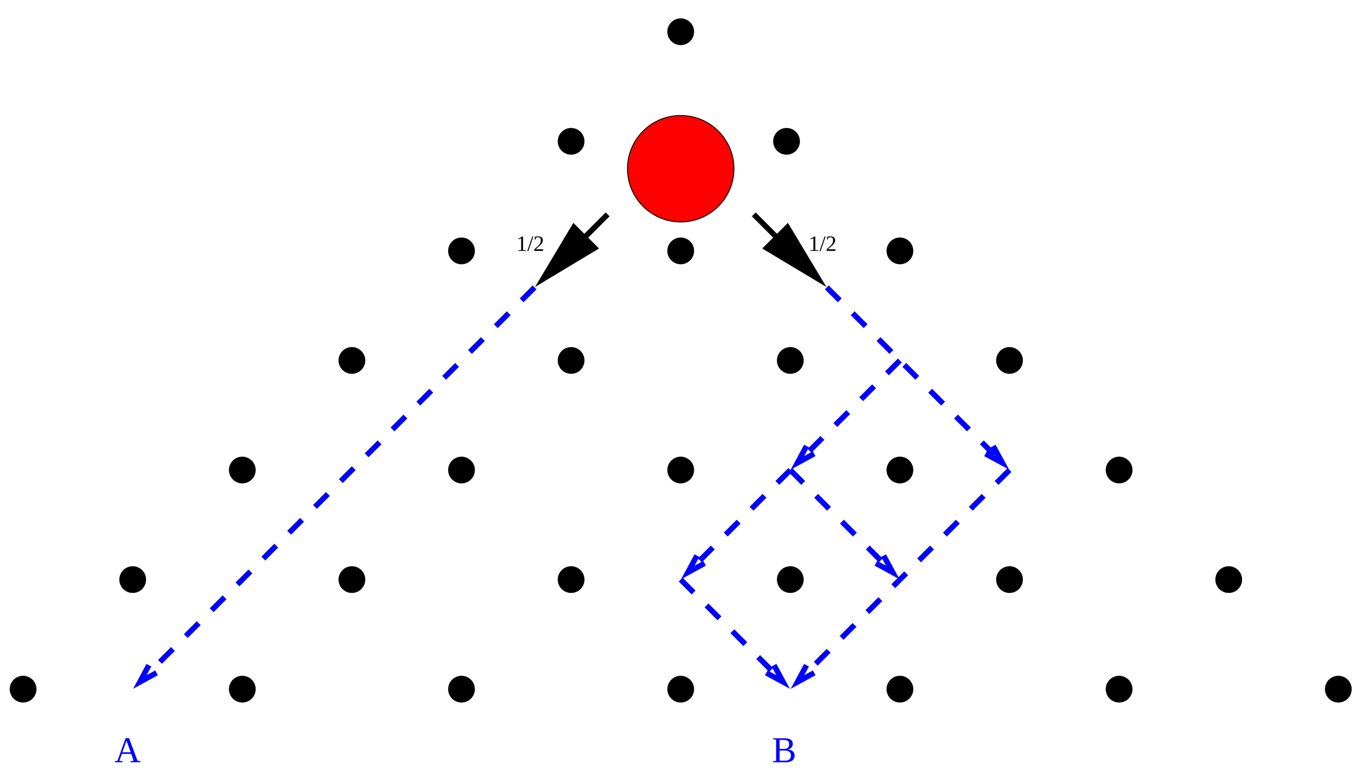
Fête de la Science 2006

Mathématique du hasard

La planche de Galton : où vont tomber les billes ?



1- On peut le voir avec des probabilités

Une bille a même probabilité 1/2 de tomber à gauche ou à droite lors du passage d'un niveau à un autre. Tous les chemins ont même probabilité.

Intuitivement ...
- un seul chemin arrive en A
- plusieurs chemins arrivent en B

$\Rightarrow$ la probabilité que la bille arrive en B est plus grande que la probabilité qu'elle arrive en A

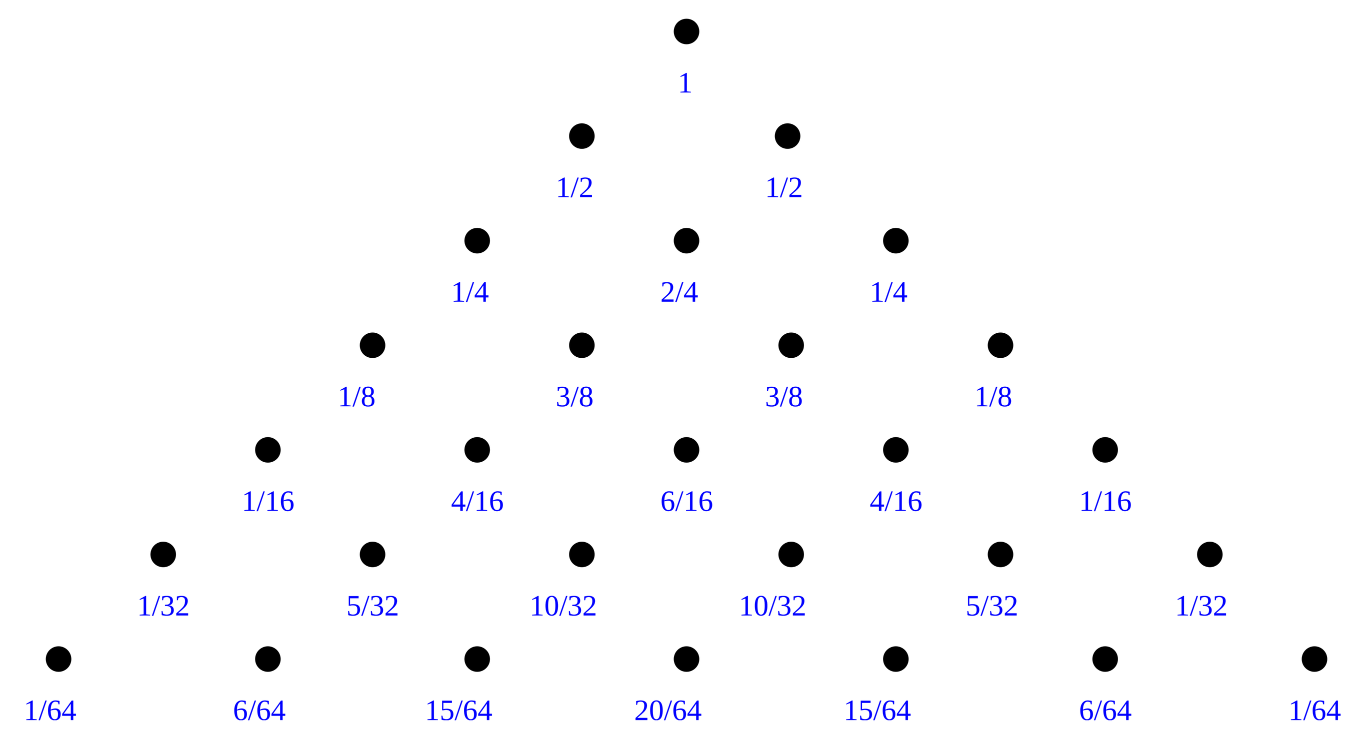
2- Des probabilités plus compliquées ...

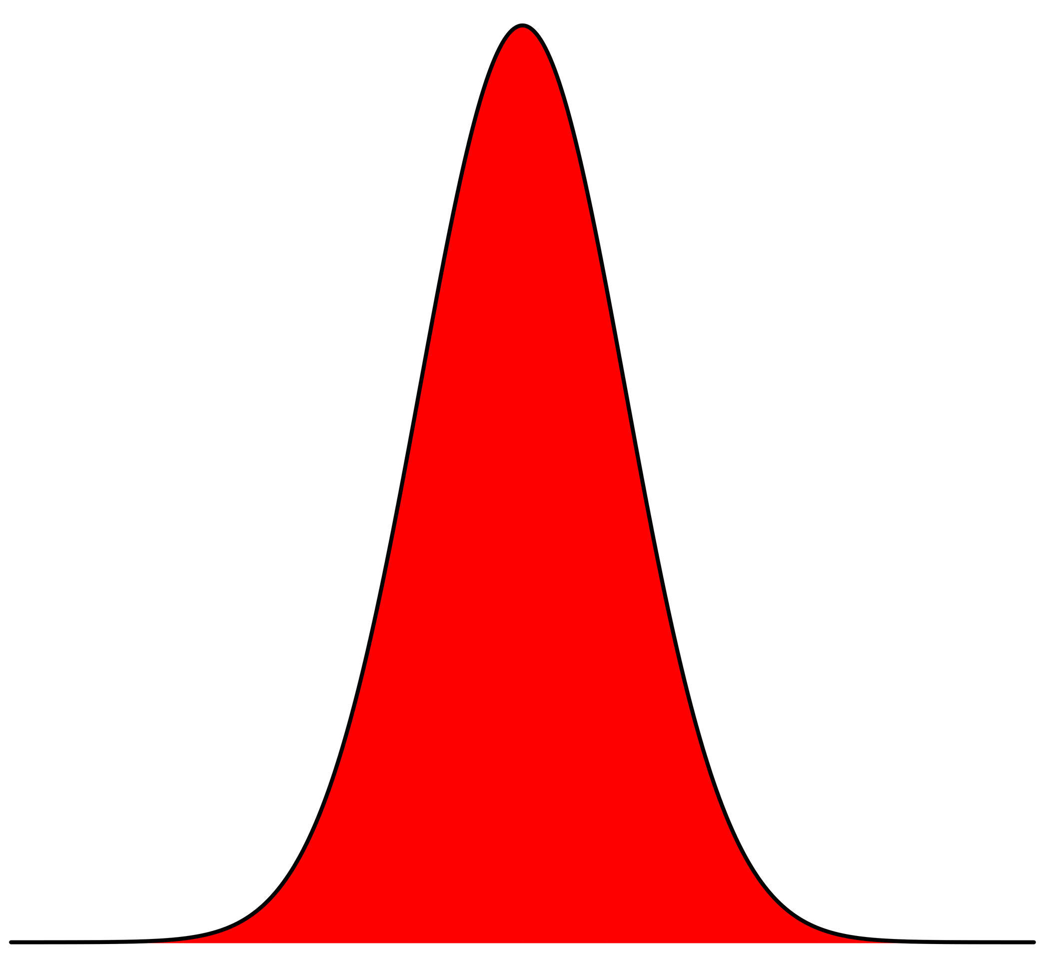
Comme tous les chemins sont équiprobables, la probabilité qu'une bille arrive dans une colonne donnée est

$$\frac{\text{nombre de chemins qui y aboutissent}}{\text{nombre total de chemins}}$$

C'est la loi Binomiale de paramètre 1/2. La probabilité que la bille arrive à la k-ième colonne au n-ième niveau est donnée par la formule

$$\frac{k!}{n!(n-k)!} = \frac{1 \times 2 \times \ldots \times k}{(1 \times 2 \times \ldots \times n)(1 \times 2 \times \ldots \times n-k)}$$





3- Que se passe-t-il avec beaucoup de billes ?

Si le nombre de billes devient grand

$\rightsquigarrow$ la proportion des billes dans chacune des colonnes va suivre approximativement la loi donnée par le graphique ci-dessus

A mesure que les nombres de clous et de billes deviennent grands

$\rightsquigarrow$ la courbe de répartition des billes va se stabiliser pour donner une courbe en cloche connue : c'est la courbe de la **loi Gaussienne** (ou "loi Normale").

Ce phénomène illustre un théorème fondamental en Probabilité et en Statistique : le **"théorème central limite"**.

Si X_n est la variable aléatoire qui correspond à la colonne d'arrivée de la bille au n-ième niveau alors $2(X_n - n/2)/\sqrt{n}$ tend vers une loi Gaussienne ("centrée" et "réduite")

Un grand merci à l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) pour la planche de Galton