Groupes Aléatoires

Modèle à densité de Gromov et transition de phase

Tsung-Hsuan TSAI

Institut des Recherche Mathématique Avancée

Introduction

L'idée de groupe aléatoire est due à M. Gromov, introduite en 1987 dans [3]. Un groupe aléatoire est défini par une présentation finie, dont on fixe un ensemble de générateurs et dont on choisit les relations au hasard.

Comment choisir des relations au hasard? Dans la première partie on introduit les *sous-ensembles aléatoires*, modèle de Bernoulli. On l'applique, dans la partie suivante, à la définition de groupes aléatoires. On énonce ensuite le premier résultat classique de M. Gromov [4] : la transition de phase à densité $d = 1/2$.

Le Freiheitssatz (théorème de liberté en allemand) est un résultat sur les groupes définis par une seule relation, qui dit que certains sous-groupes sont libres. C'est un théorème proposé comme sujet de thèse par M. Dehn à son étudiant W. Magnus ([6], 1930).

Dans la troisième partie, on étudie la version aléatoire du Freiheissatz. En 1996, le modèle à peu de relations est traité par G. Arzhantseva dans sa thèse sous la direction d'A. Olshanskii. Ici, on généralise leur résultat au modèle à densité. Cela permet de mettre en évidence de nouveaux phénomènes de transitions de phases dans le modèle à densité.

1 Sous-ensembles aléatoires

Soit E un ensemble fini de cardinal n. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensemble de E.

Définition ([4])**.** La *densité* d'un sous-ensemble $a \subset E$ est

$$\operatorname{dens}(a) = \frac{\log|a|}{\log|E|} = \log_n|a|. \tag{1}$$

Autrement dit, c'est une valeur $d \in \{-\infty\} \cup [0, 1]$ telle que $|a| = n^d$.

Définition. Un *sous-ensemble aléatoire* A de E est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$.

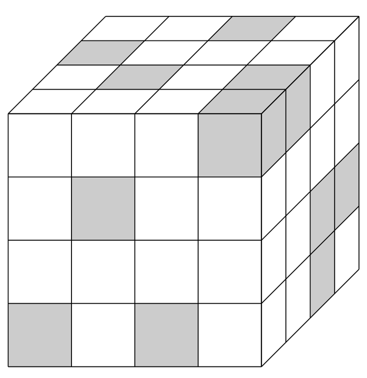
Soit $d \in]0, 1]$. On considère un sous-ensemble aléatoire A construit par un schéma de Bernoulli : Chaque élément $x \in E$ est pris indépendamment pour A avec la même probabilité $p = n^{d-1}$. On a les propriétés suivantes :

- $\mathbf{Pr}(x \in A) = p = n^{d-1}$.
- Si $a \subset E$ avec $|a| = k$, alors $\mathbf{Pr}(A = a) = p^k(1-p)^k$.
- $\mathbb{E}(|A|) = np = n^d$. (On a choisi p pour cela)

On l'appelle un **sous-ensemble aléatoire de Bernoulli de densité d**. Ce modèle est légèrement différent que celui de [4], dans lequel on choisit uniformément des sous-emsembles de cardinal fixé. On note aussi

$$\operatorname{dens}(A) = d.$$

Exemple. Soit $E = \{1, \ldots, m\}^3$ (un cube avec longueur latérale m). On considère un sous-ensemble aléatoire dont chaque triplet (petit cube) $(i, j, k) \in E$ est pris indépendamment avec la probabilité $1/m = m^{3(2/3-1)}$. C'est un sous-ensemble aléatoire de densité $2/3$.



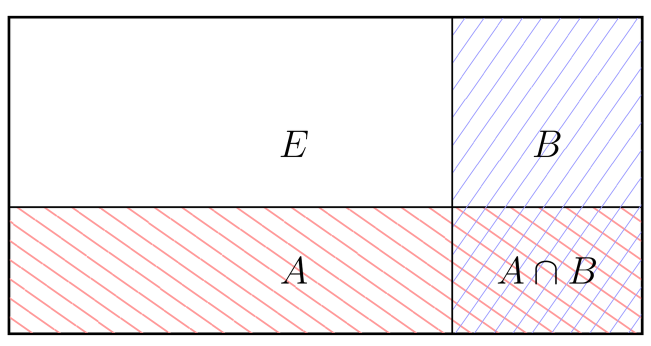
Définition. Soit $Q = (Q_n)$ une suite d'événements. On dit que Q_n est *asymptotiquement presque sûre* (a.p.s.) si

$$\mathbf{Pr}(Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Théorème 1 (Formule d'intersection, [4])**.** Soit $E = (E_n)$ une suite d'ensembles avec $|E_n| = n$. Soit $A = (A_n), B = (B_n)$ deux suites de sous-ensembles aléatoires indépendants de Bernoulli à densité.

1. Si $\operatorname{dens} A_n + \operatorname{dens} B_n < 1$, alors a.p.s. $A_n \cap B_n = \emptyset$.
2. Si $\operatorname{dens} A_n + \operatorname{dens} B_n > 1$, alors a.p.s. $A_n \cap B_n \neq \emptyset$. En plus, $A_n \cap B_n$ est un sous-ensemble aléatoire de densité et
$$\operatorname{dens}(A_n \cap B_n) = \operatorname{dens} A_n + \operatorname{dens} B_n - 1. \tag{2}$$

En bref, prenons au hasard deux sous-ensembles (indépendamment) de $|E| = n$ de cardinaux $|A| = n^\alpha$ et $|B| = n^\beta$, on a $|A \cap B| \approx n^{\alpha+\beta-1}$.



2 Groupes aléatoires

On va étudier des groupes définis par générateurs et relations, dont les relations sont des mots cycliquement réduits de longueur au plus ℓ, pris au hasard.

Fixons un alphabet $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ avec $m \geq 2$. Soit B_ℓ l'ensemble des mots sur $X^\pm$ cycliquement réduits de longueur $\leq \ell$. On étudie les phénomène asymptotique quand $\ell \to \infty$. On remarque que $|B_\ell| = (2m-1)^{\ell+o(\ell)}$.

On considère deux modèles de groupes aléatoires:

1. *Modèle à peu de relation :*
Soit $k \geq 1$. On choisit aléatoirement k relations $r_1, \ldots, r_k$ dans B_ℓ, uniformément parmi les sous-ensembles de cardinal k de B_ℓ.Un groupe aléatoire à k relations est défini par la présentation
$$G_\ell = \langle x_1, \ldots, x_m | r_1, \ldots, r_k \rangle.$$
2. *Modèle à densité :* (version Bernoulli de [4])
Soit $d \in [0, 1]$. Soit R_ℓ un sous-ensemble aléatoire de Bernoulli de B_ℓ de densité d. Un groupe aléatoire à densité d est défini par la présentation
$$G_\ell = \langle x_1, \ldots, x_m | R_\ell \rangle.$$
Contrairement au modèle à peu de relations, le nombre de relations augmente exponentiellement en fonction de la longueur maximale ℓ.

Définition. Soit P une propriété de groupes. On dit qu'un groupe aléatoire G_ℓ vérifie P asymptotiquement presque sûrement si

$$\mathbf{Pr}(G_\ell \text{ vérifie } P) \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 1.$$

Proposition ([3])**.** Soit k fixé. Soit $G_\ell = \langle x_1, \ldots, x_m | r_1, \ldots, r_k \rangle$ un groupe aléatoire à k relations. Alors a.p.s. G_ℓ est un groupe hyperbolique.

Le théorème suivant a été établi par M. Gromov et Y. Ollivier ([4], [7]) dans le cas du modèle à densité uniforme, il se généralise sans peine au modèle de Bernoulli :

Théorème 2 (Transition de phase à densité 1/2, [4], [7])**.** Soit $G_\ell = \langle x_1, \ldots, x_m | R_\ell \rangle$ un groupe aléatoire de densité d.

1. Si $d > 1/2$, alors a.p.s. G_ℓ est un groupe trivial.
2. Si $d < 1/2$, alors a.p.s. G_ℓ est un groupe hyperbolique, infini, asphérique et sans torsion.

3 Freiheitssatz

Théorème 3 (Freiheitssatz de Magnus, [6])**.** Soit $G = \langle x_1, \ldots, x_m | r_1 = 1 \rangle$ une présentation de groupe avec une seule relation r_1. Si x_1 apparaît dans r, alors $x_2 \ldots, x_m$ engendre librement un sous-groupe de G.

Définition. Le rang $r(G)$ d'un groupe G est le plus petit entier r tel que G soit engendré par r éléments.

Définition. Soit $G = \langle x_1, \ldots, x_m | r_1, \ldots, r_k \rangle$ une présentation de groupe. Le **rang de Magnus** $r_M(G)$ de G est le plus grand nombre entier $r \in \{0, \ldots, n\}$ tel que tout r-uplet inclue dans $\{x_1, \ldots, x_m\}$ engendre librement un sous-groupe libre de G.

Le Freiheissatz de Magnus dit que pour un groupe défini par une seule relation, si tous les générateurs apparaissent dans cette relation, alors $r_M(G) = r(G) - 1$.

G. Arzhantseva et Y. Olshanskii démontre une version aléatoire du Freiheitssatz :

Théorème 4 ([2])**.** Soit k fixé. Soit $G_\ell = \langle x_1, \ldots, x_m | r_1, \ldots, r_k \rangle$ un groupe aléatoire à k relations. Alors a.p.s.

$$r_M(G_\ell) = m - 1.$$

Nous souhaitons généraliser ce résultat pour le modèle à densité. Soit $1 \leq r \leq m$. L'ensemble des mots cycliquement réduits sur $\{x_1, \ldots, x_r\}$ de longueurs $\leq \ell$ est de cardinal $(2r-1)^{\ell+o(\ell)}$. On note

$$C_r = \log_{2m-1}(2r-1), \tag{3}$$

qui est la densité de cet ensemble dans B_ℓ (des mots cycliquement réduits de longueurs $\leq \ell$).

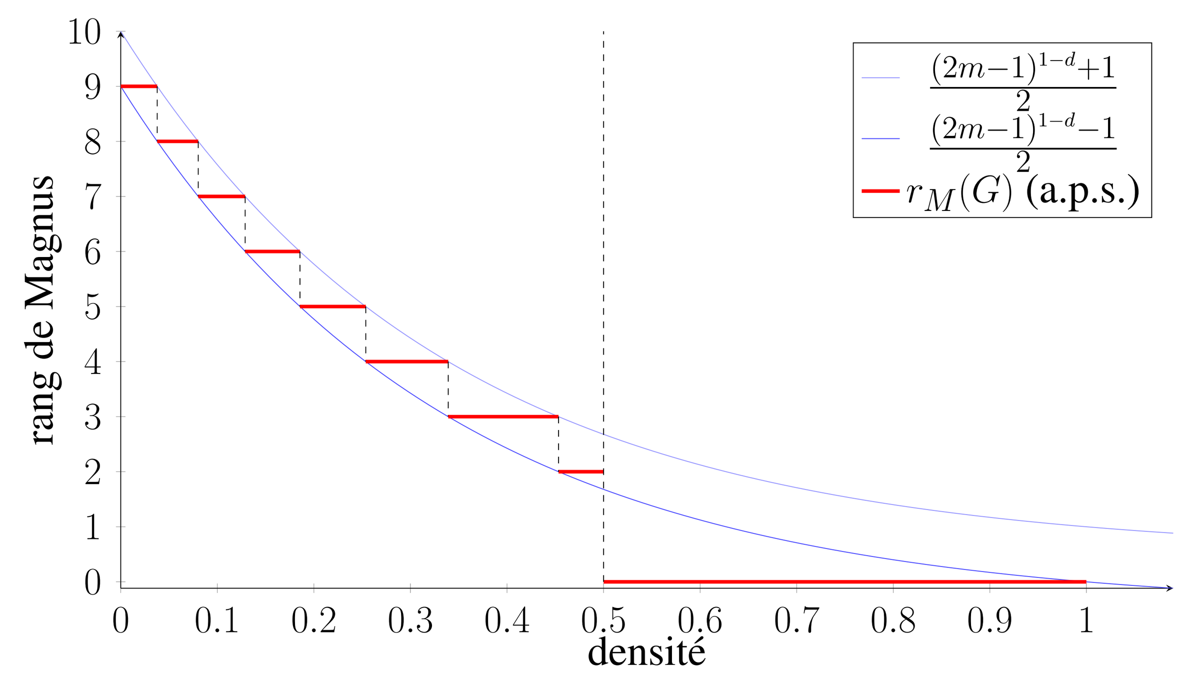
On a une transition de phase à densité $1 - C_r$:

Théorème 5. Soit $G_\ell = \langle x_1, \ldots, x_m | R_\ell \rangle$ un groupe aléatoire de densité $d < 1/2$. Soit $r \leq m$ un entier assez grand tel que $C_r > 1/2$ (ou $2r - 1 > \sqrt{2m-1}$).

1. Si $d < 1 - C_r$, alors a.p.s. $r_M(G_\ell) \geq r$. Ainsi a.p.s. $\{x_1, \ldots, x_r\}$ engendre librement un sous-groupe de G_ℓ.
2. Si $d > 1 - C_r$, alors a.p.s. $r_M(G_\ell) \leq r - 1$. En effet, a.p.s. $\{x_1, \ldots, x_r\}$ engendre le groupe G_ℓ. Ainsi a.p.s. $r(G_\ell) \leq r$.

Corollaire. On peut déterminer $r_M(G_\ell)$ par la densité, sauf certaines densités critiques:

1. Si $d = 1 - C_r$, alors $r_M(G_\ell) = r - 1$ ou r. C'est indéterminé.
2. Si d n'est pas du type $1 - C_r$, alors
$$r_M(G_\ell) = \left\lfloor \frac{(2m-1)^{1-d} + 1}{2} \right\rfloor. \tag{4}$$



rang de Magnus en fonction de densité avec $m = 10$

References

[1] S. Antoniuk, T. Łuczak, J. Świątkowski, *Random triangular groups at density 1/3*. Compositio Math. 151, 167–178 (2015).

[2] G. N. Arzhantseva, A. Yu. Ol'shanskii, *The class of groups all of whose subgroups with lesser number of generators are free is generic*. Mat. Zametki 59 (1996).

[3] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in *Essays in Group Theory*. Springer, New York, 75–263 (1987).

[4] M. Gromov, *Finitely presented groups. Asymptotic invariants of infinite groups. Geometric Group Theory*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 182, 269-282 (1993).

[5] R. Lyndon, P. Schupp, *Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag (1977).

[6] W. Magnus, *Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation. (Der Freiheitssatz)*. J. Reine Angew. Math. 163, 141–165 (1930).

[7] Y. Ollivier, *A January 2005 invitation to random groups*. Ensaios Matemáticos [Mathematical Surveys], vol. 10 (2005).