Master 2-MF en l'année académique 2020/21
Probabilités

Zakaria Belhachmi, Jean Bérard, Areski Cousin, Nicolas Juillet,
Lionel Lenôtre, Vlada Limic, Vincent Vigon, Martin Vogel, Xiaolin Zeng

1 Présentation du parcours

Le master de Mathématiques Fondamentales est conçu à la fois comme une ouverture aux études doctorales et comme un diplôme terminal. Son objectif essentiel est l'initiation à la recherche en mathématiques. A l'issue de sa formation, l'étudiant sera à même de comprendre les bases, les grandes orientations, et les questions fondamentales qui orientent la recherche actuelle dans le domaine des Probabilités, ainsi que leurs liens avec d'autres champs des mathématiques. Les étudiants ayant montré une motivation et une aptitude suffisantes ont vocation à entreprendre par la suite une recherche personnelle, sous la forme d'une thèse de doctorat dirigée par un mathématicien confirmé.

L'intitulé "Probabilités" de ce programme de master regroupe une introduction aux probabilités sur les structures discrètes, une introduction au calcul stochastique, un cours sur le transport optimal stochastique, un cours sur les probabilités en physique statistique et quantique, ainsi qu'un cours introductif à l'analyse mathématique d'images par des méthodes déterministes et stochastiques. Les Probabilités, domaine relativement récent des Mathématiques (quand on le compare par exemple à la Géométrie ou l'Arithmétique) se situent à la confluence des mathématiques pures et appliquées. Le programme du master reflète ce constat. Dans chacun des cinq cours apparaissent des interactions attendues avec la physique, l'économie, les sciences du vivant ainsi qu'avec des domaines mathématiques tels que l'analyse ou la géométrie.

Le parcours s'articule autour des 2 cours fondamentaux suivants

— Probabilités sur des structures discrètes par J. Bérard et X. Zeng,

— Les processus stochastiques autour du mouvement brownien par V. Limic et A. Cousin,

et des 3 cours avancés suivants

— Transport optimal par N. Juillet

— Opérateurs de Schrödinger aléatoires et mécanique statistique par M. Vogel et X. Zeng

— Introduction à l'analyse mathématique d'images : méthodes déterministes et stochastiques par Z. Belhachmi et L. Lenôtre

2 Détail des cours

2.1 Format

Chaque cours de 30 heures est accompagné de 20 heures de "séminaire" consacrées aux travaux dirigés, aux présentations d'articles et à des compléments présentés par les étudiants. Des TP encadrés par V. Vigon seront aussi proposés dans ce cadre.

Les cours du premier trimestre présentent des contenus fondamentaux. Les cours de deuxième trimestre sont plus proches des recherches contemporaines. Les étudiants sont encouragés à assister à tous les cours au moins au début du trimestre. Le troisième trimestre est réservé à la recherche et à la rédaction du mémoire.

2.2 Trimestre 1 : cours fondamentaux

2.2.1 Probabilités sur des structures discrètes – J. Bérard et X. Zeng

Le cours s'articule autour de plusieurs modèles fondamentaux de probabilités sur des structures discrètes, et des méthodes développées pour les étudier. Il a pour objectif de donner un aperçu d'une partie importante des probabilités discrètes, et conduit à une grande variété de thématiques, dont les modèles épidémiques, les marches aléatoires et la physique statistique.

Les sujets abordés dans ce cours seront les suivants :
- Processus de Poisson sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^d$.
- Processus de Markov : chaînes de Markov (rappels), marches aléatoires sur les graphes, systèmes de particules en interaction, Théorème central limite pour les martingales et applications.
- Processus de branchement.
- Une introduction au système dynamique probabiliste : Théorème ergodique de Birkhoff, théorème ergodique sous-additif et applications.
- Une introduction à la percolation sur $\mathbb{Z}^d$.

2.2.2 Les processus stochastiques autour du mouvement brownien – V. Limic et A. Cousin

Vlada Limic sera en charge des huit premières semaines et Areski Cousin des deux dernières.
- Le cours commencera par un rappel sur l'espérance conditionnelle, ainsi que des modes de convergence les plus souvent utilisés en probabilités.
- Les 2 à 3 semaines suivantes seront dédiées à une étude approfondie des martingales en temps discret, à leur comportement asymptotique (autour des inégalités maximales de Doob). Le mouvement brownien sera alors introduit comme la limite d'échelle (en distribution) des marches aléatoires. Certains détails seront omis. Au-delà de la théorie discrète viendra la théorie des martingales continues en temps continu dont le mouvement brownien est l'exemple phare. Il possède précisément cette double propriété utile à la construction d'un calcul stochastique : c'est à la fois martingale et un processus continu. D'autres bonnes propriétés vérifiées par le mouvement brownien seront présentées : c'est un processus de Markov, une processus gaussien et un processus auto-similaire.
- Les 3 à 4 semaines qui suivront seront consacrées à la construction du calcul stochastique d'Itô, à la formule d'Itô, au theorème de Girsanov, aux équations différentielles stochastiques, et si le temps le permet aux martingales locales, aux processus de Bessel, et à la formule d'Feynmann-Kac.
- Le neuvième semaine introduira le problème d'évaluation d'actifs financiers en absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Dans un cadre brownien, nous montrerons que l'AOA revient à supposer l'existence d'une mesure dite risque-neutre, sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.
- La dixième semaine sera consacrée au modèle de Black et Scholes d'évaluation et de couverture d'options européennes. Ce modèle considère que la dynamique du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique. Nous montrerons qu'en AOA, le prix d'une option européenne est solution de l'EDP (dite de Black et Scholes). Nous expliquerons comment exprimer la solution de cette EDP comme l'espérance, sous la probabilité risque-neutre, du payoff futur actualisé (raisonnement analogue à la démonstration de Feynmann-Kac). Nous montrerons comment obtenir rapidement la formule de Black-Scholes (donnant le prix d'une option européenne de manière analytique) en utilisant astucieusement le théorème de Girsanov.

2.3 Trimestre 2 : cours spécialisés

2.3.1 Transport optimal – N. Juillet

Définit par Gaspard Monge en 1781 le problème des déblais et des remblais consiste à déplacer un « tas » $\mu \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$ vers un « trou » $\nu \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$, dont les formes sont prescrites, pour le moindre coût/effort global. En termes probabilistes il s'agit d'un problème d'optimisation sur les applications de transport T telles que la loi de $T(X)$ épouse la forme du déblais ν, là où X est distribué selon le remblais μ. Quant au problème de transport relâché de Kantorovich, introduit en 1942, on ne minimise non plus seulement sur les couplages $(X, T(X))$ mais directement sur les lois jointes (X, Y) couplant μ et ν, (c'est à dire que μ et ν doivent êtres les marginales de X et Y), autorisant donc la masse transportée à partir $X = x$ à se diviser selon le noyau de transport $\mathrm{Law}(Y | X = x)$.

Ces problèmes anciens sont au centre de l'attention d'une communauté de mathématiciens et mathématiciennes spécialisés dans différents domaines tels que les probabilités, l'analyse et la géométrie. Ils y puisent l'inspiration pour des applications à des problèmes variés (théorèmes limites, courbure, inégalités isopérimétriques, ÉDP, économie et finance, processus stochastiques, physique mathématique).

Ce cours se conçoit comme une introduction à la théorie (désormais) classique du transport optimal (existence et unicité de solutions au problèmes de Monge et Kantorovich, problème dual, cyclique monotonie, problème dynamique) accompagnée d'exemples (cas de la droite réelle, cas des mesures discrètes, cas des lois normales et autres exemples élémentaires). L'emphase sera faite sur les probabilités (distance de Kantorovich-Rubinstein et de Wasserstein, autres distances entre mesures de probabilités et applications aux théorèmes limites ainsi qu'aux méthodes de couplage) et la théorie des processus (couplages co-adaptés, transport martingale, transport faible, transport entropique, plongement de Skorokhod). D'autres thèmes sont envisagés : transport muti-marginal (notamment pour le potentiel de Coulomb), inégalités fonctionnelles et géométriques, interpolation de déplacement et équation de continuité, désintégration et localisation.

Comme références nous suggérons le 1er livre de C. Villani Topics in optimal transportation, celui de F. Santambrogio Optimal transport for applied mathematicians, le User's guide to optimal transport de Ambrosio et Gigli, les Five Lectures on optimal transportation de McCann et Guillen, les deux tomes de Mass transportation problems de Rachev et Rüchendorf.

2.3.2 Opérateurs de Schrödinger aléatoires et mécanique statistique – M. Vogel et X. Zeng

En physique, l'étude des phénomènes d'un système peut nécessiter une modélisation à diverses échelles. Dans ce cours, nous introduisons deux modèles classiques agissant respectivement sur l'échelle mésoscopique et atomique.

Les mécaniques statistiques visent à expliquer les phénomènes physiques produits par un grand nombre de particules en interaction. En particulier des transitions de phase pour certaines propriétés physiques d'un matériel (telle que sa magnétisation ou sa conductivité) dépendant de paramètres ambiants (la température ou la pression par exemple) ont été démontrées dans beaucoup de modèles physiques.

Dans ce cours introductif de mécanique statistique, nous allons étudier la transition de phase du modèle de Lenz–Ising. Nous introduirons par la même occasion le langage de la mécanique statistique, en abordant des concepts comme l'énergie libre, la fonction de partition, la magnétisation, la longueur de corrélation, etc.

Dans la **mécanique quantique** (non-relativiste), théorie consolidée au cours de la première partie du 20e siècle, une particule quantique se déplaçant dans l'espace plat d-dimensionnel est décrit par un vecteur ψ, appelé *fonction d'onde*, qui appartient à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$. Son évolution dans le temps est décrite par *l'équation de Schrödinger*,

$$i\partial_t \psi = H\psi,$$

proposée/postulée par Erwin Schrödinger en 1925. Dans cette célèbre équation H est un opérateur auto-adjoint représentant l'énergie cinétique et potentielle de la particule. Il s'exprime par $H = -\Delta + V$, où Δ est le Laplacien et, le *potentiel* V est une fonction dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ agissant comme un opérateur de multiplication. Le potentiel encode l'environnement physique dans lequel évolue la particule. Cependant, comme souvent en physique, le « vrai » potentiel contient beaucoup de paramètres dont certains sont non-controlés, tel que par exemple un conducteur contenant des impuretés. Ces « inconnues » peuvent être modélisées par un potentiel aléatoire, qui, dans un langage plus probabiliste, est un processus stochastique, ce qui fait par conséquent de la fonction d'onde ψ un objet probabiliste.

Dans ce cours nous allons introduire le modèle d'Anderson discret H – un opérateur de Schrödinger aléatoire discret agissant sur $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ au lieu de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Nous allons rappeler quelques éléments de la théorie spectrale et ensuite nous concentrer sur les propriétés probabilistes et ergodiques de H et de son spectre, comme la proprité du spectre d'être déteministe, l'existence de la densité d'états et l'estimée de Wegner, les queues de Lifschitz et la localisation d'Anderson. Si le temps le permet nous discuterons aussi de la statistique poissonienne du spectre dans la phase localisée.

Références :

Mécanique statistique

- *Statistical mechanics of lattice systems*, Friedli et Velenik.
- *Markov random fields and applications*, Kindermann et Snell

Opérateurs de Schrödinger aléatoire

- *Random Schrödinger Operators*, M. Disertori, W.Kirsch, A. Klein, F. Klopp, V. Rivasseau, Panoramas et Synthèses 25, Soc. Math. France, Paris, 2008.
- *Spectra of Random and Almost-Periodic Operators*, L. Pastur, A. Figotin, Grundlehren Math. Wiss. 297, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*, R. Carmona, J. Lacroix, Birkhäuser Boston, 1990.
- *Finite-volume fractional-moment criteria for Anderson localization*, M. Aizenman, J. H. Schenker, R. M. Friedrich, D. Hundertmark, Comm. Math. Phys. 224, 219–253, 2001.

2.3.3 Introduction à l'analyse mathématique d'images : méthodes déterministes et stochastiques – Z. Belhachmi et L. Lenôtre

En physique ou dans les sciences du vivant, pour l'analyse mathématique de nombreux phénomènes d'intérêt, les méthodes stochastiques et déterministes (basées sur des équations aux dérivées partielles -EDP-) sont complémentaires et parfois très étroitement liées.

L'analyse mathématique d'images et la vision par ordinateur offrent une bonne illustration de cette synergie. D'autre part, de nouveaux défis dans ce domaine de l'imagerie appellent au développement de stratégies mixtes aussi bien pour la modélisation que pour la résolution numérique des problèmes considérés.

Ce cours constitue une introduction ce domaine, très actif en recherche, de l'analyse mathématique de l'image et de la vision par ordinateur avec des méthodes stochastiques et déterministes des EDP. À partir d'exemples, toujours d'actualité, comme la reconnaissance de formes, la segmentation ou la vision par ordinateur, nous aborderons la modélisation élaborée dans le cadre des deux approches. La première partie du cours s'attachera à établir les différents modèles et à en faire l'analyse. Une deuxième partie du cours traitera des méthodes numériques et algorithmes, y seront abordés en particulier les méthodes d'optimisation déterministes ou stochastiques et les méthodes de Monte-Carlo par Chaines de Markov : algorithmes de Hasting-Metropolis, échantilloneurs de Gibbs.

Une partie (exploratoire) du cours sera dédiée aux stratégies mixtes et l'hybridation des méthodes déterministes et stochastiques, particulièrement du point de vue numérique, qui est un domaine en plein essor.

2.4 Trimestre 3 : mémoire de recherche

1. Le stage de recherche dure au moins 4 mois, d'avril à juillet. Il peut avoir lieu à l'IRMA ou dans un autre laboratoire, en France ou à l'étranger.
2. Le stage donne lieu à un mémoire et une soutenance (exposé de 45 min, suivi de questions) devant un jury formé de chercheurs de l'IRMA.

3. Le stage consiste en l'étude d'un domaine de la recherche actuelle. L'objectif n'est pas nécessairement d'apporter une contribution originale, mais une bonne compréhension du sujet abordé et une présentation de qualité sont indispensables.

Les étudiants sont aussi encouragés à participer aux colloquia de l'IRMA et à certains séminaires de recherche.

3 Master Class - du 20 au 24 janvier 2019

Des “Master Classes” de probabilités se sont déroulées à Strasbourg la semaine du 20 janvier 2020. Quatre conférenciers ont offert aux participants (plus de 40 étudiants de M1 ou M2, de Strasbourg, d'autres universités françaises ou pour moitié d'universités étrangères) la possibilité d'avoir un aperçu vivant et interactif de sujets de recherche actuels.

— Régine Marchand (IHC Nancy) *Introduction au principe de grandes déviations*
— Sébastien Martineau (LPSM Paris) *Percolation sur les groupes / Percolation on groups*
— Marielle Simon (INRIA Lille) *Marches aléatoires sur* $\mathbb{Z}$ / *Random walks on* $\mathbb{Z}$
— Dario Trevisan (Uni. Pisa) *Random Euclidean Bipartite Matching Problems*

`http://irma.math.unistra.fr/stochastique/mc2020/mr-unistra/`