

# RECALAGE D'ORGANES PAR CONTRÔLE OPTIMAL

Stéphane Cotin<sup>b</sup>, Ryadh Haferssas<sup>b</sup>, Guillaume Mestdagh<sup>a</sup>, Yannick Privat<sup>a</sup>



<sup>a</sup> Institut de Recherche Mathématique Avancée  
UMR 7501, Université de Strasbourg et CNRS  
7 rue René-Descartes  
67084 Strasbourg Cedex.



<sup>b</sup> Inria – Équipe Mimesis  
IHU Strasbourg  
1, place de l'Hôpital  
67000 Strasbourg

## Position du problème

**Objectifs :** au cours d'une opération chirurgicale, localiser en temps, réel une tumeur dans le foie d'un patient en vue de son extraction.

**Méthode :** reconstruction du champ de déformation de l'organe à partir de données incomplètes

**Données disponibles :** – images pré-opératoires détaillées montrant l'organe dans sa configuration de référence  
– mesure en temps réel de la position d'une partie de la frontière de l'organe

**Approche choisie :** formulation d'un problème de contrôle optimal

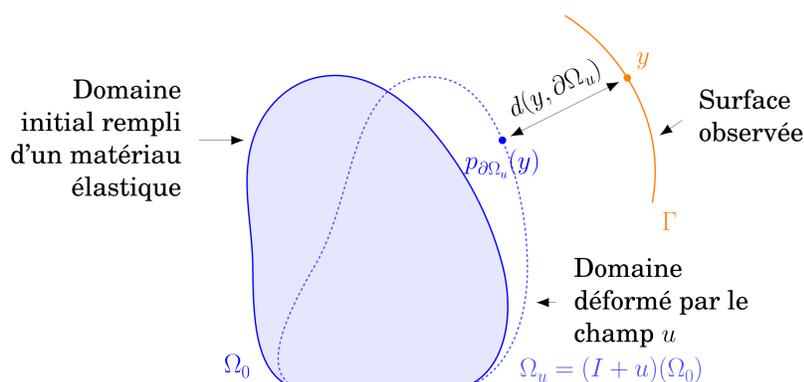
## Modélisation du problème

### Modèle mécanique de l'organe

- Configuration de référence représentée par le domaine  $\Omega_0$ , ouvert de  $\mathbb{R}^d$ .
- Champ de déplacement  $u \in H^1(\Omega_0, \mathbb{R}^d)$  qui transforme  $\Omega_0$  en  $\Omega_u$ .
- Organe soumis à un chargement de surface  $g \in L^2(\partial\Omega_N, \mathbb{R}^3)$

#### Équation d'élasticité linéaire

$$\begin{cases} \operatorname{div}(A\varepsilon(u)) = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_D \\ A\varepsilon(u) \cdot n = g & \text{sur } \partial\Omega_N \end{cases}$$



### Données mesurées

- Surface  $\Gamma$  de dimension  $d - 1$  représentant la partie observée de la paroi de l'organe.
- Le champ de déplacement  $u$  doit vérifier  $\Gamma \subset \partial\Omega_u$

#### Fonctionnelle à minimiser

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} d^2(y, \partial\Omega_u) dy$$

## Problème d'optimisation

### Traitement de la fonctionnelle

- $J$  Fréchet-différentiable si presque tous les points de  $\Gamma$  ont une unique projection orthogonale sur  $\partial\Omega_u$ .

$$dJ(u) \cdot w = \int_{\Gamma} w(y) \cdot (p_{\partial\Omega_u}(y) - y) dy$$

#### Extension-régularisation

La direction de descente  $w \in H^1_{\partial\Omega_D}(\Omega_0)$  vérifie

$$\forall v \int_{\Omega_0} A\varepsilon(w) : \varepsilon(v) dx = dJ(u) \cdot v$$

### Problème de commande optimale

- Traitement du bruit sur les données par ajout d'une pénalisation

$$R(g) = \|g\|_{L^2}^2 \text{ ou } \|g\|_{H^1}^2$$

Trouver  $u \in H^1_{\partial\Omega_D}(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega_N)$  solutions de

$$\min_{u,g} J(u) + \alpha R(g),$$

sous la contrainte

$$\forall v \int_{\Omega_0} A\varepsilon(u) : \varepsilon(v) dx = \int_{\partial\Omega_N} g \cdot v ds$$

- Minimisation par une méthode d'adjoint combinée à l'extension-régularisation

## Travaux futurs

- Problème de contrôle optimal avec contrainte ponctuelle sur la norme du contrôle

$$\min_{u,g} J(u) \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \forall v \int_{\Omega_0} A\varepsilon(u) : \varepsilon(v) dx = \int_{\partial\Omega_N} g \cdot v ds \\ \|g\| \leq M \quad \text{sur } \partial\Omega_N \end{cases}$$

- Fonctionnelle robuste pour tenir compte de l'erreur sur les données

$$J_r(u) = \max_{\|\xi\| < \alpha} \int_{(I+\xi)\Gamma} d^2(y, \partial\Omega_u) dy$$

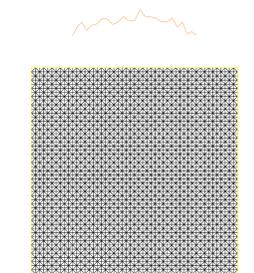
- Application à un modèle plus réaliste (modèle hyperélastique non-linéaire en dimension 3)
- Prise en compte du temps et de la variation des données

## Discrétisation par éléments finis

- Données sous forme d'un nuage de points bruité
- Résolution par descente de gradient accélérée
- Tolérance sur les conditions d'optimalité :  $10^{-4}$

Problème sans pénalisation

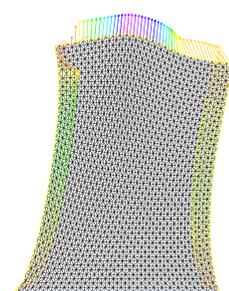
Problème avec pénalisation  $H^1$



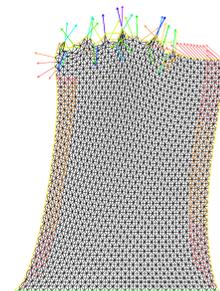
Conditions initiales



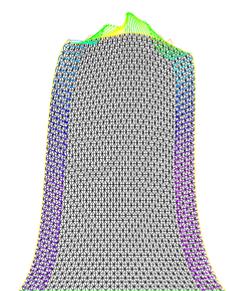
Itération 100



Itération 100



Convergence (it. 1683)



Convergence (it. 15593)

- Convergence difficile du contrôle due à de mauvaises propriétés numériques
- Prise en compte du bruit à affiner