Polynômes et séries entières sur le corps des nombres p-adiques

Master Class *Arithmétique et Géométrie Algébrique*

Xavier Caruso

À l'instar des nombres réels, le corps des nombres p-adiques, traditionnellement noté $\mathbf{Q}_p$ s'obtient à partir de $\mathbf{Q}$ par complétion pour une valeur absolue. À cet égard, il joue un rôle de première importance dans la théorie algébrique des nombres, comparable par certains aspects au rôle que jouent les nombres réels en analyse. En guise exemple, citons la compréhension de la mécanique des corps de nombres (les extensions finies de $\mathbf{Q}$), ou encore la résolution des équations quadratiques (à plusieurs inconnues) sur $\mathbf{Q}$, qui font tous les deux intervenir comme ingrédient essentiel les nombres p-adiques.

Parmi les objets p-adiques incontournables, il y a bien entendu, aux premières loges, les polynômes puis les séries entières. L'objectif de ce cours est d'entamer l'étude de ces objets dans le cas d'une seule variable. Nous nous intéresserons particulièrement au comptage, à la localisation et au calcul (théorique et algorithmique) des racines des polynômes et des séries entières p-adiques. Cela nous conduira, au passage, à établir un analogue du théorème des zéros isolés. Dans la même veine mais dans une registre différent, nous démontrerons qu'un polynôme dont les coefficients sont des entiers p-adiques choisis de manière aléatoire a, en moyenne, exactement une racine dans $\mathbf{Q}_p$, ceci indépendamment de p et du degré (pourvu qu'il soit au moins égal à 1).

Bien que les nombres p-adiques soient généralement considérés comme une construction des algébristes, les arguments que nous utiliserons seront presque toujours de nature analytique et, lorsque ce n'est pas le cas, ils seront de nature combinatoire. Nous ferons en particulier un usage fréquent (d'un analogue p-adique) de la méthode de Newton qui est classique en analyse traditionnelle et permet de résoudre — très efficacement — des équations de la forme $f(x) = 0$ lorsque f est une fonction dérivable (vérifiant certaines hypothèses supplémentaires). En ce qui concerne la combinatoire, nous associerons à chaque polynôme ou série entière p-adique $f(x)$ un polygone de Newton (encore lui !) qui, comme nous le verrons, encode de manière particulièrement visible, agréable et efficace, l'agencement des racines de $f(x)$ et, de manière plus générale, de ses facteurs de tout degré.