# DYNAMIQUE D'OBJETS DISPERSIFS NON LINÉAIRES


Université de Strasbourg

IRMA Institut de Recherche Mathématique Avancée

Alexander SEMENOV

semenov@math.unistra.fr

*Sous la direction de Raphaël Côte*

cnrs


## Equations de Korteweg-de Vries

L'équation de Korteweg-de Vries généralisée prend la forme

$$\partial_t u + \partial_x(\partial_{xx} u + u^k) = 0 \qquad \text{(gKdV)}$$

où

- $u : (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longmapsto u(t,x) \in \mathbb{R}$
- $k \geq 2$ désigne le degré de la non-linéarité. Lorsque $k = 2$, il s'agit de l'**équation de Korteweg-de Vries** (KdV). Lorsque $k = 3$, il s'agit de l'**équation de Korteweg-de Vries modifiée** (mKdV). Lorsque $k < 5$, on dit qu'on est dans le cas $L^2$**-sous-critique**.

Lorsque $k < 5$, si la donnée initiale est dans $H^1$, alors le problème de Cauchy est globalement bien posé dans $C_b(\mathbb{R}, H^1)$. Pour (KdV), il suffit que la donnée initiale soit dans $H^{-3/4}$. Pour (mKdV), il suffit que la donnée initiale soit dans $H^{1/4}$.

## Solitons de (gKdV)

**Définition.** *On appelle* ***soliton*** *une solution de (gKdV) de la forme $R_c(x; x_0) = Q(x - x_0 - ct)$ où $Q \in H^1$ est positive, paire, non nulle, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.*

On a nécessairement $c > 0$ et on a une expression explicite pour $Q$ en fonction de $c$ et de $k$ :

$$Q(x) = \left(\frac{(k+1)c}{2\cosh^2\left(\sqrt{c}\left(\frac{k-1}{2}\right)x\right)}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

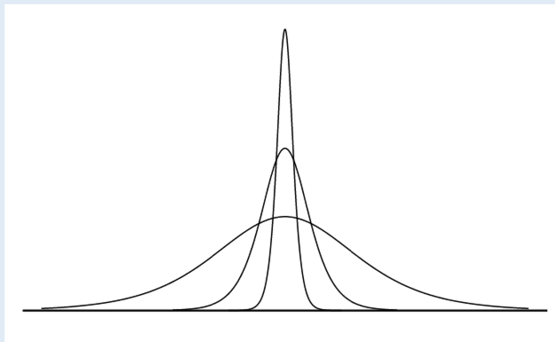

**Figure 1** – Trois solitons de vitesses $c$ différentes. Plus $c$ est grand, plus le soliton est grand et étroit. Un soliton se propage à vitesse constante $c$ vers la droite et sans déformation.

## Breathers de (mKdV)

**Définition.** *Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, un* ***breather*** *de (mKdV) est donné par :*

$$B_{\alpha,\beta}(t,x;x_1,x_2) = 2\sqrt{2}\partial_x\left[\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\sin(\alpha y_1)}{\cosh(\beta y_2)}\right)\right],$$

*où $y_1 := x + \delta t + x_1$, $y_2 := x + \gamma t + x_2$, $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$.*

On peut voir un breather comme une fonction périodique en temps qui, en plus, se propage à vitesse constante. La vitesse de propagation est $-\gamma$. Contrairement à un soliton, elle peut être de signe quelconque.

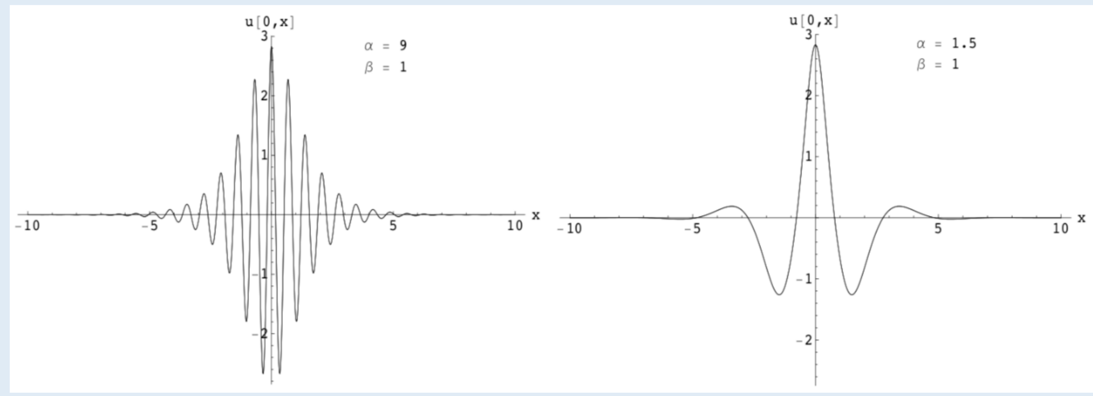

**Figure 2** – A gauche, un breather avec des paramètres $\alpha = 9$ et $\beta = 1$. A droite, un breather avec des paramètres $\alpha = 1,5$ et $\beta = 1$.

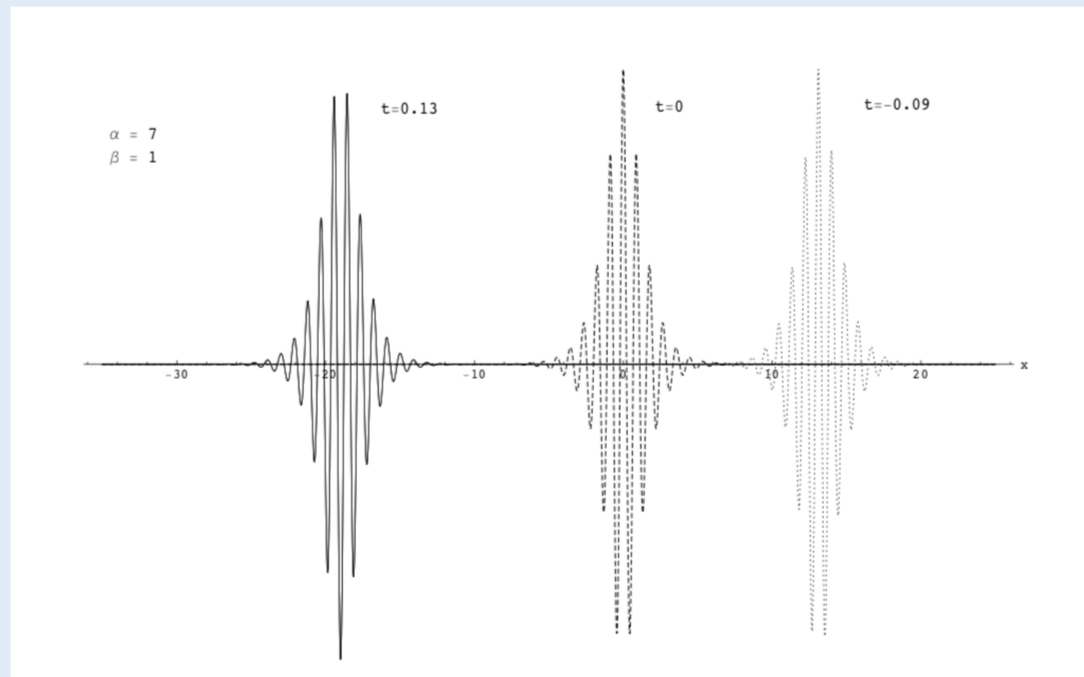

**Figure 3** – Evolution d'un breather au cours du temps. Ce breather se déplace vers la gauche.

Lorsque $\alpha \to 0$, $B_{\alpha,\beta}$ peut être vu comme convergeant vers $R_{\beta^2}$. Ainsi, un soliton peut être vu comme un breather particulier.

## Multi-solitons de (gKdV) et multi-breathers de (mKdV)

**Définition.** *Un* ***multi-soliton de (gKdV)*** *est une solution $u : t \to u(t) \in H^1(\mathbb{R})$ définie et continue pour $t$ assez grand, et telle que*

$$\lim_{t\to+\infty}\left\|u(t) - \sum_{k=1}^{K} R_k(t)\right\|_{H^1} = 0,$$

*où $R_1, \ldots, R_K$ sont des solitons de (gKdV).*

**Définition.** *Un* ***multi-breather de (mKdV)*** *est une solution $u : t \to u(t) \in H^2(\mathbb{R})$ définie et continue pour $t$ assez grand, et telle que*

$$\lim_{t\to+\infty}\left\|u(t) - \sum_{k=1}^{K} P_k(t)\right\|_{H^2} = 0,$$

*où $P_1, \ldots, P_k$ sont des solitons ou des breathers de (mKdV).*

## Historique des résultats sur la dynamique des solitons et des breathers

| | |
|---|---|
| **1972 (Cazenave, Lions)** | Stabilité orbitale $H^1$ des solitons de l'équation de Schrödinger non linéaire [6]. |
| **1986 (Weinstein)** | Stabilité orbitale $H^1$ des solitons de (gKdV) [5]. |
| **2001 (Martel, Merle)** | Stabilité asymptotique des solitons de (gKdV) [8]. |
| **2002 (Martel, Merle, Tsai)** | Stabilité orbitale et stabilité asymptotique dans $H^1$ d'une somme de solitons de (gKdV) [4]. |
| **2005 (Martel)** | Existence et unicité dans $H^1$ d'un multi-soliton de (gKdV) pour un ensemble donné de solitons de vitesses deux à deux distinctes. Existence dans $H^s$ pour $s \geq 1$ [2]. |
| **2013 (Alejo, Muñoz)** | Stabilité orbitale $H^2$ des breathers de (mKdV) [1]. |
| **2019 (Chen, Liu)** | Résolution en solitons et en breathers de (mKdV) [7]. |

## Nouveaux résultats d'existence et de régularité

*Points de départ* : démonstrations du théorème d'existence des multi-solitons de l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) [3], de la stabilité orbitale des breathers de (mKdV) [1] et de l'existence des multi-solitons de (gKdV) [2].

*Résultats* : construction de multi-breathers de (mKdV) à valeurs dans $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 2$. Plus précisément, en notant $v_1 < \ldots < v_K$ les vitesses de $P_1, \ldots, P_K$ :

**Proposition.** *Il existe $T_0 > 0$, $\theta > 0$ indépendant de $s$ et $u \in \mathscr{C}([T_0, +\infty[, H^s(\mathbb{R}^d))$ solution de (mKdV) tels que*

$$\forall\, t \geq T_0, \quad \|u(t) - \sum_{k=1}^{K} P_k(t)\|_{H^s} \lesssim e^{-\theta t}.$$

*Idées de la preuve* :

- On construit d'abord le multi-breather dans $H^2$ qui vérifie la propriété recherchée de convergence exponentielle. On adapte pour cela la stratégie de [3]. On fait l'adaptation du cas des multi-solitons de (NLS) au cas des multi-breathers de (mKdV) en utilisant une fonctionnelle de Lyapunov adaptée aux breathers qu'on trouve dans [1], il s'agira d'une fonctionnelle définie sur $H^2$ alors que pour les solitons il suffisait d'utiliser une fonctionnelle définie sur $H^1$.
- Les $P_k$ pouvant être des solitons ou des breathers, on considère les solitons et les breathers comme des objets de même nature, en considérant les solitons comme objet-limite des breathers et en utilisant ainsi la structure $H^2$ des solitons. Un soliton de vitesse $c$ est vu comme un breather de paramètres $\alpha = 0$ et $\beta = \sqrt{c}$.
- La fonctionnelle de Lyapunov est contruite à partir des trois premières quantités conservées de (mKdV), localisées autour des $P_k$. (mKdV) a une infinité de quantités conservées car c'est une équation intégrable.
- Pour $(T_n)$ une suite strictement croissante (où $\forall n \geq 1, T_n \geq T_0$), on pose $(u_n)$ une suite de solutions de (mKdV) telle que $u_n(T_n) = \sum_{k=1}^{K} P_k(T_n)$. On vérifie que $\|u_n(t) - \sum_{k=1}^{K} P_k(t)\|_{H^2} \lesssim e^{-\theta t}$ pour $t \in [T_0, T_n]$ (c'est la partie principale de la preuve, qui se prouve par un argument de bootstrap). Par un argument de compacité, on montre que $(u_n)$ converge dans $H^2$ vers une solution de (mKdV) $u$ qui vérifie l'inégalité désirée.
- Pour démontrer que la convergence exponentielle a aussi lieu dans $H^s$, on adapte la preuve du fait similaire de [2].

## Nouveaux résultats d'unicité

On s'intéresse à un résultat d'unicité des multi-breathers pour (mKdV) analogue à celui établi par Martel dans [2] pour les multi-solitons de (gKdV).

Toutefois, on ne sait pas démontrer l'unicité pour un ensemble de solitons et de breathers de vitesses deux à deux distinctes quelconque. On sait le prouver pour des solitons et des breathers qui se déplacent vers la droite. Plus précisément, en notant $v_1 < \ldots < v_K$ les vitesses de $P_1, \ldots, P_K$ :

**Proposition.** *Si $v_1 > 0$, il existe une unique solution $u \in \mathscr{C}([T_0, +\infty), H^2(\mathbb{R}))$ de (mKdV) telle que*

$$\left\|u(t) - \sum_{k=1}^{K} P_k(t)\right\|_{H^2} \to_{t\to+\infty} 0.$$

**Remarques.**

- *Preuve fondée sur les arguments de "monotonie" adaptés de [2] qui ont été utilisés pour l'unicité des multi-solitons de (gKdV).*
- *Les arguments de "monotonie" ne fonctionnent plus pour des breathers de vitesse quelconque.*
- *Il est possible que la condition $v_1 > 0$ ne soit pas optimale.*

## Nouvelles perspectives de recherche

- Stabilité orbitale d'un multi-breather ? Peut-être de façon analogue à la stabilité des multi-solitons dans [8].
- Stabilité asymptotique des breathers de (mKdV) ? Peut-être qu'il y aura besoin de se restreindre aux breathers qui vont vers la droite s'il y aura besoin des arguments de "monotonie".

## Références


[1] M. Alejo, C. Muñoz, *Nonlinear stability of mKdV breathers*, Comm. Math. Phys. 37, 2050-2080, (2013).

[2] Y. Martel, *Asymptotic N-soliton-like solutions of the subcritical and critical generalized Korteweg-de Vries equations*, American Journal of Mathematics, vol. 127, no. 5, 1103-1140 (2005).

[3] Y. Martel, F. Merle, *Multisolitary waves for nonlinear Schrödinger equations*, Ann. I. H. Poincaré - AN 23, 849-864, (2006).

[4] Y. Martel, F. Merle, T.-P. Tsai, *Stability in $H^1$ of the sum of $K$ solitary waves for some nonlinear Schrödinger equations*, Duke Math J., vol. 133, no. 3, 405-466, (2006).

[5] M. I. Weinstein, *Lyapunov Stability of Ground States of Nonlinear Dispersive Evolution Equations*, Communication on Pure and Applied Mathematics, (1986).

[6] T. Cazenave, P.-L. Lions, *Orbital Stability of Standing Waves for Some Nonlinear Schrödinger Equation*, Springer-Verlag, (1972).

[7] G. Chen, J. Liu, *Soliton Resolution For The Modified KdV Equation*, preprint, (2019).

[8] Y. Martel, F. Merle, *Asymptotic Stability of Solitons for Subcritical Generalized KdV Equation*, Arch. Rational Mech. Anal. 157, 219-254, (2001).