rangle}\alpha = \sum_{i'+i''=i} \left\{ {i \atop i'} \right\} \partial^{\langle i'\rangle}(\alpha)\partial^{\langle i''\rangle} \in \mathcal{D}^{(m)}_{S_n}, \qquad \forall i\in\mathbb{N}, \forall\alpha\in A_n[\![T]\!], \tag{4.2.9.4}$$

(3) *La $A_n[\![T]\!]$-algèbre $\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}$ est engendrée par $(\partial^{\langle p^j\rangle})_{0\leq j\leq m}$. Pour tout $0\leq j<m$, l'élément $\partial^{\langle p^j\rangle}$ est nilpotent ; par contre l'élément $\partial^{\langle p^m\rangle}$ n'est pas nilpotent.*

DÉM. La formule de Taylor est tautologique. On en déduit (4.2.9.2) et (2) comme dans le cas de type fini [**Bert96b**, 2.2.4]. Rappelons en détail la démonstration de (3). Pour tout entier $i\geq 0$, soient $i=q_ip^m+r$ sa division euclidienne par p^m et $r=\sum_{j=0}^{m-1}a_jp^j$ le développement p-adique du reste. On déduit de (2) que

$$c_i\partial^{\langle i\rangle} = \big(\partial^{\langle p^m\rangle}\big)^{q_i} \prod_{j=0}^{m-1} \big(\partial^{\langle p^j\rangle}\big)^{a_j}$$

avec $c_i = i!\Big(q_i!(p^m!)^{q_i}\prod_{j=0}^{m-1}(p^j!)^{a_j}\Big)^{-1}$ qui est de valuation p-adique

$$\mathrm{v}_p(c_i) = \frac{1}{p-1}\Big(i - s_i - q_i + s_{q_i} - q_ip^m + q_i - \sum_{j=0}^{m-1}a_jp^j + \sum_{j=0}^{m-1}a_j\Big) = 0$$

On en déduit que les $\partial^{\langle p^j\rangle}$, pour $j=0,\ldots,m$, engendrent $\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}$ en tant que $A_n[\![T]\!]$-algèbre.

Pour tout $0\leq a<p^m$ et $0\leq a'\leq a$, on a $\left\langle {a \atop a'} \right\rangle = \binom{a}{a'}$, cf. (4.1.1). On en déduit que pour tout $0\leq j<m$, on a $(\partial^{\langle p^j\rangle})^p = b_{p^j,p}\,\partial^{\langle p^{j+1}\rangle}$, avec $b_{p^j,p} = p^{j+1}!/(p^j!)^p$, qu'on vérifie

facilement être de valuation p-adique 1. Donc $\big(\partial^{\langle p^j\rangle}\big)^{pi} = (b_{p^j,p})^i\big(\partial^{\langle p^{j+1}\rangle}\big)^i$ est égale à zéro pour i tel que $(b_{p^j,p})^i = 0$ dans $A_n[\![T]\!]$. Par contre pour tout i, on a $\big(\partial^{\langle p^m\rangle}\big)^i = c_{ip^m}\partial^{\langle ip^m\rangle}$, où $c_{ip^m} = \frac{(ip^m)!}{(p^m!)^i i!}$ est de valuation p-adique 0. Donc pour tout entier positif i, $\big(\partial^{\langle p^m\rangle}\big)^i$ est différent de zéro. □

4.2.10. On désigne par $\rho_m\colon \mathcal{D}^{(m)}_{S_n} \to \mathcal{D}_{S_n}$ l'homomorphisme de $A_n[\![T]\!]$-modules qui envoie $\partial^{\langle i\rangle}$ sur $q_i!\partial^{[i]}$; en particulier, pour $0 \leq i \leq p^m$, $\rho_m(\partial^{\langle i\rangle}) = \partial^{[i]}$, et pour i assez grand $\rho_m(\partial^{\langle i\rangle}) = 0$. On vérifie par (4.2.9)-(2) que ρ_m est un homomorphisme d'anneaux, et par (4.2.9)-(3) que l'image de $\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}$ par ρ_m s'identifie à

$$\rho_m\big(\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}\big) = A_n[\![T]\!]\big[\partial, \partial^{[p]}, \ldots, \partial^{[p^m]}\big] \subset \mathcal{D}_{S_n}. \tag{4.2.10.1}$$

4.2.11. Pour $m' \geq m \geq 0$, on définit une application de $A_n[\![T]\!]$-modules

$$\rho_{m',m}\colon \mathcal{D}^{(m)}_{S_n} \to \mathcal{D}^{(m')}_{S_n}$$

par

$$\rho_{m',m}\big(\partial^{\langle i\rangle_{(m)}}\big) = \frac{q_i!}{q'_i!}\partial^{\langle i\rangle_{(m')}} \quad \forall\, i \in \mathbb{N},$$

où $i = q_i p^m + r_i = q'_i p^{m'} + r'_i$, avec $0 \leq r_i < p^m$ et $0 \leq r'_i < p^{m'}$. C'est en fait un homomorphisme de $A_n[\![T]\!]$-algèbres. On obtient ainsi un système inductif $\big(\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}, \rho_{m',m}\big)_{m\in\mathbb{N}}$ dont la limite inductive s'identifie, par $\varinjlim_{m\in\mathbb{N}} \rho_m$, à $\mathcal{D}_{S_n}$.

4.2.12. Soit $m \geq 0$ un entier. Pour tout $n' \geq n \geq 0$, la projection $A_{n'} \to A_n$, induit un morphisme d'anneaux $\mathcal{D}^{(m)}_{S_{n'}} \to \mathcal{D}^{(m)}_{S_n}$. On obtient un système projectif $\big(\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}^{(m)}_{S_n} \tag{4.2.12.1}$$

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} = \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \tag{4.2.12.2}$$

4.2.13. Pour $m' \geq m \geq 0$, les applications $\rho_{m',m}$ définies ci-dessus, induisent un homomorphisme $\widehat{\rho}_{m',m}\colon \widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$, et on obtient un système inductif $\big(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}, \widehat{\rho}_{m',m}\big)_{m\in\mathbb{N}}$. Comme $\mathcal{O}_C[\![T]\!] = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A_n[\![T]\!]$ est de caractéristique zéro, les applications $\widehat{\rho}_{m',m}$ sont injectives. On pose

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathscr{S}} = \varinjlim_{m\geq 0} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S}} \tag{4.2.13.1}$$

$$\mathcal{D}^{\dagger} = \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} = \varinjlim_{m\geq 0} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} \tag{4.2.13.2}$$

On appelle $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$) l'*anneau des opérateurs différentiels arithmétiques* (resp. de niveau m) sur $\mathscr{S}$. Ce sont des $C[\![T]\!]^b$-algèbres.

4.2.14. Les homomorphismes $\rho_m\colon \mathcal{D}^{(m)}_{S_n} \to \mathcal{D}_{S_n}$ induisent par passage à la limite projective sur n des homomorphismes $\widehat{\rho}_m\colon \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$ et $\rho = \varinjlim_{m\in\mathbb{N}} \widehat{\rho}_m\colon \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$, qui sont injectifs car la base est de caractéristique zéro. On en déduit une action naturelle à gauche de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$ sur $C[\![T]\!]^b$.

LEMME 4.2.15. [**Bert96b**, (2.4.3.1)] *Soient $m, i \geq 0$ deux entiers, $i = q_i^{(m)}p^m + r_i^{(m)}$ la division euclidienne de i par p^m, avec $0 \leq r_i^{(m)} < p^m$. On a :*

$$\frac{i}{p^m(p-1)} - \log_p(i+1) - \frac{p}{p-1} < \mathrm{v}_p(q_i^{(m)}!) \leq \frac{i}{p^m(p-1)}$$

LEMME 4.2.16. [**Bert96b**, (2.4.3)]

(1) *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe deux réels $0 < \eta < 1, c > 0$, tels que pour tout $i \geq 0$, de division euclidienne $i = q_i^{(m)}p^m + r_i^{(m)}$, on a $\|q_i^{(m)}!\| \leq c\eta^i$.*

(2) *Pour tout réel $0 < \eta < 1$, il existe $m \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $i \geq 0$, de division euclidienne $i = q_i^{(m)}p^m + r_i^{(m)}$, on a $\eta^i \leq c\|q_i^{(m)}!\|$.*

PROPOSITION 4.2.17. *Soit $m \geq 0$ un entier. L'homomorphisme $\widehat{\rho}_m$ (resp. ρ) identifie $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$ (resp. $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$) à la sous-$C[\![T]\!]^b$-algèbre suivante de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$:*

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i q_i! \partial^{[i]} \,\middle|\, a_i \in C[\![T]\!]^b, \lim_{i\to+\infty} a_i = 0 \right\} \tag{4.2.17.1}$$

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} b_i \partial^{[i]} \,\middle|\, b_i \in C[\![T]\!]^b, \exists\, c, \eta \in \mathbb{R}, \eta < 1, \|b_i\|_1 < c\eta^i \right\} \tag{4.2.17.2}$$

où $\partial^{[i]} = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{dT^i}$ et $\|\cdot\|_1$ désigne la norme de Gauss (3.1.4).

DÉM. On pose, pour tout entier $i \geq 0$, $i = q_i p^m + r$, avec $0 \leq r < p^m$. En caractéristique zéro, on a $\partial^{\langle i\rangle} = q_i!\partial^{[i]} = (q_i!/i!)\partial^i$. On en déduit la première égalité. D'après (4.2.16)-(1), pour tout entier m positif, il existe $\eta < 1$, tel que

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} \subseteq \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i \partial^{[i]} \,\middle|\, b_i \in C[\![T]\!]^b, \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \|b_i\| \leq c\eta^i \right\}.$$

On déduit de (4.2.16)-(2), que pour tout $\eta < 1$, il existe m', dépendant de η, tel que

$$\left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i \partial^{[i]} \,\middle|\, b_i \in C[\![T]\!]^b, \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \|b_i\| \leq c\eta^i \right\} \subseteq \widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}.$$

L'égalité (4.2.17.2) s'ensuit car $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$. □

LEMME 4.2.18. [**Cr04a**, 3.2],[**Bert96b**, 4.2.1] *Soient $f \in A_n[\![T]\!]$, $r \geq 0$ un entier. On pose*

$$B_{S_n}(f, r) = A_n[\![T]\!][X]/(f^r X - p)$$

Si p^{m+1} *divise* r*, la structure naturelle de* $\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}$*-module sur* $A_n[\![T]\!]$ *s'étend à* $B_{S_n}(f,r)$*. Cette structure est* compatible [**Bert96b**, 2.3.4] *à la structure de* $A_n[\![T]\!]$*-algèbre de* $B_{S_n}(f,r)$*.*

4.2.19. Soient $m, r \geq 0$ deux entiers tels que p^{m+1} divise r. Pour tout $f \in A_n[\![T]\!]$, on munit $B_{S_n}(f,r)$ d'une action à gauche de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S}}$ via la projection $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S}} \to \mathcal{D}^{(m)}_{S_n}$ (4.2.12).

Soit $f \in \mathcal{O}_C[\![T]\!]$; pour tout entier $n \geq 0$, on note $\bar{f}_n$ la classe de f dans $A_n[\![T]\!]$. Pour tout entier $n' \geq n \geq 0$, la projection $A_{n'} \to A_n$ induit un homomorphisme

$$B_{S_{n'}}(\bar{f}_{n'}, r) \longrightarrow B_{S_n}(\bar{f}_n, r)$$

d'anneaux, qui est aussi un homomorphisme pour la structure de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S}}$-modules définie ci-dessus. On obtient ainsi un système projectif d'anneaux $\big(B_{S_n}(\bar{f}_n, r)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S}}$-modules). On pose

$$B_{\mathscr{S}}(f,r) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} B_{S_{n'}}(\bar{f}_n, r) \tag{4.2.19.1}$$

qui est canoniquement isomorphe à $\mathcal{O}_C[\![T]\!]\{X\}/(f^r X - p)$.

4.2.20. Soient $n \geq 0$ un entier et $f \in A_n[\![T]\!]$. Pour tout entier $m' \geq m \geq 0$, $\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}$ agit sur $B_{S_n}(f, p^{m'+1})$ via $\rho_{m,m'} \colon \mathcal{D}^{(m)}_{S_n} \to \mathcal{D}^{(m')}_{S_n}$ (4.2.11). L'endomorphisme de la $A_n[\![T]\!]$-algèbre $A_n[\![T]\!][X]$, $X \mapsto f^{p^{m'+1}-p^{m+1}}X$, induit un homomorphisme de $A_n[\![T]\!]$-algèbres

$$\rho'_{m,m'} \colon B_{S_n}(f, p^{m+1}) \longrightarrow B_{S_n}(f, p^{m'+1})$$

On vérifie que c'est aussi un homomorphisme de $\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}$-modules. On obtient un système inductive $(B_{S_n}(f,p^{m+1}), \rho'_{m,m'})_{m\in\mathbb{N}}$ au dessus de $(\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}, \rho_{m,m'})_{m\in\mathbb{N}}$. Les applications $\rho'_{m,m'}$ passent à la limite projective sur $n \in \mathbb{N}$ et on obtient ainsi pour tout $f \in \mathcal{O}_C[\![T]\!]$, un système inductif $(B_{\mathscr{S}}(f,p^{m+1}), \widehat{\rho}'_{m,m'})_{m\in\mathbb{N}}$ au dessus de $(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S}}, \widehat{\rho}_{m,m'})_{m\in\mathbb{N}}$.

PROPOSITION 4.2.21. [**Bert96b**, 4.3.2] *On a un homomorphisme canonique injectif de* $\mathcal{O}_C[\![T]\!]$*-algèbres*

$$\Psi \colon \varinjlim_{m\in\mathbb{N}} B_{\mathscr{S}}(T, p^{m+1}) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger},$$

qui induit un isomorphisme de $C[\![T]\!]^b$*-algèbres*

$$\Psi_{\mathbb{Q}} \colon \Big(\varinjlim_{m\in\mathbb{N}} B_{\mathscr{S}}(T, p^{m+1})\Big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{E}^\dagger.$$

Ce qui munit $\mathcal{E}^\dagger$ *d'une structure canonique de* $\mathcal{D}^\dagger$*-module.*

DÉM. Pour tout $n, m \geq 0$, on considère l'homomorphisme de $A_n[\![T]\!]$-algèbres

$$\begin{array}{rcl} A_n[\![T]\!][X]/(T^{p^{m+1}}X - p) & \longrightarrow & A_n[\![T]\!][T^{-1}] \\ X & \longmapsto & \dfrac{p}{T^{p^{m+1}}} \end{array}$$

Par passage à la limite projective sur $n \in \mathbb{N}$, on obtient un homomorphisme de $\mathcal{O}_C[\![T]\!]$-algèbres

$$\begin{aligned} \Psi_m \colon B_{\mathscr{A}}(T, p^{m+1}) = \mathcal{O}_C[\![T]\!]\{X\}/(T^{p^{m+1}}X - p) &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A_n[\![T]\!][T^{-1}] \\ X &\longmapsto \frac{p}{T^{p^{m+1}}} \end{aligned}$$

qui est clairement injectif. On rappelle que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ s'identifie à une sous-$\mathcal{O}_C[\![T]\!]$-algèbre de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, (3.1.4). Il est facile de vérifier que l'image de Ψ_m est contenue dans la sous-algèbre de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ des séries convergentes sur la couronne $\left[\|p\|^{1/p^{m+1}}, 1\right[$. En particulier, pour tout $m \in \mathbb{N}$, Ψ_m se factorise par $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

Les homomorphismes Ψ_m commutent aux homomorphismes $\widehat{\rho}'_{m,m'}$ (4.2.20), et induisent ainsi, par passage à la limite inductive sur $m \in \mathbb{N}$, un homomorphisme injectif de $\mathcal{O}_C[\![T]\!]$-algèbres

$$\Psi \colon \varinjlim_{m\in\mathbb{N}} B_{\mathscr{A}}(T, p^{m+1}) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$$

En tensorisant avec $\mathbb{Q}$, on obtient un homomorphisme injectif de $C[\![T]\!]^b$-algèbres

$$\Psi_{\mathbb{Q}} \colon \Big(\varinjlim_{m\in\mathbb{N}} B_{\mathscr{A}}(T, p^{m+1})\Big) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathcal{E}^\dagger$$

Prouvons que $\Psi_{\mathbb{Q}}$ est surjectif. Il suffit de prouver que pour tout $s(T) \in \mathcal{E}^\dagger$, il existe $r \in \mathbb{N}$, tel que $p^r s(T)$ appartient à $\operatorname{Im}\Psi$. Soit $s(T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n \in \mathcal{E}^\dagger$. Il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que $\lim\limits_{n\to-\infty} \|a_n\| \|p\|^{n/p^{m+1}} = 0$; en particulier, il existe $n' \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $n \leq n'$, on a $\mathrm{v}_p(a_n) \geq -\frac{n}{p^{m+1}}$. Quitte à multiplier $s(T)$ par une puissance de p, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $a_n \in \mathcal{O}_C$ et $\mathrm{v}_p(a_n) \geq -\frac{n}{p^{m+1}} + 1$. Montrons que $s(T)$ appartient à l'image de Ψ_m. On pose $f_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n$ et pour tout $i > 0$,

$$f_i = \sum_{n=-ip^{m+1}}^{-(i-1)p^{m+1}-1} \Big(\frac{a_n}{p^i}\Big) T^{n+ip^{m+1}}$$

Par construction, on a $f_i \in \mathcal{O}_C[\![T]\!]$ et formellement $s(T) = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} f_i \frac{p^i}{T^{ip^{m+1}}}$. Donc il reste à montrer que $\lim\limits_{i\to+\infty} \|f_i\|_1 = 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_1(f_i) &\geq \inf\left\{\mathrm{v}_p(a_n) - i \;\middle|\; -ip^{m+1} \leq n < -(i-1)p^{m+1}\right\} \\ &\geq \inf\left\{\mathrm{v}_p(a_n) + \frac{n}{p^{m+1}} - 1 \;\middle|\; -ip^{m+1} \leq n < -(i-1)p^{m+1}\right\} \end{aligned}$$

où $\mathrm{v}_1(f_i)$ est la valuation de Gauss de f_i (3.1.4), qui tend vers $+\infty$ à cause de la condition de convergence sur $s(T)$. □

4.2.22. On pose

$$\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}(0) = B_{S_n}(T, p^{m+1}) \otimes_{A_n[\![T]\!]} \mathcal{D}^{(m)}_{S_n} \tag{4.2.22.1}$$

Par (4.2.18), $B_{S_n}(T, p^{m+1})$ est munie d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}$-module compatible à sa structure de $A_n[\![T]\!]$-algèbre. Donc par [**Bert96b**, 2.3.5], il existe une unique structure d'anneau sur $\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}(0)$ telle que les morphismes $B_{S_n}(T, p^{m+1}) \to \mathcal{D}^{(m)}_{S_n}(0)$, $b \mapsto b \otimes 1$ et $\mathcal{D}^{(m)}_{S_n} \to \mathcal{D}^{(m)}_{S_n}(0)$, $P \mapsto 1 \otimes P$, soient des homomorphismes d'anneaux, que $(b \otimes 1)(1 \otimes P) = b \otimes P$ pour tout $b \in B_{S_n}(T, p^{m+1})$, $P \in \mathcal{D}^{(m)}_{S_n}$, et que pour tout $j \in \mathbb{N}$, $b \in B_{S_n}(T, p^{m+1})$, on ait

$$(1 \otimes \partial^{\langle j \rangle})(b \otimes 1) = \sum_{0 \le i \le j} \left\{ {j \atop i} \right\} \partial^{\langle j-i \rangle} b \otimes \partial^{\langle i \rangle}.$$

Pour tout entier $n' \geq n \geq 0$, la projection $A_{n'} \to A_n$ induit un homomorphisme $\mathcal{D}^{(m)}_{S_{n'}}(0) \to \mathcal{D}^{(m)}_{S_n}(0)$. On pose

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S}}(0) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}^{(m)}_{S_n}(0) \tag{4.2.22.2}$$

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0) = \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S}}(0) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \tag{4.2.22.3}$$

Par définition, on a $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0) = B_{\mathscr{S}}(T, p^{m+1}) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_C[\![T]\!]} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$. On obtient un système inductif

$$(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0), \widehat{\rho}'_{m',m} \widehat{\otimes}\, \widehat{\rho}_{m',m}),$$

on pose

$$\mathcal{D}^{\dagger}(0) = \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0) = \varinjlim_{m \in \mathbb{N}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0) \tag{4.2.22.4}$$

On appelle $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)$) l'*anneau des opérateurs différentielles arithmétiques* (resp. de niveau m) sur $\mathscr{S}$ *à singularités surconvergentes en* 0.

PROPOSITION 4.2.23. *L'action naturelle de $\mathcal{D}^{\dagger}$ sur $\mathcal{E}^{\dagger}$ (4.2.21) se prolonge en une action de $\mathcal{D}^{\dagger}(0)$ sur $\mathcal{E}^{\dagger}$. L'anneau $\mathcal{D}^{\dagger}(0)$ s'identifie formellement à l'anneaux des séries*

$$\mathcal{D}^{\dagger}(0) \cong \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \partial^{[i]} \,\middle|\, a_i \in \mathcal{E}^{\dagger},\ \exists c, \eta \in \mathbb{R}, \eta < 1, \|a_i\|_1 < c\eta^i \right\}. \tag{4.2.23.1}$$

où $\partial^{[i]}$ agit sur $\mathcal{E}^{\dagger}$ par $\frac{1}{i!}\frac{d^i}{dT^i} \colon \mathcal{E}^{\dagger} \to \mathcal{E}^{\dagger}$.

DÉM. La première assertion est évidente. Par (4.2.17.1), compte tenu de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0) = B_{\mathscr{S}}(T, p^{m+1}) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_C[\![T]\!]} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$, on a

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0) = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \partial^{\langle i \rangle_{(m)}} \,\middle|\, a_i \in B_{\mathscr{S}}(T, p^{m+1}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \lim_{i \to +\infty} a_i = 0 \right\}$$

On conclut par (4.2.21), en procédant comme dans la démonstration de (4.2.17). $\square$

4.3. $F\mathcal{D}^\dagger$-modules holonomes

4.3.1. Soit $m_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $\mathfrak{m}_C$ soit muni d'une m_0-PD-structure à puissances divisées (il suffit que $p^{m_0}(p-1) \geq \mathrm{v}_C(p)$). On note $\sigma\colon \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ le relèvement du Frobenius absolu (d'ordre h) de S (4.2.1), $\mathscr{S}'$ le $\mathcal{O}_C$-schéma formel déduit de $\mathscr{S}$ par le changement de base défini par $\sigma_C\colon \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C$, et $\mathrm{F}\colon \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ le Frobenius relatif, de sorte qu'on ait le diagramme commutatif à carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{S} \arrow[r, "\mathrm{F}"] \arrow[dr] & \mathscr{S}' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathscr{S} \arrow[d] \\
& \operatorname{Spf} \mathcal{O}_C \arrow[r] & \operatorname{Spf} \mathcal{O}_C
\end{tikzcd}$$

Pour tout $m \geq m_0$, l'image inverse par F induit une équivalence de catégories F^* entre la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathscr{S}',\mathbb{Q}}$-modules et la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m+h)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-modules [**Bert02**, 3.1.4, 2.1.3]. On en déduit que l'image inverse par F, induit une équivalence de la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathscr{S}',\mathbb{Q}}$-modules vers la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-modules [**Bert02**, 4.3.1]. Pour tout $\mathcal{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-module M on notera σ^*M le $\mathcal{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-module F^*M', où on a noté M' l'image inverse de M par $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}$.

On dit qu'un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-module M est muni d'une structure de Frobenius s'il est muni d'un isomorphisme de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-modules $\varphi\colon M \to \sigma^*M$. On dit aussi que M est un *$F\mathcal{D}^\dagger$-module.* On appelle φ le *Frobenius* de M. Un morphisme de $F\mathcal{D}^\dagger$-modules est un morphisme de $\mathcal{D}^\dagger$-modules commutant aux Frobenius.

De même, l'image inverse par F, permet de définir un foncteur $M \mapsto \sigma^*M$ de la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)$-modules dans elle même. On appelle *$F\mathcal{D}^\dagger(0)$-module* un $\mathcal{D}^\dagger(0)$-module M muni d'un isomorphisme $\varphi\colon M \to \sigma^*M$.

4.3.2. Soit M un $F\mathcal{D}^\dagger(0)$-module. On munit M d'un endomorphisme σ_C-linéaire φ_M induit par le Frobenius de M et d'une application $\nabla_M\colon M \to M \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{E}^\dagger/C}$, définie par $m \mapsto (\partial m) \otimes dT$.

Définition 4.3.3. [**Cr04a**, 3.5] On dit qu'un $F\mathcal{D}^\dagger(0)$-module M est *holonome* s'il est de dimension finie sur $\mathcal{E}^\dagger$. Dans ce cas, le triplet (M, ∇_M, φ_M) appartient à $\Phi M(\mathcal{E}^\dagger)$. On note F-$\mathrm{Hol}(\mathcal{D}^\dagger(0))$ la catégorie des $F\mathcal{D}^\dagger(0)$-modules holonomes.

Proposition 4.3.4. *Le foncteur*

$$\begin{array}{rcl} F\text{-}\mathrm{Hol}(\mathcal{D}^\dagger(0)) & \longrightarrow & \Phi M(\mathcal{E}^\dagger) \\ M & \longmapsto & (M, \nabla_M, \varphi_M) \end{array}$$

est une équivalence de catégories.

Dém. La pleine fidélité est évidente. Montrons que ce foncteur est essentiellement surjectif. Soient (M, φ, ∇) un (φ, ∇)-module sur $\mathcal{E}^\dagger$, $\|\cdot\|_M$ une norme sur M relativement à la valeur absolue $\|\cdot\|_1$ de $\mathcal{E}^\dagger$, et $\nabla(d/dT)\colon M \to M$ la dérivation de M associé par ∇ à la dérivation $d/dT\colon \mathcal{E}^\dagger \to \mathcal{E}^\dagger$. Pour tout $m \in M$, $\eta < 1$, on a [**Tsu98c**, 3.4.2]

$$\lim_{i\to+\infty} \left\| \frac{1}{i!}\nabla(d/dT)^i(m)\right\|_M \eta^i = 0$$

Donc par (4.2.23) et [**Tsu98c**, 3.4.4], on peut munir M d'une action à gauche de $\mathcal{D}^\dagger(0)$, en faisant agir ∂ comme $\nabla(d/dT)$. Le Frobenius φ induit une structure de $F\mathcal{D}^\dagger(0)$-module sur M, qui est holonome car il est de dimension finie sur $\mathcal{E}^\dagger$. □

4.3.5. Pour tout $F\mathcal{D}^\dagger$-module M, on pose, $j^+M = \mathcal{D}^\dagger(0) \otimes_{\mathcal{D}^\dagger} M$, cf. [**Cr04a**, 3.5].

Crew énonce la caractérisation suivante de l'holonomie pour un $F\mathcal{D}^\dagger$-module, qu'on prend ici comme définition, cf. *loc. cit.* 3.5.

DÉFINITION 4.3.6 (Crew). On dit que un $F\mathcal{D}^\dagger$-module M est *holonome* s'il est cohérent en tant que $\mathcal{D}^\dagger$-module et si j^+M est holonome en tant que $F\mathcal{D}^\dagger(0)$-module. On note F-Hol$(\mathcal{D}^\dagger)$ la catégorie des $F\mathcal{D}^\dagger$-modules holonomes.

4.3.7. Pour tout $F\mathcal{D}^\dagger(0)$-module M, on pose $j_+(M)$ le $F\mathcal{D}^\dagger$-module déduit de M par restriction de scalaires, cf. [**Cr04a**, 3.5].

4.3.8. Dans [**Cr04a**, 4], Crew définit un anneau $\mathcal{D}^{an}$ (resp. $\mathcal{D}^{an}(0)$) contenant $\mathcal{D}^\dagger$ (resp. $\mathcal{D}^\dagger(0)$), une catégorie F-Hol$(\mathcal{D}^{an})$ (resp. F-Hol$(\mathcal{D}^{an}(0))$) et un foncteur d'analytification

$$\begin{array}{rcl} F\text{-Hol}(\mathcal{D}^\dagger) & \longrightarrow & F\text{-Hol}(\mathcal{D}^{an}) \\ M & \longmapsto & M^{an} := \mathcal{D}^{an} \otimes_{\mathcal{D}^\dagger} M \end{array} \tag{4.3.8.1}$$

Soit $\mathcal{A} = \mathcal{A}([0,1[) \subset \mathcal{R}$ le sous-anneau des fonctions analytiques sur le disque ouvert (3.1.3). On a $\left(C[\![T]\!]^b\right)^{an} = \mathcal{A}$ et ${\mathcal{E}^\dagger}^{an} = \mathcal{R}$. L'anneau $C[\![T]\!]^b$ (resp. $\mathcal{E}^\dagger$) a une structure naturelles de $F\mathcal{D}^\dagger$-module (resp. $F\mathcal{D}^\dagger(0)$-module) ; en déduit que l'anneau $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{R}$) a une structure de $F\mathcal{D}^{an}$-module (resp. $F\mathcal{D}^{an}(0)$-module). L'anneau $\mathcal{B}$ des hyperfonctions (3.1.8) est un $F\mathcal{D}^{an}(0)$-module.

4.3.9. Crew définit le $F\mathcal{D}^{an}$-module des *microfonctions* $\mathcal{C}$ par la suite exacte de $F\mathcal{D}^{an}$-modules [**Cr04a**, 5.1]

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \otimes_C C^{\mathrm{nr}} \longrightarrow \mathcal{B} \xrightarrow{\mathrm{can}} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

où l'homomorphisme $\mathcal{A} \otimes_C C^{\mathrm{nr}} \hookrightarrow \mathcal{B}$ est induit par les inclusions $\mathcal{A} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{B}$ et $C^{\mathrm{nr}} \subset \mathcal{B}$, cf. (3.1.8). On appelle can: $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ la projection canonique. Le $F\mathcal{D}^{an}$-module $\mathcal{C}$ est muni d'une action de G_K induite par celle sur $\mathcal{B}$. L'anneau $\mathcal{A} \otimes_C C^{\mathrm{nr}}$ est contenu dans le noyau de l'opérateur de monodromie $N\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$. Ce dernier se factorise donc par une application $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$, notée var, qu'on appelle *variation*, de sorte qu'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "\mathrm{can}"] \arrow[d, "N"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "N"] \arrow[dl, "\mathrm{var}"'] \\ \mathcal{B} \arrow[r, "\mathrm{can}"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

De façon analogue, pour tout $\tau \in I_K$, l'action de $\tau - \mathrm{Id}$ étant triviale sur $\mathcal{A} \otimes_C C^{\mathrm{nr}}$, on en déduit une application linéaire $v(\tau) \colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ telle que $\tau - \mathrm{Id}_{\mathcal{B}} = v(\tau) \circ \mathrm{can}$ sur $\mathcal{B}$ et $\tau - \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} = \mathrm{can} \circ v(\tau)$ sur $\mathcal{C}$. On appelle *variations de Galois* les applications $v(\tau)$.

On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ aussi comme des $\mathcal{D}^\dagger$-modules via l'inclusion $\mathcal{D}^\dagger \to \mathcal{D}^{an}$.

4.3.10. Soit M un $F\mathcal{D}^\dagger$-module. On pose, cf. [**Cr04a**, 5.1.7]

$$\mathbb{V}(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\dagger}\big(M, \mathcal{B}\big) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{an}}\big(M^{an}, \mathcal{B}\big) \tag{4.3.10.1}$$

$$\mathbb{W}(M) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\dagger}\big(M, \mathcal{C}\big) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{an}}\big(M^{an}, \mathcal{C}\big) \tag{4.3.10.2}$$

Ce sont des C^{nr}-espaces vectoriels munis d'actions de G_K et de Frobenius. Les applications can, var et $v(\tau)$ induisent respectivement des applications linéaires $c \colon \mathbb{V}(M) \to \mathbb{W}(M)$, $v \colon \mathbb{W}(M) \to \mathbb{V}(M)$ et $v(\tau) \colon \mathbb{W}(M) \to \mathbb{V}(M)$.

PROPOSITION 4.3.11. [**Cr04a**, 5.4] *Pour tout $F\mathcal{D}^\dagger$-module holonome M, on a une suite exacte canonique*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^\dagger}\big(M, \mathcal{A} \otimes_C C^{\mathrm{nr}}\big) \longrightarrow \mathbb{V}(M) \xrightarrow{\ c\ } \mathbb{W}(M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}^\dagger}(M)(\mathcal{A} \otimes_C C^{\mathrm{nr}}) \longrightarrow 0$$

THÉORÈME 4.3.12 (Crew). [**Cr04a**, 5.6] *Pour tout $F\mathcal{D}^\dagger$-module holonome M, $\mathbb{V}(M)$ et $\mathbb{W}(M)$ sont des C^{nr}-espaces vectoriels de dimension finie ; autrement dit*

$$\big(\mathbb{V}(M), \mathbb{W}(M), c, v, v(\tau)\big)$$

est un module de Crew (3.5).

On en déduit un foncteur contravariant exact

$$\mathrm{Sol} \colon F\text{-}\mathrm{Hol}(\mathcal{D}^\dagger) \longrightarrow \mathrm{Cr}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K).$$

THÉORÈME 4.3.13 (Crew). [**Cr04a**, 6.2] *Le foncteur*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Sol} \colon F\text{-}\mathrm{Hol}(\mathcal{D}^\dagger) & \longrightarrow & \mathrm{Cr}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K) \\ M & \longmapsto & (\mathbb{V}(M), \mathbb{W}(M), c, v, v(\tau)) \end{array}$$

est essentiellement surjectif et fidèle.

REMARQUE 4.3.14. [**Cr04a**, 6.3] Le foncteur Sol se factorise en

$$\mathrm{Sol} \colon F\text{-}\mathrm{Hol}(\mathcal{D}^\dagger) \xrightarrow{(4.3.8.1)} F\text{-}\mathrm{Hol}(\mathcal{D}^{an}) \longrightarrow \mathrm{Cr}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K).$$

Le foncteur induit

$$F\text{-}\mathrm{Hol}(\mathcal{D}^{\mathrm{an}}) \longrightarrow \mathrm{Cr}_{C^{\mathrm{nr}}}(G_K)$$

est une anti-équivalence de catégories.

4.4. Microdifférentielles arithmétiques sur un trait complet (niveau 0)

4.4.1. Dans cette section et la suivante, on entreprend une théorie de la microlocalisation pour les $\mathcal{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-modules arithmétiques. Notre approche s'inspire de l'analyse algèbrique ([**Kas83**], [**Mal91**] et [**Sab02**]) et de la théorie formelle des opérateurs finis [**Lop04**, 3].

4.4.2. On note $\Theta^{(0)}_{S_n}$ le $A_n[\![T]\!]$-module libre de base $(\xi^i)_{i\in\mathbb{Z}}$; ses éléments sont donc les sommes finies $\sum\limits_{s\le i\le d}\alpha_i\xi^i$, avec $\alpha_i\in A_n[\![T]\!]$. Si on identifie $\Theta^{(0)}_{S_n}$ avec le $A_n[\![T]\!]$-module sous-jacent à l'algèbre $A_n[\![T]\!][\xi,\xi^{-1}]$ des polynômes de Laurent, la multiplication induit une loi de composition interne commutative de $\Theta^{(0)}_{S_n}$ qu'on notera $*$. Par la même identification, on obtient un homomorphisme $A_n[\![T]\!]$-linéaire

$$\partial_\xi\colon\ \Theta^{(0)}_{S_n}\longrightarrow\Theta^{(0)}_{S_n}$$

déduit de la $A_n[\![T]\!]$-dérivation de $A_n[\![T]\!][\xi,\xi^{-1}]$ définie par $\xi\mapsto 1$. Pour tout entier $r\ge 0$, on pose

$$\begin{array}{rcl}\partial^{[r]}_T\colon\ \Theta^{(0)}_{S_n} & \longrightarrow & \Theta^{(0)}_{S_n}\\ \sum\limits_{s\le i\le d}\alpha_i\xi^i & \longmapsto & \sum\limits_{s\le i\le d}\partial^{[r]}(\alpha_i)\xi^i\end{array}$$

où $\partial^{[r]}\in\mathcal{D}_{S_n}$, cf. (4.2.5).

On munit $\Theta^{(0)}_{S_n}$ de la loi de composition interne définie par la formule suivante : pour tout $F,G\in\Theta^{(0)}_{S_n}$, on pose

$$F\cdot G=\sum_{r\ge 0}\partial^r_\xi(F)*\partial^{[r]}_T(G) \tag{4.4.2.1}$$

La somme ci-dessus est finie car $\partial^r_\xi(F)=0$ dès que $r!=0$ dans A_n. Cette loi est non-commutative et fait de $\Theta^{(0)}_{S_n}$ une $A_n[\![T]\!]$-algèbre via l'homomorphisme $A_n[\![T]\!]\to\Theta^{(0)}_{S_n}$, qui envoie $\alpha\mapsto\alpha\xi^0$; cela résulte du lemme évident suivant.

LEMME 4.4.3. (1) *Soient $i\ge 0, j\ge 0$ deux entiers. Alors*

$$\xi^iT^j=\sum_{r=0}^{\min(i,j)}\frac{j!i!}{r!(j-r)!(i-r)!}T^{j-r}\xi^{i-r}$$

$$\xi^{-i}T^j=\sum_{r=0}^{j}\frac{(-1)^r j!(r+i-1)!}{r!(j-r)!(i-1)!}T^{j-r}\xi^{-i-r}\qquad (\textit{si } i\neq 0)$$

(2) *Pour tout $\alpha\in A_n[\![T]\!]$, $G\in\Theta^{(0)}_{S_n}$, on a $\alpha\cdot G=\alpha G$ où le produit à droite est le produit induit par la structure de $A_n[\![T]\!]$-module sur $\Theta^{(0)}_{S_n}$.*

DÉFINITION 4.4.4. On appelle $\Theta^{(0)}_{S_n}$ l'*algèbre des opérateurs microdifférentielles de niveau* 0 sur S_n.

PROPOSITION 4.4.5. *L'homomorphisme de $A_n[\![T]\!]$-modules $\mathcal{D}^{(0)}_{S_n}\to\Theta^{(0)}_{S_n}$ qui envoie $\partial^{\langle i\rangle}\mapsto\xi^i$, $i\in\mathbb{N}$, est un homomorphisme de $A_n[\![T]\!]$-algèbres, ce qui munit $\Theta^{(0)}_{S_n}$ d'une structure de $\mathcal{D}^{(0)}_{S_n}$-algèbre.*

DÉM. L'homomorphisme de $A_n[\![T]\!]$-modules est bien défini car $\mathcal{D}^{(0)}_{S_n}$ est libre de base $\partial^{\langle i\rangle}$ (4.2.8). On vérifie facilement, en utilisant (4.2.9)-(2), qu'il commute à la multiplication ; on rappelle que $\left\langle {i \atop i'} \right\rangle_{(0)} = 1$, pour tout $i, i' \in \mathbb{N}$ (4.1.1.5). □

COROLLAIRE 4.4.6. *Le quotient de l'algèbre des polynômes non-commutatifs $\mathcal{D}^{(0)}_{S_n}[Y]$ par l'idéal bilatère engendré par $\partial^{\langle 1\rangle}Y - 1$ et $Y\partial^{\langle 1\rangle} - 1$ est canoniquement isomorphe à $\Theta^{(0)}_{S_n}$ en tant que $\mathcal{D}^{(0)}_{S_n}$-algèbre.*

DÉM. Notons Q le quotient en question. L'homomorphisme de $\mathcal{D}^{(0)}_{S_n}$-algèbres $\mathcal{D}^{(0)}_{S_n}[Y] \to \Theta^{(0)}_{S_n}$ qui envoie $Y \mapsto \xi^{-1}$ est clairement surjectif et se factorise par Q. Inversement, on considère l'homomorphisme de $A_n[\![T]\!]$-modules $\Theta^{(0)}_{S_n} \to Q$ qui envoie, pour tout $i \in \mathbb{N}$, ξ^i sur la classe de $\partial^{\langle i\rangle}$ dans Q et ξ^{-i} sur la classe de Y^i. Il est clairement l'inverse de l'homomorphisme $Q \to \Theta^{(0)}_{S_n}$ ci-dessus. □

4.4.7. Pour tout $n' \geq n \geq 0$, la projection $A_{n'} \to A_n$ induit un homomorphisme d'anneaux $\Theta^{(0)}_{S_{n'}} \to \Theta^{(0)}_{S_n}$ compatible à l'homomorphisme $\mathcal{D}^{(0)}_{S_{n'}} \to \mathcal{D}^{(0)}_{S_n}$. On obtient ainsi un système projectif d'anneaux $\left(\Theta^{(0)}_{S_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et on pose

$$\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \Theta^{(0)}_{S_n}$$
$$\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} = \widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

L'anneau $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S}}$ (resp. $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$) est de façon naturelle une algèbre sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathscr{S}}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$). On munit $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S}}$ de la topologie p-adique, i.e. de la topologie limite projective des topologies discrète, et $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S}}[\frac{1}{p^n}]$ de la topologie de la limite inductive.

PROPOSITION 4.4.8. *Les groupes additives de $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S}}$ et $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$ s'identifient aux groupes de séries suivant :*

$$\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S}} = \left\{ \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\xi^i \,\middle|\, a_i \in \mathcal{O}_C[\![T]\!],\ \lim_{i\to\pm\infty} \|a_i\|_1 = 0 \right\}$$
$$\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} = \left\{ \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\xi^i \,\middle|\, a_i \in C[\![T]\!]^b,\ \lim_{i\to\pm\infty} \|a_i\|_1 = 0 \right\}$$

Les topologies de $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S}}$ et $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$ sont données par la norme définie, pour $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\xi^i \in \widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$, par

(4.4.8.1) $$\left\|\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\xi^i\right\| = \max_{i\in\mathbb{Z}} \|a_i\|_1.$$

La multiplication de $F, G \in \widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$ *est donnée par la formule* (4.4.2.1)

$$F \cdot G = \sum_{r \geq 0} \partial_\xi^r(F) * \partial_T^{[r]}(G) \tag{4.4.8.2}$$

où la série ci-dessus est convergente.

DÉM. Les identifications des groupes sont évidentes car $\Theta^{(0)}_{S_n}$ est un $A_n[\![T]\!]$-module libre de base $(\xi^i)_{i\in\mathbb{Z}}$; les topologies sont clairement données par la norme (4.4.8.1). Pour tout $F, G \in \widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$ on a $\|\partial_\xi^i(F) * \partial_T^{[i]}(G)\| \leq \|i!\| \|F\| \|G\|$. On en déduit que la formule (4.4.8.2) est bien définie. Pour tout $F, G \in \widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S}}$, la formule (4.4.8.2) se réduit pour tout $n \in \mathbb{N}$, à (4.4.2.1) dans $\Theta^{(0)}_{S_n}$; donc elle détermine la multiplication dans $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S}}$, et aussi dans $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$. $\square$

DÉFINITION 4.4.9. Pour tout entiers $n, m \geq 0$, on note $\Theta^{(m)}_{S_n}$ le quotient de l'anneau des polynômes non-commutatifs $\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}[Y]$ par l'idéal bilatère engendré par $\partial^{\langle p^m \rangle} Y - 1$ et $Y \partial^{\langle p^m \rangle} - 1$. On appelle $\Theta^{(m)}_{S_n}$ l'anneau des *opérateurs microdifférentiels de niveau* m sur S_n. L'application naturelle $\mathcal{D}^{(m)}_{S_n} \to \Theta^{(m)}_{S_n}$ définit une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_{S_n}$-algèbre sur $\Theta^{(m)}_{S_n}$.

REMARQUE 4.4.10. i) Par (4.4.6), (4.4.9) coïncide avec (4.4.4) si $m = 0$. Pour tout $m > 0$, on s'attend à ce que $\Theta^{(m)}_{S_n}$ soit libre sur $A_n[\![T]\!]$, isomorphe à $A_n[\![T]\!]^{(\mathbb{Z})}$. On aurait ainsi une bonne description de la limite projective $\widehat{\Theta}^{(m)}_{\mathscr{S}}$ de $\Theta^{(m)}_{S_n}$ sur $n \in \mathbb{N}$.

ii) Il n'y a pas d'anneau des opérateurs microdifférentiels continus Θ_{S_n} sur S_n, car pour tout entier positif i, $\partial^{[p^i]}$ est nilpotent dans $\mathcal{D}_{S_n}$.

4.5. Microlocalisation au niveau 0

4.5.1. On supposera désormais que C contienne une racine de l'équation $X^{p-1} + p = 0$, qu'on note π, appelée d'habitude "π" de Dwork. On pose $\eta_0 = \|\pi\| = \|p\|^{\frac{1}{p-1}}$.

4.5.2. Pour tout nombre rationnel $0 \leq \eta < 1$, on pose (3.1.3)

$$\mathcal{E}^\dagger_\eta = \mathcal{A}([\eta, 1[) \cap \mathcal{E}^\dagger$$

PROPOSITION 4.5.3. (1) *On a un homomorphisme d'anneaux*

$$\phi^{(0,\infty')} \colon \mathcal{E}^\dagger_{\eta_0} \longrightarrow \widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$$

envoyant $s(T)$ *sur* $s(-\pi\xi^{-1})$.

(2) *Pour tout* $s(T) \in \mathcal{E}^\dagger_{\eta_0}$, *on a*

$$-\frac{1}{\pi}\xi^2 T\Big(\phi^{(0,\infty')}\big(s(T)\big)\Big) = \phi^{(0,\infty')}\Big(\frac{d}{dT}s(T)\Big) - \phi^{(0,\infty')}\big(s(T)\big)\frac{1}{\pi}\xi^2 T$$

DÉM. (1) Pour toute série $s(T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n$ dans $\mathcal{E}^\dagger_{\eta_0}$, la série

$$s(-\pi\xi^{-1}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n a_n \pi^n \xi^{-n}$$

appartient à $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$. En effet, on écrit $s(-\pi\xi^{-1}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\xi^n$ où on pose $b_n = (-1)^n a_{-n}\pi^{-n}$. Montrons que $\lim\limits_{n\to\pm\infty} b_n = 0$. C'est évident pour $n \mapsto -\infty$; pour $n \mapsto +\infty$ c'est équivalent à la condition de convergence en η_0 de $s(T)$. Par construction $\phi^{(0,\infty')}$ est un homomorphisme continu de groupes additifs $\mathcal{E}^\dagger_{\eta_0} \to \widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$. Il clairement un homomorphisme d'anneaux.

(2) Comme cette relation est C-linéaire, on peut supposer $s(T) = T^j$, avec $j \in \mathbb{Z}$; il faut montrer que

$$(-1)\pi^{j-1}\xi^2 T\xi^{-j} = j(-1)\pi^{j-1}\xi^{-(j-1)} + (-1)\pi^{j-1}\xi^{-j+2}T,$$

ou, en multipliant à gauche par $(-1)\pi^{1-j}\xi^{j-2}$ et à droite par ξ^j, que

$$\xi^j T = j\xi^{j-1} + T\xi^j.$$

C'est un cas particulier de (4.4.8.2), cf. (4.4.3). □

4.5.4. Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, on munit $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$ de la structure de $\mathcal{E}^\dagger_{\eta_0}$-module à gauche.

Définition 4.5.5. Soit M un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-module. On définit le *microlocalisé* de M par

$$\Phi^{(0,\infty')}(M) = \widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}} M,$$

où $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$ est muni de sa structure de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-module à droite. On considère $\Phi^{(0,\infty')}(M)$ comme $\widehat{\Theta}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-module par multiplication à gauche ; en particulier on le regardera comme $\mathcal{E}^\dagger_{\eta_0}$-module.

4.5.6. Soit M un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-module. On pose $\vartheta\colon \Phi^{(0,\infty')}(M) \to \Phi^{(0,\infty')}(M)$ l'homomorphisme induit par la multiplication à gauche par $-\frac{1}{\pi}\xi^2 T$. L'application ϑ est une $\frac{d}{dT}$-dérivation de $\Phi^{(0,\infty')}(M)$. En effet, ϑ est clairement additif et pour tout $\alpha \in \mathcal{E}^\dagger_{\eta_0}$, $m \in \Phi^{(0,\infty')}(M)$, on a par (4.5.3)-(2)

$$\vartheta\big(\phi^{(0,\infty')}(\alpha)m\big) = \phi^{(0,\infty')}\Big(\frac{d}{dT}\alpha\Big)m + \phi^{(0,\infty')}(\alpha)\vartheta(m).$$

On peut définir ainsi un module à connexion sur $\mathcal{E}^\dagger$:

$$\begin{aligned} \nabla\colon \mathcal{E}^\dagger \otimes_{\mathcal{E}^\dagger_{\eta_0}} \Phi^{(0,\infty')}(M) \quad &\longrightarrow \quad \Big(\mathcal{E}^\dagger \otimes_{\mathcal{E}^\dagger_{\eta_0}} \Phi^{(0,\infty')}(M)\Big) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{E}^\dagger/C} \\ \alpha \otimes m \quad &\longmapsto \quad \frac{d}{dT}\alpha \otimes m \otimes dT + \alpha\vartheta(m) \otimes dT \end{aligned}$$

4.5.7. Comme la structure de l'anneau des parties principales est la même que dans le cas lisse (4.2.4), le théorème de descente [**Bert00**, 4.5.4 et 4.5.6] s'applique aux $F\mathcal{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-modules (resp. $F\mathcal{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)$-modules) de présentation finie. Donc pour tout $F\mathcal{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)$-module de présentation finie M, il existe un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)$-module $M^{(m_0)}$ tel que

$$M \cong \mathcal{D}^\dagger_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)} M^{(m_0)},$$

où m_0 est l'entier défini dans (4.3.1). De plus, comme me l'a signalé P.Berthelot, on peut toujours descendre au niveau $m=0$, en se ramenant au cas où Λ est non-ramifié. En effet, soient $C_0 = \mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k)$, $\mathscr{S}_0 = \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{C_0}[\![T]\!])$, u une uniformisante de Λ, racine d'un polynôme d'Eisenstein E à coefficients dans $\mathrm{W}(\mathbb{F})$. Comme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0) = \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathscr{S}_0,\mathbb{Q}}(0) \otimes_{C_0} C$, la catégorie des $F\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)$-modules de présentation finie (resp. holonomes) est équivalente à celle des $F\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathscr{S}_0,\mathbb{Q}}(0)$-modules de présentation finie (resp. holonomes) munis d'un endomorphisme Π tel que $E(\Pi)=0$. On considère le couple $(M^{(m_0)}, \Pi)$ correspondant au $\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)$-module $M^{(m_0)}$ par cette équivalence, et on lui applique le théorème de descente *loc. cit.*.

Conjecture 4.5.8 (Phase Stationnaire locale). *Soit $M \in \Phi M(\mathcal{E}^{\dagger})$. On note encore M le $F\mathcal{D}^{\dagger}(0)$-module holonome associé à M par* (4.3.4)*. Soit $M^{(0)}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)$-module holonome tel que $M \cong \mathcal{D}^{\dagger}(0) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)} M^{(0)}$, cf.* (4.5.7)*. Alors, on a*

$$\dim_{\mathcal{E}^{\dagger}} \left(\mathcal{E}^{\dagger} \otimes_{\mathcal{E}^{\dagger}_{\eta_0}} \Phi^{(0,\infty')}\big(j_+ M^{(0)}\big) \right) = \mathrm{rg}(M) + \mathrm{irr}(M)$$

où on a noté $j_+ M^{(0)}$, le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$-module $M^{(0)}$ obtenu par restriction des scalaires de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}(0)$ à $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathscr{S},\mathbb{Q}}$, et $\mathrm{irr}(M)$ désigne l'irrégularité de M (3.6.6.1).

CHAPITRE 5

Formule du produit

5.1. Rappels sur les F-isocristaux

5.1.1. Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, Λ une extension finie totalement ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, $C = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{W}(k)$ qui est un corps de valuation discrète complet de corps résiduel k. On note $\mathcal{O}_C$ (resp. $\mathfrak{m}_C$) l'anneau des entiers de C (resp. l'idéal maximal de $\mathcal{O}_C$). On munit C de l'endomorphisme $\sigma_C = \mathrm{Id}_\Lambda \otimes \sigma$, où σ est l'endomorphisme de Frobenius de $\mathrm{W}(k)$. À partir de la section 5.2, on supposera k fini de cardinal $q = p^f$.

5.1.2. Soient X un k-schéma séparé de type fini, Z un sous-schéma fermé, U l'ouvert complémentaire de Z dans X qu'on suppose non vide. On note $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$ la catégorie des *F-isocristaux sur $U|C$ surconvergents le long de Z*, cf. [**Bert96a**, 2.3.2]. Si $U = X$, on note cette catégorie $F\text{-Isoc}(X|C)$, et on l'appelle la catégorie des *F-isocristaux convergents sur $X|C$*.

Soient $f\colon Y \to X$ un morphisme séparé de type fini, $V = f^{-1}(U)$. On a un foncteur image inverse, (cf. *loc. cit.* (2.3.2-iv))

$$f^*\colon F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C) \longrightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(V, Y|C)$$

Si f est une immersion ouverte on notera $M_{|Y} \in F\text{-Isoc}^\dagger(V, Y|C)$ l'image d'un objet M de $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$ par f^*.

Exemple 5.1.3. La catégorie $F\text{-Isoc}(\operatorname{Spec} k|C)$ est équivalente à la catégorie $\Phi M(C)$, cf. [**Bert96a**, 2.5.8].

5.1.4. Dans la suite de ce chapitre, on supposera désormais que X soit une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur k. On note η son point générique, $\bar\eta$ un point géométrique au dessus de η. On désigne par $|X|$ l'ensemble des points fermés de X. Pour U un ouvert non vide de X et Z un fermé de X tel que $X = V \cup Z$, on appelle *F-isocristal surconvergent sur $U|C$*, tout F-isocristal sur $U|C$ surconvergent le long de Z. Pour un tel F-isocristal M, on note $H^i_{\mathrm{rig}}(U, M)$ (resp. $H^i_{\mathrm{rig},c}(U, M)$) la cohomologie rigide (resp. rigide à support propre) de M.

Théorème 5.1.5. [**Cr98**, 9.5] *Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$ et $M^\vee$ son dual. Alors les C-espaces vectoriels $H^i_{\mathrm{rig}}(U, M)$, $H^i_{\mathrm{rig},c}(U, M)$ sont de dimension finie, nuls pour $i \neq 0, 1, 2$, et on a un accouplement parfait canonique*

$$H^i_{\mathrm{rig},c}(U, M) \times H^{2-i}_{\mathrm{rig}}(U, M^\vee) \longrightarrow C(-1)$$

de φ-modules sur C.

5.1.6. Soit x un point fermé de X. On pose $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local de X en x, $\mathfrak{m}_x$ son idéal maximal, $k(x)$ son corps résiduel, $i_x\colon \operatorname{Spec} k(x) \to X$ l'injection canonique. On note $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ le séparé complété de $\mathcal{O}_{X,x}$ pour la topologie $\mathfrak{m}_x$-adique, K_x le corps des fractions de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, $\widehat{X}_{(x)} = \operatorname{Spec} \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, $\eta_x = \operatorname{Spec}(K_x)$ le point générique de $\widehat{X}_{(x)}$, $\overline{\eta}_x$ (resp. $\bar{x}$) un point géométrique au dessus de η_x (resp. x). On fixe une uniformisante de $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$, ce qui détermine un isomorphisme $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong k(x)[\![t]\!]$. On note $k(\eta)$ le corps des fonctions méromorphes sur X.

On pose $C(x) = C \otimes_{\mathrm{W}(k)} \mathrm{W}(k(x))$, $\mathcal{R}(\eta_x)$ (resp. $\mathcal{E}^\dagger(\eta_x)$) l'anneau de Robba (resp. l'anneaux des fonctions surcovergentes bornées) relativement à K_x, cf. (3.1.3) et (3.1.4). On note $F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_x|C(x))$ la catégorie de (φ,∇)-modules sur $\mathcal{E}^\dagger(\eta_x)$ et $F\text{-Isoc}^\dagger_{an}(\eta_x|C(x))$ la catégorie de (φ,∇)-modules sur $\mathcal{R}(\eta_x)$.

5.1.7. Soient U un ouvert non vide de X, x un point fermé de U. On a un foncteur

$$i_x^*\colon F\text{-Isoc}^\dagger(U,X|C) \longrightarrow F\text{-Isoc}(\operatorname{Spec} k(x)|C) \cong \Phi M\big(C(x)\big)$$

On note (M_x,φ_x) l'image par ce foncteur d'un objet M de $F\text{-Isoc}^\dagger(U,X|C)$.

5.1.8. Soient U un ouvert non vide de X, x un point fermé de X. On pose $U\backslash\{x\} = U \cap (X\backslash\{x\})$, de sorte qu'on ait le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \eta_x \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U\backslash\{x\} \arrow[d] \\ \widehat{X}_{(x)} \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

On a un foncteur de localisation [**Cr98**, 7.2]

$$F\text{-Isoc}^\dagger(U|C) \longrightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(\eta_x|C) \tag{5.1.8.1}$$

On en déduit, par composition avec le foncteur d'analityfication (3.3.23), un foncteur de localisation

$$F\text{-Isoc}^\dagger(U|C) \longrightarrow F\text{-Isoc}^\dagger_{an}(\eta_x|C) \tag{5.1.8.2}$$

On note $(M_{\eta_x},\varphi_{\eta_x},\nabla_x)$ (resp. $(M^\dagger_{\eta_x},\varphi_{\eta_x},\nabla_x)$) l'image d'un objet M de $F\text{-Isoc}^\dagger(U|C)$ par (5.1.8.2) (resp. (5.1.8.1)).

Définition 5.1.9. [**Cr87**, 1.9] Soient U un ouvert non vide de X, M un F-isocristal surconvergent sur $U|C$. On dit que M est *unité* si pour tout morphisme $i\colon \operatorname{Spec}\Omega \to U$, où Ω est un corps parfait, le φ-module i^*M est unité. On note $F\text{-Isoc}^\dagger(U,X|C)^u$ la catégorie des F-isocristaux surconvergents unité sur $U|C$.

5.1.10. Soient U un ouvert non vide de X, V un Λ-espace vectoriel de dimension finie, $\theta\colon \pi_1(U,\bar\eta) \to \operatorname{Aut}_\Lambda\big(V\big)$ une représentation continue de $\pi_1(U,\bar\eta)$, et x un point de $X\backslash U$. On dit que θ a *monodromie géométrique finie en* x si le composé

$$\pi_1(\eta_x,\bar\eta_x) \longrightarrow \pi_1(U,\bar\eta_x) \cong \pi_1(U,\bar\eta) \xrightarrow{\theta} \operatorname{Aut}_\Lambda\big(V\big)$$

a monodromie géométrique finie, c'est-à-dire que sa restriction à l'inertie de $\pi(\eta_x,\bar\eta_x)$ a une image finie. On dit que θ a *monodromie géométrique locale finie* si pour tout point

x de $X\backslash U$, θ a monodromie géométrique finie en x. On note $\mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_{\Lambda}(\pi_1(U,\bar\eta))$ la catégorie des Λ-représentations continues de dimension finie de $\pi_1(U,\bar\eta)$, à monodromie géométrique locale finie.

Théorème 5.1.11. [**Tsu98a**, 7.2.2-7.2.3] *Soit U un ouvert non vide de X. Il existe une équivalence de catégories canonique*

$$G\colon \mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_{\Lambda}\big(\pi_1(U,\bar\eta)\big) \longrightarrow F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger}(U|C)^u$$

telle que pour tout $x\in X\backslash U$, on a un diagramme commutatif de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_{\Lambda}\big(\pi_1(U,\bar\eta)\big) \arrow[r, "G"] \arrow[d] & F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger}(U|C)^u \arrow[d] \\ \mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_{\Lambda}\big(\pi_1(\eta_x,\bar\eta_x)\big) \arrow[r, "D_x^{\dagger}"] & F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger}\big(\eta_x|C(x)\big)^u \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont la restriction et la localisation respectivement, et $D_x^{\dagger}$ est l'équivalence de (3.4.3) *relativement au corps K_x.*

Définition 5.1.12. Soient U un ouvert non vide de X, $M\in F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger}(U|C)^u$. On dit que M est *fini* si la représentation de $\pi_1(U,\bar\eta)$ associée à M par le théorème 5.1.11 se factorise par un quotient fini.

5.1.13. Soient U un ouvert non-vide de X, $f\colon V\to U$ un morphisme étale fini. On note Y la compactification lisse de V, $\bar f\colon Y\to X$ la compactification de f, de sorte qu'on ait le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\bar f"] \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

On a un foncteur exact [**Cr98**, 8.3]

(5.1.13.1) $$f_*\colon F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger}(V,Y|C) \longrightarrow F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger}(U,X|C)$$

On note η_Y le point générique de Y, $\bar\eta_Y$ un point géométrique générique de Y. Soient $M\in F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger}(V,Y|C)^u$ et $W\in \mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_{\Lambda}\big(\pi_1(V,\bar\eta_Y)\big)$, tels que $M=G(W)$. En vertu de [**Cr00**, 4.2], on a

(5.1.13.2) $$f_*M = G\Big(\mathrm{Ind}_{\pi_1(V,\bar\eta_Y)}^{\pi_1(U,\bar\eta_Y)} W\Big)$$

5.2. Rappels sur les fonctions L des F-isocristaux

5.2.1. On suppose désormais k fini de cardinal $q=p^f$. Soit X une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur k. Pour tout $x\in|X|$, on note $\deg x = |k(x):k|$ son degré.

Lemme 5.2.2. [**Et04**, Lemma 3.1] *Soient U un ouvert non vide de X, M un F-isocristal surconvergent sur $U|C$. On a* $\det_{C(x)}\big(1-t\varphi_x^{f\deg x}|M_x\big)\in 1+tC[\![t]\!]$.

DÉFINITION 5.2.3. [**Kat72**, 6.0][**EtLS93**, 2.3] Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$. On pose

$$L(M,t) = \prod_{x \in |U|} \det_{C(x)}(1 - t^{\deg x} \varphi_x^{f \deg x} | M_x)^{-1}.$$

Ce produit converge formellement dans $1 + tC[\![t]\!]$ car il n'y a qu'on nombre fini de points fermés de U de degré donné.

REMARQUE 5.2.4. On peut considérer M_x comme un C-espace vectoriel de dimension finie. On calcule

$$\det_C(1 - t^{\deg x} \varphi_x^{f \deg x} | M_x) = N_{C(x)/C}\big(\det_{C(x)}(1 - t^{\deg x} \varphi_x^{f \deg x} | M_x)\big)$$

qui est égal à $\det_{C(x)}(1 - t^{\deg x} \varphi_x^{f \deg x} | M_x)^{\deg x}$ par (5.2.2). Donc par abus de langage on trouve dans la littérature l'expression

$$L(M,t) = \prod_{x \in |U|} \det_C(1 - t^{\deg x} \varphi_x^{f \deg x} | M_x)^{-\frac{1}{\deg x}}.$$

THÉORÈME 5.2.5 (Interprétation cohomologique). [**EtLS93**, Th. 6.3 I] *Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$. On a*

$$L(M,t) = \prod_i \det_C(1 - t\,\mathrm{F}^* \,| H^i_{\mathrm{rig},c}(U, M))^{(-1)^{i+1}}$$

COROLLAIRE 5.2.6 (Équation fonctionnelle). *Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)$, $M^\vee$ son dual. On a*

$$L(M,t) = \varepsilon(U,M) t^{-\chi_c(U,M)} L_\circ(M^\vee, q^{-1}t^{-1}),$$

où

$$\varepsilon(U,M) = \det_C\big(-\mathrm{F}^*, H^*_{\mathrm{rig},c}(U,M)\big)^{-1} = \prod_{i=0}^{2} \det_C\big(-\mathrm{F}^* \,| H^i_{\mathrm{rig},c}(U,M)\big)^{(-1)^{i+1}},$$

$$\chi_c(U,M) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim_C H^i_{\mathrm{rig},c}(U,M),$$

$$L_\circ(M,t) = \prod_{i=0}^{2} \det_C(1 - t\,\mathrm{F}^* \,| H^i_{\mathrm{rig}}(U,M))^{(-1)^{i+1}}.$$

DÉM. Soit $h_i = \dim H^i_{\mathrm{rig},c}(U,M) = \dim H^{2-i}_{\mathrm{rig}}(U, M^\vee)$. Appliquant un lemme classique d'algèbre linéaire [**Har77**, 4.3 Appendix C] à l'accouplement du théorème 5.1.5, on obtient, pour tout i,

$$\det_C(1 - t\,\mathrm{F}^* \,| H^i_{\mathrm{rig},c}(U,M)) = t^{h_i} \det_C(-\mathrm{F}^* \,| H^i_{\mathrm{rig},c}(U,M)) \det_C(1 - q^{-1}t^{-1}\,\mathrm{F}^* \,| H^{2-i}_{\mathrm{rig}}(U, M^\vee)).$$

En passant au produit alternée sur i, on obtient

$$L(M,t)=t^{-\chi_c(U,M)}\prod_{i=0}^{2}\det_C(-\,\mathrm{F}^*\,|H^i_{\mathrm{rig},c}(U,M))^{(-1)^{i+1}}L_\circ(M^\vee,q^{-1}t^{-1}).$$

□

5.3. Formule du produit : conjecture

5.3.1. Soient k un corps fini et X une courbe projective, lisse et géométriquement connexe sur k. On note g le genre de X.

5.3.2. Soient U un ouvert non vide de X, $M\in F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U,X|C)$, $x\in|X|$. On note I_{η_x} le groupe d'inertie de $\pi_1(\eta_x,\bar\eta_x)$ et F_x^* le Frobenius géométrique de $\pi_1(x,\bar x)$. Pour alléger les notations, on désignera le triplet $(M_{\eta_x},\varphi_{\eta_x},\nabla_x)$ simplement par M_{η_x}, cf. (5.1.8.2). On pose

$$\mathrm{WD}(M_{\eta_x})=(S(M_{\eta_x}),\rho_{\eta_x},N_{\eta_x})$$

la C^{nr}-représentation de Weil-Deligne associée à M_{η_x}, cf. (3.6.2). On pose (3.6.6.3)

$$t_M(x)=\mathrm{tr}_{C^{\mathrm{nr}}}\big(\rho_{\eta_x}(\mathrm{F}_x^*)|(\mathrm{Ker}\,N_{\eta_x})^{I_{\eta_x}}\big)=\mathrm{tr}_{C(x)}\big(-\varphi_{\eta_x}^{f\deg x}|M_{\eta_x}^{\nabla_x}\big)\tag{5.3.2.1}$$

$$\det_M(x)=\det_{C^{\mathrm{nr}}}\big(\rho_{\eta_x}(\mathrm{F}_x^*)|(\mathrm{Ker}\,N_{\eta_x})^{I_{\eta_x}}\big)=\det_{C(x)}\big(-\varphi_{\eta_x}^{f\deg x}|M_{\eta_x}^{\nabla_x}\big).\tag{5.3.2.2}$$

LEMME 5.3.3. *Soient U un ouvert non vide de X, $M\in F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U|C)$ et $x\in|U|$. Alors :*

(1) *M_{η_x} est $\mathcal{R}(\eta_x)$-soluble (3.3.9) et $M_{\eta_x}^{\nabla_x}=M_x$.*

(2) *La C^{nr}-représentation de Weil-deligne $\mathrm{WD}(M_{\eta_x})$ de K_x a monodromie géométrique triviale, i.e. $N_{\eta_x}=0$ et $\rho_{\eta_x}\colon\pi_1(\eta_x,\overline{\eta}_x)\to\mathrm{Aut}_{C^{\mathrm{nr}}}\big(S(M_{\eta_x})\big)$ est non-ramifiée.*

(3) *$t_M(x)$ et $\det_M(x)$ appartiennent à C.*

DÉM. Comme M est convergent sur U, pour tout $x\in|U|$, le (φ,∇)-module M_{η_x} est $\mathcal{R}(\eta_x)$-soluble (par [**Kat72**, 3.1]), donc $M_{\eta_x}^{\nabla_x}=M_x$. L'assertion (2) résulte de (1) et l'assertion (3) s'en déduit par (5.2.2). □

5.3.4. Supposons désormais que C^{nr} contienne une racine primitive p-ième de l'unité. Le choix d'une telle racine ξ détermine l'isomorphisme $\psi_{\mathbb{F}_p}\colon\mathbb{F}_p\to\mu_p(C^{\mathrm{nr}})$ envoyant 1 sur ξ. On note $\Omega^1_{k(\eta)/k}$ le module des formes différentielles méromorphes sur X. Pour tout $\omega\in\Omega^1_{k(\eta)/k}$ différent de zéro et $x\in|X|$, on note $\omega_x\in\Omega^1_{\eta_x/k(x)}$ le germe de ω en x, et par $\psi(\omega_x)\colon K_x\to C^{\mathrm{nr}*}$ le caractère additif donné par $\alpha\mapsto\psi_{\mathbb{F}_p}\big(\mathrm{Tr}_{k(x)/\mathbb{F}_p}(\mathrm{Res}(\alpha\omega_x))\big)$, cf. (1.1.11). On note μ_x l'unique mesure de Haar sur K_x telle que $\mu_x(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x})=1$. Si U est un ouvert non-vide de X et $M\in F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U,X|C)$, on note simplement $\varepsilon(M_{\eta_x},\omega_x)$ au lieu de $\varepsilon(M_{\eta_x},\psi(\omega_x),\mu_x)$, et de même pour ε_0, cf. (3.6.4).

5.3.5. On note $\mathbb{A}_{k(\eta)}$ l'anneau des adèles de $k(\eta)$. Le choix de la différentielle ω détermine un caractère additif non-trivial $\psi(\omega)\colon \mathbb{A}_{k(\eta)}/k(\eta) \to C^{\mathrm{nr}*}$, tel que pour tout $x \in |X|$, le composé de $\psi(\omega)$ et $K_x \hookrightarrow \mathbb{A}_{k(\eta)}/k(\eta)$ soit égal à $\psi(\omega_x)$.

Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$, $\theta\colon \pi_1(U, \bar\eta) \to \mathrm{Aut}_\Lambda(V)$ la représentation à monodromie géométrique locale finie associée à M par (5.1.11). On considère l'homomorphisme $\pi_1(\eta, \overline{\eta}) \to \pi(U, \overline{\eta}) \to \mathrm{Aut}_\Lambda(V)$. Si $\mathrm{rg}(M) = 1$, alors cet homomorphisme se factorise par $\pi(\eta, \overline{\eta})^{\mathrm{ab}} \to \Lambda^*$. Par composition avec l'homomorphisme de réciprocité globale $\mathbb{A}^*_{k(\eta)}/k(\eta)^* \to \pi_1(\eta, \overline{\eta})^{\mathrm{ab}}$, on obtient un homomorphisme $\mathbb{A}^*_{k(\eta)}/k(\eta)^* \to \Lambda^*$, qu'on note $\chi(M)$ et qu'on appelle *quasi-caractère global associé à* M.

5.3.6. Soient U un ouvert non-vide de X et $M \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U, X|C)$. On définit un homomorphisme

$$\mathrm{d}(M)\colon k(\eta)^* \longrightarrow C^{\mathrm{nr}*}$$

de la façon suivante. Soient $x \in |X|$, $\alpha \in k(\eta)^*$. On note α_x l'image de α par l'homomorphisme composé $k(\eta)^* \hookrightarrow K_x^* \to W_{K_x}^{\mathrm{ab}}$, où la seconde flèche est l'isomomorphisme de réciprocité locale. Alors le produit

$$\mathrm{d}(M)(\alpha) = \prod_{x \in |X|} \det \rho_{\eta_x}(\alpha_x) \in C^{\mathrm{nr}*} \tag{5.3.6.1}$$

est bien défini. Il est clair que $d(M)$ est un homomorphisme.

Proposition 5.3.7. *Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U, X|C)$.*
(1) *Si* $\det M$ *est unité, alors* $\mathrm{d}(M) = 1$ *;*
(2) *Si* $\mathrm{d}(M) = 1$, *alors, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{d}(M(n)) = 1$.

Dém. (1) Pour tout $\alpha \in k(\eta)$, on a $\mathrm{d}(M)(\alpha) = \chi(\det(M))(\alpha) = 1$, cf. (5.3.5). (2) Pour tout $\alpha \in k(\eta)$, on a $\mathrm{d}(M(n))(\alpha) = \prod_{x \in |X|} \mathrm{d}(M)(\alpha) q^{-n\,\mathrm{rg}(M)\mathrm{v}_x(\alpha)} = 1$ car $\sum_{x \in |X|} \deg(x)\mathrm{v}_x(\alpha) = 0$ et $d(M)(\alpha) = 1$. □

5.3.8. Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U, X|C)$. Si $\mathrm{d}(M) = 1$, on définit un quasi-caractère global

$$\widetilde{\chi}(\det M)\colon \mathbb{A}^*_{k(\eta)}/k(\eta)^* \longrightarrow C^{\mathrm{nr}*}$$

en posant pour tout $z \in \mathbb{A}^*_{k(\eta)}$, $\widetilde{\chi}(\det M)(z) = \prod_{x \in |X|} \det \rho_{\eta_x}(z_x)$. On appelle $\widetilde{\chi}(\det M)$ le *caractère central* de M.

Si $\det M$ est unité, $\mathrm{d}(M) = 1$ et $\widetilde{\chi}(\det M) = \chi(\det M)$.

L'auteur se demande s'il existe des F-isocristaux M tels que $\mathrm{d}(M) \neq 1$.

Conjecture 5.3.9. *Soient U un ouvert non vide de X, M un objet de $F\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U, X|C)$ et ω un élément non-nul de $\Omega^1_{k(\eta)/k}$. Si $d(M) = 1$, alors on a*

$$\begin{aligned} \det{}_C\big(-\mathrm{F}^* \,|H^*_{\mathrm{rig},c}(U, M)\big)^{-1} &= \\ &= q^{(g-1)\,\mathrm{rg}(M)} \prod_{x \in |U|} \det{}_M(x)^{\mathrm{v}_x(\omega)} \prod_{x \in X \setminus U} \Big(q^{-\deg(x)\mathrm{v}_x(\omega)\,\mathrm{rg}(M)} \varepsilon_0(M_{\eta_x}, \omega_x)\Big). \end{aligned} \tag{5.3.9.1}$$

REMARQUE 5.3.10. (1) Pour tout ω une 1-forme différentielle méromorphe non nulle sur X, on a $\sum_{x\in|X|}\deg(x)\mathrm{v}_x(\omega)=2g-2$. Donc le deuxième membre de (5.3.9.1) est égale à

$$q^{(1-g)\operatorname{rg}(M)}\prod_{x\in|U|}\left(q^{\deg(x)\mathrm{v}_x(\omega)\operatorname{rg}(M)}\det{}_M(x)^{\mathrm{v}_x(\omega)}\right)\prod_{x\in X\backslash U}\varepsilon_0(M_{\eta_x},\omega_x). \tag{5.3.10.1}$$

(2) Le deuxième membre de (5.3.9.1) ne dépend pas du choix de ω. En effet, si on remplace ω par $\alpha\omega$, avec $\alpha\in k(\eta)^*$, alors en appliquant 1.3.4-(1), on voit que le deuxième membre est multiplié par $d(M)(\alpha)$, qui est égal à 1 par hypothèse.

(3) Si la conjecture (5.3.9) est vérifiée pour $M\in F\text{-Isoc}^\dagger(U,X|C)$, alors elle l'est aussi pour $M(n)$. En effet, par 1.3.4-(2), cela résulte de la formule de Grothendieck-Ogg-Chafarevitch :

$$\chi_c(U,M)=\chi_c(U)\operatorname{rg}(M)-\sum_{x\in Z}\operatorname{irr}(M_{\eta_x}).$$

(4) La conjecture (5.3.9) est reliée à la question [**Cr00**, Remark - 4.7].

5.3.11. Soient U un ouvert non vide de X, $M\in F\text{-Isoc}^\dagger(U,X|C)$. On pose

$$\mathrm{L}_{\mathrm{WD}}(X,M,t)=\prod_{x\in|X|}L(M_{\eta_x},t^{\deg x}) \tag{5.3.11.1}$$

Ce produit converge formellement dans $1+tC^{\mathrm{nr}}[\![t]\!]$ car X est de type fini et

$$L(M_{\eta_x},t^{\deg x})=L(\mathrm{WD}(M_{\eta_x}),t^{\deg x})=\det{}_{C(x)}(1-t^{\deg(x)}\varphi^{f\deg(x)},M^{\nabla}_{\eta_x})$$

appartient à $1+t^{\deg(x)}C(x)[\![t]\!]$.

THÉORÈME 5.3.12 (Tate). *Soient U un ouvert non-vide de X, $M\in F\text{-Isoc}^\dagger(U,X|C)^u$ de rang 1, et $\omega\in\Omega^1_{k(\eta)/k}\backslash\{0\}$. Alors*

$$\mathrm{L}_{\mathrm{WD}}(X,M,t)=q^{(1-g)}t^{-\chi_c(X,M)}\prod_{x\in|X|}\varepsilon(M_{\eta_x},\omega_x)\,\mathrm{L}_{\mathrm{WD}}(X,M^\vee,q^{-1}t^{-1})$$

DÉM. Soient $\psi(\omega)\colon\mathbb{A}_{k(\eta)}/k(\eta)\to C^{\mathrm{nr}*}$ le caractère additif non-trivial associé à ω, et $\chi(M)\colon\mathbb{A}^*_{k(\eta)}/k(\eta)^*\to\Lambda^*$ le quasi-caractère globale associée à M, cf. (5.3.5). Par la définition de $\mathrm{L}_{\mathrm{WD}}(X,M,t)$ et $\varepsilon(M_{\eta_x},\omega_x)$, l'équation fonctionnelle recherchée est l'équation fonctionnelle globale de Tate relative à $\chi(M)$ et $\psi(\omega)$, cf. [**Lau87**, (3.1.2.4)-(3.1.3.5)]. □

LEMME 5.3.13. *Soient U un ouvert non vide de X, $M\in F\text{-Isoc}^\dagger(U,X|C)^u$ de rang 1. Supposons que $X\backslash U$ soit non vide et, pour tout x dans $X\backslash U$, M_{η_x} ne soit pas $\mathcal{R}(\eta_x)$-soluble. Alors $H^0_{\mathrm{rig}}(U,M)=0=H^2_{\mathrm{rig},c}(U,M)$ et $H^1_{\mathrm{rig},c}(U,M)\cong H^1_{\mathrm{rig}}(U,M)$. En particulier $L_\circ(U,M,t)=L(U,M,t)=\det_C(1-t\,\mathrm{F}^*\,|H^1_{\mathrm{rig}}(U,M))$.*

DÉM. Comme U est une courbe affine, on a par (5.2.5)

$$L(U,M,t)=\det{}_C(1-t\,\mathrm{F}^*\,|H^1_{\mathrm{rig},c}(U,M))\det{}_C(1-t\,\mathrm{F}^*\,|H^2_{\mathrm{rig},c}(U,M))^{-1}$$

et par définition

$$L_\circ(U,M,t)=\det{}_C(1-t\,\mathrm{F}^*\,|H^1_{\mathrm{rig}}(U,M))\det{}_C(1-t\,\mathrm{F}^*\,|H^0_{\mathrm{rig}}(U,M))^{-1}.$$

On considère la suite exacte [**Cr00**, (3.1.4)],

$$0 \to H^0_{\mathrm{rig}}(U,M) \to H^0_{\mathrm{rig}}(X\backslash U, Rj_*M) \to H^1_{\mathrm{rig},c}(U,M) \to \\ \to H^1_{\mathrm{rig}}(U,M) \to H^1_{\mathrm{rig}}(X\backslash U, Rj_*M) \to H^2_{\mathrm{rig},c}(U,M) \to 0,$$

où par définition $H^i_{\mathrm{rig}}(X\backslash U, Rj_*M) = \oplus_{x\in X\backslash U} H^i_{\mathrm{rig}}(x, Rj_*M)$, $H^0_{\mathrm{rig}}(x, Rj_*M) = \mathrm{Ker}\,\nabla_x$ et $H^1_{\mathrm{rig}}(x, Rj_*M) = \mathrm{Coker}\,\nabla_x$. Comme M est unité, on a [**Cr00**, (3.2.10)]

$$\dim_C H^0_{\mathrm{rig}}(x, Rj_*M) = \dim_C H^1_{\mathrm{rig}}(x, Rj_*M)$$

Par hypothèse, pour tout $x \in X\backslash U$, M_{η_x} est non-trivial de rang 1. Donc $\mathrm{Ker}\,\nabla_x = 0$. $\square$

LEMME 5.3.14. *Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$. Si pour un $x \in X\backslash U$, M_{η_x} est $\mathcal{R}(\eta_x)$-soluble, alors il existe $\widetilde{M} \in F\text{-Isoc}^\dagger(U\cup\{x\}, X|C)^u$ tel que $\widetilde{M}_{|U} = M$.*

DÉM. On peut supposer $X\backslash U$ non-vide. Soient $x \in X\backslash U$, $Y = U\cup\{x\}$ et

$$\theta\colon \pi_1(U,\bar\eta) \to \mathrm{Aut}_\Lambda\big(V\big)$$

la représentation associée à M par (5.1.11). On a un homomorphisme surjectif

$$\mathrm{Gal}(k(\bar\eta)/k(\eta)) \to \pi_1(U,\bar\eta)$$

dont le noyau est le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(k(\bar\eta)/k(\eta))$ correspondant à la sous-extension de $k(\bar\eta)/k(\eta)$ maximale non-ramifiée sur U, cf. [**SGA1**, 8.2]. Donc on déduit du diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \eta_x \arrow[r, "j_x"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[d] \\ Y_{(x)} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

le diagramme cocartésien,

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\eta_x,\bar\eta_x) \arrow[r, "\pi_1(j_x)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \pi_1(U,\bar\eta_x) \arrow[d] \\ \pi_1(x,\bar x) \arrow[r] & \pi_1(Y,\bar\eta_x) \end{tikzcd}$$

Par hypothèse M_{η_x} est $\mathcal{R}(\eta_x)$-soluble et unité, donc $M^\dagger_{\eta_x}$ est $\mathcal{E}^\dagger(\eta_x)$-soluble et la représentation $\theta\circ\pi_1(j_x)$ se factorise par $\pi_1(x,\bar x)$, cf. (3.4.6). Comme le carré est cocartésien en déduit une représentation continue $\widetilde{\theta}\colon \pi_1(Y,\bar\eta_x) \to \mathrm{Aut}_\Lambda\big(V\big)$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi_1(\eta_x,\bar\eta_x) \arrow[r, "\pi_1(j_x)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \pi_1(U,\bar\eta_x) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & \mathrm{Aut}_\Lambda\big(V\big) \\ \pi_1(x,\bar x) \arrow[r] & \pi_1(Y,\bar\eta_x) \arrow[ur, "\widetilde{\theta}"] & \end{tikzcd}$$

Le F-isocristal $\widetilde{M} \in F\text{-Isoc}^\dagger(Y, X|C)^u$, correspondant à $\widetilde{\theta}\colon \pi_1(Y, \bar{\eta}_x) \to \mathrm{Aut}_\Lambda(V)$ par (5.1.11), répond à la question. □

THÉORÈME 5.3.15. *Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$ de rang 1. Alors M satisfait la conjecture* (5.3.9).

DÉM. Comme M est unité, quitte à agrandir U, on peut supposer par (5.3.14) que pour tout $x \in X\backslash U$, M_{η_x} ne soit pas $\mathcal{R}(\eta_x)$-soluble, et puisque M est de rang 1, $M_{\eta_x}^{\nabla_x} = 0$. On en déduit facilement que pour tout $x \in X\backslash U$, on a $(M_{\eta_x}^\vee)^\nabla = 0$. D'où $\mathrm{L_{WD}}(X, M, t) = L(X, M, t)$ et de même pour $M^\vee$. L'équation fonctionnelle 5.2.6 s'écrit

$$L(M,t) = \det_C(-\mathrm{F}^* \,|H^*_{\mathrm{rig},c}(U,M))^{-1} t^{-\chi_c(U,M)} L(M^\vee, q^{-1}t^{-1}).$$

En effet, il n'y a rien à montrer si $U = X$, et si $U \neq X$, c'est une conséquence de (5.3.13). En comparant avec l'équation fonctionnelle de Tate (5.3.12)

$$\mathrm{L_{WD}}(X, M, t) = q^{(1-g)} t^{-\chi_c(X,M)} \prod_{x\in|X|} \varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x)\, \mathrm{L_{WD}}(X, M^\vee, q^{-1}t^{-1}),$$

on obtient,

$$\det_C(-\mathrm{F}^* \,|H^*_{\mathrm{rig},c}(U,M))^{-1} = q^{(1-g)} \prod_{x\in|X|} \varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x).$$

Pour $x \in X\backslash U$, on a $M_{\eta_x}^{\nabla_x} = 0$, d'où $\varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x) = \varepsilon_0(M_{\eta_x}, \omega_x)$, cf. (3.6.6.4). Pour $x \in |U|$, par (5.3.3) et 1.3.4-(2), on a

$$\begin{aligned}\varepsilon(M_{\eta_x}, \omega_x) &= q^{\deg(x)\mathrm{v}_x(\omega)} \det \rho_{\eta_x}(\mathrm{F}_x^{*\mathrm{v}_x(\omega)}) \\ &= q^{\deg(x)\mathrm{v}_x(\omega)} \det_M(x)^{\mathrm{v}_x(\omega)}\end{aligned}$$

Or $\sum_{x\in|X|} \deg(x)\mathrm{v}_x(\omega) = 2g-2$, ce qui achève la preuve. □

THÉORÈME 5.3.16. *Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$. Si M est fini* (5.1.12)*, alors il satisfait la conjecture* (5.3.9).

DÉM. D'après (5.1.11), on a un isomorphisme canonique de groupes de Grothendieck

$$\mathbf{Gr}\left(F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u\right) \longrightarrow \mathbf{Gr}\left(\mathrm{Rep}_\Lambda^{\mathrm{gf}}(\pi_1(U, \overline{\eta}))\right) \tag{5.3.16.1}$$

La relation (5.3.9.1) est une équation sur le groupe de gauche. En vertu de (5.3.15), elle est vérifiée pour les F-isocristaux de rang 1. On en déduit qu'elle est vérifiée pour $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$ si et seulement si elle est vérifiée pour $[M] - \mathrm{rg}(M)[C]$, où $[C]$ est la classe de l'isocristal trivial. Soient $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$ fini, $\theta\colon \pi_1(U, \overline{\eta}) \to \mathrm{Aut}_\Lambda(W)$ son image par (5.1.11) ; donc θ se factorise par un quotient fini G de $\pi_1(U, \overline{\eta})$. On sait d'après le théorème d'induction de Brauer [**De73**, Prop.1.5], que

$$[W] - (\dim_\Lambda W)[\Lambda] = \sum_{H, W_H} n_{W_H} \mathrm{Ind}_H^G([W_H] - [\Lambda])$$

où H varie parmi les sous-groupes de G, W_H est une représentation de rang 1 de H, n_{W_H} est un entier, et $[\Lambda]$ désigne la classe de la représentation triviale. Transposant cette relation par (5.3.16.1) sur le groupe de Grothendieck de $F\text{-Isoc}^\dagger(U, X|C)^u$, il suffit de montrer l'assertion suivante. Soient

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d, "\bar{f}"] \\ U \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien, avec f étale, Y lisse, $\bar{f}$ fini, et $P \in F\text{-Isoc}^\dagger(V, Y|C)^u$ de rang 1. Alors la conjecture (5.3.9.1) est verifiée pour $f_*([P] - [C]) = [f_*P] - [f_*C]$.

Soient $y \in Y\backslash V$, $x = \bar{f}(y)$, et $W_{\eta_y} \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{gf}}_\Lambda(\pi_1(\eta_y, \bar{\eta}_y))$ tel que $D^\dagger_y(W_{\eta_y}) = P^\dagger_{\eta_y}$. Par (5.1.13) et (5.1.11), on a pour tout $x \in |X|$,

$$(f_*P)^\dagger_{\eta_x} = \bigoplus_{y \mapsto x} D^\dagger_x\Big(\mathrm{Ind}^{\pi_1(\eta_x, \bar{\eta}_y)}_{\pi_1(\eta_y, \bar{\eta}_y)} W_{\eta_y}\Big)$$

On en déduit que :

(i) pour tout $y \in V$,

$$\det{}_{f_*P}(x)^{\mathrm{v}_x(\omega)} = \prod_{y \mapsto x} \det{}_P(y)^{\mathrm{v}_y(f^*\omega)}\,; \tag{5.3.16.2}$$

(ii) pour tout $y \in Y\backslash V$, on a

$$\det{}_{f_*P}(x) = \prod_{y \mapsto x} \det{}_P(y)^{e_{K_y/K_x}}\,;$$

et, par 1.2.5-(2),

$$\varepsilon([(f_*P)_{\eta_x}] - [(f_*C)_{\eta_x}], \omega_x) = \prod_{y \mapsto x} \varepsilon([P_{\eta_y}] - [C_{\eta_y}], (f^*\omega)_y).$$

Comme P est unité, $N_{\eta_x} = 0$; donc $\varepsilon_0(P_{\eta_x}, \omega) = \varepsilon(P_{\eta_x}, \omega) \det_P(x)$. Par (ii) ci-dessus, on a alors

$$\varepsilon_0([(f_*P)_{\eta_x}] - [(f_*C)_{\eta_x}], \omega_x) = \prod_{y \mapsto x} \varepsilon_0([P_{\eta_y}] - [C_{\eta_y}], (f^*\omega)_y). \tag{5.3.16.3}$$

Pour tout i, on a $H^i_{\mathrm{rig},c}(U, f_*P) = H^i_{\mathrm{rig},c}(V, P)$ **[Cr00**, 4.2**]** ; donc

$$\det{}_C\big(-\mathrm{F}^* \,|H^*_{\mathrm{rig},c}(U, [f_*P] - [f_*C])\big)^{-1} = \det{}_C\big(-\mathrm{F}^* \,|H^*_{\mathrm{rig},c}(V, [P] - [C])\big)^{-1}$$

qui est égale, par (5.3.15), à

$$\prod_{y \in |V|} \det{}_P(y)^{\mathrm{v}_y(f^*\omega)} \prod_{y \in Y\backslash V} \varepsilon_0([P_{\eta_y}] - [C], (f^*\omega)_y).$$

Par (5.3.16.2) et (5.3.16.3), ce dernier est égal à

$$\prod_{x \in |U|} \det{}_{f_*P}(x)^{\mathrm{v}_x(\omega)} \prod_{x \in X\backslash U} \varepsilon_0([f_*P_{\eta_x}] - [f_*C], \omega_x)$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

REMARQUE 5.3.17. Soient U un ouvert non vide de X, $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U,X|C)$. On choisit pour tout $x \in X\backslash U$ une uniformisante $u(x)$ de K_x et on écrit $\omega_x = a_x du(x)$, avec $a_x \in K_x$. Par 1.3.4-(1), on a

$$q^{-\deg(x)\mathrm{v}_x(\omega)\,\mathrm{rg}(M)}\varepsilon_0(M_{\eta_x},\omega_x) = \det\rho_{\eta_x}(a_x)\varepsilon_0(M_{\eta_x},du(x)),$$

où $\det\rho_{\eta_x}(a_x)$ désigne la valeur en a_x du caractère de K_x^* associé par la théorie du corps de classes à la représentation de Weil $\det\rho_{\eta_x}$. L'équation (5.3.9.1) est équivalent à (5.3.17.1)

$$\det(-\mathrm{F}^*\,|H^*_{\mathrm{rig},c}(U,M))^{-1} = q^{(g-1)\,\mathrm{rg}(M)}A\prod_{x\in|U|}\det{}_M(x)^{\mathrm{v}_x(\omega)}\prod_{x\in X\backslash U}\varepsilon_0(M_{\eta_x},du(x)),$$

où $A = \prod_{x\in X\backslash U}\det\rho_{\eta_x}(a_x)$.

PROPOSITION 5.3.18. *Soient U un ouvert non-vide de $\mathbb{P}^1_k$, et $M \in F\text{-Isoc}^\dagger(U,\mathbb{P}^1_k|C)$. On pose $Z = \mathbb{P}^1_k\backslash U$, et on suppose que $Z \subset \mathbb{A}^1_k(k)$. On note T la coordonnée de $\mathbb{A}^1_k$. Alors, si la conjecture* (5.3.9) *est vrai, on a*

(5.3.18.1)
$$\det{}_C\big(-\mathrm{F}^*\,|H^*_{\mathrm{rig},c}(U,M)\big)^{-1} = q^{-\mathrm{rg}(M)}\det{}_M(\infty)^{-2}\prod_{x\in Z}\varepsilon_0(M_{\eta_x},dT).$$

DÉM. On choisit $\omega = dT$. Pour tout $x \in |\mathbb{A}^1_k|$, $\mathrm{v}_x(\omega) = 0$ et $\mathrm{v}_\infty(\omega) = -2$. Comme $Z \subset \mathbb{A}^1_k(k)$, $u(x) = T - x$ est une uniformisante en x (par abus on a noté x la coordonnée du point x). Pour tout $x \in Z$, $du(x) = dT$, d'où $a_x = 1$. On termine par la remarque 5.3.17. □

REMARQUE 5.3.19. De façon analogue au cas ℓ-adique, il est probable que (5.3.18.1) soit équivalente à (5.3.9.1).

Bibliographie

[An02a] André, Y. : Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), 285–317.

[An02b] André, Y. : Représentations galoisiennes et opérateurs de Bessel p-adiques, *Ann. Inst. Fourier* **52**(3) (2002), 779–808.

[Berg02] Berger, L. : Représentations p-adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), 219–284.

[Berg04] Berger, L. : An introduction to the theory of p-adic representations, dans :*Geometric Aspects of Dwork's Theory, A volume in memory of Bernard Dwork, Volume* I, Walter de Gruyter, Berlin (2004), 255–292.

[Bert90] Berthelot, P. : Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules, dans *p-adic Analysis*, Lect. Not. Math. 1454 (1990), 80–124.

[Bert96a] Berthelot, P. : Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres. Première partie (version provisoire 1991), Prépublication IRMR 96-03 (1996).

[Bert96b] Berthelot, P. : $\mathcal{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini, *Ann. Sci. de l'E.N.S.* 4ème série **29** (1996), 185–272.

[Bert00] Berthelot, P. : $\mathcal{D}$-modules arithmétiques II. Descente par Frobenius, *Mém. S.M.F.* **81** (2000).

[Bert02] Berthelot, P. : Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules, *Astérisque* **279** (2002), 1–80.

[BeMe90] Berthelot, P. et Messing, W. : Théorie de Dieudonné cristalline III, Dans : *The Grothendieck Festschrift, Volume I,* Prog. Math., Birkhäuser, Basel, (1990), 173–247.

[ChCo98] Cherbonnier, F. et Colmez, P. : Représentations p-adiques surconvergentes, *Invent. Math.* **133** (1998), 581–611.

[Col03] Colmez, P. : Conducteur d'Artin d'une représentation de de Rham, Prépublication (2003), 1–25.

[ChMe01] Christol, G. et Mebkhout, Z. : Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques IV, *Invent. Math.* **143** (2001), 629–672.

[ChMe02] Christol, G. et Mebkhout, Z. : Équations différentielles p-adiqueset coefficients p-adiques sur les courbes, *Astérisque* **279** (2002), 125–183.

[Cr87] Crew, R. : F-isocrystals and p-adic Representations, *Proc. Symp. Pure Math.* tome **46** (1987), 111–138.

[Cr98] Crew, R. : Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve, *Ann. Sci. de l'E.N.S.* *4ème série,* tome **31** n°**6** (1998), 717–763.

[Cr00] Crew, R. : Canonical extensions, irregularities, and the Swan conductor, *Math. Ann.* **316** (2000), 19–37.

[Cr04a] Crew, R. : Arithmetic $\mathcal{D}$-modules on the unit disk, http ://www.math.ufl.edu/~crew/papers.html, incomplete version, 7 Decembre 2004, 1–29.

[Cr04b] Crew, R. : The holonomy of Extraordinary Inverse Image in the One-Dimensional Case, http ://www. math.ufl.edu/~crew/papers.html, 17 Decembre 2004, 1–9.

[Cr04b'] Crew, R. : Arithmetic $\mathcal{D}$-modules on formal curve, http ://www.math.ufl.edu/~crew/papers.html, 27 Septembre 2005, 1–10.

[De73] Deligne, P. : Les constantes locales des équations fonctionnelles des fonctions L, in : *Modular fonctions of one variable* II, Lect. Notes in Math. **349** (1973), 501–597.

[DH81] Deligne, P. et Henniart, G. : Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'équations fonctionnelles de fonctions L, *Invent. Math.* **64** (1981),89–118.

[Et04] Etesse, J.-Y. : Introduction to L-functions of F-isocrystals. Dans : Geometric aspects of Dwork theory. Volume I,II, Walter de Gruyter GmbH & CO. KG, Berlin (2004), 701–710.

[EtLS93] Etesse, J.-Y. et Le Stum, B. : Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergent I. Interprétation cohomologique, Math. Ann. **296** (1993), 557–576.

[Fon79] Fontaine, J.-M. : Modules galoisiens, modules filtré et anneaux de Barsotti-Tate. Dans : *Journées de Géométrie algébriques de Rennes* (III), Astérisque **65** (1979), 3–80.

[Fon90] Fontaine, J.-M. : Représentations p-adiques des corps locaux. Dans : *The Grothendieck Festschrift, Volume II,* Prog. Math., Birkhäuser, Basel, (1990), 249–309.

[Fon94a] Fontaine, J.-M. : Le corps de périodes p-adiques, avec une appendice par Pierre Colmez. Dans : *Périodes p-adiques,* Astérisque **223** (1994), 59–111.

[Fon94b] Fontaine, J.-M. : Représentations p-adiques semi-stables. Dans : *Périodes p-adiques,* Astérisque **223** (1994), 113–184.

[Fon94c] Fontaine, J.-M. : Représentations ℓ-adiques potentiellement semi-stables. Dans : *Périodes p-adiques,* Astérisque **223** (1994), 321–347.

[Fon04] Fontaine, J.-M. : Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques. Dans : *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques* (III), Asterisque, **295** (2004).

[Huy98] Noot-Huyghe, C. : $\mathcal{D}^{\dagger}$-affinité des schéma projectif, *Ann. Inst. Four.* **48**(4) (1998), 913–956.

[Huy04] Noot-Huyghe, C. : Transformation de Fourier des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques I. Dans : Geometric aspects of Dwork theory. Volume I,II, Walter de Gruyter GmbH & CO. KG, Berlin (2004), 857–907.

[Har77] Hartshorne, R. : *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1977).

[Ked04] Kedlaya, S.K. : A p-adic local monodromy theorem, *Ann. of Math.* **160** (2004), 93–184.

[Ked05] Kedlaya, S.K. : Fourier transforms and p-adic "Weil II", *arXiv* : math.**NT/0210149v3** (2005).

[Kas83] Kashiwara, M. : *Systems of Microdifferential Equations,* Birkhäuser, Boston (1983).

[Kat72] Katz, N. : Travaux de Dwork, *Sem. Bourb.* **409** (1972).

[Kat88] Katz, N. : Gauss sums, Kloosterman sums and monodromy groups, *Annals of mathematics studies* **116**, Priceton Univerity press, Princeton, New Jersey (1988).

[Isa94] Isaacs, I.M. : *Character Theory of Finite Groups,* Dover, New York (1994).

[Lau87] Laumon, G. : Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil, *Publ. Math. de I.H.E.S.* **65** (1987), 131–210.

[Lop04] Lopez, R.G. : Microlocalisation and Stationary Phase, *Asian J. Math.* **8** No.4 (2004), 747–768.

[Mal91] Malgrange, B. : *Équations différentielles à coefficients polynomiaux,* Birkhäuser, Boston (1991).

[Mar04] Marmora, A. : Irrégularité et conducteur de Swan p-adiques, Documenta Math. **9** (2004), 413–433.

[Mat95] Matsuda, S. : Local indeces of p-adic differential operators corresponding to Artin-Schreier-Witt coverings, *Duke Mathematical Journal* **77**(3) (1995), 607–625.

[Mat02] Matsuda, S. : Katz Correspondence for quasi-Unipotent Overconvergent Isocrystals, *Compositio Math.* **134** (2002), 1–34.

[Meb02] Mebkhout, Z. : Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), 319–351.

[Pon66] Pontryagin, : *Topological Groups* (seconded edition) Gordon & Breanch, Sci. Publ., New York (1966).

[PR95] Perrin-Riou, B. : Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques, *Astérisque* **229**, Soc. Math. de France, Paris (1995).

[Sab02] Sabbah, C. : *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius,* CNRS Ed., Paris (2002).

[Sen69] Sen, S. : On automorphisms of local fields, *Ann. of Math.* **90** (1969), 33–46.

[Ser61] Serre, J.-P. : Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos, *Bull. S.M.F.*, **89** (1961), 105–154.

[Ser67] Serre, J.-P. : *Représentations linéaires de groupes finis,* Hermann, Paris (1967).

[Ser68] Serre, J.-P. : *Abelian ℓ-adic représentations and elliptic curves,* W.A.Benjamin, New York (1968).

[Ta67] Tate, J. : Fourier Analysis in Number Fields and Hecke's Zeta-Functions, (Thesis, 1950), dans : *Algebraic Number Theory, Edité par Cassels, J. et Fröhlich, A.,* Academic Press (1967), 305–347.

[Ta79] Tate, J. : Number Theoretic Background, dans : *Proc. Symp. Pure Math.* Volume 33, partie 2 (1979), 3–26.

[Tsu98a] Tsuzuki, N. : Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystals on a curve, *Amer. J. Math.* **120** (1998), 1165–1190.

[Tsu98b] Tsuzuki, N. : The local index and Swan conductor, *Compositio Math.* **111** (1998), 245–288.

[Tsu98c] Tsuzuki, N. : Slope filtration of quasi-unipotent overconvergent F-isocrystals, *Ann. Inst. Four.* **48**(2) (1998), 379–412.

[Wa96] Wach, N. : Représentations p-adiques potentiellement cristallines, *Bull. Soc. Math. France* **124** (1996), 375–400.

[Win83] Wintenberger, J.-P. : Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications, *Ann. Sci. de l'E.N.S.* 4ème série **16** (1983), 59–89.

Sigles :

[CL] Serre, J.-P. : *Corps Locaux,* deuxième édition, Hermann, Paris (1968).

[EGA] Dieudonné, J. et Grothendieck, A. : EGA, *Publ. Math. IHES.*

[SGA1] Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie. *Revêtements Étales et Groupe Fondamental,* dirigé par A. Grothendieck, avec la collaboration de M. Raynaud. *Soc. Math. France, Doc. Math.* **3**, édition recomposée de *Lect. Notes in Math.* **224** (1971).

RÉSUMÉ. Cette thèse est consacrée à l'étude du conducteur et du facteur epsilon d'un "système local" de coefficients p-adiques sur le spectre d'un corps de valuation discrète complet, à corps résiduel parfait de caractéristique $p > 0$. J'étudie ces invariants par déformation au corps des normes de Fontaine-Wintenberger, ce qui permet de ramener le cas d'inégales caractéristiques au cas d'égale caractéristique. Dans ce cas, le conducteur de Swan d'un F-isocristal surconvergent est égal à l'irrégularité (Matsuda-Tsuzuki). On ne dispose pas actuellement d'interprétation différentielle analogue pour le facteur epsilon. Pour ce faire, je propose une conjecture globale, la *formule du produit p-adique*, analogue à celle de Deligne, démontrée par Laumon, pour les faisceaux étales ℓ-adiques. Je démontre la conjecture pour les F-isocristaux surconvergents unités de rang 1 et unités finis. Enfin, j'ébauche une théorie de l'analyse microlocale arithmétique, qui devrait permettre de démontrer le cas général.

p-adic local constants

ABSTRACT. We study the conductor and the epsilon factor of a "local system" of p-adic coefficients over the spectrum of a complete discrete valuation field, with perfect residue field of characteristic $p > 0$. We consider the deformation of these invariants to the field of norms of Fontaine-Wintenberger; hence we reduce the mixed characteristic case to the equal characteristic case. In the latter case, Matsuda and Tsuzuki proved that the Swan conductor of an overconvergent F-isocrystal is equal to the irregularity. At present, we do not have such a differential interpretation for the epsilon factor. For this purpose, we propose a global conjecture, the *p-adic product formula*, analogous to Deligne's formula, proved by Laumon, for étales ℓ-adic sheaves. We prove the conjecture for rank 1 unit-root overconvergent F-isocrystals and for finite unit-root overconvergent F-isocrystals. Finally, we initiate the arithmetic microlocal analysis that should lead to a proof in the general case.

DISCIPLINE : Mathématiques

MOTS-CLÉS : théorie de Hodge p-adique, F-isocristaux surconvergents, conducteur de Swan, facteur epsilon, formule du produit, $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, microdifférentiels arithmétiques.

KEYWORDS : p-adic Hodge theory, overconvergent F-isocrystals, Swan conductor, epsilon factor, product formula, arithmetic $\mathcal{D}$-modules, arithmetic microdifferentials.

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539,
Institut Galilée, Université PARIS 13,
99 avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse (France)