Polyhèdre de convergence d'un module à connexion sur une courbe p-adique

Francesco Baldassarri*

Strasbourg, Janvier 2009

On se donne une courbe analytique compacte et lisse X sur un corps p-adique k, et un module à connexion $(\mathcal{E},\nabla)$ localement libre de rang μ sur X, à singularités méromorphes isolées en $\mathfrak{Z} = \{z_1,\dots,z_r\} \subset X(k)$. Les espaces analytiques sont au sens de Berkovich, munis de leur topologie naturelle, mais on en entend la lissité au sens rigide. On suppose disposer d'un modèle formel semistable $\mathfrak{X}$ de X sur k°, sur lequel $\mathcal{E}$ s'étende en un module localement libre, et que les r classes résiduelles $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}(z_1,1^-),\dots,\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}(z_r,1^-)$ soient distinctes. On a déjà introduit [arXiv:0809.2479], pour tout $x \in X \setminus \{z_1,\dots,z_r\}$, la notion de rayon de convergence normalisé $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}_{\mathfrak{X},\mathfrak{Z}}(x,(\mathcal{E},\nabla)) \in (0,1]$ de $(\mathcal{E},\nabla)$. On sait que $\mathcal{R}$ est une fonction continue sur X et qu'elle est logarithmiquement un polygone fini concave (ou convexe, dépendant de la base a du $\log_a$...) à pentes rationelles de dénominateur borné par μ, sur toute arête du graphe fini metrisé localement compact $\Gamma_{\mathfrak{X},\mathfrak{Z}}$ qu'on obtient du squelette de $\mathfrak{X}$, en le completant par l'adjonction des r arêtes ouvertes données par les squelettes analytiques des disques épointés $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}(z_1,1^-) \setminus \{z_i\}$. On sait depuis longtemps que, si aucun des exposants de $\mathcal{E}nd(\mathcal{E},\nabla)$ n'est un nombre p-adiquement de Liouville, la croissance logarithmique de $\mathcal{R}(x)$ sur $\Gamma_{\mathfrak{X},\mathfrak{Z}}$ pour $x \to z_i$ est l'irrégularité de Poincaré-Katz de $(\mathcal{E},\nabla)$ en z_i.

Kedlaya a récemment repris la notion, due à P. Th. Young, de polygone de convergence d'un module différentiel au point générique $t_{a,r}$ au bord d'un disque $D(a,r^-) \subset \mathbb{A}^1$ et il en a étudié la variation sur le squelette d'une couronne. Nous allons ici normaliser cette notion par rapport au choix de $(\mathfrak{X},\mathfrak{Z})$, et en étendre la définition en tout point $x \in X \setminus \mathfrak{Z}$; on notera $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}_{\mathfrak{X},\mathfrak{Z}}(x,(\mathcal{E},\nabla))$ le polygone convexe obtenu. On va montrer que $\mathcal{N}(x)$ varie de façon continue sur X, et polyhedrale finie et convexe sur les arêtes de tout graphe $\Gamma_{\mathfrak{X}',\mathfrak{Z}}$ (pour un eclatement $\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$) admettant une retraction sur son sous-graphe $\Gamma_{\mathfrak{X},\mathfrak{Z}}$. On associe ainsi à $(\mathcal{E},\nabla)$, un quasi-polyhèdre 2-dimensionel convexe $\mathcal{N}$, à fibres les polygones $\mathcal{N}(x)$, à 2-pentes rationelles de dénominateur borné par μ. Le polygone limite en z_i est, sous les hypothèses précédentes sur les exposants, le polygone d'irrégularité de $(\mathcal{E},\nabla)$ en z_i.

*Università di Padova, Dipartimento di matematica pura e applicata, Via Trieste, 63, 35121 Padova, Italy.