

Journée SMF, Strasbourg
21 octobre 2005

Cordes et géométrie quantique

Costas Bachas

ENS, Paris

Pour en savoir plus

- **Strings '05/Toronto**
<http://www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/04-05/string-theory/strings2005>
- **Unity from duality: Gravity, gauge theory and strings**
C. Bachas *et al* eds., Les Houches session LXXVI 2002
- **Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians**
P. Deligne *et al* eds, AMS 1999
- **String Theory**
J. Polchinski, Cambridge U. Press 1998

Plan du séminaire

- Cordes et gravité quantique
- CFT, SCFT et BCFT
- Trous noirs et AdS/CFT
- Questions ouvertes

Relativité générale

La théorie de la relativité générale d'Einstein postule que l'espace-temps $\mathcal{M}^{3,1}$ est muni d'une **métrique (pseudo)Riemannienne**,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu ,$$

laquelle décrit le champ gravitationnel.

- On mesure $g_{\mu\nu}$ en observant la propagation de rayons de lumière, ainsi que de corps massifs traités comme des **particules-test ponctuelles** :

$$S = m \int_A^B d\tau \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

$\delta S = 0 \longrightarrow$ trajectoires = géodésiques genre- temps

- La géométrie est déterminée par la matière et le rayonnement ambiants :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

où $T_{\mu\nu}$ est le **tenseur énergie-impulsion**, source de courbure :

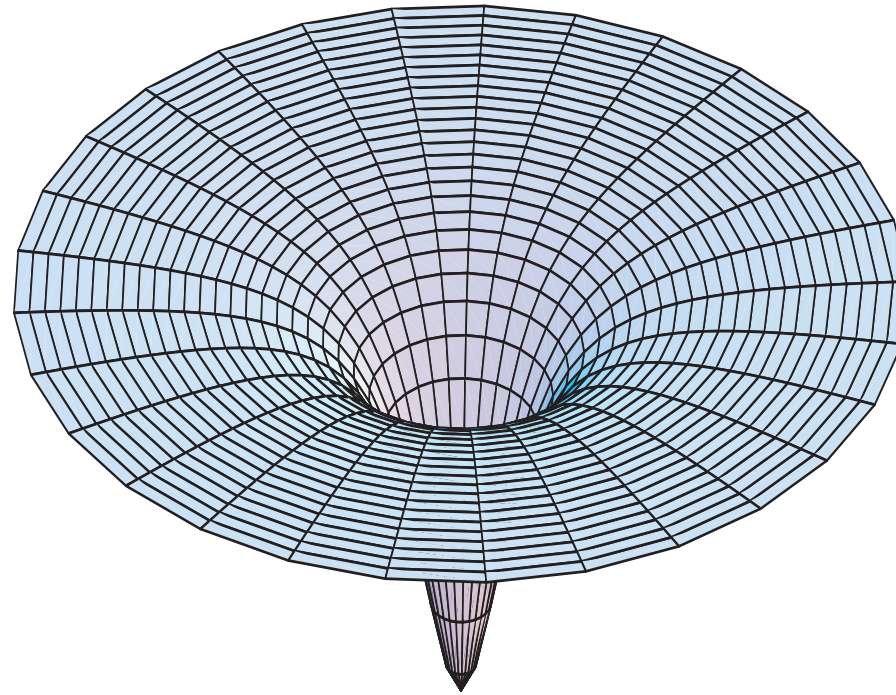
$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

- Pour une source ponctuelle \rightarrow métrique de **Schwarzschild** :

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

avec

$$f(r) = 1 - \frac{2Gm}{r}$$



La sphère $r = r_S \equiv 2Gm$ est un **horizon** qui cache la singularité à $r = 0$.

Censure cosmique

Quand m est grand, la courbure au voisinage de l'horizon est faible ($\sim r_S^{-2}$) .

- Pour une source ponctuelle chargée \rightarrow solution de **Reissner-Nordström** :

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega_2^2, \quad F \equiv dA = \frac{Q}{r^2}dr \wedge dt,$$

où ici

$$f(r) = \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)\left(1 - \frac{r_-}{r}\right), \quad r_{\pm} = Gm \pm \sqrt{G^2m^2 - Q^2}.$$

Pour que la singularité soit cachée, il faut $m \geq Q/G$ (borne BPS) . Le cas **extrémal** ($r_+ = r_- = Gm$) interpole entre l'espace-temps plat à l'infini, et la géométrie $\text{AdS}_2 \times \text{S}_2$ au voisinage $r \rightarrow r_+$.

NB. Les trous noirs astrophysiques sont, de toute évidence, neutres.

Gravité quantique et cordes

La mécanique quantique rend 'granulaire' l'espace de phase, mais n'empêche pas (sous certaines conditions) de reconstruire entièrement l'espace réel.

- Le champ associé à une particule libre de masse m et de spin zéro obéit à :

$$(\square_{\mathcal{M}} - m^2) \phi \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} - m^2 \right) \phi = 0 .$$

Si, par exemple, $\mathcal{M}^{3,1} = \tilde{\mathcal{M}}_3 \times \mathbb{R}$, les valeurs et les fonctions propres de l'opérateur $\square_{\tilde{\mathcal{M}}}$ de Laplace déterminent (en principe) l'espace $\tilde{\mathcal{M}}_3$. On trouve notamment les invariants de la chaleur :

$$\text{tr} \exp(-t \square_{\tilde{\mathcal{M}}}) \simeq a_0 t^{-d/2} + a_1 t^{1-d/2} + \dots$$

où les premiers invariants sont $a_0 = \text{Vol}_{\tilde{\mathcal{M}}}/(4\pi)^{d/2}$, $a_1 = \int_{\tilde{\mathcal{M}}} R/6(4\pi)^{d/2}$, etc etc.

- Ceci n'est plus possible en présence de l'interaction gravitationnelle car une résolution δx nécessite une énergie $\delta p \sim \hbar/\delta x$, à laquelle correspond le rayon de Schwarzschild $\sim G\hbar/\delta x$. Quand la résolution recherchée est du même ordre que ce rayon, c.a.d.

$$\delta x \sim \sqrt{G\hbar} \equiv l_{\text{Planck}} = 1.6 \times 10^{-33} \text{cm} ,$$

l'approximation d'espace-temps continu ne tient plus la route.

Que faire? Mousse de spin? Réseau dynamique? Géométrie non-commutative?

Le problème est de retrouver les principes de base (localité et causalité, énergie positive, interprétation probabiliste, invariance de jauge) aux échelles de longueur $\gg l_{\text{Planck}}$.

- Remplacer les particules ponctuelles par des **supercordes**, dont un des états quantiques correspond au **graviton**, permet de sauvegarder ces principes dans un **développement perturbatif** en puissances de \hbar .

La dynamique d'une corde classique peut être décrite de deux façons équivalentes

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\zeta \sqrt{-\det \hat{g}} ,$$

Nambu-Gotto

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\zeta \sqrt{-\det h} h^{ab} \hat{g}_{ab} ,$$

Polyakov

où $\hat{g}_{ab} \equiv g_{\mu\nu} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu$ est la métrique induite et α' (la pente de Regge) est inversement proportionnelle à la tension de la corde. En plus des difféomorphismes, S_P a une **symétrie** locale **de Weyl** ($h_{ab} \rightarrow e^\phi h_{ab}$) qui permet de fixer (presque) complètement la métrique h_{ab} (l'espace de modules est de dimension finie).

- Le point de départ de la quantification est l'action de Polyakov, à laquelle on peut ajouter le terme

$$\int \frac{d^2\zeta}{4\pi} \Phi(x) \sqrt{-\det h} R^{(2)} .$$

Si le **dilaton** est constant, $\Phi = \Phi_0$, ce terme est topologique (donc invariant de Weyl). Il multiplie l'intégrale fonctionnelle par le facteur

$$e^{\Phi_0\chi} \equiv g_s^{-\chi} ,$$

où g_s est la **constante de couplage de la corde** et χ le nombre d'Euler de la surface Σ . La limite $g_s \rightarrow 0$ est la **limite 'classique' de cordes, ou limite planaire**.

C'est un abus de langage, car la corde continue a fluctuer dans l'espace-temps, elle n'est classique que si on prend aussi la limite de particule ponctuelle, c.a.d. à la fois $g_s \rightarrow 0$ et $\alpha' \rightarrow 0$.

Géométrie et théories conformes

Formulation de Polyakov \longrightarrow **modèle- σ non-linéaire** couplé à la gravité 2d.

L'invariance de Weyl implique que, pour $h_{ab} = \delta_{ab}$, ce modèle soit invariant d'échelle. La violation de cette symétrie dans une TQC est 'captée' par le groupe de renormalisation, et ses **fonctions** associées β . Seules les théories conformes ($\beta = 0$) correspondent ainsi à des 'géométries permises'.

- Une méthode systématique pour calculer les fonctions β est le développement perturbatif. On décompose $x = \bar{x} + y$ ('**modes lents et modes rapides**') \longrightarrow

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(\bar{x}) - \frac{1}{3}R_{\mu\kappa\nu\sigma}(\bar{x}) y^\kappa y^\sigma - \frac{1}{6}\nabla_\rho R_{\mu\kappa\nu\sigma}(\bar{x}) y^\rho y^\kappa y^\sigma + \dots$$

coordonnées normales de Riemann

On intègre ensuite les modes rapides, avec un **cutoff UV** Λ , et on absorbe les divergences dans une redéfinition de la métrique. On trouve :

$$\beta_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial g_{\mu\nu}(\bar{x}, \Lambda)}{\partial \ln \Lambda} = -\frac{\alpha'}{2\pi} R_{\mu\nu}(\bar{x}) + \dots$$

Friedan

c.a.d le **flot de Ricci**, corrigé par des termes sous-dominants en puissances de $\alpha' \partial^2$. Au premier ordre du développement :

[invariance d'échelle du modèle- σ] \iff [équations d'Einstein dans le vide]

Mais les équations 'classiques' des cordes,

$$\beta_{\mu\nu} = 0 ,$$

sont très différentes dans le 'régime profond' où $\alpha' R \sim o(1)$.

- Ce régime peut être abordé par les **méthodes algébriques** de la théorie conforme de champs à 2d. L'invariance d'échelle implique que T_{ab} , le tenseur énergie-impulsion conservé, est de trace nulle, dans quel cas il n'a que deux composantes : $T_{++}(\zeta^+)$ et $T_{--}(\zeta^-)$. Leur transformées de Fourier forment deux **algèbres** commutantes de **Virasoro**,

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} .$$

Celles-ci peuvent être étendue (par exemple à des algèbres de Kac-Moody dans les **modèles de WZW**). Dans les **théories rationnelles conformes** il existe un nombre fini de représentations, dont les propriétés sont déterminées par les hypothèses du **'bootstrap conforme'**.

Belavin+Polyakov+Zamolodchikov; Moore+Seiberg ...

L'opérateur $\chi_{\tilde{\mathcal{M}}}$ est remplacé par $L_0 + \bar{L}_0 - 2$, mais les invariants généralisés de la chaleur n'ont plus forcément d'interprétation géométrique simple. Ainsi, une corde ne fait pas la différence entre variétés Calabi-Yau liées par **symétrie miroir**, ou encore entre un cercle S^1 et une 3-sphère S^3 de rayons donnés, la S^3 portant aussi un **flux Neveu-Schwarz** non-nul.

- En fait, la théorie de cordes impose une autre modification de la théorie d'Einstein, visible elle même dans la limite d'espace-temps plât :

$$[\text{Einstein à 4d}] \longleftrightarrow [\text{supergravité (et sYM) à 10d}]$$

Les champs supplémentaires, correspondant aux états (bosoniques) de masse nulle de la supercorde, sont

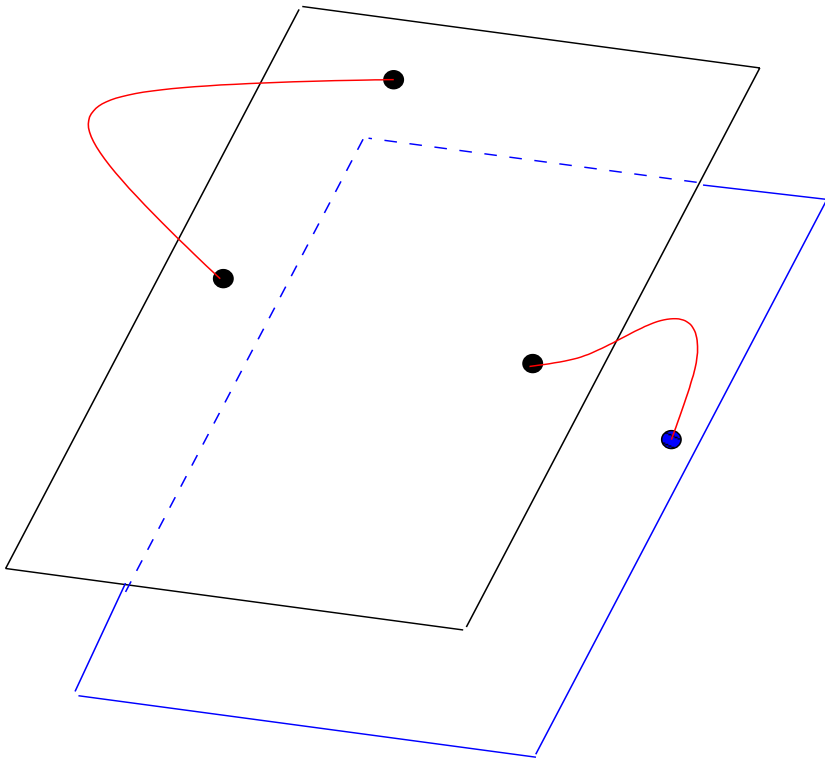
$$g_{\mu\nu} , B_{\mu\nu} , \Phi , C_{\mu_1 \dots \mu_n} ,$$

avec n pair ou impair pour la théorie type IIA ou IIB. Ces champs appartiennent au supermultiplet du graviton. Ils correspondent par ailleurs aux couplages renormalisables de la supercorde. Pour les trois premiers :

$$\int \Phi R^{(2)} , \int \hat{B} \text{ et } S_P ,$$

tandis que les couplages des **n-formes Ramond-Ramond** impliquent les supercordonnées de l'espace-temps.

D-branes



Il s'agit de défauts de l'espace-temps, définis comme des **sous-variétés** qui peuvent accrocher les **boûts de cordes ouvertes**.

Polchinski

- Les D-branes permises sont les conditions au bord de Σ qui respectent l'invariance conforme. Les **couplages renormalisables** dans la limite plate (perturbative) sont :

$$\int_{\partial\Sigma} \Phi_I(x) \partial_{\perp} x^I \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Sigma} A_{\alpha}(x) \partial_{\parallel} x^{\alpha} ,$$

avec α et I des indices tangent et normal. Notons qu'en plus de leur coordonnées géométriques, les D-branes portent un champ de jauge sur leur volume d'univers (\rightarrow **états de masse nulle de la corde ouverte**). Les équations d'invariance conforme dérivent, à l'ordre le plus bas, de l'action effective :

$$S_{Dp} = -T_p \int d^{p+1}\zeta e^{-\Phi} \sqrt{-\det(\hat{g}_{ab} + \mathcal{F}_{ab})} - T_p \int \sum_n \hat{C}_n \wedge e^{\mathcal{F}} \Big|_{top}$$

où $\mathcal{F} = \hat{B} + 2\pi\alpha'F$, C_n sont les formes Ramond-Ramond, et T_p est la tension de la D-brane (**action de Dirac+Born+Infeld, et Chern+Simons**).

- Sur une collection de D-branes les cordes ouvertes acquièrent des fonctions d'onde matricielles de **Chan-Paton**. Si on considère N D-branes identiques, le groupe de jauge devient alors $U(N)$.

Dans le cas spécial de N D3-branes l'action effective est celle de $\mathcal{N} = 4$ super Yang-Mills à 4 dimensions. C'est une théorie obtenue par réduction dimensionnelle de la $\mathcal{N} = 1$ super Yang-Mills à 10d :

$$S = -\frac{1}{4g_{\text{YM}}^2} \int d^{10}x \operatorname{tr} (F \wedge \star F + 2i\bar{\psi} \nabla_{\mu} \Gamma^{\mu} \psi) .$$

La réduction brise $SO(9, 1) \rightarrow SO(3, 1) \times SO(6)_R$. Le spineur de Weyl-Majorana ψ se décompose en 4 spineurs dans la représentation $\underline{4}$ de $SO(6)_R$, tandis que $A^{\mu} \rightarrow (A^{\alpha}, \Phi^I)$. À 4d cette théorie est en plus **invariante conforme** , car g_{YM} est un paramètre sans dimensions.

Correspondance AdS/CFT

La géométrie classique qui décrit N D3-branes ressemble à celle du trou noir chargé de Reissner-Nordström :

$$ds^2 = f(r)^{-1/2} dx_\mu dx^\mu + f(r)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2)$$

$$F_5 = (1 + \star) \frac{df}{f} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 ,$$

avec

$$f = 1 + \frac{L^4}{r^4} , \quad L^4 = 4\pi g_s \alpha'^2 N .$$

C'est une solution **extrémale** qui interpole entre la géométrie plate à $r \rightarrow \infty$, et celle de l'espace-temps $AdS_5 \times S_5$ près de l'horizon, $r \rightarrow 0$.

- Pour un observateur lointain, les excitations de très basse énergie sont (i) les cordes fermées au voisinage de l'horizon (décalage arbitrairement grand vers le rouge) et (ii) les (super)gravitons dont la longueur d'onde est $\gg L$. Ces deux théories découplent, schématiquement :

$$[\text{supercordes IIB dans } \text{AdS}_5 \times S_5] \oplus [\text{supergravité dans } \mathbb{R}^{9,1}]$$

- Le système a par ailleurs une autre description, en termes d'une théorie de cordes fermées et ouvertes. Dans la limite $E \rightarrow 0$ celle-ci se réduit à

$$[\text{super Yang-Mills } \mathcal{N} = 4 \text{ à } 4d] \oplus [\text{supergravité dans } \mathbb{R}^{9,1}]$$

La comparaison de ces deux limites conduit à la conjecture de Maldacena \rightarrow

Dualité holographique:

[supercordes IIB dans $\text{AdS}_5 \times S^5$] = [super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ à 4d]

Les deux paramètres libres de chaque côté sont liés par les relations :

$$\lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N = \frac{L^4}{\alpha'^2} \quad , \quad N = \frac{\pi^{3/2}}{4} \frac{L^4}{G_{(10)}} .$$

La théorie classique de cordes correspond donc à la limite **planaire** de SYM, c.a.d. $N \rightarrow \infty$ avec le paramètre λ de 't Hooft constant. En plus, les deux descriptions duales se simplifient dans des limites opposées,

$\lambda \rightarrow \infty$: limite **géométrique** de cordes

$\lambda \rightarrow 0$: limite de **couplage faible** de SYM

Cette dualité relie donc une théorie de jauge à 4d avec un modèle- σ à 2d !

Malheureusement, on ne sait pas résoudre ce modèle comme ce fut le cas pour WZW (la difficulté est liée à la présence du flux F_5 de Ramond-Ramond). Cependant, la conjecture de Maldacena a passé tous les 'tests' qu'on a su inventer jusqu'à présent, notamment :

- Les isométries de $AdS_5 \times S_5$ coïncident avec les symétries globales de SYM. Dans les deux cas il s'agit de la superalgèbre $su(2, 2|4)$, qui inclut comme sous-algèbres ordinaires l'algèbre conforme $so(4, 2)$ et la symétrie-R $so(6)$.
- Les états BPS de la supercorde dans $AdS_5 \times S_5$ sont en correspondance $1 \leftrightarrow 1$ avec les opérateurs chiraux connus (de 'simple trace') dans la théorie de SYM.

Voyons ces affirmations plus en détail. On peut, tout d'abord, organiser les générateurs de $su(2, 2|4)$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} P_\mu & L_{\mu\nu} & K_\nu & \mathcal{D} & Q_\alpha^a & \bar{S}_{\dot{\alpha}}^a \\ & & & & & \\ & \bar{Q}_{\dot{\alpha}a} & S_{\alpha a} & & T^{IJ} & \end{pmatrix}$$

voir D'Hoker et Freedman, TASI 2001

Le générateur \mathcal{D} de dilatations correspond au vecteur de Killing $\partial/\partial\tau$ dans les coordonnées globales de AdS_5 :

$$ds^2 = L^2(-\cosh^2\rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho d\Omega_3^2) .$$

Les dimensions conformes des opérateurs de SYM correspondent ainsi aux énergies des états de la supercorde. Le spectre est discret car le décalage infini vers le bleu confine les cordes à l'intérieur de AdS_5 .

- Les états transforment dans des représentations unitaires, de **plus bas poids** par rapport à \mathcal{D} . Comme la dimension conforme des générateurs est

$$\begin{aligned}
 [P^\mu] &= 1, & [Q] &= 1/2 \\
 [\mathcal{D}] &= [L^{\mu\nu}] = [T^{IJ}] = 0 \\
 [K^\mu] &= -1, & [S] &= -1/2,
 \end{aligned}$$

les états de plus bas poids (**états superconformes primaires**) sont annihilés par K^μ et S , et transforment dans une représentation de $SO(3,1) \times SO(6)_R$. Ainsi on pourra spécifier

$$\text{reps. superconformes} \leftrightarrow \Delta, \text{ spin}, [r_1, r_2, r_3],$$

où $[r_1, r_2, r_3]$ sont les labels de Dynkin de $SO(6)_R$ et Δ est le plus bas poids.

- Le calcul de $\Delta(\lambda)$ est un calcul dynamique difficile, sauf pour les représentations qui contiennent des états primaires **chirales** (ou états **BPS**). Ceux-ci sont annihilés par un sous-ensemble de supercharges Q et \bar{Q} , ce qui conduit à une relation algébrique entre Δ , les labels de Dynkin et le spin.

La présence de ces **multiplets courts**, pour lesquels Δ est le même quand $\lambda \rightarrow 0$ ou $\lambda \rightarrow \infty$, teste la dualité AdS/CFT. Tous les états de la supergravité IIB à une particule sont dans cette classe. Leurs partenaires primaires chiraux ont spin zéro,

$$[r_1, r_2, r_3] = [0, k, 0] \quad \text{et} \quad \Delta = k, \quad \text{pour} \quad k = 2, 3 \dots$$

Les états excités de la corde appartiennent à des **multiplets longs**, et leur énergie Δ diverge dans la limite $\lambda \rightarrow \infty$.

Chaînes quantiques et intégrabilité

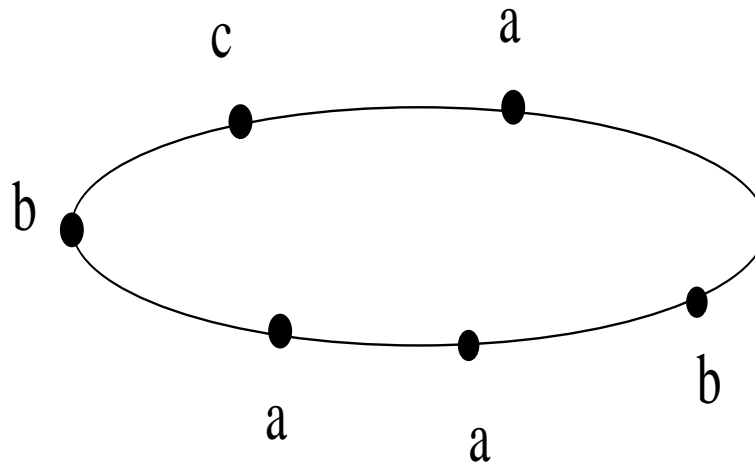
Les opérateurs locaux, invariants de jauge et de simple trace, sont des (combinaisons linéaires) de 'mots' :

$$\mathcal{O}_{(n)} = \text{tr} (a_1 a_2 \cdots a_n) ,$$

avec un **alphabet infini** :

$$a_j \in \mathcal{A} \equiv \{ \nabla^k \Phi, \nabla^k \Psi, \nabla^k F \} .$$

On peut représenter ces opérateurs comme des **chaînes de spins**, chaque spin appartenant au module généré par \mathcal{A} .



Le générateur de dilatations agit dans cet espace linéairement (mélange d'opérateurs). Ses valeurs propres sont les dimensions conformes Δ .

L'action de \mathcal{D} est compliqué, mais si on développe

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 + g_{\text{YM}}^2 \mathcal{D}_2 + g_{\text{YM}}^3 \mathcal{D}_3 + \dots ,$$

les \mathcal{D}_k agissent localement sur la chaîne de spins, et à l'intérieur de sous-ensembles finis de l'alphabet \mathcal{A} . Le problème ressemble donc aux modèles (très étudiés) de la mécanique statistique quantique.

- En plus, toutes les (restrictions des) opérateurs \mathcal{D}_k calculées jusqu'à présent, correspondent à des chaînes de spins **intégrables par ansatz de Bethe** ! Méthode très efficace de calcul des dimensions anormales .

Minahan+Zarembo; Beisert, Staudacher ...

- Du côté cordes, le modèle- σ non-linéaire a comme espace cible le coset $PSU(2, 2|4)/Sp(1, 1) \times Sp(2)$. Le modèle a un nombre infini de charges conservés, et est (très probablement) classiquement intégrable.

Metsaev+Tseytlin; Bena+Polchinski+Roiban; ...

Peut-on 'faire toucher' les deux côtés? Oui, dans des limites presque-BPS avec la longueur de la chaîne $n \rightarrow \infty$. Ça marche un peu mieux que prévu, pour une raison pas comprise.

*Berenstein+Maldacena+Nastase
Gubser+Klebanov+Polyakov ...*

L'intégrabilité quantique du modèle- σ serait un résultat splendide!

Questions ouvertes

- Résoudre une théorie de cordes avec dual 4d
- Exemples de géométrie quantique sans isométrie genre-temps?