L'Institut de Recherche Mathématique Avancée de l'Université de Strasbourg et CNRS et le Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications de l'Université de Haute Alsace organisent une semaine de mini-cours intensifs et un colloque sur les

Aspects analytiques et géométriques des équations différentielles

Strasbourg, 26-30 avril 2010

Mini-cours : du lundi matin au jeudi midi

Colloque : du jeudi après-midi au vendredi soir

Les cours s'adressent en priorité aux étudiants de Master 2 recherche « Mathématiques Fondamentales et Appliquées » de l'Université de Strasbourg, aux étudiants en formation doctorale ou post-doctorale de Mathématiques, à l'Université de Strasbourg ou dans d'autres universités, ainsi qu'aux chercheurs et enseignants-chercheurs désireux d'acquérir des compétences dans les méthodes de géométrie et d'analyse asymptotique réelle ou complexe pour l'étude des équations differentielles. Le déroulement prévu consiste en quatre mini-cours en parallèle.

Equipe pédagogique :
Eric Benoît (Université de La Rochelle et INRIA Sophia-Antipolis), Boole Braaksma (Université de Groningen, Pays-Bas), Freddy Dumortier (Université de Hasselt, Belgique) et Frank Loray (CNRS et Université de Rennes)

Le Colloque permettra de réunir des spécialistes des équations différentielles réelles ou complexes qui développent ou utilisent les théories exposées dans les mini-cours, de façon à présenter aux participants des cours les derniers développements de ce domaine.

Conférenciers :
Dominique CERVEAU (Rennes) Peter DE MAESSCHALK (Asselt, Belgique), Viktoria HEU (Strasbourg), Loïc JEAN-DIT-TEYSSIER (Strasbourg), Reinhard SCHÄFKE (Strasbourg), Changgui ZHANG (Lille).

Lieu des cours et du colloque :
Salle de conférences, IRMA, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex

Descriptif des mini-cours

Cours 1 (Boole Braaksma)
Title : Multisummability and resurgence

Abstract : The outline will be as follows
- Laplace and Borel transforms and some modifications
- Mapping properties for these transforms, quasi-functions
- Extended Watson lemma
- Ramified Laplace and Borel transforms
- Some equivalent definitions of multisummability
- Application to meromorphic ODE's

Cours 2 (Eric Benoît)
Titre : Canards en dimensions supérieures

Résumé : La théorie des perturbations singulières s'intéresse aux équations du type

$$x' = f(x,y,\varepsilon),\ \ \varepsilon\, y' = g(x,y,\varepsilon),\ \text{où } (x,y) \in \mathbf{R}^{n+p}$$

Le premier théorème de la théorie est le théorème de Tikhonov concernant les points "réguliers" de la surface lente. Vous avez vu dans des cours précédents des cas où ce théorème ne s'applique pas, et vous avez vu des points particuliers au voisinage desquels apparaissent des canards. Dans ce cours, je vais faire une étude systématique locale de toutes les situations génériques pour les champs lents-rapides de $\mathbf{R}^3$ et de $\mathbf{R}^4$. Dans chaque cas, on examinera le comportement qualitatif des trajectoires au voisinage de ces singularités (comment se succèdent les segment lents et rapides). Bien sûr il faudra préciser ce que veut dire "générique". Cette étude montrera au passage certains résultats valables dans des dimensions quelconques.

Les méthodes d'étude vont de l'analyse non standard (utilisée avec beaucoup de modération) à l'analyse complexe, en passant par des méthodes sophistiquées de point fixe. Le cours sera parsemé d'exemples choisis pour leur caractère paradigmatique. Ceci sera fait de façon systématique en expliquant comment construire de tels exemples. Le premier chapitre concerne la classification de toutes les singularités rencontrées dans $\mathbf{R}^{2+1}$, $\mathbf{R}^{1+2}$ et $\mathbf{R}^{2+2}$. Les deux suivants sont chacun l'étude de l'un des cas rencontrés.

1. Problèmes locaux génériques de $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^4$: classification et mise sous forme prénormale
2. Points pseudo-singuliers noeuds dans $\mathbf{R}^3$ puis dans $\mathbf{R}^4$
3. Retard à la bifurcation : cas Hopf suivi d'une transition foyer/noeud : problème global dans $\mathbf{R}^3$ mais local dans $\mathbf{R}^4$.

Cours 3 (Freddy Dumortier)
Title : A geometric approach to singular perturbation problems

Abstract : In these lectures we want to study real slow-fast systems by means of geometric techniques (by “geometric” we mean coming from “regular” dynamical systems theory). The focus will lie on the (family) blow up of contact points as a method to get a good control on the dynamics near such points. We will limit to two-dimensional systems, however depending on an arbitrary number of parameters. Our attention will primarily go to canard type relaxation oscillations and the bifurcations that they undergo. We intend to present an overview of results that have been obtained by Peter De Maesschalck, Robert Roussarie and myself in different papers, including a number of recent preprints.

Cours 4 (Frank Loray)
Titre : Equations de Painlevé VI

Résumé : Les équations de Painlevé sont les équations $y'' = F(x,y,y')$ dont les solutions n'admettent pas de singularités mobiles. Elles se déclinent en six familles : la sixième dépend de quatre paramètres complexes et les autres se déduisent par dégénérescence. Les solutions des équations de Painlevé VI paramétrisent les déformations de connexions sur la sphère de Riemann à monodromie constante. Suivant ce point de vue, nous décrirons les propriétés de cette famille d'équations, sa monodromie et quelques problèmes ouverts.

<table>
<tr><th>Planning des cours</th><th>Lundi</th><th>Mardi</th><th>Mercredi</th><th>Jeudi</th></tr>
<tr><td>9:00-10:30</td><td>Cours 1</td><td>Cours 3</td><td>Cours 4</td><td>Cours 2</td></tr>
<tr><td>10:30-11:00</td><td>Pause</td><td>Pause</td><td>Pause</td><td>Pause</td></tr>
<tr><td>11:00-12:30</td><td>Cours 2</td><td>Cours 4</td><td>Cours 3</td><td>Cours 1</td></tr>
<tr><td>12:30-14:00</td><td>Repas</td><td>Repas</td><td rowspan="4">Relâche
(excursion touristique ou temps libre)</td><td>Repas</td></tr>
<tr><td>14:00-15:30</td><td>Cours 3</td><td>Cours 1</td><td rowspan="3">Début du Colloque</td></tr>
<tr><td>15:30-16:00</td><td>Pause</td><td>Pause</td></tr>
<tr><td>16:00-17:30</td><td>Cours 4</td><td>Cours 2</td></tr>
</table>

Programme du colloque

Jeudi 29 avril

14:00-15:00 Dominique Cerveau : « *Champs d'hyperplans* »

Pause

15:45-16:45 Viktoria Heu : *« Problème de Riemann-Hilbert et déformations isomonodromiques »*

Résumé : Le problème de Riemann-Hilbert est le suivant : toute représentation de monodromie provient-elle d'un système différentiel à pôles simples sur la sphère de Riemann ? A. Bolibrukh a donné plusieurs réponses célèbres à ce problème et a proposé aussi une approche par les déformations isomonodromiques. Nous allons étudier une généralisation de ses résultats aux surfaces de Riemann de genre quelconque.

Pause

17:00-18:00 Loïc Teyssier : *« Classification complète des confluences holomorphes de singularités simples »* (en collaboration avec C. Rousseau, Université de Montréal)

Résumé : On décrit l'espace des modules pour la classification analytique des (germes de) familles analytiques de feuilletages holomorphes déformant une singularité de type noeud-col, à travers les changements de coordonnées locales et de paramètres. Ce problème peut également s'énoncer ainsi : comment classifier les familles de singularités "simples" d'équations différentielles qui se fondent en une singularité multiple? Le résultat principal est l'obtention d'une déformation des invariants de Martinet-Ramis du noeud-col, déformation qui est analytique sur des "secteurs" de l'espace des paramètres. La compréhension du découpage de l'espace des paramètres en (un nombre fini de) bons secteurs est alors essentielle pour réaliser la synthèse des invariants, c'est-à-dire carac-tériser les déformations de modules de Martinet-Ramis qui proviennent d'une famille analytique en les paramètres. Ce découpage s'obtient en étudiant la classification topologique des feuilletages réels induits par les champs polynomiaux d'une variable complexe, travail qui avait été commencé sous une autre forme par Douady et Sentenac.

Vendredi 30 avril

9:00-10:00 Peter De Maesschalck : *« Singular perturbations and vanishing passage through a turning point »* (Joint work with Freddy Dumortier)

Abstract : We study the cyclicity of certain slow-fast cycles. These are limit periodic sets that are composed of a fast orbit, glued together with a curve of singular points. One part of the singular curve is normally attracting, another part is normally repelling, and a contact point is in between. A typical tool to study the cyclicity is the analysis of the asymptotic behaviour of the divergence integral along orbits near the limit periodic set. The leading order term is given by an integral along the curve of singularities. This leading order term diverges however when additional singularities in the slow dynamics appear. Depending on the location of the additional singularity (on the attracting side or repelling side), the obtained limit cycles are hyperbolically stable or hyperbolically unstable. In this talk, we consider the case of a singularity in the slow dynamics passing from one side to the other, through the contact point. We first focus on the most generic case (a generic saddle-node in the slow dynamics), and then generalize to a singularity in the slow dynamics of any finite codimension.

Pause

10:45-11:45 Changgui Zhang : *« Méthodes de resommation pour les équations aux q-différences »*

L'exposé consiste à faire apparaître la divergence des solutions formelles d'équations aux q-différences analytiques linéaires, puis à proposer différentes méthodes de resommation. Ces méthodes seront ensuite comparées à la classique méthode de Borel-Laplace.

Repas

14:00-15:00 Reinhard Schäfke : *« Développements asymptotiques combinés »* (En collaboration avec Augustin Fruchard)

Résumé : On présente une théorie de développements asymptotiques pour des fonctions de deux variables, combinant à la fois des fonctions d'une des variables et des fonctions du quotient de ces deux variables. Ces développements asymptotiques combinés (DAC) sont bien adaptés à la description des solutions d'équations différentielles ordinaires singulièrement perturbées au voisinage de points tournants. Le lien et les différences avec les méthodes de matching et les développements combinés classiques sont décrits. Cette théorie s'applique à un problème de solutions canard et la résonance d'Ackerberg-O'Malley.