

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES MATRICES ALÉATOIRES

EN MATHÉMATIQUES ET EN PHYSIQUE

Strasbourg, journée de la SMF

22 Octobre 2005

Wigner et les spectres d'atomes lourds

Les matrices aléatoires ont d'abord été étudiées dans les années 30 par des statisticiens (matrices de covariance aléatoires).

Dans les années 50, les physiciens essaient de comprendre la spectroscopie des atomes lourds. Les raies spectrales correspondent à des valeurs propres (plus exactement des différences entre ces valeurs propres) d'opérateurs auto-adjoints (Hamiltoniens) très complexes. Plutôt que d'essayer de calculer explicitement les spectres de ces opérateurs, Wigner propose d'étudier leurs propriétés statistiques et pour cela invente le modèle dit du GUE.

LE GUE

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & M_{N2} & \dots & M_{NN} \end{pmatrix}$$

Les M_{ij} sont des variables gaussiennes complexes centrées on a

$$M_{ij} = \overline{M_{ji}}$$

Les $M_{ij}; i \leq j$ sont indépendantes.

$$P(M \in dM) = (2\pi)^{-N^2/2} \exp(-\text{Tr}(M^2)/2) dM$$

Les valeurs propres x_1, \dots, x_N de M sont déterminées par les moments

$$\text{Tr}(M^k) = \sum_{i=1}^N x_i^k$$

On peut calculer la valeur moyenne des moments

$$E[\text{Tr}(M^{2k})] = \int \sum M_{i_1 i_2} M_{i_2 i_3} \dots M_{i_{2k} i_1} (2\pi)^{-N^2/2} \exp(-\text{Tr}(M^2)/2) dM$$

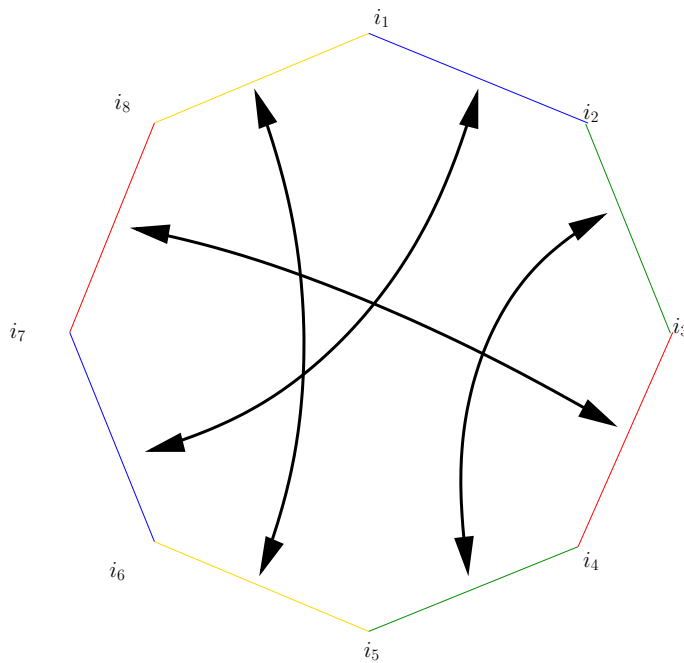
au moyen du

lemme de Wick: si f_1, \dots, f_{2k} est une famille gaussienne centrée alors

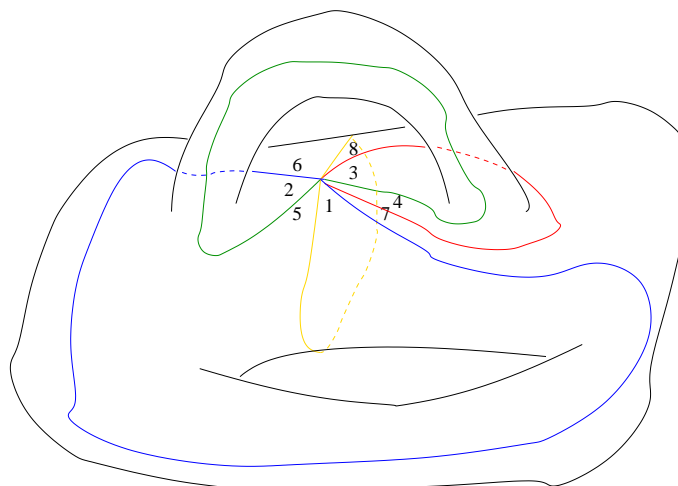
$$E[f_1 f_2 \dots f_{2k}] = \sum_{\text{appariements de } \{1, 2, \dots, 2k\}} E[f_{u_1} f_{u_2}] E[f_{u_3} f_{u_4}] \dots E[f_{u_{2k-1}} f_{2k}]$$

Dans le cas du GUE on a $E[M_{ij}M_{kl}] = \delta_{il}\delta_{jk}$.

On représente chaque terme M_{ij} par un segment $[i, j]$ et on apparie les segments deux à deux.



Chaque terme correspond à une surface de Riemann;



la formule finale donne

$$E[\text{Tr}(M^{2k})] = N^{k+1} \sum_{g=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \varepsilon_k(g) N^{-2g}$$

$\varepsilon_k(g)$ = nombre de façons de replier le polygone à $2k$ côtés pour obtenir une surface de genre g .

Cette relation entre matrices aléatoires et énumération de graphes sur les surfaces de Riemann a été élaborée par les physiciens en liaison avec la gravitation quantique. On y considère des intégrales du type

$$\int_{H_N} \exp -Tr(M^2 + \sum_{i \geq 3} \lambda_i M^i) dM$$

Il y a des relations profondes avec la théorie des systèmes intégrables.

COMPORTEMENT GLOBAL DU SPECTRE

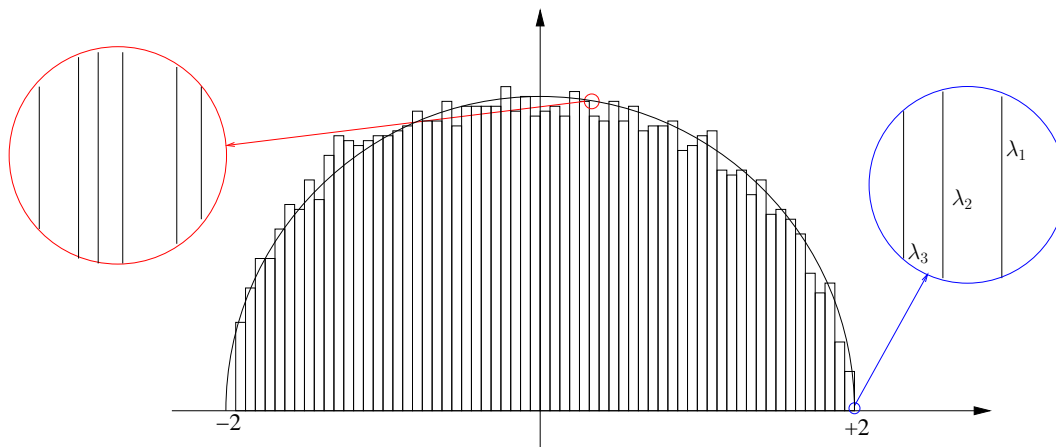
On a

$$E\left[\frac{1}{N} \text{Tr}\left(\left(\frac{M}{\sqrt{N}}\right)^{2k}\right)\right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \varepsilon_k(0) = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} = \int_{-2}^2 \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} x^{2k} dx$$

La loi limite du spectre de $\frac{M}{\sqrt{N}}$ est donc la loi du demi-cercle, dite aussi loi de Wigner

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} dx \quad \text{sur } [-2, 2]$$

Histogramme obtenu en prenant une réalisation du GUE, avec N grand,



Il y a trois régimes intéressants: le régime "global", le régime local au coeur du spectre, et enfin le régime au bord du spectre.

COMPORTEMENT GLOBAL DU SPECTRE

Cela concerne, pour une matrice aléatoire de valeurs propres x_1, \dots, x_N , le comportement de la mesure empirique

$$\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$$

La théorie des *probabilités libres* (D. Voiculescu) a permis de mieux comprendre ce comportement pour de nombreux modèles de matrices aléatoires.

SOMME DE MATRICES ALÉATOIRES

La notion de partition noncroisée permet de résoudre le problème suivant

Soient $X_1 = U_1 D_1 U_1^*$ et $X_2 = U_2 D_2 U_2^*$ deux matrices hermitiennes $N \times N$, D_1 et D_2 sont diagonales, et U_i sont unitaires, choisies au hasard avec la mesure de Haar sur $U(N)$.

Connaissant le spectre de D_1, D_2 , que dire du spectre de $X_1 + X_2$?

On construit les séries génératrices ($tr = \frac{1}{N}Tr$)

$$G_i(z) = tr\left(\frac{1}{z - X_i}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1} tr(X_i^n)$$

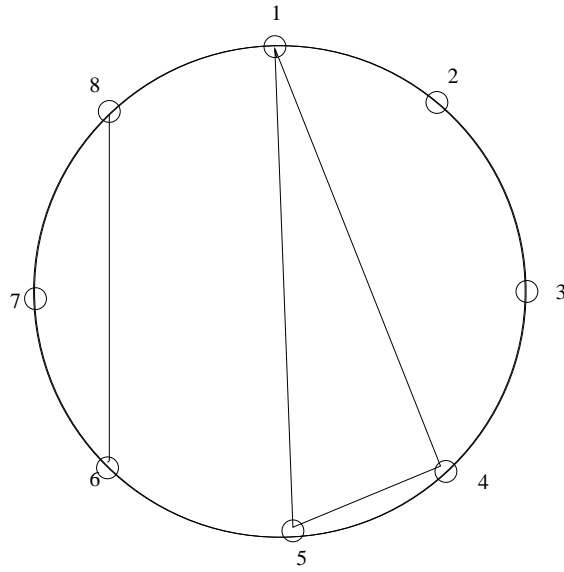
$$K_i(z) = G_{X_i}^{(-1)}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} R_n(X_i) z^n$$

Les $R_n(X_i)$ sont les *cumulants libres* de X_i dont ils déterminent le spectre.

Avec une probabilité proche de 1, lorsque $N \rightarrow \infty$

$$R_n(X_1 + X_2) \sim R_n(X_1) + R_n(X_2)$$

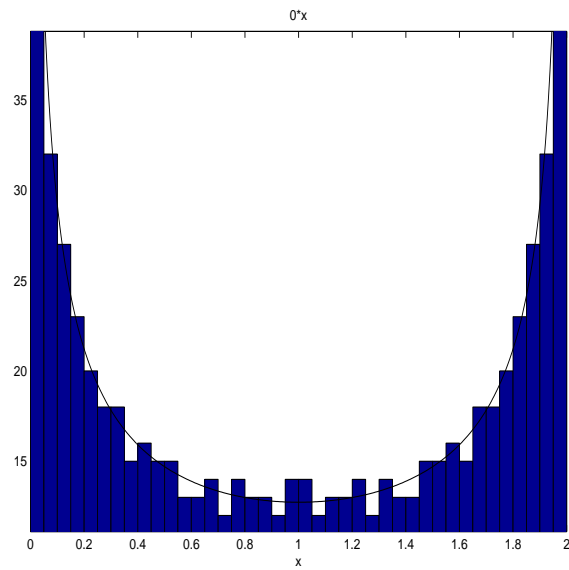
autrement dit, connaissant les spectres de X_1 et X_2 on peut prédire le spectre de $X_1 + X_2$.



Le lien entre les nombres $tr(X_i^n)$ et $R_n(X_i)$ peut s'écrire au moyen des partitions noncroisées

$$tr(X_i^n) = \sum_{\pi \in NC(n)} \prod_{p \in \pi} R_{|p|}(X_i)$$

Les partitions noncroisées sont les appariements qui apparaissent en genre $g = 0$ dans la limite du GUE.



Modèle matriciel

$$\Pi_1 + \Pi_2 \quad Sp(\Pi_1) = Sp(\Pi_2) = \{0, 1\}$$

$\Pi_1, \Pi_2 =$ projections orthogonales sur des sous-espaces aléatoires de dimension $N/2$.

$$y = \frac{1}{\pi \sqrt{x(2-x)}}$$

LES ZÉROS DE LA FONCTION ζ

La fonction ζ de Riemann est définie par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \operatorname{Re}(s) > 1$$

Elle admet un prolongement analytique à \mathbf{C} avec pole simple en $s = 1$, et $\zeta(-2n) = 0$. Les autres zéros (les "zéros non triviaux") sont, selon la conjecture de Riemann, tous situés sur l'axe $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Riemann a montré que le nombre de zéros non triviaux dont la partie imaginaire est dans $[0, T]$ est équivalent à $\frac{T}{2\pi} \log T$ lorsque $T \rightarrow \infty$.

Vers 1975, H. Montgomery s'intéresse aux corrélations entre zéros.

On pose $\rho = 1/2 + i\gamma$.

$N_{a,b}(T)$ = le nombre de couples γ, γ' , dans $[0, T]$ qui vérifient

$$\gamma - \gamma' \in \left[\frac{2\pi a}{\log T}, \frac{2\pi b}{\log T} \right[$$

où a et b sont deux réels.

Il conjecture

$$N_{a,b}(T) = \frac{T}{2\pi} \log T \left(\int_a^b 1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 du + o(1) \right)$$

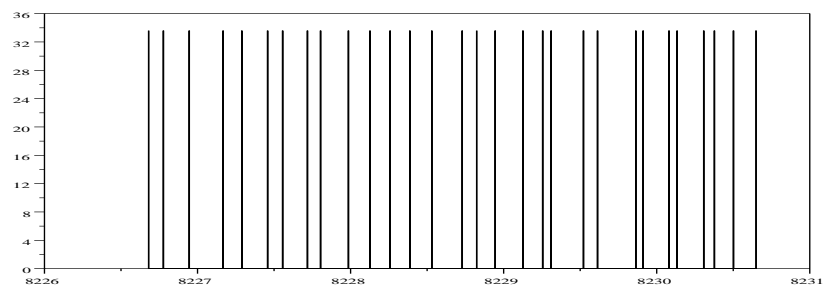
Odlyzko a vérifié numériquement cette conjecture ainsi que d'autres portant sur des statistiques plus sophistiquées

Pour N points X_1, \dots, X_N au hasard uniformément sur $[0, 1]$, dont l'écartement moyen est $\sim 1/N$, car on voit facilement que

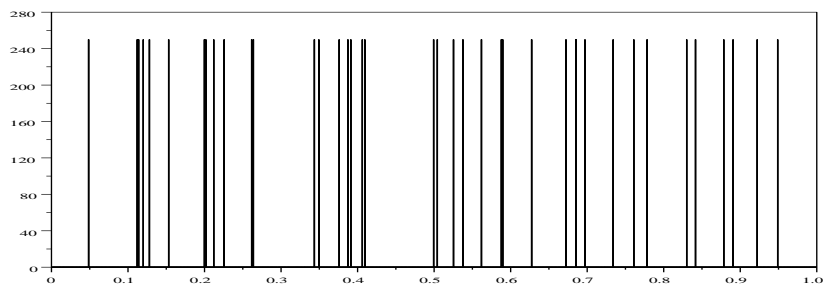
$1/N \times$ le nombre moyen de paires (i, j) telles que $\frac{a}{N} \leq X_i - X_j \leq \frac{b}{N} \rightarrow_{N \rightarrow \infty} b - a$

La comparaison entre les quantités $\int_a^b 1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2 du$ et $b - a$ montre que les zéros de la fonction ζ tendent à être plus écartés que des nombres pris "au hasard uniformément".

Quelques zéros de la fonction ζ .



Des points pris au hasard uniformément



LOI DES VALEURS PROPRES

Rappelons la loi du GUE

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & M_{N2} & \dots & M_{NN} \end{pmatrix}$$

$$P(M \in dM) = (2\pi)^{-N^2/2} \exp(-\text{Tr}(M^2)/2) dM$$

La loi des valeurs propres x_1, \dots, x_N est

$$P^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N!} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2 e^{-\sum_{i=1}^N x_i^2/2}$$

On réécrit la densité en utilisant le déterminant de Vandermonde

$$\prod_{i>j} (x_i - x_j) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_N^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

En faisant des combinaisons linéaires de lignes de la matrices et en utilisant des polynômes $P_i(x) = x^i + \dots$ on obtient

$$\prod_{i>j} (x_i - x_j) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ P_1(x_1) & P_1(x_2) & \dots & P_1(x_N) \\ P_2(x_1) & P_2(x_2) & \dots & P_2(x_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{N-1}(x_1) & P_{N-1}(x_2) & \dots & P_{N-1}(x_N) \end{pmatrix}$$

On prend les polynômes d'Hermite qui vérifient

$$\int_{\mathbb{R}} P_m(x)P_n(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \delta_{mn} n!$$

Les fonctions d'Hermite normalisées

$$\phi_n(x) = (n!)^{-1/2} P_n(x) \frac{e^{-x^2/4}}{(2\pi)^{1/4}}$$

forment une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$. En rentrant le facteur gaussien dans le déterminant on voit que la densité est proportionnelle à

$$\det \begin{pmatrix} \phi_0(x_1) & \phi_0(x_2) & \dots & \phi_0(x_N) \\ \phi_1(x_1) & \phi_1(x_2) & \dots & \phi_1(x_N) \\ \phi_2(x_1) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_2(x_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{N-1}(x_1) & \phi_{N-1}(x_2) & \dots & \phi_{N-1}(x_N) \end{pmatrix}^2$$

On a

$$\begin{aligned} & \det \left(\begin{array}{cccc} \phi_0(x_1) & \phi_0(x_2) & \dots & \phi_0(x_N) \\ \phi_1(x_1) & \phi_1(x_2) & \dots & \phi_1(x_N) \\ \phi_2(x_1) & \phi_2(x_2) & \dots & \phi_2(x_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{N-1}(x_1) & \phi_{N-1}(x_2) & \dots & \phi_{N-1}(x_N) \end{array} \right)^2 \\ &= \det \left(\begin{array}{cccc} K_N(x_1, x_1) & K_N(x_1, x_2) & \dots & K_N(x_1, x_N) \\ K_N(x_2, x_1) & K_N(x_2, x_2) & \dots & K_N(x_2, x_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_N(x_N, x_1) & K_N(x_N, x_2) & \dots & K_N(x_N, x_N) \end{array} \right) \end{aligned}$$

où

$$K_N(x, y) = \sum_{k=1}^N \phi_{k-1}(x) \phi_{k-1}(y).$$

LE COEUR DU SPECTRE ET LA FONCTION ζ DE RIEMANN

En utilisant les formules asymptotiques pour les polynômes d'Hermite on arrive à la formule

$$K_N\left(\frac{\pi\xi}{\sqrt{N}}, \frac{\pi\eta}{\sqrt{N}}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi(\xi - \eta)}{\pi(\xi - \eta)}$$

ce qui permet de déduire que (pour $1 \gg \varepsilon_N \gg N$)

$\frac{\pi}{2\varepsilon_N \sqrt{N}} \times$ le nombre moyen de couples (i, j) tels que

$$|x_i|, |x_j| \leq \varepsilon_N \text{ et } \frac{a\pi}{\sqrt{N}} \leq x_i - x_j \leq \frac{b\pi}{\sqrt{N}}$$

tend vers $\int_a^b 1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2 dx$ lorsque $\rightarrow_{N \rightarrow \infty}$.

Des calculs plus sophistiqués permettent de calculer la loi des écarts entre valeurs propres successives, ainsi que d'autres statistiques. À chaque fois, les prédictions des matrices aléatoires sont vérifiées numériquement pour les zéros de la fonction ζ .

LA LOI DE TRACY-WIDOM ET LE PROBLÈME D'ULAM

Soit λ_{max} la plus grande valeur propre d'une matrice du GUE, de taille $N \times N$, alors

$$P(\lambda_{max} \leq s) = E_N(s) = \frac{1}{C_N N!} \det \left[\int_{-\infty}^s (s-x)^{j+k} e^{-x^2} dx \right]_{0 \leq j, k \leq N-1}$$

Ceci permet de montrer que

$$E_N(s) = \exp \left(- \int_s^{\infty} R_N(t) dt \right)$$

où R_N est déterminé comme étant la solution de

$$(R_N'')^2 - 4(sR_N' - R_N)^2 + 4(R_N')^2(R_N' + 2N) = 0 \quad P_{IV}$$

avec conditions limites

$$R_N(s) \sim_{s \rightarrow \infty} \frac{2^{N-1} s^{2N-2} e^{-s^2}}{\sqrt{\pi} (N-1)!}$$

C'est une équation de Painlevé.

Lorsque $N \rightarrow \infty$ on a

$$E(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} E_N(\sqrt{2N} + s/\sqrt{2}N^{1/6}) = \exp\left(-\int_s^\infty u(t)dt\right)$$

où u satisfait

$$(u'')^2 + 4u'((u')^2 - su' + u) = 0 \quad P_{II}$$

Il s'agit d'une autre équation de Painlevé. On a donc

$$P[N^{1/6}(\lambda_{max} - 2\sqrt{N}) \leq s] \rightarrow \exp\left(-\int_s^\infty u(t)dt\right) = E(s)$$

La loi limite s'appelle le *loi de Tracy-Widom*.

Elle est apparue au cours des 10 dernières années dans de nombreux problèmes asymptotiques, en particulier dans le modèle PNG (polynucleargrowth), un modèle de croissance d'interface, et dans la solution du problème d'Ulam.

LE PROBLÈME D'ULAM

Dans les années 50-60 S. Ulam a étudié la plus longue sous-suite croissante d'une permutation de $\{1, \dots, N\}$ prise au hasard. On appelle l_N cette variable aléatoire.

Exemple:

7 2 10 4 3 8 6 1 9 5

$$l_{10} = 4$$

Sur la base de simulations numériques il a conjecturé que

$$l_N \sim_{N \rightarrow \infty} c\sqrt{N} \quad \text{en probabilités}$$

En 1977 Logan et Shepp, puis Kerov et Vershik ont établi ce résultat, avec $c = 2$.

Rains, et Odlyzko, Poonen, Widom, Wilf (1998)

$$P(l_N \leq l) = \frac{1}{N!} \int_{U(l)} |\text{Tr}(U)|^{2N} dU$$

La preuve utilise la théorie des représentations et la dualité de Schur-Weyl.

Baik, Deift et Johansson (1999)

$$P\left(\frac{L_N - 2N^{1/2}}{N^{1/6}} \leq s\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E(s)$$

D'autres preuves et des extensions ont été données par Johansson, Okounkov, Olshanski, Borodin, ...