

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON  
UNITÉ DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

**DOCUMENT DE SYNTHÈSE**

présenté pour obtenir

**l'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

*Discipline* : Mathématiques

soutenu publiquement

par

Nalini ANANTHARAMAN

le 8 décembre 2006

*Titre* :

Entropie et localisation des fonctions propres.

---

*Thèse soutenue au vu des rapports de :*

M. Yves COLIN DE VERDIÈRE  
M. Peter SARNAK  
M. Maciej ZWORSKI

---

**Jury**

M. Stéphane ATTAL,	Examineur
M. Yves COLIN DE VERDIÈRE,	Rapporteur
M. Patrick GÉRARD,	Examineur
M. François LEDRAPPIER,	Examineur
M. Philippe MICHEL,	Examineur

# Remerciements

En acceptant de rapporter mes travaux, Yves Colin de Verdière, Peter Sarnak et Maciej Zworski me font un grand honneur et une grande joie. Sans parler de leurs contributions scientifiques, j’admire beaucoup leur énergie, leur générosité, leur disponibilité et leur ouverture à des domaines très variés des mathématiques. Yves Colin de Verdière a suivi mes premières expérimentations semiclassiques, m’a patiemment expliqué tout ce que je voulais savoir sur le sujet, tout en devant corriger continuellement mes conclusions erronées. Je suis extrêmement reconnaissante à Peter Sarnak pour le temps qu’il m’a consacré, et, en particulier, pour m’avoir invitée plusieurs fois à venir le rencontrer alors que j’étais dans l’impasse et que lui-même trouvait mon projet plutôt hasardeux... L’intérêt que porte Maciej Zworski à mes travaux me fait grand plaisir, et je le remercie de les avoir lus avec tant de soin.

François Ledrappier, depuis mes années de thèse, a toujours cru que tout ce que j’entreprenais finirait par aboutir. C’était un peu inconfortable, et il a dû être plusieurs fois déçu, à moins qu’il ne continue à attendre les résultats auxquels j’ai moi-même renoncé... Je le remercie pour cette confiance.

Patrick Gérard, par ses écrits et ses conseils, a guidé ma découverte des équations aux dérivées partielles. Je suis très heureuse qu’il ait accepté de prendre part au jury. J’ai souhaité que l’aspect “arithmétique” de l’ergodicité quantique, que je m’efforce de comprendre, soit représenté dans le jury, et c’est une grande fierté qu’il le soit par un mathématicien de l’envergure de Philippe Michel. C’est également un grand honneur d’avoir dans ce jury un spécialiste de la mécanique statistique quantique tel que Stéphane Attal.

Je tiens à remercier trois personnes qui ont eu, à leur insu, une influence déterminante sur mon travail. Leonid Polterovich a suscité mon intérêt pour les fonctions propres du laplacien en m’expliquant le problème de l’ergodicité quantique, lors d’un dîner de conférence en 2002. Après deux ans de recherches infructueuses, et alors que je pensais y mettre un point final par un exposé au “Sém’In”, Mylène Maïda et Viktor Kleptsyn ont réveillé mon envie de travailler en m’indiquant des références qui, finalement, m’ont mise sur la bonne piste.

Je suis donc une adepte du concept du Sém’In, le séminaire interne de l’UMPA, qui permet chaque semaine aux membres du laboratoire de se conter leurs résultats, leurs lectures, leurs travaux en cours. Mais ce n’est qu’un exemple parmi d’autres du climat de confiance et de bonne communication scientifique qui règne à l’UMPA. J’y ai particulièrement apprécié l’absence de barrières entre les différentes branches des mathématiques, revendiquée de manière presque militante. Merci à tout le laboratoire pour cette ambiance de recherche stimulante — il serait trop long de citer tous les noms des per-

sonnalités exceptionnelles qui le font vivre — et merci à Virginia Goncalves, Magalie Le Borgne, Hélène Schoch, Florence Koch, Gérard Lasseur et Hervé Gilquin pour leur gentillesse et leur compétence. Du côté de l’enseignement, un grand merci à Claire Desécures, et à tous ceux avec qui j’ai partagé les bons et moins bons moments de la vie d’enseignant.

Il me faut encore remercier tout le groupe du projet ANR *Résonances et décohérence en chaos quantique* : Frédéric Faure, Luc Hillairet, Colin Guillarmou, Frédéric Naud, Viviane Baladi... avec qui les séances de travail sont un vrai plaisir. Un remerciement spécial à Stéphane Nonnenmacher.

Je remercie Christiane Vilain du LUTH/Observatoire de Paris–Meudon pour son introduction très éclairante à l’histoire de la mécanique, et pour m’avoir communiqué ses notes de cours, extrêmement intéressantes. Elles m’ont guidée dans la rédaction du premier chapitre, même si je n’y ai finalement pas consacré tout le temps que j’aurais voulu.

Merci, enfin, à mes parents, dont je mesure de plus en plus avec les années l’immense dévouement.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Les équations de la mécanique.</b>	<b>8</b>
1.1	Action. . . . .	8
1.2	Premières règles de quantification. . . . .	11
1.3	Lois d'évolution quantiques. . . . .	14
1.4	Equivalence de la mécanique quantique et de la mécanique ondulatoire. . . . .	18
1.5	Méthodes B,K,W. . . . .	20
<b>2</b>	<b>Intégrales oscillantes et approximation semiclassique.</b>	<b>24</b>
2.1	La propagation des singularités selon Schrödinger. . . . .	24
2.2	Transformée de Fourier. . . . .	26
2.3	La méthode de la phase stationnaire. . . . .	26
2.4	Opérateurs pseudodifférentiels. . . . .	28
2.5	Microsupport, propagation des singularités. . . . .	32
2.6	États stationnaires, mesures semiclassiques. . . . .	33
<b>3</b>	<b>Limite semiclassique le long de l'axe imaginaire.</b>	<b>36</b>
3.1	Intégrales de Feynman . . . . .	36
3.2	Solutions de viscosité pour Hamilton–Jacobi et théorie KAM faible. . . . .	45
3.3	Non-unicité des solutions stationnaires. . . . .	49
3.4	Effet tunnel de fond de puits. . . . .	53
<b>4</b>	<b>Le cas réel.</b>	<b>67</b>
4.1	Ergodicité quantique. . . . .	67
4.2	Des contre-exemples. . . . .	70
4.2.1	Le chat. . . . .	71
4.2.2	Le boulanger. . . . .	75
4.3	Sur l'entropie des mesures semiclassiques. . . . .	78
4.3.1	L'estimée principale : décroissance exponentielle de la mesure des cylindres. . . . .	83
4.4	Le principe d'incertitude entropique. . . . .	86

# Introduction.

Le problème de la quantification des systèmes hamiltoniens ergodiques est évoqué pour la première fois dans un texte d'Einstein, publié en 1917 [Ein17], où il est question d'étendre les conditions de quantification de Bohr, Sommerfeld et Epstein au cas de systèmes à plusieurs degrés de liberté. Pour ce faire, Einstein se voit obligé de supposer que l'espace des phases classique est feuilleté en tores lagrangiens invariants, autrement dit que le système est complètement intégrable. Il énonce alors le principe suivant :

$$\int_{\gamma} \sum_i p_i dq_i = nh \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

c'est-à-dire que l'intégrale d'action ne peut prendre que des valeurs multiples de la constante de Planck  $h = 6,626068 \cdot 10^{-34} m^2 \cdot kg/s$ , pour toute courbe fermée  $\gamma$  tracée sur un tore invariant. Censée donner une recette pour sélectionner les tores sur lesquels les états invariants se localisent, cette règle a été corrigée par Kramers, Brillouin et Wentzell [Kr26, Brill26, Wtz26], à la suite des travaux de Schrödinger, puis par Keller et Maslov [Kell58, Masl65] : il faut écrire  $\int_{\gamma} \sum_i p_i dq_i = \left( n + \frac{\text{ind}(\gamma)}{4} \right) h + O(h^2)$  où  $\text{ind}$  est l'indice de Maslov.

Aujourd'hui, on comprend donc plutôt bien les propriétés spectrales de l'opérateur hamiltonien (quantique) associé à système complètement intégrable (classiquement). Mais, dès 1917, Einstein note qu'on ne sait plus décrire le spectre quantique à partir de notre connaissance du système classique, quand le nombre d'intégrales du mouvement est insuffisant, le cas le pire étant celui des systèmes ergodiques (“[...] *nur in diesem Falle ist die mikrokanonische Gesamtheit der auf ein System sich beziehenden Zeitgesamtheit äquivalent*” [Ein17]). Les équations de Heisenberg ou Schrödinger [H25, Schr26-II] se résolvent formellement comme un système complètement intégrable de dimension infinie, et il est difficile d'y percevoir trace de chaos : “*Quantenmechanisch läßt sich eine Trennung in periodische und aperiodische Bewegungen im allgemeinen nicht durchführen*” (Heisenberg [H25]). Il faut se contenter de conjecturer, par exemple, qu'un système chaotique “générique” émet un spectre qui ressemble à celui d'une matrice aléatoire gaussienne de grande dimension [Bo91].

Depuis les principes de quantification des années dix, la mécanique quantique ne s'est pas vraiment affranchie des concepts classiques. Heisenberg et Schrödinger ont proposé de nouvelles équations du mouvement, mais on ne sait souvent les résoudre qu'approximativement, dans la limite des grands nombres quantiques, c'est-à-dire des solutions oscillant fortement, ce qui revient mathématiquement à faire tendre  $h$  vers 0. C'est la limite semiclassique : en développant formellement les solutions de l'équation de Schrödinger en puissances de  $h$ , l'on voit apparaître le squelette classique de la mécanique quantique. La partie oscillante du développement asymptotique est décrite par l'équation de Hamilton–Jacobi, le coefficient principal satisfait une équation de transport, et les termes d'ordre supérieurs en  $h$  s'expriment eux aussi à partir du mouvement classique et de ses dérivées. Malheureusement, sauf dans le cas complètement intégrable, les instabilités du système font exploser ces développements semiclassiques après le “temps d'Ehrenfest”, de l'ordre de  $|\log h|$ . C'est le temps à partir duquel il n'est tout simplement plus possible d'essayer de comprendre la mécanique quantique en gardant à l'esprit une image classique. À partir de cet instant, apparaissent par exemple des effets d'interférences d'ondes dont la vision classique ne peut rendre compte.

Hormis dans le cas des systèmes intégrables, les méthodes semiclassiques n'ont ainsi fourni que peu d'information sur le comportement en grand temps de l'équation de Schrödinger, ou encore sur ses états stationnaires, c'est-à-dire les fonctions propres du hamiltonien quantique. Le Chapitre 4 de ce mémoire est dédié au cas d'une dynamique classique fortement chaotique, uniformément hyperbolique. Le théorème de Snirelman [Sn74] prédit, pour un système ergodique, et dans la limite semiclassique, que la majorité des états propres ont une distribution uniforme en position comme en vitesse. Rien n'interdirait d'imaginer cependant que certains états stationnaires exceptionnels soient essentiellement localisés au voisinage d'une orbite périodique. Formulée pour les flots géodésiques en courbure négative, une conjecture due à Rudnick et Sarnak [RudSa94] veut qu'en fait *tous* les états soit uniformément distribués (*unique ergodicité quantique*). Rudnick et Sarnak appuyaient leur intuition sur le cas des surfaces arithmétiques, où les faiblesses de notre compréhension de la dynamique quantique sont relayées par une riche structure algébrique. D'un point de vue dynamique, on tente parfois de justifier ainsi cette conjecture : à cause du principe d'incertitude de Heisenberg, un état quantique ne peut jamais être complètement concentré sur une sous-variété lagrangienne dans l'espace des phases. S'il se trouvait localisé au voisinage d'une orbite périodique, il aurait toujours une certaine dispersion, de largeur  $h^{1/2}$ , le long de sa variété stable ou instable; après évolution, il se trouverait donc “mélangé” dans tout l'espace des phases par l'action du flot hamiltonien classique. Un état invariant devrait donc être “délocalisé”, en un sens à préciser. Cet argument est simpliste et trompeur, puisque toute compréhension de l'évolution en termes clas-

siques s'écroule au temps d'Ehrenfest. En fait, Faure–Nonnenmacher–De Bièvre [FNDB03] ont démonté l'argumentation précédente, en travaillant sur le modèle extrêmement idéalisé de la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , agissant sur le tore  $\mathbb{T}^2$ , et en montrant qu'il peut se produire des effets d'interférences constructives précisément au temps d'Ehrenfest, conduisant à l'existence d'états invariants partiellement localisés sur des orbites périodiques. La conjecture d'unique ergodicité quantique est donc fautive dans ce cas très simple. On pense néanmoins que l'existence de ces contre-exemples est liée à la dégénérescence extrêmement élevée du spectre : on s'attend à ce qu'ils disparaissent par petites perturbations du système. On ne s'attend pas non plus à les observer pour un flot géodésique.

Les travaux exposés dans ce mémoire abordent ce problème à partir de la notion d'*entropie*. En théorie ergodique classique, c'est-à-dire pour les systèmes dynamiques commutatifs, l'entropie de Kolmogorov-Sinai mesure la complexité d'un état invariant : on peut noter, par exemple, qu'une mesure d'entropie strictement positive ne peut pas être entièrement localisée dans une zone où la dynamique est périodique. On essaie ici d'évaluer l'entropie des états stationnaires de l'équation de Schrödinger, dans la limite semiclassique, et on démontre au Chapitre 4, pour les systèmes hamiltoniens uniformément hyperboliques, que cette entropie est asymptotiquement strictement positive – et même, en restant un peu vague, plus grande que la moitié de l'entropie de la mesure de Liouville [A05, AN05, AN06]. Comme on l'a déjà remarqué, la dynamique quantique est presque périodique, et il est difficile d'y voir trace du chaos qui naît à la limite  $h \rightarrow 0$ . C'est pourquoi les notions d'entropie qui ont été proposées pour les systèmes dynamiques noncommutatifs [CNT87, AF94, Vo95] ne sont pas adaptées à l'étude de cette question : quand le spectre du hamiltonien de Schrödinger est discret, ces entropies ne voient qu'une superposition de mouvements périodiques, et prennent la valeur nulle. Il nous faut inventer un traitement semiclassique de l'entropie, qui voit typiquement le chaos apparaître à des temps de l'ordre de  $|\log h|$ , suffisamment grands pour que les propriétés chaotiques classiques aient commencé à se manifester, mais trop petits pour que le caractère presque périodique du mouvement quantique ne se soit encore fait sentir.

Le Chapitre 4 sur les états propres de Schrödinger est précédé d'un chapitre concernant l'équation de Hamilton–Jacobi, et le passage à la limite de l'équation visqueuse vers l'équation non visqueuse. Ce travail, antérieur, était motivé par des questions naturelles concernant la notion de solution de viscosité, quand il n'y a pas unicité des solutions stationnaires pour l'équation non visqueuse [JKM96, Go02, Bes03]. Cependant, on a choisi ici de présenter le Chapitre 3 comme une variante relativement plus simple du 4, et lui servant d'étape préparatoire. Il s'agit en effet du cas où l'on ferait tendre  $h \rightarrow 0$  par valeurs imaginaires pures (ce qui revient aussi

à complexifier le fibré cotangent et à conjuguer le flot hamiltonien par la multiplication par  $\sqrt{-1}$ ). Cette “rotation de Wick”, procédé mathématique innocent et sans intérêt au niveau classique, remplace lors de la quantification la transformée de Fourier par celle de Laplace, et l’intégrale de Feynman par celle de Wiener. On peut alors utiliser tout le savoir-faire de la théorie ergodique et du calcul stochastique. En particulier, la théorie des grandes déviations est particulièrement adaptée à l’étude des états stationnaires. Ceux-ci se concentrent “exponentiellement vite” sur des ensembles invariants de la dynamique classique appelés “ensembles de Mather”, et l’on va plus loin en caractérisant les limites possibles comme étant celles qui maximisent la différence entre entropie et exposants de Lyapunov [A04, AIPS04]. Cette complexification de l’action est un procédé mathématique un peu artificiel, mais n’est pas dépourvue de conséquences physiques : elle permet de comprendre certains aspects de l’effet tunnel, c’est-à-dire le fait que les ondes quantiques puissent accéder à des zones interdites aux trajectoires classiques.

La rédaction un peu bavarde des deux premiers chapitres essaie de répondre à la demande de certains collègues; je m’en excuse auprès des lecteurs pressés...



# Chapitre 1

## Les équations de la mécanique.

### 1.1 Action.

**Principe de moindre action.** Le principe de Maupertuis [M1744] ou Euler [E1744] est l'analogie en mécanique du principe de Fermat pour les trajectoires lumineuses : un objet de masse  $m = 1$ , soumis à une force dérivant d'un potentiel  $V$ , partant avec une énergie  $E$ , suit une trajectoire  $\gamma$  minimisant l'action

$$S(\gamma) = \int_{\gamma} p \cdot dq = \int \sqrt{2(E - V(\gamma))} \|d\gamma\| \quad (1.1)$$

entre ses points de départ et d'arrivée. Plus exactement, la trajectoire doit être un point stationnaire de l'action  $S$ , parmi les chemins d'extrémités données, d'énergie fixée  $\frac{\|\dot{\gamma}\|^2}{2} + V(\gamma) = E$ . On travaille ici sur une variété riemannienne  $X$ , et  $\|\cdot\|$  désigne la métrique ambiante. Ainsi, sous l'action du potentiel  $V$ , les trajectoires d'énergie  $E$  sont des géodésiques pour la nouvelle métrique, dégénérée,  $\sqrt{2(E - V(q))} \|dq\|$ .

Ce problème d'extrémisation sous contraintes est équivalent à celui de trouver les extrema de la fonctionnelle

$$A(\gamma) = \int_0^T \left( \frac{\|\dot{\gamma}\|^2}{2} - V(\gamma) \right) dt \quad (1.2)$$

prise sur l'ensemble des chemins joignant  $x$  et  $y$  en un temps  $T$  donné (Lagrange [L1788]). Si l'on introduit le lagrangien  $L(x, v) = \frac{\|v\|^2}{2} - V(x)$ , la loi du mouvement est donnée par l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma, \dot{\gamma}) \right) = \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma, \dot{\gamma}), \quad (1.3)$$

soit ici  $\ddot{\gamma} = -V'(\gamma)$ . Cette équation du second ordre définit un flot local  $(\phi_{EL}^t)$  sur le fibré tangent  $TX$ , appelé flot d'Euler-Lagrange.

**Hamiltonien.** On définit le hamiltonien du système comme la transformée de Legendre du lagrangien par rapport à  $v$  :

$$H(x, \xi) = \xi.v - L(x, v)$$

avec  $\xi = \frac{\partial L}{\partial v}$ ; on va supposer que la transformation de Legendre

$$\mathcal{L}eg : (x, \xi) \mapsto \left( x, \frac{\partial H}{\partial \xi} \right)$$

définit un difféomorphisme du fibré cotangent  $T^*X$  sur le fibré tangent  $TX$ . Dans le contexte précédent,  $\xi$  est la quantité de mouvement  $\xi = mv$  (on prendra désormais  $m = 1$ ), et  $H(x, \xi) = \frac{\|\xi\|^2}{2} + V(x)$  s'interprète comme l'énergie totale du système.

L'équation d'Euler-Lagrange (1.3) est équivalente aux équations de Hamilton,

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \xi} \\ \dot{\xi} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases} \quad (1.4)$$

qui définissent localement un flot  $(\phi_H^t)$  sur le fibré cotangent  $T^*X$ , appelé flot hamiltonien. Ce dernier est conjugué à  $(\phi_{EL}^t)$  via la transformation  $\mathcal{L}eg$ , là où il est défini. Il conserve l'énergie  $H$  : si  $(x(t), \xi(t))$  est une trajectoire, alors  $H(x(t), \xi(t))$  reste constante au cours du temps. Il préserve aussi la mesure de Liouville  $dx d\xi$ .

Si  $a$  est une fonction sur  $T^*X$  et que l'on note  $a_t = a \circ \phi_H^t$ , on a

$$\frac{da}{dt} = \{H, a\},$$

où  $\{., .\}$  est le crochet de Poisson,  $\{H, a\} = \sum \partial_{\xi_j} H \partial_{x_j} a - \partial_{x_j} H \partial_{\xi_j} a$ .

Une manière plus intrinsèque d'écrire les équations (1.4) serait d'introduire la 1-forme de Liouville sur le fibré cotangent, définie par

$$\alpha_{(x,\xi)}(P) = \xi.d\pi(P) \text{ pour tout } P \in T_{(x,\xi)}(T^*X),$$

où  $\pi : T^*X \rightarrow X$  désigne la projection sur le point base et  $d\pi$  l'application tangente. Le fibré cotangent  $T^*X$  peut alors être muni d'une forme symplectique,

$$\omega = -d\alpha.$$

En coordonnées locales,  $\alpha = p.dq$  et  $\omega = dq \wedge dp$ , si  $p$  et  $q$  désignent respectivement les applications impulsion et position,  $p(x, \xi) = \xi$ ,  $q(x, \xi) = x$ .

Dans le terme de droite de l'équation (1.4), on reconnaît l'expression en coordonnées locales du gradient symplectique de la fonction  $H$ . Remarquons enfin que l'action de Maupertuis  $S$  (1.1) est l'intégrale de  $\alpha$  sur le chemin  $\mathcal{L}eg^{-1}(\gamma, \dot{\gamma})$ .

**Équation de Hamilton–Jacobi.** Vers 1830, Hamilton [H1830, H1834] prend le parti de considérer l'action comme une fonction des points de départ et d'arrivée  $x$  et  $y$ . Soit donc une trajectoire  $\gamma : [0, T] \rightarrow X$  joignant  $x$  à  $y$  en un temps  $T$ . Plaçons nous dans le cas agréable où une telle trajectoire est unique. Considérons l'action de Lagrange  $A(x, y; T) = \int_0^T L(\gamma, \dot{\gamma}) dt$  comme une fonction de  $x, y, T$ , on peut calculer

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\dot{\gamma}(0) = -\xi_0; \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \dot{\gamma}(T) = \xi_T \quad (1.5)$$

(où  $\xi$  désigne la quantité de mouvement), et

$$\frac{\partial A}{\partial T} = -E$$

où  $E$  est l'énergie, constante au cours du temps,  $E = \frac{\|\dot{\gamma}\|^2}{2} + V(\gamma)$ . Savoir résoudre les équations du flot hamiltonien (1.4) revient donc à connaître la fonction génératrice  $A$ , solution de l'équation de Hamilton–Jacobi

$$\frac{\partial A}{\partial T} + H(x, \partial_x A) = 0. \quad (1.6)$$

On a ainsi remplacé l'étude des équations différentielles ordinaires (1.3) ou (1.4) par l'étude d'une unique équation aux dérivées partielles. Comme l'écrit Hamilton [H1834], “*even if it should be thought that no practical facility is gained, yet an intellectual pleasure may result from the reduction of [...] all researches respecting the forces and motions of body, to the study of one characteristic function*”.

Considérons la transformée de Legendre de  $A(x, y; T)$  par rapport à la variable  $T$ ,

$$S(x, y; E) = ET + A(x, y; T) \quad (1.7)$$

avec

$$\frac{\partial S}{\partial E} = T \text{ et } \frac{\partial A}{\partial T} = -E.$$

Ce n'est autre que l'action de Maupertuis de la trajectoire  $\gamma$  d'énergie  $E$  joignant  $x$  à  $y$  :

$$S(x, y; E) = \int \sqrt{2(E - V(\gamma))} \|\dot{\gamma}\| dt = \int_0^T \|\dot{\gamma}\|^2 dt.$$

Pour le voir, on utilise l'égalité

$$\int \sqrt{2(E - V(\gamma))} \|d\gamma\| = \int_0^T \|\dot{\gamma}\|^2 dt = ET + \int_0^T \left( \frac{\|\dot{\gamma}\|^2}{2} - V(\gamma) \right) dt,$$

qui relie l'action de Maupertuis (1.1) et celle de Lagrange<sup>1</sup> (1.2) pour un trajet d'énergie  $E$  et de durée  $T$ .

On a toujours les formules

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\dot{\gamma}(0) = -\xi_0; \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \dot{\gamma}(T) = \xi_T. \quad (1.8)$$

La fonction  $S$  est solution de l'équation de Hamilton–Jacobi stationnaire,

$$H(x, \partial_x S) = E. \quad (1.9)$$

On peut choisir, à sa guise, de travailler avec l'équation dépendant du temps (1.6) ou avec l'équation stationnaire (1.9), les deux formulations étant reliées par (1.7).

## 1.2 Premières règles de quantification.

La première règle de quantification énoncée par Einstein concerne le photon :  $E = nh\nu$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , si  $E$  est l'énergie et  $\nu$  la fréquence (1905). Dans le cadre de la mécanique, Bohr cherche à partir de 1912 des conditions de quantification permettant de calculer le spectre des atomes et des molécules, à partir d'un modèle planétaire classique. Dans un cadre abstrait, Sommerfeld et Debye énoncent la règle suivante, dans le cas d'un mouvement à un degré de liberté, périodique : l'action exercée sur une période du mouvement doit être un multiple entier de  $h$ ,  $\int p dq = nh$ . Pour l'oscillateur harmonique de fréquence  $\nu$ , par exemple, cela donne

$$2 \int_{-\sqrt{2E/\nu^2}}^{\sqrt{2E/\nu^2}} \sqrt{2(E - \frac{(2\pi\nu)^2 x^2}{2})} dx = nh,$$

soit un spectre d'énergie discret,  $E_n = nh\nu$ . Einstein [Ein17], reprenant les travaux de Sommerfeld et Epstein, étend ces conditions de quantification en dimension plus grande : il faut pour cela disposer de coordonnées canoniques  $(q, p) = (q_i, p_i)_{i=1, \dots, d}$  telles que, le long des trajectoires du flot hamiltonien, l'impulsion  $p$  soit une fonction de la position  $q$  (éventuellement “multivaluée”, mais ne prenant qu'un nombre fini de valeurs). Cette fonction doit dériver d'un potentiel  $J^*$ ,

$$p_i = \frac{\partial J^*}{\partial q_i}, \quad (1.10)$$

si l'on veut que l'intégrale d'action  $\int p dq$  sur un chemin fermé ne dépende que de sa classe d'homotopie. La fonction  $J^*$  doit être solution de l'équation

---

<sup>1</sup>Ces fonctions ne sont en général définies que localement, pour  $x$  et  $y$  assez proches l'un de l'autre et  $T$  petit. Pour les étendre globalement, des problèmes apparaissent notoirement lors du franchissement des caustiques, c'est-à-dire quand les formules (1.5) ne définissent pas un difféomorphisme  $(x, \xi_0) \mapsto (y, \xi_T)$ .

de Hamilton–Jacobi stationnaire, pour que la variété lagrangienne définie par (1.10) soit invariante par le flot hamiltonien. À travers cette série d’hypothèses, Einstein suppose en fait que le mouvement est complètement intégrable, c’est-à-dire que l’espace des phases est feuilleté en tores lagrangiens invariants. Il propose alors les conditions de quantifications suivantes :

$$\int_{\gamma} \sum_i p_i dq_i = n_{\gamma} h, \quad (1.11)$$

( $n_{\gamma} \in \mathbb{Z}$ ) pour toute courbe fermée  $\gamma$  tracée sur un de ces tores. Cela signifie que l’intégrale de la forme de Liouville sur  $\gamma$  est un multiple entier de  $h$ . Cette intégrale ne dépend que de la classe d’homologie de  $\gamma$  dans le tore invariant considéré, il y a donc  $d$  conditions de quantifications indépendantes si  $d$  est le nombre de degrés de liberté. De façon prémonitoire, Einstein remarque que ces conditions peuvent encore s’exprimer en disant que les différentes valeurs en un même point de la fonction multivaluée  $J^*$  diffèrent par des multiples entiers de  $h$ , autrement dit que  $\exp(\frac{iJ^*}{h})$  est une fonction univaluée.

Ces formules ne sont cependant pas tout à fait correctes; elles conduiront Pauli à une description erronée de l’état fondamental de l’ion  $\text{H}_2^+$  (1922). Depuis l’introduction de l’équation de Schrödinger et les travaux de Kramers, Brillouin, Wentzell [Kr26, Brill26, Wtz26] (paragraphe 1.5), on sait qu’elles ne permettent de calculer le spectre qu’à  $O(h)$  près. Pour obtenir une approximation valable à  $O(h^2)$  près, il faut corriger la condition (1.11) en introduisant l’indice de Maslov de  $\gamma$ ,  $\text{ind}(\gamma)$  :  $\int_{\gamma} \sum_i p_i dq_i = \left( n_{\gamma} + \frac{\text{ind}(\gamma)}{4} \right) h$  [Kell58, Masl65]. Par exemple, le spectre d’énergie pour l’oscillateur harmonique est donné par la formule exacte  $E_n = (n + \frac{1}{2})h\nu$  – cette correction du spectre ne modifie pas, dans ce cas particulier, le spectre d’émission  $\{E_n - E_m\}$ .

**Le principe de correspondance.** Ce principe stipule que les lois quantiques valides au niveau de l’atome, doivent tendre vers leurs analogues classiques dans la limite des grands nombres quantiques. Le développement de ce principe était motivé par la contradiction flagrante inhérente au modèle de Bohr. Ce modèle avait été établi afin de résoudre la problématique provenant du fait que la mécanique classique prédit qu’un électron chargé en révolution autour du noyau doit émettre continuellement de la radiation, alors que ce n’est pas le cas. La mécanique classique ne semble donc pas être valide à l’échelle des atomes. Par contre, quand il s’agit de calculer le rayon des orbites stables postulées par Bohr, il faut faire appel aux équations de la mécanique classique ! C’est pour permettre aux deux théories (classique et quantique) de garder leur validité dans leurs domaines d’application respectifs que le principe de correspondance a été établi.

Pour expliquer le principe de correspondance, le mieux est sans doute de reprendre les explications de Sommerfeld [Somm] (Développements mathématiques

et compléments, no.10). “D’après la conception classique” du rayonnement, un système quasi-périodique “formé de charges mobiles rayonne suivant les périodes du mouvement; les fréquences mécaniques sont donc aussi les fréquences optiques” :

$$\nu_k = \frac{\partial E}{\partial J_k}, \quad (1.12)$$

ainsi que leurs combinaisons linéaires à coefficients entiers

$$\nu = \sum \frac{\partial E}{\partial J_k} s_k, \quad (1.13)$$

correspondant aux harmoniques supérieures et vibrations combinées (“ $E$  représente ici l’énergie du système exprimée en fonction des intégrales de phases  $J_1, \dots, J_d$ ”).

“Dans la théorie des quanta, les choses sont différentes. Le système ne rayonne pas sur des trajectoires stationnaires; le rayonnement se produit dans le passage d’une telle trajectoire à une autre. Si  $\Delta E$  est la différence d’énergie entre l’orbite initiale et l’orbite finale, on sait que la fréquence du rayonnement est

$$\nu = \frac{\Delta E}{h}. \quad (1.14)$$

Admettons tout d’abord que dans un tel passage le seul nombre quantique  $n_k$  varie, et cela de  $\Delta n_k$ . Puisque  $J_k = n_k h$ , on a  $\Delta J_k = \Delta n_k h$ , et par suite (1.14) devient :

$$\nu = \frac{\Delta E}{\Delta J_k} \Delta n_k.$$

Si  $\Delta n_k = 1$ , nous avons l’analogie de l’équation (1.12) et si  $\Delta n_k = s_k \in \mathbb{Z}$ , nous voyons que les sauts quantiques supérieurs correspondent aux harmoniques supérieures du rayonnement classique. Si l’on considère plusieurs nombres quantiques variables, “décomposons la variation d’énergie  $\Delta E$  en les variations partielles correspondant aux sauts  $\Delta n_1, \dots, \Delta n_d$ .” L’équation (1.13) devient

$$\nu = \sum \frac{\Delta E}{\Delta J_k} \Delta n_k.$$

“Le saut quantique général correspond à la vibration combinée du rayonnement classique. Le point essentiel sur lequel il convient d’insister, c’est que les équations différentielles ordinaires doivent être remplacées par des équations aux différences finies.[...] Mais il existe des conditions pour lesquelles les deux représentations coïncident. C’est lorsque  $\Delta n_k \ll n_k$ , c’est-à-dire lorsque la variation du nombre quantique est petite vis-à-vis du nombre quantique lui-même. Dans ce cas on a asymptotiquement  $\frac{\partial E}{\partial J_k} \simeq \frac{\Delta E}{\Delta J_k}$ ,” les fréquences d’émission classiques et quantiques sont donc approximativement les mêmes.

Qu'en est-il des intensités d'émission des différentes fréquences ? Bohr postule qu'elles sont, elles aussi, approximativement les mêmes. "À chaque variation quantique correspond une vibration conforme à la théorie classique, celle dont l'ordre  $s_k$  est égale à  $\Delta n_k$ . L'amplitude et la polarisation de cette vibration d'après la théorie classique doivent être celles de la raie spectrale correspondant au saut quantique considéré. Le principe de correspondance affirme que l'intensité et la polarisation ainsi calculées pour les raies spectrales sont exactes pour des nombres quantiques infiniment grands, et approximatives pour des nombres quantiques modérés."

Autrement dit, reprend Heisenberg [H25] si le rayonnement classique  $a(t)$  se décompose comme

$$a(t) = \sum a_{s_1, \dots, s_d} e^{2\pi i(s_1\nu_1 + \dots + s_d\nu_d)}$$

alors le rayonnement quantique  $A(t)$  sera décrit par la collection des  $(A_{nm} e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t})$ , correspondant aux rayonnements émis lors des transitions entre les différents états indexés par  $n$  et  $m$ . Les fréquences classiques  $\sum s_i\nu_i$  et les fréquences quantiques  $\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)$  sont asymptotiquement les mêmes pour les grands nombres quantiques. Le postulat de Bohr, selon lequel les intensités d'émission  $a_{s_1, \dots, s_d}$  et  $A_{nm}$  se correspondent aussi, a une conséquence absolument remarquable. Soient en effet deux quantités classiques  $a(t), b(t)$  et  $A(t), B(t)$  les quantités quantiques associées. Comment décrire alors le produit  $a(t)b(t)$  (respectivement  $A(t)B(t)$ ) ? De point de vue classique, il s'agit du produit de deux fonctions, et on a la règle bien connue de convolution au niveau des transformées de Fourier :

$$a(t)b(t) = \sum_{s_1, \dots, s_d} \sum_{r_i + r'_i = s_i} a_{r_1, \dots, r_d} b_{r'_1, \dots, r'_d} e^{2\pi i(s_1\nu_1 + \dots + s_d\nu_d)}.$$

Cela suggère la règle

$$A(t)B(t) \sim \left( \sum_j A_{nj} B_{jk} e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t} \right)$$

pour la multiplication des observables quantiques. La loi de multiplication est donc  $(AB)_{nm} = \sum_j A_{nj} B_{jk}$ , et on n'est plus très loin de la mécanique des matrices !

### 1.3 Lois d'évolution quantiques.

Dans toute cette section, l'espace des configurations est  $X = \mathbb{R}^d$ .

**Quantenmechanics.** En 1925, Heisenberg, Born et Jordan [H25, BHJ25-I, BHJ25-II] proposent de nouvelles lois du mouvement destinées à remplacer

les équations de Hamilton. Soit un système hamiltonien à  $d$  degrés de liberté. D'après [BHJ25-II], l'évolution du système en mécanique quantique est régie par les cinq principes suivants :

(0) L'espace des phases est décrit par un espace de Hilbert,  $\mathcal{H}$ .

(1) Les quantités observables sont des opérateurs (des matrices infinies). On note en gras  $\mathbf{a}$  l'observable quantique correspondant à l'observable classique  $a$ ; si  $a$  est réelle alors  $\mathbf{a}$  est hermitien.

**Exemple 1.1.** Soient  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_d)$  et  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_d)$  les observables d'impulsion et de position. Si le hamiltonien classique est donné par une série entière

$$H(p, q) = \sum \alpha_{sr} p^s q^r$$

alors – d'après [BHJ25-II] – le hamiltonien quantique devra être défini par

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum \alpha_{sr} \frac{1}{s+1} \sum_{l=0}^s \mathbf{p}^{s-l} \mathbf{q}^r \mathbf{p}^l.$$

(2) Les observables d'impulsion et de position obéissent aux lois de commutations suivantes

$$[\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_l] = \frac{\hbar}{i} \delta_{kl}, \quad (1.15)$$

$$[\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l] = 0, \quad (1.16)$$

$$[\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_l] = 0. \quad (1.17)$$

Soit  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_s)$  une fonction des  $s$  observables  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_s$ , définie par une série entière. Alors on définira

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_1 + \varepsilon \mathbb{1}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_s) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_s))$$

où  $\mathbb{1}$  est l'opérateur identité.

On peut déduire des identités (1.15) la formule

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \right)$$

si  $\mathbf{f}$  est fonction de  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$ .

(3) On appelle transformation canonique une transformation qui envoie les observables  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  sur  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  vérifiant les mêmes relations de commutation, et qui préserve les opérateurs hermitiens. On demande aussi qu'une transformation canonique transforme  $\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  en  $\mathbf{f}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ . Une telle transformation est de la forme  $\mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{p}\mathbf{S}^{-1}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{S}\mathbf{q}\mathbf{S}^{-1}$ , avec  $\mathbf{S}$  unitaire.



(4) Les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}}, \end{cases} \quad (1.18)$$

ce qui implique plus généralement, la loi d'évolution

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{H}, \mathbf{a}]$$

pour toute observable  $\mathbf{a}$ .

Intégrer les équations du mouvement, signifie chercher un opérateur  $\mathbf{S}$  unitaire tel que

$$\mathbf{S} \mathbf{H} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{W} \quad (1.19)$$

soit diagonale, c'est-à-dire une transformation canonique réduisant (1.18) à une collection de mouvements périodiques<sup>2</sup>.

(5) Dans une base diagonalisant  $\mathbf{H}$ , on obtient pour toute observable  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a}(nm)(t) = \mathbf{a}(nm)(0) e^{2i\pi\nu(nm)t};$$

le spectre des fréquences émises  $\nu(nm)$  (spectre physique) est relié aux valeurs propres ( $E_n$ ) de  $\mathbf{H}$  (spectre mathématique) par

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h}.$$

---

<sup>2</sup>Comme le note Heisenberg, l'équation (1.18) est celle d'un flot hamiltonien quadratique, en dimension infinie. Ce système est donc complètement intégrable, au sens classique : soit en effet  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert complexe, vu comme espace vectoriel réel et muni de la forme symplectique  $\omega(\phi, \psi) = \Im m \langle \phi, \psi \rangle$ . Si l'on se sert d'une base orthonormée ( $e_n$ ) pour définir des coordonnées,  $\phi = \sum_n (x_n + i\xi_n) e_n$ , alors les  $(x_n, \xi_n)$  fournissent des coordonnées de Liouville :  $\omega = \sum_n dx_n \wedge d\xi_n$ .

Soit  $\mathbf{H}$  un opérateur auto-adjoint; il définit un hamiltonien quadratique  $H(\psi) = \frac{1}{2} \langle \psi, \mathbf{H} \psi \rangle$ . Si l'on se restreint aux observables de la forme  $f(\psi) = \frac{1}{2} \langle \psi, \mathbf{f} \psi \rangle$ , le crochet de Poisson associé à la structure symplectique s'exprime à l'aide du crochet de commutation des opérateurs,

$$\{f, g\}(\psi) = \frac{1}{2} \langle \psi, i[\mathbf{f}, \mathbf{g}] \psi \rangle.$$

Les équations de Hamilton pour le hamiltonien  $H$  s'écrivent  $\frac{d\psi}{dt} = -i\mathbf{H}\psi$ . Enfin, une transformation canonique linéaire est de la forme  $\psi \mapsto \mathbf{S}\psi$  avec  $\mathbf{S}$  unitaire.

Trouver  $\mathbf{S}$  unitaire telle que  $\mathbf{S}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{S}$  soit diagonale revient à chercher une transformation canonique  $\psi \mapsto \mathbf{S}\psi$  qui transforme le hamiltonien en  $H(\mathbf{S}\psi) = \frac{1}{2} \sum (2\pi\nu_n)^2 (x_n^2 + \xi_n^2)$ . Cela signifie qu'on intègre l'équation du mouvement en décomposant le hamiltonien comme une collection d'oscillateurs harmoniques indépendants. Born-Heisenberg-Jordan voient l'équation (1.19), d'inconnue  $\mathbf{S}$ , comme l'analogue de l'équation de Hamilton-Jacobi (1.9), la différence étant que l'équation a toujours des solutions en mécanique quantique, alors qu'en mécanique classique l'existence de solutions globales équivaut à la complète intégrabilité du système.

**Wellenmechanics.** En 1926, Erwin Schrödinger [Schr26-I] propose, indépendamment des travaux de Heisenberg, Born et Jordan, une nouvelle équation pour la mécanique, pour un système évoluant sous l’effet d’un potentiel  $V$  : il s’agit d’une équation aux dérivées partielles du second ordre,

$$-\frac{\hbar^2}{2}\Delta\psi + V\psi = E\psi, \quad (1.20)$$

où  $E$  est l’énergie. Cette “équation de Schrödinger” vient remplacer l’équation de Hamilton–Jacobi stationnaire (1.9) – le lien précis entre les deux équations ne deviendra clair que dans un second article [Schr26-II]. L’équation (1.20) est l’équation de Schrödinger stationnaire, régissant un système d’énergie  $E$  déterminée. L’équation d’évolution temporelle est

$$i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V\right)\phi, \quad (1.21)$$

on passe de l’une à l’autre par une transformée de Fourier temporelle,  $\phi(t) = \int e^{-iEt/\hbar}\psi_E dE$ , qui rappelle la relation (1.7). Dans l’article [Schr26-I] cette équation apparaît de manière “*complètement incompréhensible*”, pour reprendre l’expression même de Schrödinger [Schr26-II]. On part de l’équation de Hamilton–Jacobi,  $H(x, \partial_x S) = E$ , et pose  $S = K \log \psi$ . La fonction  $\psi$  satisfait alors  $\frac{K^2}{2m}\|d\psi\|^2 + (V - E)\psi^2 = 0$ . De manière “*tout aussi incompréhensible*”, on va postuler que la loi que l’on recherche pour la mécanique quantique consiste à chercher des points critiques de

$$\int \left( \frac{K^2}{2m}\|d\psi\|^2 + (V - E)\psi^2 \right)$$

avec une décroissance convenable à l’infini; ce qui équivaut à l’équation (1.20) si l’on prend  $K = \hbar$ .

Le spectre est maintenant déterminé par la condition que l’équation (1.20) admette des solutions “*réelles, finies, à détermination unique et deux fois dérivables dans tout l’espace de configurations*”. Schrödinger applique ce principe au calcul du spectre de l’atome d’hydrogène, et retrouve les raies de Balmer, déjà décrites par la théorie de Bohr. Schrödinger doute cependant que cette nouvelle approche soit autre qu’une reformulation déguisée de la théorie des quanta de Bohr–Sommerfeld–Epstein.

L’interprétation de  $\psi$  comme “fonction d’onde” est mise au point dans l’article [Schr26-II], où Schrödinger, motivé par les travaux de Louis de Broglie [Broglie24], énonce que “*la manière correcte de concevoir ou de représenter les phénomènes mécaniques consiste à les rattacher à une propagation d’ondes dans l’espace des  $q$  et non à un mouvement de points représentatifs dans le même espace*”. Le lien entre mécanique classique et

mécanique ondulatoire est interprété par le fait que la fonction  $S$ , solution de l'équation classique de Hamilton–Jacobi, représente la phase de l'onde, du moins dans l'approximation des petites longueurs d'onde (approximation semiclassique). *“L'étude du mouvement des points représentatifs qui forme l'objet de la mécanique classique, n'est qu'un procédé d'approximation et son emploi est tout aussi peu justifié que l'emploi de l'optique géométrique, ou optique de rayons, dans le cas des phénomènes lumineux réels”*. Cette approximation n'est justifiée que lorsque les dimensions de la trajectoire sont très grandes par rapport à la longueur d'onde : *“[...] on devait inmanquablement s'empêtrer dans des contradictions inextricables lorsqu'on voulait à tout prix conserver la notion de trajectoire pour les phénomènes atomiques”*. L'ancienne théorie des quanta exposée en 1.2, toujours fondée sur la notion de trajectoire, est rejetée et remplacée par une description ondulatoire. Le passage à la limite de la description ondulatoire à la description trajectorielle est le même qu'en optique; il s'explique par des phénomènes d'interférences qui, en mathématiques, sont décrits par la méthode de la phase stationnaire. Cette méthode, et son application à l'étude de la limite semiclassique, seront décrites au Chapitre 2.

## 1.4 Equivalence de la mécanique quantique et de la mécanique ondulatoire.

Dans un troisième article [Schr26-III], Schrödinger montre pour  $X = \mathbb{R}^d$  que sa “mécanique ondulatoire” est équivalente à la “mécanique quantique” introduite par Heisenberg, Born et Jordan. À chaque fonction sur l'espace des phases, on peut en effet associer de manière explicite un opérateur sur l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , de manière à ce que les règles de commutation (1.15) soient satisfaites : à la fonction  $q_k$ , on devra associer l'opérateur  $\mathbf{q}_k =$  (multiplication par  $q_k$ ), et à la fonction  $p_k$ , l'opérateur  $\mathbf{p}_k = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_k}$ .

Étant donnée une fonction  $a(q, p)$ , se pose la question du choix d'une convention pour définir l'opérateur  $\mathbf{a}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . Par exemple, la fonction  $p_k q_k$  peut-être représentée par l'opérateur  $\mathbf{p}_k \mathbf{q}_k$  ou par  $\mathbf{q}_k \mathbf{p}_k$ . Schrödinger se contente de prescrire la quantification du hamiltonien quand celui-ci est de la forme

$$H(q, p) = \frac{1}{2}T(q, p) + V(q)$$

où  $T$  est une métrique riemannienne :  $\mathbf{T}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  sera le laplacien associé à la métrique  $T$ , d'où l'expression  $\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$ . L'équation de Heisenberg (1.19), qui demande de diagonaliser l'opérateur  $\mathbf{H}$ , s'écrit dans cette représentation  $-\frac{\hbar^2}{2}\Delta\psi + V\psi = E\psi$ , c'est l'équation de Schrödinger (1.20). Schrödinger commente, cependant : *“Eines genetischen Zusammenhanges*

mit Heisenberg bin ich mir durchaus nicht bewußt. Ich hatte von seiner Theorie natürlich Kenntnis, fühlte mich aber durch die sehr schwierig scheinenden Methoden der transzendenten Algebra und durch den Mangel an Anschaulichkeit abgeschreckt, um nicht zu sagen abgestoßen". De son point de vue, l'équivalence mathématique de deux théories ne signifie pas leur équivalence physique.

**Quantification de Weyl.** Hermann Weyl propose de quantifier l'observable  $U_{p_0, q_0}(q, p) = e^{\frac{i}{\hbar}(p_0 \cdot q - q_0 \cdot p)}$  ( $q_0, p_0 \in \mathbb{R}^d$ ) par l'opérateur  $\mathbf{U}_{p_0, q_0}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = e^{\frac{i}{\hbar}(p_0 \cdot \mathbf{q} - q_0 \cdot \mathbf{p})}$  [Weyl27]. La transformation de Fourier permet alors de quantifier toute observable : si l'observable  $a$  se décompose en

$$a(q, p) = \int e^{\frac{i}{\hbar}(p_0 \cdot q - q_0 \cdot p)} \hat{a}_{\hbar}(q_0, p_0) \frac{dq_0 dp_0}{(2\pi\hbar)^d}$$

on étendra la définition précédente en posant

$$\mathbf{a}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int e^{\frac{i}{\hbar}(p_0 \cdot \mathbf{q} - q_0 \cdot \mathbf{p})} \hat{a}_{\hbar}(q_0, p_0) \frac{dq_0 dp_0}{(2\pi\hbar)^d} =: \text{Op}_{\hbar}^W(a),$$

encore donné par la formule

$$\text{Op}_{\hbar}^W(a)f(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{\frac{i}{\hbar}\xi \cdot (x-y)} f(y) dy d\xi.$$

Cette convention est cohérente avec celle de l'exemple 1.1 dans le cas où  $a$  est développable en série entière<sup>3</sup>.

**Représentation de Schrödinger.** La famille d'opérateurs  $\mathbf{U}_{p, q}$  satisfait la règle de composition suivante,

$$\mathbf{U}_{p, q} \cdot \mathbf{U}_{p', q'} = \mathbf{U}_{p+p', q+q'} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2}(pq' - q'p)}. \quad (1.22)$$

Considérons le groupe de Heisenberg  $\mathbf{H}_d$  à  $d$  degrés de liberté, défini comme  $\mathbb{R}^{2d+1}$  muni de la loi de composition

$$(p, q, t) \cdot (p', q', t') = (p+p', q+q', t+t' + \frac{1}{2}(pq' - qp')), \quad (p, p', q, q' \in \mathbb{R}^d, t, t' \in \mathbb{R}).$$

C'est un groupe de Lie, dont l'algèbre de Lie est engendrée par  $P_1, \dots, P_d, Q_1, \dots, Q_d, T$  avec les relations

$$[P_j, P_k] = [Q_j, Q_k] = [P_j, T] = [Q_j, T] = 0; \quad [P_j, Q_k] = \delta_{jk} T.$$

<sup>3</sup>Il y a bien sûr d'autres conventions possibles, on peut par exemple développer  $a$  comme  $\sum a_{nm} z_*^n z^m$  ( $z = p + iq, z_* = p - iq$ ) et substituer  $\mathbf{z} = \mathbf{p} + i\mathbf{q}$  à  $z$  et  $\mathbf{z}_* = \mathbf{p} - i\mathbf{q}$  à  $z_*$ . On obtient la quantification de Wick; le choix de l'écriture  $\sum a_{mn} \mathbf{z}^n \mathbf{z}_*^m$  donnerait la quantification Anti-Wick [Foll].

L'identité (1.22) signifie que

$$\rho_h(p, q, t) = e^{\frac{it}{\hbar}} \mathbf{U}_{p,q}$$

définit une représentation unitaire de  $\mathbf{H}_d$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , appelée représentation de Schrödinger de paramètre  $h$ . La représentation infinitésimale associée est  $P_k \mapsto \frac{\partial}{\partial q_k} = \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_k$ ,  $Q_k \mapsto \frac{i}{\hbar} \mathbf{q}_k$ ,  $T \mapsto \frac{i}{\hbar} I$ .

**Théorème 1.2.** (Stone–von Neumann 1930 [St30, vN31], voir [Foll]) *Toute représentation unitaire irréductible de  $\mathbf{H}_d$  est équivalente à une et une seule des représentations suivantes :*

- (a)  $\rho_h$  ( $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) agissant sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ;
- (b)  $\sigma_{ab}(p, q, t) = e^{2\pi i(ap+bq)}$ , ( $a, b \in \mathbb{R}^d$ ) agissant sur  $\mathbb{C}$ .

**Représentation métaplectique.** On vient d'exposer une manière de quantifier les observables en les représentant comme opérateurs sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Dans le formalisme de Heisenberg, une transformation canonique devient un opérateur unitaire. Décrivons donc comment associer un opérateur unitaire  $M(A)$  à une transformation linéaire symplectique  $A \in Sp(d, \mathbb{R})$ . Par le théorème 1.2, il existe  $M(A)$  unitaire telle que

$$\rho_h(A(p, q), t) = M(A)\rho_h(p, q, t)M(A)^{-1}. \quad (1.23)$$

La matrice  $M(A)$  est définie à une phase près, on peut choisir cette phase de manière unique telle que  $A \mapsto M(A)$  définisse une représentation unitaire du groupe métaplectique  $Mp(d, \mathbb{R})$ , le revêtement à deux feuillets de  $Sp(d, \mathbb{R})$ ; c'est-à-dire  $M(AB) = M(A)M(B)$  pour  $A, B \in Mp(d, \mathbb{R})$  (et  $M(AB) = \pm M(A)M(B)$  pour  $A, B \in Sp(d, \mathbb{R})$ ).

On remarque que la transformation symplectique  $A$  est le temps 1 d'un flot linéaire ( $\exp(ta)$ ) (où  $a$  est dans l'algèbre de Lie de  $Mp(d, \mathbb{R})$ ), qui provient d'un certain hamiltonien quadratique  $P_a(x, \xi) = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \gamma x\xi + \frac{1}{2}\beta \xi^2$ . On définit la représentation dérivée par

$$\frac{d}{dt} M(\exp ta)|_{t=0} = \frac{i}{\hbar} \text{Op}_h^W(P_a);$$

autrement dit  $M(A)$  est le temps  $-1$  du flot associé au hamiltonien  $\text{Op}_h^W(P_a)$ . Il faut bien sûr vérifier qu'on définit ainsi une représentation de  $Mp(d, \mathbb{R})$  (voir [Foll] pour une preuve et pour une expression explicite de  $M(A)$ ).

## 1.5 Méthodes B,K,W.

**Conditions de Bohr-Sommerfeld.** Pour les systèmes intégrables, l'équation de Schrödinger (1.20) permet de retrouver, tout en les corrigeant, les conditions de Bohr-Sommerfeld. Les travaux de Kramers, Brillouin, Wentzell

[Kr26, Brill26, Wtz26], pour un système périodique à un degré de liberté, ont montré que la condition  $\int pdq \in h\mathbb{Z}$  ne donnait une approximation du spectre de Schrödinger qu'à  $O(\hbar)$  près. Pour approcher le spectre à  $O(\hbar^2)$  près, il faut en réalité poser  $\int pdq \in h(\mathbb{Z} + \nu)$  où  $4\nu$  est l'indice de Maslov de la trajectoire.

Soit l'équation de Schrödinger sur  $\mathbb{R}$ ,

$$-\frac{\hbar^2}{2}\phi'' + V\phi = E\phi. \quad (1.24)$$

On cherche à décrire le spectre dans un intervalle  $I = ]E_-, E_+[$  et on suppose que, pour tout  $E \in I$ , la couche d'énergie  $\left\{ \frac{\|\xi\|^2}{2} + V(x) = E \right\}$  est une orbite périodique. Appelons  $x_0 < x_1$  les deux points tels que  $V(x_i) = E$ ; ils correspondent aux caustiques de la lagrangienne  $\{H = E\}$ .

Sur l'intervalle  $]x_0, x_1[$ , on cherche des solutions approchées de la forme

$$\phi(x) = a(x)e^{\frac{iS(x)}{\hbar}} \quad (1.25)$$

où l'on cherche  $a$  sous forme de développement limité en puissances de  $\hbar$  :  $a(x) \sim \sum (\frac{\hbar}{i})^j a_j(x)$ . En incorporant l'Ansatz (1.25) dans l'équation (1.24), on trouve la condition

$$\frac{(S'(x))^2}{2} + V(x) = E$$

c'est-à-dire l'équation de Hamilton–Jacobi (1.9), puis une série de conditions portant sur les  $a_j$  ( $j \geq 0$ ). Il y a deux solutions formelles, correspondant aux choix de  $S(x) = \pm \int^x \sqrt{2(E - V)}$ , à constantes additives près. On peut identifier toutes les fonctions  $a_j$ , uniquement déterminées si l'on impose la normalisation  $a_0(x_2) = 1$ ,  $a_j(x_2) = 0$  pour  $j \geq 1$  ( $x_2$  fixé arbitrairement dans  $]x_0, x_1[$ ) : on trouve en particulier comme premier terme

$$a_0(x) = C|S'(x)|^{-1/2}.$$

On trouve finalement sur  $]x_0, x_1[$  deux quasi-modes indépendants de la forme (1.25),  $u_+$  correspondant au choix de  $S' > 0$ , et la solution conjuguée  $u_-$  correspondant au choix de  $S' < 0$ ; ils fournissent des solutions approchées de (1.24) à tout ordre en  $\hbar$ , sur tout compact de  $]x_0, x_1[$ .

On cherche, cependant, des solutions définies sur tout  $\mathbb{R}$ , et de carré intégrable. Cherchons donc maintenant une solution approchée sur  $] -\infty, x_2[$  où  $x_2$  est un point arbitraire dans  $]x_0, x_1[$ . On utilise pour cela l'Ansatz de Maslov,

$$u_{Maslov}^G(x) = (2\pi\hbar)^{-1/2} \int e^{i\frac{(x-x_0)\theta - T(\theta)}{\hbar}} b_\hbar(\theta) d\theta; \quad (1.26)$$

$\theta$  varie dans un voisinage de 0;  $T$  est la fonction telle que la lagrangienne  $\{H = E\} \cap \{x < x_2\}$  soit le graphe de  $x - x_0 = T'(\theta)$ . Il existe une série formelle  $b_\hbar(\theta) = \sum \hbar^j b_j(\theta)$ , unique à normalisation près, telle que (1.26)

soit solution de (1.24) à  $O(\hbar^\infty)$  près. De plus, la solution approchée ainsi trouvée décroît exponentiellement vite en  $-\infty$ .

En appliquant la méthode de la phase stationnaire, on trouve pour  $x$  dans  $]x_0, x_2[$ , une relation

$$u_{Maslov}^G(x) = C_+^G(\hbar)u_+(x) + C_-^G(\hbar)u_-(x) + O(\hbar^\infty);$$

$C_+$  et  $C_-$  sont deux séries formelles en  $\hbar$ .

On peut bien sûr proposer une construction similaire, sur  $]x_2, +\infty[$ , autour du point caustique  $x_1$ . On obtient un Ansatz de Maslov à droite, avec une relation sur  $]x_2, x_1[$

$$u_{Maslov}^D(x) = C_+^D(\hbar)u_+(x) + C_-^D(\hbar)u_-(x) + O(\hbar^\infty).$$

On peut recoller les solutions à  $O(\hbar^\infty)$  près à condition que  $C_\pm^D(\hbar) = C_\pm^G(\hbar)$ , ce qui donne une condition sur  $E$ . Pour une telle énergie  $E_\hbar$  (donnée par un développement limité en puissances de  $\hbar$ ) on obtient ainsi une fonction  $\phi_\hbar$ , de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$ , (définie elle aussi par un développement en puissances de  $\hbar$ ) telle que  $\|(\mathbf{H} - E_\hbar)\phi_\hbar\|_{L^2} < O(\hbar^\infty)\|\phi_\hbar\|_{L^2}$ . Les  $E_\hbar$  approximent donc le spectre à  $O(\hbar^\infty)$  près.<sup>4</sup> À l'ordre 2, la condition de recollement s'écrit

$$\int_{\{H=E_\hbar\}} pdq = \left(n + \frac{1}{2}\right)h + O(\hbar^2) \quad (1.27)$$

avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

Les articles [Kr26, Brill26, Wtz26] s'arrêtaient dans l'expression de  $E_\hbar$  au terme d'ordre 1 en  $\hbar$ . Kramers, par exemple, utilisait comme Ansatz la fonction d'Airy,  $u_{Ai}((\alpha/\hbar^2)^{1/3}(x - x_0))$ , où  $u_{Ai}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\theta + \frac{1}{3}\theta^3)} d\theta$ , et  $-\alpha/2$  est la dérivée du potentiel  $V$  en  $x_0$ . Les calculs ont été menés à tout ordre, puis ont été étendus à des systèmes intégrables de plus grande dimension par Keller [Kell58] et Maslov [Masl65].

**La formule de Van Vleck.** On vient d'introduire l' Ansatz BKW, qui permet de calculer des solutions approchées de l'équation de Schrödinger stationnaire en les cherchant sous la forme  $a_\hbar(x)e^{\frac{iS(x)}{\hbar}}$ . Un autre Ansatz du même type est celui de Van Vleck [VV28]. Il consiste à chercher la solution de l'équation évolutive

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{H}\psi = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta\psi + V\psi$$

de condition initiale

$$\psi_{t=0}(x) = a(0, x)e^{\frac{iS(x)}{\hbar}}$$

<sup>4</sup>On applique le principe suivant : s'il existe  $\phi$  telle que  $\|(\mathbf{H} - E)\phi\|_{L^2} \leq \varepsilon\|\phi\|_{L^2}$ , alors le spectre de  $H$  rencontre  $]E - \varepsilon, E + \varepsilon[$ . Par contre, il n'y a pas forcément de fonction propre proche de  $\phi$ .

sous forme  $\psi_t(x) = a_{\hbar}(t, x) e^{\frac{iS(t, x)}{\hbar}}$ ,  $a_{\hbar}$  étant donné par un développement limité en puissances de  $\hbar$ ,  $a_{\hbar} \sim \sum_{j \geq 0} \hbar^j a_j$ . On montre alors que  $S(t, x)$  doit être solution de l'équation de Hamilton–Jacobi (1.6), et que les  $a_j$  doivent satisfaire  $\frac{\partial a_k}{\partial t} = \frac{i\Delta a_{k-1}}{2} - \langle da_k, dS \rangle - a_k \frac{\Delta S}{2}$ . En particulier, le premier terme  $a_0(t, x)$  calculé par Van Vleck est

$$a_0(t, x) = \sqrt{J_S^t(x)}^{-1} a(0, (\exp_S^t)^{-1}x),$$

où  $\exp_S^t$  est l'application ‘‘exponentielle’’  $\exp_S^t : X \rightarrow X$ ,  $y \mapsto \pi(\phi_H^t(y, d_y S(0)))$  (la notation  $\pi$  désigne la projection  $T^*X \rightarrow X$ ), et  $J_S^t(x)$  est le jacobien de  $\exp_S^t$ , évalué au point  $y = (\exp_S^t)^{-1}x$ . Ceci n'a de sens, évidemment, qu'avant le franchissement des caustiques, c'est-à-dire tant que  $\exp_S^t$  reste un difféomorphisme local.

Selon le même principe, on obtient un développement asymptotique du noyau de  $\exp(-\frac{it}{\hbar}\mathbf{H})$  restreint aux états initiaux de vitesse de propagation bornée, mettons par  $v_{\max}$ . Soit  $\chi$  une fonction lisse localisée dans le compact  $\{(x, \xi), |\xi| \leq v_{\max}\}$ . On a

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\mathbf{H}\right) \text{Op}_{\hbar}(\chi)\delta_y(x) \\ & \sim (2\pi i\hbar)^{-d/2} \sum_{\gamma(0)=y, \gamma(t)=x, |\dot{\gamma}(0)| \leq v_{\max}} e^{-i\frac{\pi}{2}\text{ind}(\gamma)} e^{\frac{iA(\gamma)}{\hbar}} \sum_j \hbar^j a_j^\gamma(y, x) \end{aligned} \quad (1.28)$$

où  $A(\gamma)$  est l'action (1.5) du chemin  $\gamma$ , joignant  $y$  à  $x$ , et  $a_0^\gamma(y, x) = \sqrt{J^{\gamma, t}(y, x)}^{-1} \chi(y, \dot{\gamma}(0))$ , où  $J^{\gamma, t}(y, x)$  est le jacobien de l'application exponentielle  $\exp_y^t : T_y^*X \rightarrow X$ ,  $v \mapsto \pi(\phi_H^t v)$ , au point  $\dot{\gamma}(0)$ . Enfin  $\text{ind}(\gamma)$  est l'indice de Morse du chemin  $\gamma$ , c'est-à-dire le nombre de points conjugués entre  $x$  et  $y$ . Comme précédemment, il faut que  $x$  et  $y$  ne soient pas conjugués en temps  $t$  pour que  $a_0^\gamma(y, x)$  soit bien défini. Tant que  $x$  et  $y$  sont joints en temps  $t$  par une unique trajectoire  $\gamma$  de vitesse initiale inférieure à  $v_{\max}$ , qui minimise l'action (c'est-à-dire avant le franchissement du cut-locus) on a simplement

$$\exp\left(-\frac{it}{\hbar}\mathbf{H}\right) \text{Op}_{\hbar}(\chi)\delta_y(x) \sim (2\pi i\hbar)^{-d/2} e^{\frac{iA(x, y; t)}{\hbar}} \sum_j \hbar^j a_j(y, x) \quad (1.29)$$

avec  $a_0(y, x) = J^{\gamma, t}(y, x)^{-1/2} \chi(y, \dot{\gamma}(0)) = J^t(y, x)^{-1/2} \chi(y, \dot{\gamma}(0))$ .



## Chapitre 2

# Intégrales oscillantes et approximation semiclassique.

Dans l'interprétation de De Broglie ou Schrödinger [Broglie24, Schr26-II], la mécanique classique est une approximation de la mécanique ondulatoire, valable pour des ondes oscillant fortement : c'est ce qu'on appelle la limite semiclassique, réalisée mathématiquement en faisant tendre  $\hbar$  vers 0 dans les équations.

Le passage à la limite s'explique par un phénomène de superposition d'ondes produisant des interférences, localisées autour des trajectoires classiques. Ce chapitre tente de donner un aperçu des techniques mathématiques servant à la mise en œuvre de cette idée.

### 2.1 La propagation des singularités selon Schrödinger.

Inspiré par les travaux de De Broglie, Schrödinger énonce que “*la manière correcte de concevoir ou de représenter les phénomènes mécaniques consiste à les rattacher à une propagation d'ondes* [Schr26-II]. Cette “mécanique ondulatoire” peut être approximée par la “mécanique des trajectoires”, quand la longueur d'onde est très petite devant les dimensions caractéristiques du système, de la même manière que l'optique ondulatoire se ramène à l'optique des rayons. Schrödinger se base donc sur l'analogie entre optique et mécanique présente dans les travaux de Hamilton [H1830, H1834], ainsi que dans le principe variationnel de Maupertuis. Cette analogie fournit une explication plus pertinente à l'équation (1.20) que celle de l'article initial [Schr26-I], “*incompréhensible*” selon Schrödinger lui-même.

L'idée de départ est de décrire tout phénomène mécanique par une onde, dont la phase  $A$  doit approximativement obéir à l'équation de Hamilton-Jacobi (1.6), quand la longueur d'onde est petite. Schrödinger travaille en fait avec des solutions stationnaires de l'équation :  $A(x, t)$  est de la forme  $A(x, t) = -Et + S(x)$  et  $S$  solution de (1.9).

Si l'on postule que l'onde est de profil sinusoidal, la fonction d'onde ressemblera donc à l'Ansatz

$$\psi(x, t) \sim \exp\left(i\frac{A(x, t)}{\hbar} + C\right). \quad (2.1)$$

Le choix de la constante de Planck répond à des considérations empiriques. La vitesse locale de propagation de l'onde est

$$u(x) = \frac{-\frac{\partial A}{\partial t}}{|\nabla A|} = \frac{E}{\sqrt{2(E - V(x))}}.$$

et la longueur d'onde,  $\lambda(x) = \frac{h}{\sqrt{2(E - V(x))}}$ . Schrödinger estime donc naturel de proposer l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = u^2 \Delta \psi,$$

en soulignant à maintes reprises l'arbitraire de ce choix. En tenant compte de l'expression de  $u$  et de l'Ansatz (2.1) souhaité quand  $\lambda \rightarrow 0$ , on trouve  $-\frac{\hbar^2}{2}\Delta\psi + V\psi = E\psi$ .

Le passage de la mécanique ondulatoire à la mécanique classique, trajectorielle, est expliqué par un phénomène d'interférences. Essayons de résumer, en la formalisant par des équations mathématiques, l'argumentation purement descriptive de Schrödinger. Considérons une superposition d'ondes de la forme (2.1),

$$\psi(t, x) \sim \int a(x, \theta) \exp\left(\frac{i}{\hbar} A(t, x; \theta)\right) d\theta, \quad (2.2)$$

où  $\theta$  varie dans un petit ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , et  $A(t, x; \theta)$  est une famille de solutions de (1.6) paramétrées par  $\theta$ . Si les oscillations sont très rapides ( $\lambda$  petit) les ondes vont interférer destructivement, sauf au(x) point(s)  $q$  où la phase est stationnaire,

$$\partial_\theta A(x, \theta_0) = 0.$$

Le front d'onde à l'instant  $t$  est le sous-ensemble du cotangent

$$\mathcal{L}(t) = \{(x, \xi), \text{ il existe } \theta_0, \partial_\theta A(t, x, \theta_0) = 0, \xi = \partial_x A(t, x, \theta_0)\}. \quad (2.3)$$

L'ensemble  $\mathcal{L}(t)$  est précisément l'image de  $\mathcal{L}(0)$  par le flot hamiltonien (1.4) au temps  $t$ , c'est-à-dire que le front d'onde se propage selon le flot classique :

*“Le mouvement du point de concordance de phase pour certains ensembles infinitésimaux de systèmes d'ondes à  $n$  paramètres, se poursuit d'après les mêmes lois que le mouvement du point représentatif du système mécanique correspondant” [Schr26-II].*

Cette description asymptotique est valable si la longueur d'onde  $\lambda$  est petite; mathématiquement,  $\hbar$  tend vers 0.

Dans le langage moderne, l'ensemble  $\mathcal{L}(t)$  est une variété lagrangienne, de fonction génératrice  $A(t, x; \theta)$ . Les fonctions d'ondes de la forme particulière (2.2) s'appellent *distributions lagrangiennes* ou *états lagrangiens*, associés à  $\mathcal{L}(t)$ . Schrödinger ne s'appuyant sur aucune formulation mathématique, il est difficile de dire s'il avait à l'esprit cette image des états lagrangiens, ou plutôt les *états cohérents* que nous rencontrerons plus tard.

Pour l'étude de ces phénomènes, les deux outils mathématiques fondamentaux sont la transformée de Fourier, qui permet d'analyser une onde dans l'espace des impulsions comme dans l'espace des positions; et la méthode de la phase stationnaire, qui décrit les phénomènes d'interférences amenant une onde à se localiser pour devenir un objet classique. On reviendra sur les procédés de quantification, qui permettent de faire correspondre une observable quantique à toute observable classique. Le retour du quantique vers le classique, quand  $\hbar \rightarrow 0$ , est décrit par la théorie des opérateurs pseudodifférentiels à petit paramètre (paragraphe 2.4). On énoncera au paragraphe 2.5 le théorème de propagation des singularités pressenti par Schrödinger. Par la suite, ces techniques seront appliquées à l'étude des fonctions propres du laplacien.

## 2.2 Transformée de Fourier.

Les paragraphes 2.2 à 2.6 sont inspirés des notes rédigées par Yves Colin de Verdière pour notre cours de Master 2 de 2004.

La transformée de Fourier

$$\mathcal{F}_\hbar(u)(\xi) = \hat{u}_\hbar(\xi) = (2\pi\hbar)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{i}{\hbar}\xi \cdot x} u(x) dx$$

permet d'analyser un signal  $u$  dans l'espace des impulsions, à l'échelle  $\hbar$ . Pour une fonction  $u \in C_o^\infty$ , on a la décomposition

$$u(x) = (2\pi\hbar)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar}\xi \cdot x} \hat{u}_\hbar(\xi) d\xi .$$

## 2.3 La méthode de la phase stationnaire.

Il s'agit d'évaluer le comportement asymptotique quand  $\hbar \rightarrow 0$  d'une intégrale de la forme :

$$I(\hbar) = \int_{\mathbb{R}^D} e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} a(x) dx$$

où  $a \in C_o^\infty(\mathbb{R}^D)$  et  $S \in C^\infty(\mathbb{R}^D, \mathbb{R})$ .

Les interférences entre les différents termes  $e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}$  sont destructives, sauf aux points  $x$  où la phase est stationnaire.

“Je crois qu’il est extrêmement difficile de démontrer d’une façon précise, que la superposition de ces systèmes d’ondes fournit un effet différent de zéro uniquement dans le voisinage immédiat du point de concordance des phases, l’action des ondes s’annulant sensiblement en tout autre point, par interférence”, écrit Schrödinger [Schr26-II].

En pratique, on peut montrer que :

- Si  $S$  n’a pas de points critiques dans le support de  $a$ ,  $I(\hbar) = O(\hbar^\infty)$ .
- Si  $S$  a un seul point critique  $x_0$  supposé non dégénéré dans le support de  $a$ , alors on a un développement limité à tout ordre,

$$I(\hbar) \sim (2\pi\hbar)^{D/2} \frac{e^{i\sigma\pi/4}}{|\det S''(x_0)|^{1/2}} e^{iS(x_0)/\hbar} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j a_j \right) \quad (2.4)$$

où  $S''(x_0)$  est la matrice hessienne de  $S$  en  $x_0$ ,  $\sigma = n_+ - n_-$  est l’indice de  $S''(x_0)$  (la différence entre le nombre de valeurs propres positives et de valeurs propres négatives), et  $a_0 = a(x_0)$ . Pour les termes suivants,  $a_j$  s’exprime en fonction des dérivées de  $a$  jusqu’à l’ordre  $2j$ , au point  $x_0$ .

On a souvent besoin de travailler avec des fonctions  $a$  à support non compact, mais avec un comportement raisonnable à l’infini, et dépendant éventuellement de  $\hbar$ . On introduit alors les espaces de symboles :

**Espaces de symboles.** Soient  $D, d > 0$  deux entiers, et soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^D$ . On définit les *symboles d’ordre  $m$*  (indépendants de  $\hbar$ ) :

$$\begin{aligned} \Sigma^m(U \times \mathbb{R}^d) &:= \{a \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d; \mathbb{C}) / \\ &\quad \text{pour tout compact } K \subset U, \text{ il existe } C, \\ &\quad |D_z^\alpha D_\xi^\beta a(z, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \text{ pour tout } (z, \xi) \in K \times \mathbb{R}^d\}. \end{aligned}$$

Par exemple, cette classe contient les fonctions homogènes au voisinage de l’infini. On note  $\Sigma^{-\infty} = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} \Sigma^m$  les symboles régularisants – qui contiennent, entre autres, les fonctions à support compact  $C_o^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$ .

On définit ensuite les *symboles semiclassiques d’ordre  $m$  et de degré  $l$*  – “semiclassiques” car ils dépendent d’un paramètre  $\hbar$  :

$$\Sigma^{m,l} = \{a_\hbar(z, \xi) = \hbar^l \sum_{j=0}^{\infty} \hbar^j a_j(z, \xi), a_j \in \Sigma^{m-j}\}$$

Cela signifie que  $a_\hbar(x, \xi)$  admet un développement asymptotique en puissances de  $\hbar$ ; ce développement asymptotique est à comprendre au sens où

$$a - \hbar^l \sum_{j=0}^{N-1} \hbar^j a_j \in \hbar^{l+N} \Sigma^{m-N}$$

pour tout  $N$ , uniformément en  $\hbar$ . Dans ce contexte, on note  $\Sigma^{-\infty, +\infty} = \bigcap_{m \geq 0} \Sigma^{-m, m}$  l'espace des symboles régularisants.

On peut remplacer  $U \times \mathbb{R}^d$  par un fibré vectoriel de rang  $d$  sur une variété de dimension  $D$ .

**Intégrales de Fresnel et phase stationnaire généralisée.** En gardant les notations du précédent paragraphe, on est maintenant en mesure d'étudier le comportement asymptotique en  $\hbar \rightarrow 0$  de l'intégrale :

$$I_{\hbar}^S(a) = \int_{U \times \mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{\hbar} S(z, \xi)} a(z, \xi) dz d\xi$$

avec  $S$  lisse, homogène de degré  $n > 0$  en  $\xi$  au voisinage de l'infini, sans point critique hors d'un compact de  $U \times \mathbb{R}^d$ . L'indice  $*_o$  signifie à support compact, indépendant de  $\hbar$ , par rapport à la variable  $z$ . L'intégrale  $I_{\hbar}^S(a)$  est bien définie pour  $a \in \Sigma_o^{m, l}$  par prolongement continu à partir du cas  $a \in C_o^{\infty}$ . La formule de la phase stationnaire s'applique encore.

## 2.4 Opérateurs pseudodifférentiels.

Un procédé de quantification est une manière d'associer un opérateur à une observable classique  $a(p, q)$ . Rappelons que Schrödinger [Schr26-III] avait prescrit les choix  $\mathbf{q}_k = (\text{multiplication par } q_k)$ , et  $\mathbf{p}_k = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_k}$ , de manière à avoir les relations de commutation de Heisenberg (1.15). Étendre cette définition à une fonction plus générale de  $(p, q)$  pose problème : pour la fonction  $p_k q_k^2$  par exemple on pourrait proposer  $\mathbf{p}_k \mathbf{q}_k^2$ ,  $\mathbf{q}_k^2 \mathbf{p}_k$ , ou encore  $\mathbf{q}_k \mathbf{p}_k \mathbf{q}_k$ . Il y a une multitude de procédés de quantification, nous avons déjà évoqué la quantification de Weyl, qui a la propriété d'associer un opérateur symétrique à un symbole réel et possède la propriété de covariance (1.23) vis-à-vis de l'action du groupe métaplectique. Nous définirons aussi la quantification positive de Wick, qui associe un opérateur positif à un symbole positif.

La théorie des opérateurs pseudodifférentiels à petit paramètre permet de décrire le passage de la théorie quantique vers la théorie classique quand  $\hbar \rightarrow 0$ . Les opérateurs pseudodifférentiels ont été essentiellement développés par Hörmander [Ho, Ho79] pour l'étude des équations aux dérivées partielles (sans petit paramètre). Les opérateurs pseudodifférentiels à paramètre, déjà manipulés par Maslov [Masl65] dans le cadre de l'analyse semiclassique, développés par Voros du côté de la physique théorique [Vor, Vor78] ont été mis au point par Sjöstrand, Robert, Helffer, [DimSjo, Rob]... On conseille [Helffer1] pour une histoire de la naissance de cette théorie dans les années 1970 et une bibliographie exhaustive; voir aussi [Helffer2] pour un survol des applications de la théorie.

Les espaces de symboles varient selon les auteurs, et peuvent être sophistiqués à l'extrême. La définition de Hörmander fait intervenir des sym-

boles asymptotiquement homogènes à l'infini, destinés à décrire les propriétés régularisantes des opérateurs. Les classes de symboles semiclassiques [DimSjo] sont plutôt destinées à comprendre le comportement des opérateurs quand  $\hbar \rightarrow 0$ , en norme  $L^2$  par exemple. La classe de symboles que nous utilisons ici est un mélange des deux approches : en prenant  $\hbar = 1$  on retrouve exactement les symboles de Hörmander.

**Espaces de fonctions dépendant de  $\hbar$ .** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , on considérera les classes suivantes de fonctions sur  $\Omega$ , ou d'opérateurs agissant sur les fonctions sur  $\Omega$  :

- *Fonctions admissibles* : ce sont les fonctions  $u = (u_\hbar(x))$  de classe  $C^\infty$  en  $x$ , dont les normes  $C^k$  sur tout compact  $K$  sont à croissance polynômiale en  $\hbar^{-1}$  : pour tout compact  $K$ , pour tout  $k$ , il existe  $N$  tel que  $\|u_\hbar\|_{C^k(K)} \leq \hbar^{-N}$ .
- *Fonctions négligeables* : on demande que les normes  $C^k$  sur tout compact  $K$  soient d'ordre  $O(\hbar^N)$  pour tous  $k, N$ .
- *Opérateurs régularisants* : la plupart des assertions seront valables modulo opérateurs régularisants. Ce sont les opérateurs de la forme  $A_\hbar u(x) = \int K_\hbar(x, y)u(y)dy$  avec un noyau de Schwartz  $K_\hbar$  négligeable.
- *Opérateurs propres* : on demande que le support  $S \subset \Omega \times \Omega$  du noyau de Schwartz de l'opérateur se projette proprement sur la première coordonnée. Autrement dit, pour tout compact  $K \subset \Omega$ ,  $\{(x, y) \in S, x \in K\}$  est compact.

**Opérateurs pseudodifférentiels propres.** Soit  $a = a_\hbar(x, y; \xi)$  dans  $\Sigma_o^{m,l}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^d)$ . Ici l'indice  $o$  signifie que pour tout compact  $K \subset \Omega$ , il existe un compact  $K'$  tel que  $a(x, y, \xi) = 0$  pour tout  $x \in K, y \notin K', \xi \in \mathbb{R}^d$ . Soit  $u$  une fonction admissible. On pose :

$$\text{OP}_\hbar(a)u(x) = (2\pi\hbar)^{-d} \int e^{\frac{i}{\hbar}\xi \cdot (x-y)} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi,$$

l'intégrale étant bien définie au sens de Fresnel. On note  $\Psi_o^{m,l}(\Omega)$  l'espace de ces opérateurs, appelés opérateurs pseudodifférentiels propres, de degré  $l$  et d'ordre  $m$ , sur  $\Omega$ . Les opérateurs pseudodifférentiels opèrent sur les espaces de fonctions admissibles. Un opérateurs pseudodifférentiels de  $\Psi_o^{0,0}(\Omega)$  opère continument de  $L^2(\Omega)$  dans  $L_{loc}^2(\Omega)$ , uniformément en  $\hbar$ .

**Quantification de Weyl. Quantifications droite et gauche.** Pour simplifier, prenons  $\Omega = \mathbb{R}^d$ . Si  $a \in \Sigma^{m,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  est à support compact par rapport au premier facteur, on a déjà rencontré la quantification de

Weyl,  $\text{Op}_\hbar^W(a) = \text{OP}_\hbar(a(\frac{x+y}{2}, \xi))$ . Cette quantification associe un opérateur symétrique à un symbole réel, et possède la propriété remarquable (1.23) de covariance vis-à-vis de la représentation métaplectique. L'inverse de la quantification de Weyl est explicite et donné par la transformée de Wigner : si  $K(x, y)$  est le noyau d'un opérateur  $A$ , on pose :

$$W_A(x, \xi) = (2\pi\hbar)^{-d/2} \int e^{\frac{iv\xi}{\hbar}} K\left(x + \frac{v}{2}, x - \frac{v}{2}\right) dv .$$

On a alors :  $A = \text{Op}_\hbar^W(W_A)$ . Le symbole de Weyl d'un opérateur est donc unique.

Deux autres choix courants de quantification sont la quantification gauche, qui consiste à associer à l'observable  $a \in \Sigma^{m,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  l'opérateur  $\text{OP}_\hbar(a(x, \xi))$ , et la quantification droite, qui choisit  $\text{OP}_\hbar(a(y, \xi))$ . Les symboles gauche ou droit d'un opérateur sont chacun déterminés de manière unique par l'opérateur.

**Exemple 2.1.** Pour quantifier l'observable  $a(p, q) = pq^2$ , la quantification gauche choisira  $\mathbf{q}^2\mathbf{p}$ , la droite choisira  $\mathbf{p}\mathbf{q}^2$ , et la quantification de Weyl formera la combinaison  $\frac{1}{4}(\mathbf{p}^2\mathbf{q} + 2\mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q} + \mathbf{q}\mathbf{p}^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2\mathbf{q} + \mathbf{q}\mathbf{p}^2)$ .

**Symbole principal.** Soit  $a_\hbar \in \Sigma_o^{m,0}$ ; la méthode de la phase stationnaire montre que, si l'on applique  $A_\hbar = \text{OP}_\hbar(a_\hbar)$  à un état de type BKW, on a l'asymptotique suivante :

$$A_\hbar \left( u(x) e^{iS(x)/\hbar} \right) = a_0(x, x, S'(x)) u(x) e^{iS(x)/\hbar} + O(\hbar)$$

La fonction  $a_0(x, x, \xi)$  sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d = T^*\mathbb{R}^d$  ne dépend donc pas du choix de la forme du symbole total  $a_\hbar(x, y, \xi)$ . On l'appelle le symbole principal de  $A_\hbar$ , noté  $\sigma^0(A_\hbar)$ .

**Produit.** Le produit de deux opérateurs pseudodifférentiels propres  $A$  et  $B$  est un opérateur pseudodifférentiel; les degrés et les ordres s'ajoutent. Les symboles principaux se multiplient :  $\sigma^0(A_\hbar B_\hbar) = \sigma^0(A_\hbar)\sigma^0(B_\hbar)$ . Autrement dit si  $a \in \Sigma_o^{m_1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  et  $b \in \Sigma_o^{m_2,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ ,

$$\text{Op}_\hbar(ab) - \text{Op}_\hbar(a)\text{Op}_\hbar(b) \in \Psi_o^{m_1+m_2-1,1}(\mathbb{R}^d). \quad (2.5)$$

**Crochets.** Si  $A \in \Psi_o^{m_1,0}$  et  $B \in \Psi_o^{m_2,0}$ , le crochet de  $A$  et  $B$  :  $[A, B] = AB - BA$  est dans  $\Psi_o^{m_1+m_2-1,1}$ . Le symbole principal est un terme d'ordre 1 en  $\hbar$ . C'est le crochet de Poisson  $\sigma^1([A, B]) = \frac{\hbar}{i}\{a_0, b_0\}$  des symboles principaux  $a_0$  de  $A$  et  $b_0$  de  $B$ .

**Opérateurs pseudodifférentiels sur une variété compacte.** Soit  $X$  une variété  $C^\infty$  compacte de dimension  $d$ . On choisit une partition de l'unité  $\varphi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$  subordonnée à un recouvrement fini de  $X$  par des cartes  $\Omega_i$  telle que  $\sum \varphi_j^2 = 1$ , et on pose, pour  $a \in \Sigma^{m,0}(T^*X)$  :

$$\text{Op}_\hbar(a) = \sum_i \text{OP}_\hbar(\varphi_i(x)\varphi_i(y)a(x, \xi)) .$$

L'application  $a \rightarrow \text{Op}_\hbar(a)$  ainsi définie dépend de la partition de l'unité et des coordonnées locales choisies; mais son image, modulo les opérateurs régularisants, est indépendante de ces données. L'algèbre  $\Psi^{m,0}(X)$  des opérateurs pseudodifférentiels sur  $X$  est ainsi bien définie (modulo régularisants).

**Un mot sur les opérateurs intégraux de Fourier.** On a vu comment faire correspondre un opérateur à une observable classique. La théorie des opérateurs pseudodifférentiels donne alors un cadre mathématique dans lequel étudier la limite  $\hbar \rightarrow 0$ . Plus généralement, la théorie des opérateurs intégraux de Fourier cherche à associer un opérateur (souvent unitaire) à une transformation canonique, et décrit le passage à la limite de l'un vers l'autre quand  $\hbar \rightarrow 0$  ([Ho, Ho71, Masl65, Leray], Asada–Fujiwara pour les opérateurs intégraux de Fourier à petit paramètre). Nous en avons déjà rencontré un exemple : dans la section 1.3, le flot hamiltonien classique est quantifié par le flot unitaire engendré par l'opérateur hamiltonien. On passe de l'un vers l'autre par le développement asymptotique de Van Vleck (1.28). Un autre exemple d'opérateur intégral de Fourier est l'opérateur  $M(A)$  du paragraphe 1.4.

Nous avons défini au paragraphe 2.1, sans préciser tous les détails techniques, la notion de *distribution lagrangienne* associée à une variété lagrangienne donnée. Un opérateur est dit *opérateur intégral de Fourier associé à une transformation canonique*  $\kappa$  si son noyau de Schwartz est une distribution lagrangienne associée au graphe de  $\kappa$ . Il faudrait encore, pour l'étude de la limite semiclassical, préciser une classe adéquate de symboles.

Citons le *théorème d'Egorov* : si  $U_\hbar$  est un opérateur intégral de Fourier elliptique, associé à une transformation canonique  $\kappa$ , et  $a \in C_0^\infty(T^*X)$ , alors  $U_\hbar^{-1} \text{Op}_\hbar(a) U_\hbar$  est un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal  $a \circ \kappa$ . En particulier,

$$\|U_\hbar^{-1} \text{Op}_\hbar(a) U_\hbar - \text{Op}_\hbar(a \circ \kappa)\|_{L^2, L_{loc}^2} = O(\hbar). \quad (2.6)$$

Le cas qui nous intéresse le plus est celui de l'opérateur

$$U_\hbar^t = \exp \left\{ -\frac{it}{\hbar} \left( -\frac{\hbar^2}{2} \Delta + V \right) \right\},$$

pour  $t$  donné. Si l'on se restreint à une partie compacte de l'espace des phases en composant avec  $\text{Op}_\hbar(\chi)$  ( $\chi$  à support compact), on montre que  $U_\hbar^t \text{Op}_\hbar(\chi)$



est un opérateur intégral de Fourier associé à  $\kappa = \phi_H^t$ , le flot hamiltonien classique défini par  $H(x, \xi) = \frac{\|\xi\|^2}{2} + V(x)$ . Le théorème d'Egorov (2.6) exprime donc la convergence, sur tout intervalle de temps compact, du flot de Schrödinger vers le flot hamiltonien classique, quand  $\hbar \rightarrow 0$ .

## 2.5 Microsupport, propagation des singularités.

Soit  $(u_\hbar)$  une famille admissible de fonctions sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ . On va définir le *microsupport*, ou *ensemble de fréquences* [GS77, Rob] de  $(u_\hbar)$  comme un fermé du fibré cotangent compactifié (chaque fibre est compactifiée par une sphère à l'infini et on a ainsi un fibré en boules fermées). Les points à l'infini sont notés  $(x_0, \infty\xi_0)$  avec  $\xi_0 \neq 0$ .

On dira que

- $(x_0, \xi_0) \notin MS(u_\hbar)$  si et seulement s'il existe  $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$  avec  $\varphi(x_0) \neq 0$  et  $\mathcal{F}_\hbar(\varphi u_\hbar)(\xi) = O(\hbar^\infty)$  uniformément dans un voisinage de  $\xi_0$ .
- $(x_0, \infty\xi_0) \notin MS(u_\hbar)$  si et seulement s'il existe  $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$  avec  $\varphi(x_0) \neq 0$  et, pour tout  $N$ ,  $\mathcal{F}_\hbar(\varphi u_\hbar)(\xi) = O(\hbar^N/(1+|\xi|^N))$  uniformément dans un voisinage de l'infini, dans un cône ouvert contenant  $\xi_0$ .

Le microsupport  $MS(u_\hbar)$  est un fermé du cotangent compactifié  $\overline{T^*\Omega}$ . Il s'agit d'une version à petit paramètre de la notion de *front d'onde* développée par Hörmander [Ho]. Les définitions précédentes peuvent être adaptées aux variétés.

**Exemple 2.2.** (*États cohérents*) On appelle *état cohérent localisé* en  $(x_0, \xi_0)$  la *gaussienne*

$$e_{x_0, \xi_0}(x) = \frac{1}{(\pi\hbar)^{d/4}} e^{i\xi_0 \cdot x/\hbar} \exp\left(-\frac{\|x - x_0\|^2}{2\hbar}\right)$$

Son microsupport est réduit au singleton  $(x_0, \xi_0)$ .

**Exemple 2.3.** (*États lagrangiens*) Soit  $u_\hbar(x) = a(x)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}$  où  $a$  et  $S$  sont de classe  $C^\infty$ . Le microsupport de  $(u_\hbar)$  est le graphe lagrangien  $\{(x, dS(x)), x \in \text{supp}(a)\}$ .

Voici la version formalisée du résultat pressenti par Schrödinger :

**Théorème 2.4.** (*Théorème de propagation des singularités*) Soit  $U_\hbar$  un opérateur intégral de Fourier, associé à une transformation canonique  $\kappa$ . Alors  $MS(U_\hbar u_\hbar) \subset \kappa.MS(u_\hbar)$ .

Le résultat suivant, qui peut-être démontré indépendamment du précédent, lui est relié si l'on montre que  $\exp(-\frac{it}{\hbar}P)$  est un opérateur intégral de Fourier associé à  $\phi_{a_0}^t$ .

**Théorème 2.5.** *Si  $Pu_{\hbar} = O(\hbar^\infty)$  avec  $P \in \Psi^{m,0}$  et  $\sigma^0(P) = a_0$  à valeurs réelles, le microsupport de  $u_{\hbar}$  est contenu dans  $\{a_0 = 0\}$ , et invariant par les flot hamiltonien de  $a_0$ .*

**Corollaire 2.6.** *Soit  $(X, \|\cdot\|)$  une variété riemannienne, et  $\Delta$  le laplacien sur  $X$  associé à la métrique. Si  $(-\hbar^2 \Delta - 1)u_{\hbar} = 0$ , le microsupport de  $(u_{\hbar})$  est un fermé invariant par le flot géodésique du fibré cotangent unitaire  $S^*X$ .*

## 2.6 États stationnaires, mesures semiclassiques.

Une quantification  $\text{Op}$  est dite *positive* si  $\text{Op}(a)$  est un opérateur positif dès que  $a$  est une fonction à valeurs positives. Les quantifications usuelles n'ont pas cette propriété.

**Quantification positive sur  $\mathbb{R}^d$ .** Pour  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ , notons  $\Pi_{(x,\xi)}$  le projecteur orthogonal sur l'état cohérent  $e_{(x,\xi)}$ .

**Théorème 2.7.** *Si  $a \in C_o^\infty(T^*\mathbb{R}^d)$ , l'opérateur défini par*

$$\text{Op}^+(a) = (2\pi\hbar)^{-d} \int a(x, \xi) \Pi_{x,\xi} dx d\xi$$

*est dans la classe  $\Psi^{-\infty,0}$ , et est auto-adjoint positif si  $a$  est une fonction positive. Son symbole principal est  $a(x, \xi)$ .*

*On peut étendre la définition de  $\text{Op}^+$  pour les fonctions  $a$  constantes au voisinage de l'infini de  $T^*X$  :  $\text{Op}^+(1)$  est l'identité.*

Pour définir une quantification positive sur une variété compacte  $X$ , on choisit un atlas de  $X$  et une partition de l'unité subordonnée,  $\sum \varphi_j^2 = 1$ . On pose pour  $a \in C_o^\infty(T^*X)$ ,  $\text{Op}_X^+(a) = \sum_j \varphi_j \text{Op}_{\mathbb{R}^d}^+(a) \varphi_j$ . On étend cette définition aux fonctions constantes au voisinage de l'infini, en posant  $\text{Op}_X^+(1) = \text{I}$ .

**Mesures semiclassiques.** Soit  $X$  une variété riemannienne compacte; on notera  $\text{Vol}$  l'élément de volume riemannien sur  $X$ . À une famille  $(u_{\hbar})$  de fonctions normalisées dans  $L^2(X, \text{Vol})$ , on peut associer une famille de distributions  $\mu_{\hbar}$  par la formule  $\mu_{\hbar}(a) = \langle \text{Op}^+(a)u_{\hbar}, u_{\hbar} \rangle_{L^2(X, \text{Vol})}$ . Ce sont en fait des mesures de probabilité sur le fibré cotangent compactifié  $\overline{T^*X}$ . Nous conviendrons de les appeler *mesures de Husimi*, associées aux  $(u_{\hbar})$ . Le terme *mesures de Wigner* sera réservé au cas de  $X = \mathbb{R}^d$ , muni de la quantification de Weyl, et désignera les distributions  $a \mapsto \langle \text{Op}^W(a)u_{\hbar}, u_{\hbar} \rangle$ .

Il faut noter que les limites semiclassiques de ces distributions ne dépendent pas des nombreux choix arbitraires intervenant dans la définition de  $\text{Op}$  : choix des coordonnées locales, choix d'une partition de l'unité, choix du

procédé de quantification... Nous appellerons *mesure semiclassique* associée aux  $(u_{\hbar})$  toute valeur d'adhérence de la suite  $(\mu_{\hbar})$  en topologie faible. La projection de  $\mu_{\hbar}$  sur  $X$  se comporte asymptotiquement comme la mesure  $|u_{\hbar}(x)|^2 d\text{Vol}(x)$ .

**Exemple 2.8.** (*états BKW, états lagrangiens*) Si  $u_{\hbar}(x) = a(x)e^{iS(x)/\hbar}$  avec  $a$  et  $S$  lisses, il y a une unique mesure semiclassique associée, c'est la mesure portée par le graphe lagrangien  $\{(x, dS(x)), x \in X\}$ , et dont la projection sur  $X$  est  $|a(x)|^2 d\text{Vol}(x)$ .

Les mesures semiclassiques sont toujours portées par le microsupport des  $(u_{\hbar})$  quand  $\hbar \rightarrow 0$ . Dans le cas où les  $u_{\hbar}$  sont fonctions propres d'un opérateur Hamiltonien de type (1.20), on peut leur appliquer le théorème suivant :

**Théorème 2.9.** Soit  $P$  un opérateur pseudodifférentiel auto-adjoint, de symbole principal  $p_0$ . Soit  $(u_{\hbar})$  une famille de fonctions admissibles, telles que  $Pu_{\hbar} = O(\hbar^\infty)$  et  $\|u_{\hbar}\|_{L^2} = 1$ . Soit  $\mu_{\hbar}$  les mesures de Husimi associées aux  $(u_{\hbar})$ . Alors toute limite faible  $\mu_0$  des mesures  $\mu_{\hbar}$  sur  $\overline{T^*X}$

1. est une mesure de probabilité sur  $\overline{T^*X}$ .
2. admet comme projection sur  $X$  une limite faible des mesures  $|u_{\hbar}(x)|^2 d\text{Vol}(x)$ .
3. est invariante par le flot hamiltonien de  $p_0$ .
4. Sa restriction à  $T^*X$  est portée par le niveau d'énergie  $\{p_0 = 0\}$ .

Si  $p_0$  est elliptique à l'infini,  $\mu_0$  est portée par  $T^*X$ .

**Fonctions propres du laplacien.** Soit  $(X, \|\cdot\|)$  une variété riemannienne, et  $\Delta$  le laplacien sur  $X$  associé à la métrique. Si  $(-\hbar^2 \Delta - 1)u_{\hbar} = 0$ , et si l'on note  $\mu_{\hbar}$  les mesures de Husimi associées, toute limite des  $\mu_{\hbar}$  est une mesure de probabilité  $\mu_0$  sur le cotangent unitaire  $S^*X$ , invariante par le flot géodésique. Un problème largement ouvert est de trouver la liste de ces limites parmi les mesures invariantes sur  $S^*X$ .

Dans le cas de la sphère ronde, ou d'un tore plat, il est facile de construire des familles de fonctions propres  $(u_{\hbar})$  dont les mesures de Husimi  $\mu_{\hbar}$  convergent vers la mesure uniforme sur un tore lagrangien invariant donné. Sur le tore plat  $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$  par exemple, la famille  $(e^{\frac{i}{\hbar}\xi_0 \cdot x})$ , où  $\xi_0$  est unitaire (et bien sûr  $\frac{\xi_0}{\hbar} \in 2\pi\mathbb{Z}^d$ ), se concentre sur le tore invariant  $\{(x, \xi_0), x \in \mathbb{T}^d\}$ . Plus généralement, pour un système complètement intégrable, on peut construire grâce à un Ansatz BKW une famille de quasi-modes, c'est-à-dire de fonctions propres approchées vérifiant  $\|(-\hbar^2 \Delta - 1)u_{\hbar}\| = O(\hbar^\infty)$ , dont les mesures de Husimi se concentrent sur un tore lagrangien invariant donné<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Noter que  $\|(-\hbar^2 \Delta - 1)u_{\hbar}\| \leq \varepsilon \|u_{\hbar}\|$  implique que 1 est  $\varepsilon$ -proche du spectre de  $-\hbar^2 \Delta$ , mais n'implique pas que  $u_{\hbar}$  soit proche d'une fonction propre du laplacien.

Dans le cas “opposé” où le flot géodésique est ergodique, les limites semiclassiques sont essentiellement décrites par le théorème de Snirelman [Sn74, Ze87, CdV85] (voir le Chapitre 4). Soit  $X$  une variété riemannienne compacte; appelons  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  les valeurs propres du laplacien, et soit  $(\psi_j)$  une base orthonormée de fonctions propres :  $-\Delta \psi_j = \lambda_j \psi_j$ . Notons  $\mu_j$  les mesures de Husimi associées (le paramètre semiclassique est ici  $\hbar = \lambda_j^{-1/2}$ ). Sur la couche d’énergie  $S^*X$ , on appellera  $L$  la désintégration de mesure de Liouville  $dx d\xi$ , normalisée pour être une mesure de probabilité. Si le flot géodésique agit de manière ergodique par rapport à  $L$ , alors il y a une sous-suite “de densité 1” dans la famille des  $\mu_j$  qui converge vers  $L$  :

**Théorème 2.10** (Théorème de Snirelman). [Sn74, Ze87, CdV85] *Supposons l’action du flot géodésique sur  $S^*X$  ergodique, vis-à-vis de la mesure de Liouville. Alors il existe un sous-ensemble  $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$  de densité 1, tel que*

$$\mu_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty, j \in \mathcal{S}} L.$$

On voudrait déterminer, selon les situations, si toute la suite  $\mu_j$  converge vers la mesure de Liouville, ou s’il peut y avoir des sous-suites exceptionnelles convergeant vers d’autres mesures invariantes. Dans le cas de surfaces de courbure négative mais comportant des cylindres plats, il semblerait qu’il puisse y avoir des fonctions propres qui se localisent sur ces cylindres. Cependant, en courbure strictement négative, il a été conjecturé par Rudnick et Sarnak [RudSa94] que la mesure de Liouville est l’unique limite possible des  $\mu_j$ . Cela impliquerait en particulier que la famille de mesures de probabilités  $|\psi_j(x)|^2 d\text{Vol}(x)$  sur  $X$  converge vers le volume riemannien  $\text{Vol}$ .

Le Chapitre 4 apportera des réponses partielles à ces questions. Mais je voudrais d’abord présenter une variante du problème qui devrait faire apparaître comme naturelles et pertinentes pour notre étude les notions d’intégrales de chemin, de mesures de Gibbs, d’entropie et de principe variationnel thermodynamique.

## Chapitre 3

# Limite semiclassique le long de l'axe imaginaire.

Ce chapitre repose sur les notions d'intégrale de chemins et de processus stochastique, c'est-à-dire sur la formulation "lagrangienne" de la mécanique quantique, introduite par Feynman. Pour que les intégrales de chemins soient de vraies intégrales, on opère une rotation de Wick, c'est-à-dire une complexification du temps ou encore de  $\hbar$  – ce qui implique que l'évolution est markovienne au lieu d'être unitaire. On donne dans ce cadre une réponse satisfaisante à la question de l'unique ergodicité quantique, pour les fonctions propres *positives*, et on démontre aussi un résultat de grandes déviations. On précisera comment définir une notion de mesure semiclassique dans le cas où  $\hbar$  est imaginaire pur. Dans ce contexte cependant, l'utilisation de procédés de quantification et d'opérateurs pseudodifférentiels est assez artificielle, et il est beaucoup plus naturel d'utiliser le calcul stochastique.

### 3.1 Intégrales de Feynman

Dirac avait suggéré une formulation "lagrangienne" de la mécanique quantique, fondée sur les notions de chemins virtuels et d'action [Dirac33]. Feynman [Feyn48] a proposé la formule suivante pour le propagateur de l'équation de Schrödinger : soit  $\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$  et  $K(x, y; t)$  le noyau de l'opérateur  $\exp(-\frac{it}{\hbar}\mathbf{H})$ .

$$K(x, y; t) = \sum_{\gamma(0)=y, \gamma(t)=x} e^{\frac{iA(\gamma)}{\hbar}}, \quad (3.1)$$

autrement dit, si  $\psi$  est solution de l'équation de Schrödinger (1.21), on peut écrire

$$\psi(t, x) = \int K(x, y; t)\psi(0, y)dy = \sum_{\gamma(t)=x} e^{\frac{iA(\gamma)}{\hbar}}\psi(0, \gamma(0)). \quad (3.2)$$

On “somme” sur tous les chemins joignant  $y$  à  $x$  en un temps  $t$ , et on attribue à chaque chemin un poids complexe, dont la phase est l’action  $A(\gamma)$  du chemin sur l’intervalle de temps  $[0, t]$  (1.2). Mathématiquement, contentons-nous de considérer (3.1) comme une expression de la formule de Trotter, selon laquelle

$$\exp\left(-\frac{it}{\hbar}\left(-\hbar^2\frac{\Delta}{2} + V\right)\right)\psi = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[ \exp\left(\frac{it\hbar\Delta}{2N}\right) \exp\left(\frac{-itV}{N\hbar}\right) \right]^N \psi. \quad (3.3)$$

Dans un contexte euclidien ( $X = \mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{T}^d$ ), le noyau de l’opérateur de droite admet une expression explicite simple :

$$K_N(x, y; t) = \int_{X^{N-1}} d\gamma_1 \dots d\gamma_{N-1} \left(\frac{N}{2i\pi\hbar t}\right)^{Nd/2} \times \exp\left[\frac{it}{N\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left(\frac{N(\gamma_{j+1} - \gamma_j)}{t}\right)^2 - V(\gamma_j)\right] \quad (3.4)$$

si  $\gamma_N = x$ ,  $\gamma_0 = y$ . L’expression (3.4) apparaît comme une discrétisation en temps de la somme (3.1), il s’agit d’une intégrale portant sur l’espace (de dimension finie) des lignes brisées.

Feynman fonde toute la mécanique sur l’expression (3.1) [Feyn48, FeynHibbs]. Cette formulation est équivalente à celles de Heisenberg ou de Schrödinger. Le noyau  $K(x, y; t) dy$ , à valeurs complexes, est interprété comme une amplitude de probabilité de passer de  $y$  à  $x$  en un temps  $t$  : il est obtenu en sommant toutes les contributions des chemins joignant  $y$  à  $x$ . Dans l’interprétation probabiliste de la mécanique quantique, ce sont les amplitudes de probabilité, et non les probabilités elles-mêmes (modules au carré des amplitudes) qui s’additionnent. Laissant de côté toute préoccupation d’ordre mathématique, on peut étudier la limite  $\hbar \rightarrow 0$  en appliquant la méthode de la phase stationnaire à la somme (3.1). Asymptotiquement, seuls contribuent les chemins qui sont points critiques de la fonctionnelle d’action, c’est-à-dire les chemins classiques joignant  $x$  et  $y$  en un temps  $t$ . Le développement en puissances de  $\hbar$ , donné formellement par (2.4), est identique à celui obtenu par la méthode BKW (1.28).

**Formule de Feynman–Kac.** Mark Kac [Kac49, Kac51, Kac] décide de faire de l’expression (3.1) une vraie intégrale, au sens de la théorie de la mesure, sur un espace de chemins. Il faut effectuer un prolongement analytique, la rotation de Wick, qui consiste à travailler avec un temps imaginaire pur. Kac considère l’objet  $K(x, y; -it)$ , candidat à être le noyau de  $\exp\left(-\frac{t}{\hbar}\mathbf{H}\right)$  ( $t \geq 0$ ). Reprenant l’idée de Feynman et la formule de

Trotter, on obtient

$$\begin{aligned}
K(x, y; -it) &= \sum_{\gamma(0)=y, \gamma(-it)=x} e^{\frac{iA(\gamma)}{\hbar}} = \sum_{\xi(0)=y, \xi(t)=x} e^{\frac{-A^\perp(\xi)}{\hbar}} \\
&= \lim_N \int_{X^{N-1}} d\xi_1 \dots d\xi_{N-1} \left( \frac{N}{2\pi\hbar t} \right)^{Nd/2} \\
&\quad \times \exp \left[ \frac{-t}{N\hbar} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left( \frac{N(\xi_{j+1} - \xi_j)}{t} \right)^2 + V(\xi_j) \right]. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

À la première ligne, on a sommé sur les chemins  $\gamma(z)$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) joignant  $x$  à  $y$  pour un temps complexe parcouru le long de l'axe imaginaire pur. L'action de ces chemins à temps complexe devient

$$A(\gamma) = \int_0^{-it} \left( \frac{d\gamma}{dz} - V(\gamma(z)) \right) dz = -i \int_0^t \left( - \left( \frac{d}{ds} \xi(s) \right)^2 - V(\xi(s)) \right) ds \quad (3.6)$$

où l'on a noté  $\xi(s) = \gamma(-is)$ . Autrement dit,  $A(\gamma) = iA^\perp(\xi)$ , où  $V$  a été changé en  $-V$  dans la définition de  $A^\perp$  :  $A^\perp(\xi) = \int_0^t \left( \frac{d}{ds} \xi(s) \right)^2 + V(\xi(s)) ds$ . Or les travaux de Wiener permettent d'intégrer la somme (3.5) au sens de la théorie de la mesure : il existe en effet une mesure de probabilité sur l'espace des chemins continus partant de  $x$ , notée  $\mathcal{W}_x^\hbar$  et appelée mesure de Wiener partant de  $x$  (de coefficient de diffusion  $\hbar$ ), telle que, pour tous temps  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = t$ , pour tous ensembles mesurables  $I_1, I_2, \dots, I_n \subset X$ ,

$$\mathcal{W}_x^\hbar \left( \left\{ \xi, \xi(t_1) \in I_1, \dots, \xi(t_n) \in I_n \right\} \right) = \int_{I_1} \dots \int_{I_n} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{e^{-\frac{\|\xi_{j+1} - \xi_j\|^2}{2\hbar(t_{j+1} - t_j)}}}{(2\pi\hbar(t_j - t_{j+1}))^{d/2}} d\xi_1 \dots d\xi_n. \quad (3.7)$$

Kac montre que la solution de

$$-\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2} \Delta + V \right) \psi, \quad (3.8)$$

( $t \geq 0$ ) de condition initiale  $\psi(0, \cdot)$ , est bien donnée par la formule intégrale  $\psi(t, x) = \int e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^t V(\xi(s)) ds} \psi(0, \xi(t)) \mathcal{W}_x^\hbar(d\xi)$ . Le noyau de l'opérateur  $\exp(-\frac{t}{\hbar} \mathbf{H})$  est donc<sup>1</sup>

$$K(x, y; -it) = \int e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^t V(\xi(s)) ds} \mathcal{W}_{x, y; t}^\hbar(d\xi), \quad (3.9)$$

<sup>1</sup>Ici, pour respecter les habitudes probabilistes, on a opéré un retournement du temps par rapport aux conventions de Feynman (3.1). Ceci n'a aucune importance puisque le hamiltonien est réversible.

où  $W_{x,y,t}^{\hbar}$  désigne la désintégration de  $W_x^{\hbar}$  par rapport au point d'arrivée  $y$  au temps  $t$ .

Désormais nous travaillerons sur une variété riemannienne connexe compacte  $X$ . On notera  $\|\cdot\|_x$  la métrique sur  $T_x X$ , ou encore celle sur  $T_x^* X$  obtenue par dualité. On utilise le laplacien riemannien associé. La formule de Kac reste vraie, à condition de savoir définir la mesure de Wiener. À bien des égards, l'équation (3.8), de type "équation de la chaleur", est plus facile à étudier que l'équation de Schrödinger. Le noyau  $K(x, y; -it)$  est positif, et son interprétation probabiliste comme intégrale sur l'espace des chemins en donne une meilleure compréhension. Pour l'étude de la limite  $\hbar \rightarrow 0$ , on sait rigoureusement appliquer la méthode de la phase stationnaire en dimension infinie (appelée méthode de Laplace quand la phase est imaginaire pure) pour développer l'intégrale (3.9) en puissances de  $\hbar$  [Az82, BA88, BA88-2, BADS93].

**En présence d'un champ magnétique.** Cette discussion reste valable en présence d'un champ magnétique [Sim]. Celui-ci est représenté par une 2-forme fermée  $B$ , que nous supposons globalement exacte pour simplifier la discussion : cela signifie qu'il existe une 1-forme  $\omega$  sur  $X$ , appelée potentiel magnétique, telle que  $B = -d\omega$ . Notons que  $\omega$  n'est définie qu'à une 1-forme fermée près, il y a plusieurs choix de jauge possibles. Le champ magnétique est pris en compte dans le lagrangien par l'introduction du terme  $-\langle \omega, v \rangle$  :

$$L^\omega(x, v) = \frac{\|v\|_x^2}{2} - V(x) - \langle \omega, v \rangle. \quad (3.10)$$

Le hamiltonien devient

$$H^\omega(x, \xi) = \frac{\|\xi + \omega\|_x^2}{2} + V(x). \quad (3.11)$$

Dans l'équation de Schrödinger, on obtient le nouvel opérateur hamiltonien  $\mathbf{H}^\omega$  en remplaçant le laplacien usuel par le laplacien  $\Delta_{\frac{\omega}{\hbar}}$  associé à la connexion  $\nabla_v f(x) = df(x).v + \frac{i}{\hbar} \langle \omega, v \rangle f(x)$  de courbure  $\frac{B}{\hbar}$ . Dans le cas euclidien on a par exemple

$$\Delta_{\frac{\omega}{\hbar}} = \sum_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{i}{\hbar} \omega_j \right)^2.$$

On notera  $\Delta_{\frac{\omega}{\hbar}} = (D_x + \frac{i}{\hbar} \omega)^2$ . Si  $\omega$  est fermée, correspondant à un champ magnétique nul, le hamiltonien  $\mathbf{H}^\omega$  est conjugué au hamiltonien initial, sur le revêtement universel  $\tilde{X}$ , par l'opérateur de multiplication par  $e^{\frac{i}{\hbar} \int^x \omega}$  :

$$\mathbf{H}^\omega = e^{-\frac{i}{\hbar} \int^x \omega} \circ \mathbf{H} \circ e^{\frac{i}{\hbar} \int^x \omega}.$$

Sur  $X$  cependant, les deux opérateurs ne sont a priori pas conjugués, alors qu'ils correspondent au même système classique avec deux jauges différentes.



Cette remarque surprenante est plus facile à comprendre si l'on imagine notre variété  $X$  plongée dans  $\mathbb{R}^n$ . Deux champs magnétiques  $B_1 = -d\omega_1$ ,  $B_2 = -d\omega_2$  définis globalement sur  $\mathbb{R}^n$  et qui coïncident sur  $X$  définissent la même dynamique sur  $X$ . Posant  $\omega_1 = \omega_2 + \theta$ ,  $\theta$  est fermée sur  $X$ , mais pas nécessairement sur  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\gamma$  un lacet tracé dans  $X$ . Bien que  $B_1$  et  $B_2$  coïncident sur  $X$ , le flux de  $B_1 - B_2$  à travers  $\gamma$ , donné par la circulation de  $\theta$  le long de  $\gamma$ , n'est pas nul. Le spectre du hamiltonien dépend, en quelque sorte, du champ magnétique "extrinsèque", défini sur  $\mathbb{R}^n$ , et pas seulement du champ magnétique intrinsèque à  $X$ .

L'heuristique de Feynman tient toujours, et devient rigoureuse après rotation de Wick : en effet, si  $\psi(t, \cdot) = \exp(-\frac{t}{\hbar} \mathbf{H}^\omega) \psi(0, \cdot)$ , on peut écrire

$$\psi(t, x) = \int e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^t V(\xi(s)) ds + \frac{i}{\hbar} \int_0^t \omega(\xi(s)) \circ d\xi(s)} \psi(0, \xi(t)) \mathcal{W}_x^\hbar(d\xi). \quad (3.12)$$

Le terme  $\int_0^t \omega(\xi(s)) \circ d\xi(s)$  est l'intégrale de Stratonovitch de  $\omega$  le long du chemin brownien  $\xi$ .

**Intérêt physique de la rotation de Wick.** La rotation de Wick n'est-elle qu'un artifice mathématique ? On a prolongé l'action aux courbes paramétrées par un temps complexe, obtenant ainsi de nouvelles familles de trajectoires d'Euler-Lagrange. Ces nouvelles trajectoires à temps complexe ont accès à des zones interdites aux trajectoires réelles : c'est une manière d'expliquer l'effet tunnel, autrement dit le fait que les ondes quantiques puissent traverser des zones interdites aux trajectoires classiques réelles. Cependant, dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$ , la contribution des trajectoires complexes devient exponentiellement petite. La théorie des grandes déviations est un cadre approprié pour analyser ce type de comportement.

**Où l'on complexifie  $\hbar$ .** Voici un autre prolongement analytique qui n'a plus vraiment de motivation physique : il s'agit de rendre  $\hbar$  imaginaire pur. Posons  $\beta = \frac{1}{i\hbar}$ , et travaillons avec  $\beta$  réel positif. En d'autres termes, on travaille avec la famille d'opérateurs  $\frac{1}{z} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathbf{H}_z^\omega$ , avec  $\mathbf{H}_z^\omega = \left( \frac{(-\frac{1}{z} D_x + \omega)^2}{2} + V(x) \right)$  et on s'intéresse au cas où  $z$  est réel, au lieu d'être imaginaire pur. D'après Feynman-Kac, les solutions de

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{H}_\beta^\omega \psi \quad (3.13)$$

sont données par la formule intégrale

$$\psi(t, x) = \sum_{\gamma(t)=x} e^{-\beta A(\gamma)} \psi(0, \gamma(0)) \quad (3.14)$$

et pour  $\beta > 0$  on peut donner un sens à cette intégrale en utilisant la mesure de Wiener. En l'absence de champ magnétique, cette opération est

équivalente à la rotation de Wick. En présence d'un champ magnétique, ce n'est plus la même chose; si l'on compare à (3.12), le champ magnétique se trouve complexifié lui aussi. Il faut noter que l'opérateur  $\mathbf{H}_\beta^\omega$  n'est pas auto-adjoint, sauf si  $\omega = 0$ . Le propagateur  $\exp(t\beta\mathbf{H}_\beta^\omega)$  ( $t > 0$ ) est unitaire si  $\beta \in i\mathbb{R}$ , de noyau positif si  $\beta \in \mathbb{R}_+$ .

**Comportement semiclassique du propagateur.** La méthode de Laplace en dimension infinie permet d'évaluer le propagateur (3.14) quand  $\beta \rightarrow +\infty$ . Par souci de simplicité, on décrit ici le cas d'une métrique euclidienne sur  $X = \mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{T}^d$  et d'un champ magnétique nul :  $d\omega = 0$ . Cette discussion peut s'étendre au cas d'une métrique arbitraire et d'un champ magnétique quelconque, à condition de disposer d'un calcul différentiel sur l'espace des chemins, le calcul de Malliavin [Az82, BA88, BA88-2, BADS93].

Soient  $x, y \in X$ , on appellera  $H_{[0,t]}^{x,y}$  l'espace des chemins dont la dérivée est de carré intégrable, joignant  $x$  à  $y$  en un temps  $t$ , et  $W_{[0,t]}^{x,y}$  l'ensemble des chemins continus joignant  $x$  à  $y$  en temps  $t$ , muni de la topologie uniforme.

L'action  $A : H_{[0,t]}^{x,y} \rightarrow \mathbb{R}$  est deux fois différentiable, et sa dérivée seconde  $d^2A(\gamma)$  en un point critique  $\gamma$  est une forme bilinéaire symétrique sur l'espace de Hilbert tangent  $H_{[0,t]}^{0,0}$ . Elle peut s'écrire

$$d^2A(\gamma).\xi^2 = \langle A''(\gamma)\xi, \xi \rangle$$

où  $A''(\gamma)$  est un opérateur auto-adjoint sur  $H_{[0,t]}^{0,0}$  : le hessien de  $A$  en  $\gamma$ . D'après la définition de  $A$ , on a  $A''(\gamma) = I + f$ , où l'opérateur  $f$  est défini par

$$\langle f\xi, \xi \rangle = \int_0^t V''(\gamma_s).\xi_s^2 ds$$

C'est un opérateur à trace ([Kuo75], p.83) : les valeurs propres de  $f$ ,  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , sont sommables. Le déterminant de  $I + f$ , est donc bien défini par l'expression  $\det[I + f] = \prod_{i \in \mathbb{N}} (1 + \lambda_i)$ , éventuellement nulle si  $-1$  est valeur propre de  $f$ , c'est-à-dire si l'opérateur  $A''(\gamma)$  n'est pas inversible sur  $H_{[0,t]}^{0,0}$ . C'est le cas si et seulement si  $x$  et  $y$  sont conjugués en temps  $t$  le long de  $\gamma$ .

Soit donc  $\gamma$  un point critique de  $A : H_{[0,t]}^{x,y} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $A''(\gamma)$  soit inversible : on parle de point critique non-dégénéré de l'action.

**Théorème 3.1.** [Az82, BA88, BA88-2] Soient  $x, y \in \mathbb{R}^d$ . Supposons que l'action  $A : H_{[0,t]}^{x,y} \rightarrow \mathbb{R}$  ait un unique minimum  $\hat{\gamma}$ , supposé non dégénéré, et soit  $\Omega$  un voisinage de  $\hat{\gamma}$  en topologie uniforme dans  $W_{[0,t]}^{x,y}$ . On a alors un développement asymptotique pour l'intégrale de Feynman-Kac,

$$\int_{\Omega} e^{\beta(\int_0^t V(\gamma_s)ds + \langle \omega, y-x \rangle)} dW_{x,y,t}^{\beta^{-1}}(\gamma) \sim \left( \frac{\beta}{2\pi t} \right)^{d/2} \frac{e^{-\beta A(\hat{\gamma})}}{\det[A''(\hat{\gamma})]^{1/2}} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \beta^{-k} a_k \right)$$

où les  $a_k$  s'expriment en fonction des dérivées successives de l'action.

Pour faire le lien avec l'asymptotique de Van Vleck (1.28) on peut noter que  $t^{d/2} \det[A''(\hat{\gamma})]$  coïncide avec le déterminant de l'application exponentielle du flot d'Euler–Lagrange au temps  $t$ , entre  $x$  et  $y$  [LS77, CdV99].

**Fonctions propres positives.** On s'intéressera dans ce chapitre aux solutions *positives* de l'équation de Schrödinger stationnaire,

$$\mathbf{H}_\beta^\omega \psi_\beta = E_\beta \psi_\beta, \quad (3.15)$$

et de l'équation stationnaire rétrograde,

$$\mathbf{H}_\beta^{\omega*} \psi_\beta^* = E_\beta \psi_\beta^*,$$

avec  $\beta > 0$ . La *positivité* du noyau du propagateur (3.14), et la *compacité* de  $X$ , impliquent que  $\mathbf{H}_\beta^\omega$  a une fonction propre  $\psi_\beta$  de signe constant, unique à normalisation près, correspondant à une valeur propre simple  $E_\beta$ , en haut du spectre (et de même pour l'adjoint  $\mathbf{H}_\beta^{\omega*}$ ). L'objet de ce chapitre est d'étudier le comportement asymptotique de la famille de mesures de probabilité

$$\nu_\beta(dx) = \psi_\beta(x) \psi_\beta^*(x) d\text{Vol}(x)$$

sur  $X$ .

**Question 1 :** Quelles sont les limites faibles de la famille  $(\nu_\beta)$  ?

**Question 2 :** Peut-on énoncer un principe de grandes déviations pour la famille  $(\nu_\beta)$  ?

**Un relevé microlocal de  $\nu_\beta$ .** On décrit ici une construction d'un relevé microlocal des mesures  $\nu_\beta$  valable pour  $\beta = (i\hbar)^{-1}$  réel. Cette construction établit un lien avec le chapitre précédent mais nous ne l'utiliserons pas par la suite : il est beaucoup plus pertinent d'étudier  $\nu_\beta$  en la relevant en une mesure sur l'espace des chemins (autrement dit un processus stochastique).

Sur le fibré cotangent complexifié  $T^*X \otimes \mathbb{C}$  on introduit la rotation

$$J(x, \xi) = (x, i\xi).$$

Notre hamiltonien, polynômial en  $\xi$ , se prolonge de manière naturelle à  $T^*X \otimes \mathbb{C}$ . La formule de Feynman–Kac montre que la rotation  $h \mapsto -i\hbar$  revient formellement à remplacer le lagrangien  $L^\omega$  par  $iL^\omega$ , ou encore à remplacer le hamiltonien  $H^\omega$  par  $H^{\omega\perp} = iH^\omega \circ J^{-1}$ . Les équations de Hamilton pour  $H^{\omega\perp}$  s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial_\xi H^{\omega\perp}(x, \xi) = \partial_\xi H^\omega \left( x, \frac{\xi}{i} \right) \\ \dot{\xi} = -\partial_x H^{\omega\perp}(x, \xi) = -i \partial_x H^\omega \left( x, \frac{\xi}{i} \right). \end{cases} \quad (3.16)$$

L'ensemble  $T^*M \otimes i\mathbb{R}$  des vecteurs d'impulsion imaginaire pure est préservé par le flot hamiltonien de  $H^{\omega\perp}$  : comme le hamiltonien est holomorphe en  $\xi$ , les deux flots sont conjugués là où ils sont définis,

$$\phi_{H^{\omega\perp}} = J \circ \phi_{H^\omega} \circ J^{-1}.$$

Or, l'opérateur différentiel  $i\mathbf{H}_\beta^\omega$  a justement pour symbole principal le hamiltonien complexe  $H^{\omega\perp}$  :

$$i\mathbf{H}_\beta^\omega = \text{Op}_{\beta^{-1}}(H^{\omega\perp}) + \beta^{-1}R\left(x, -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

où  $R$  est un polynôme de degré 1 en la seconde variable. Soit maintenant  $a \in \Sigma^{m,0}$ , on a

$$\left[\text{Op}_{\beta^{-1}} H^{\omega\perp}, \text{Op}_{\beta^{-1}}(a)\right] = -\frac{i}{\beta} \text{Op}_{\beta^{-1}} \{H^{\omega\perp}, a\} + \beta^{-2}R\left(x, -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (3.17)$$

avec  $\beta^{-2}R\left(x, -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\right) \in \Psi^{m,2}$ . Notons enfin que, si  $a$  est holomorphe en la variable  $\xi$ , on a  $\{a^\perp, H^{\omega\perp}\} = \{a, H^\omega\}^\perp$ . Nous définissons donc

$$\text{Op}_\hbar^\perp(a) = -i \text{Op}_\hbar(a^\perp),$$

de manière à pouvoir écrire (3.17) sous la forme

$$\left[\text{Op}_{\beta^{-1}}^\perp H^\omega, \text{Op}_{\beta^{-1}}^\perp(a)\right] = -\frac{1}{\beta} \text{Op}_{\beta^{-1}}^\perp \{H^\omega, a\} + \beta^{-2}R\left(x, -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\right). \quad (3.18)$$

Je définis un relevé  $\mu_\beta$  de la mesure  $\nu_\beta$  au fibré cotangent  $T^*X$  par la formule suivante,

$$\mu_\beta(a) = \left\langle \text{Op}_{\beta^{-1}}^\perp(a)\psi_\beta, \psi_\beta^* \right\rangle.$$

Plus explicitement, on va poser  $\psi_\beta = e^{-\beta u_\beta}$ . On a alors

$$\left\langle \text{Op}_{\beta^{-1}}^\perp(a)\psi_\beta, \psi_\beta^* \right\rangle = \int a_0(x, du_\beta(x)) \nu_\beta(dx) + \beta^{-1}R_\beta(a), \quad (3.19)$$

la forme précise du reste dépend des conventions de définition de  $\text{Op}$  (Chapitre 2).

**Proposition 3.2.** *Si  $a$  est un polynôme en  $\xi$ , alors le reste  $R_\beta(a)$  est borné uniformément en  $\beta$ , donc*

$$\left\langle \text{Op}_{\beta^{-1}}^\perp(a)\psi_\beta, \psi_\beta^* \right\rangle = \int a(x, du_\beta(x)) \nu_\beta(dx) + O(\beta^{-1}).$$

*Preuve.* On verra, plus loin dans ce chapitre, que la famille  $(u_\beta)$  est équilipschitzienne : il existe  $C$  tel que  $\|du_\beta\| \leq C$  quel que soit  $\beta$ . Il s'ensuit que le reste  $R_\beta(a)$  est borné si  $a$  est un polynôme de degré 0 ou 1.

Le plus problématique est ensuite de démontrer la proposition dans le cas particulier où  $a(x, \xi)$  est le hamiltonien  $H^\omega(x, \xi)$ . Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \left\langle \text{Op}_{\beta^{-1}}^\perp(H^\omega)\psi_\beta, \psi_\beta^* \right\rangle &= \left\langle \mathbf{H}_\beta^\omega \psi_\beta, \psi_\beta^* \right\rangle + O(\beta^{-1}) = \int \left( -\frac{\Delta u_\beta}{2\beta} + H^\omega(x, d_x u_\beta) \right) \nu_\beta(dx) \\ &\quad + O(\beta^{-1}). \end{aligned}$$

La proposition résulte alors de l'estimée démontrée dans [Go02], théorème 10,

$$\int |d_x^2 u_\beta(x)|^2 \nu_\beta(dx) \leq C \quad (3.20)$$

pour une constante  $C$  indépendante de  $\beta$ .

Si  $a$  est maintenant un polynôme de degré  $n$ , on procède par récurrence sur  $n$  en utilisant la division euclidienne des polynômes. Supposons le résultat démontré au rang  $n-1$ , on écrit

$$a = b H^\omega + r$$

où  $r$  est de degré 1,  $b$  est de degré  $n-2$ . Il suffit désormais de démontrer le résultat pour  $b H^\omega$ , or  $\text{Op}_{\beta^{-1}}(b H^\omega) = \text{Op}_{\beta^{-1}}(b) \mathbf{H}_\beta^\omega + \beta^{-1} \text{Op}_{\beta^{-1}}(c)$  où  $c$  est un polynôme de degré  $n-1$ . Les polynômes  $b$  et  $c$  sont tous deux soumis à l'hypothèse de récurrence. Pour terminer la preuve, on écrit alors

$$\begin{aligned} \left\langle \text{Op}_{\beta^{-1}}(b) \mathbf{H}_\beta^\omega \psi_\beta, \psi_\beta^* \right\rangle &= E_\beta \left\langle \text{Op}_{\beta^{-1}}(b) \psi_\beta, \psi_\beta^* \right\rangle \\ &= E_\beta \int b(x, du_\beta) \nu_\beta(dx) + O(\beta^{-1}) \\ &= \int b(x, du_\beta) \left( -\frac{\Delta u_\beta}{2\beta} + H^\omega(x, d_x u_\beta) \right) \nu_\beta(dx) + O(\beta^{-1}) \\ &= \int b(x, du_\beta) H^\omega(x, d_x u_\beta) \nu_\beta(dx) + O(\beta^{-1}) \end{aligned}$$

toujours grâce à l'estimée (3.20).

Le terme principal  $\int a(x, du_\beta(x)) \nu_\beta(dx)$  définit une mesure de probabilité, portée par le compact  $\{(x, \xi), \|\xi\|_x \leq C\} \subset T^*X$ . Si l'on restreint la famille  $(\mu_\beta)$  à l'espace des polynômes en  $\xi$ , on peut donc extraire une sous-suite qui converge faiblement vers une mesure de probabilité  $\mu_\infty$ . L'identité (3.18) montre que  $\mu_\infty$  est  $\phi_H$ -invariante. On verra plus loin que la valeur propre  $E_\beta$  a une limite  $E$  quand  $\beta \rightarrow +\infty$ . La mesure  $\mu_\infty$  est alors portée par la couche d'énergie  $\{H^\omega = E\}$ .

Les limites  $\mu_\infty$  satisfont une propriété supplémentaire. Rappelons la relation  $L^\omega(x, v) + H^\omega(x, \xi) = \xi \cdot v$  où  $(x, \xi) = (x, \frac{\partial L}{\partial v}) = \mathcal{L} \text{eg}^{-1}(x, v)$ .

**Proposition 3.3.**  $\int_{T^*X} L^\omega(x, v(x, \xi)) d\mu_\infty(x, \xi) = -E.$

Cela signifie que  $\mu_\infty$  est une mesure minimisante au sens de Mather, ce qui implique que le support de  $\mu_\infty$  est contenu dans un graphe lagrangien (paragraphe 3.2). Ceci peut déjà être pressenti dans la forme très particulière (3.19) des mesures  $\mu_\beta.$

Pour démontrer la proposition 3.3, il suffit de vérifier que  $\int_{T^*X} \xi.v(x, \xi) d\mu_\infty(x, \xi) = 0$  (puisque  $\int H^\omega d\mu_\infty = E$ ). Or on a

$$\begin{aligned} \int_{T^*X} \xi.v(x, \xi) d\mu_\infty(x, \xi) &= \lim_{\beta} \int_{T^*X} \xi.v(x, \xi) d\mu_\beta(x, \xi) \\ &= \lim_{\beta} \int_{T^*X} \xi.v(x, \xi) d\tilde{\mu}_\beta(x, \xi) \\ &= \lim_{\beta} \int_{T^*X} du_\beta(x).v(x, \xi) d\tilde{\mu}_\beta(x, \xi) \end{aligned}$$

où  $\tilde{\mu}_\beta$  est la mesure de probabilité  $a \mapsto \int a(x, du_\beta(x)) \nu_\beta(dx)$ , asymptotiquement équivalente à  $\mu_\beta$  si  $a$  est polynômiale. D'après [Go02],  $\tilde{\mu}_\beta$  satisfait

$$\int_{T^*X} \left( d\phi(x).v(x, \xi) + \frac{\Delta\phi(x)}{2\beta} \right) d\tilde{\mu}_\beta(x, \xi) = 0$$

quelle que soit la fonction test  $\phi$ . On a donc, en utilisant à nouveau (3.20),

$$\int_{T^*X} du_\beta(x).v(x, \xi) d\tilde{\mu}_\beta(x, \xi) = - \int_{T^*X} \frac{\Delta u_\beta(x)}{2\beta} \nu_\beta(dx) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} 0.$$

### 3.2 Solutions de viscosité pour Hamilton–Jacobi et théorie KAM faible.

Les *solutions de viscosité* de l'équation de Hamilton–Jacobi apparaissent quand on étudie la limite semiclassical de l'équation de Schrödinger à  $\hbar$  imaginaire.

Rappelons que si  $\psi_0$  est un état lagrangien,  $\psi_0(x) = a_0(x)e^{\frac{iS_0(x)}{\hbar}}$ , alors la solution de l'équation de Schrödinger, de condition initiale  $\psi_0$  est, au premier ordre en  $\hbar$ ,  $\psi_t(x) \sim a_t(x)e^{\frac{iS_t(x)}{\hbar}}$ , où  $S_t$  est solution de l'équation de Hamilton–Jacobi (1.6), de condition initiale  $S_0$ , et  $a_t$  est la fonction  $a_0$  transportée au temps  $t$  par le champ de vecteur non-autonome  $\mathcal{L}eg^{-1}(x, dS_t(x))$  et renormalisée selon la divergence de ce dernier (section 1.5). La phase  $S_t$  est la fonction génératrice d'une variété lagrangienne  $\mathcal{L}_t = \{(x, dS_t(x)), x \in X\} \subset T^*X$ , et l'équation de Hamilton–Jacobi traduit le fait que  $\mathcal{L}_t = \phi_H^t(\mathcal{L}_0)$ . La fonction  $S_t$  n'est en réalité définie que pour des temps petits, des problèmes apparaissant notoirement quand  $\phi_H^t(\mathcal{L}_0)$  cesse d'être un graphe au-dessus de  $X$ .

D'une certaine manière, ce problème des caustiques disparaît quand  $\hbar$  est imaginaire pur : considérons désormais la loi d'évolution (3.13) ( $\beta > 0$ ) avec une condition initiale  $\psi_0$  de la forme  $\psi_0(x) = e^{-\beta u(0,x)}$ . Alors, pour tout temps positif, on a  $\psi_\beta(t,x) = e^{-\beta u_\beta(t,x)}$ , où  $u(t,x)$  est la solution de l'équation de Hamilton–Jacobi visqueuse,

$$-\frac{\Delta u_\beta}{2\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial t} + H^\omega(x, d_x u_\beta) = 0. \quad (3.21)$$

de condition initiale  $u(0,x)$ . Le concept de solution de viscosité est la notion limite de solution quand  $\beta \rightarrow +\infty$ . Voici la définition introduite par Crandall–Evans–Lions [Lions, CL83, CEL84].

**Définition 3.4.** *On dit qu'une fonction continue  $u$  sur  $\mathbb{R}_+^* \times X$  est une solution de viscosité de (3.21) si, pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $C^2$ ,*

– pour tout point  $(y, t) \in \mathbb{R}_+^* \times X$  où  $u - \varphi$  atteint un maximum local, on a

$$-\frac{\Delta \varphi}{2\beta}(y) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(y) + H^\omega(y, d\varphi(y)) \leq 0.$$

– pour tout point  $(y, t) \in \mathbb{R}_+^* \times X$  où  $u - \varphi$  atteint un minimum local, on a

$$-\frac{\Delta \varphi}{2\beta}(y) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(y) + H^\omega(y, d\varphi(y)) \geq 0.$$

Pour  $\beta$  fini, on retrouve exactement les solutions classiques de (3.21). Pour  $\frac{1}{\beta} = 0$ , on obtient une notion faible de solution de l'équation de Hamilton–Jacobi non-visqueuse (1.6),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H^\omega(x, d_x u) = 0. \quad (3.22)$$

Étant donnée une condition initiale continue  $u(0)$ , il existe une unique solution de viscosité pour (3.22) se prolongeant en  $u(0)$  à  $t = 0$ , et elle est lipschitzienne sur  $X$  pour les temps strictement positifs. On peut prouver l'existence de solutions en partant du théorème d'existence pour l'équation parabolique (3.21) ( $0 < \beta < +\infty$ ) et en passant à la limite  $\beta \rightarrow +\infty$ . En effet, en utilisant le principe du maximum, on peut montrer que la suite des solutions de viscosité de (3.21), de condition initiale  $u(0)$ , est uniformément lipschitzienne pour  $\beta > 1$ . Le *principe de stabilité*, propriété fondamentale de la notion de solution de viscosité, veut que toute valeur d'adhérence des  $u_\beta$  ( $\beta \rightarrow +\infty$ ) en topologie uniforme soit solution de viscosité de l'équation limite (3.22) : c'est ainsi que Crandall, Evans et Lions prouvent l'existence de solutions de viscosité de (3.22).

**Le semigroupe de Lax–Oleïnik.** De la formule de Feynman–Kac (3.14) on déduit l'identité suivante pour les solutions de (3.21),

$$e^{-\beta u_\beta(t,x)} = \sum_{\gamma(t)=x} e^{-\beta A(\gamma)} e^{-\beta u_\beta(0,\gamma(0))}.$$

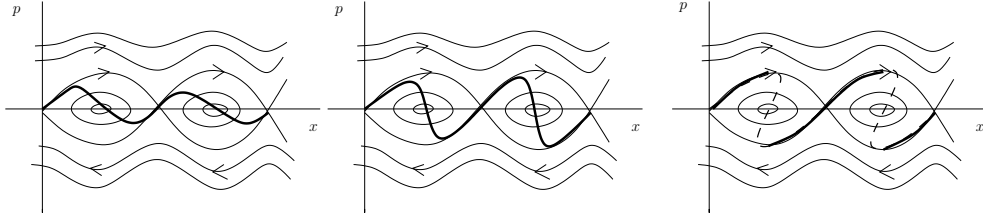


Figure 3.1: Voici l'évolution temporelle du graphe  $\{(x, d_x u)\}$  pour une solution de viscosité : l'effet de notre complexification de  $\hbar$  est, à la limite  $\hbar \rightarrow 0$ , d'élaguer “tout ce qui dépasse” lors de l'apparition des caustiques de la lagrangienne.

Le passage à la limite  $\beta \rightarrow +\infty$  donne une interprétation variationnelle des solutions de (3.22),

$$u(t, x) = \inf_{\gamma(t)=x} \{u(0, \gamma(0)) + A(\gamma)\} = \inf_{\gamma(t)=x} \left\{ u(0, \gamma(0)) + \int_0^t L^\omega(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right\},$$

l'inf étant pris sur les courbes  $C^1$  par morceaux arrivant  $x$  à l'instant  $t$  (on utilise là des résultats de grandes déviations dûs à Schilder [Sch66] et Donsker–Varadhan [Va66, Va67, DVa76]). Ce principe variationnel avait été introduit par Oleïnik [Ol56, Ol57], Lax [Lax57], Hopf dans un cas particulier [Hopf50], pour décrire un certain type de solutions faibles de l'équation de Hamilton–Jacobi. Ces auteurs avaient déjà perçu le lien avec la limite de viscosité évanescence ( $\beta \rightarrow +\infty$ ), mais sans aller jusqu'à dégager la notion abstraite de solution de viscosité (voir aussi [ConHopf64]). Cette approche variationnelle fournit une autre preuve de l'existence de solutions de viscosité pour (3.22) : suivant les notations de Fathi [Fa, Fa97-1], on définit le semigroupe

$$T_t^- u(x) = \inf_{\gamma(t)=x} \left\{ u(\gamma(0)) + \int_0^t L^\omega(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right\} \quad (t \geq 0). \quad (3.23)$$

C'est précisément le semigroupe qui donne les solutions de viscosité de (3.22).

**Remarque 3.5.** *On a introduit une dissymétrie dans l'orientation du temps, en prenant  $\beta$  réel dans l'équation (3.13). Le semigroupe (3.23) n'est défini que pour les temps positifs, correspondant à l'évolution des graphes lagrangiens sous l'effet des temps positifs du flot hamiltonien (Figure 3.1). Cette dissymétrie se manifeste aussi par le fait que l'opérateur hamiltonien  $\mathbf{H}_\beta^\omega$  n'est pas auto-adjoint pour  $\beta$  réel.*

*Pour traiter l'évolution dans les temps négatifs, il faut introduire le hamiltonien inversé dans le temps,  $H^*(x, \xi) = H^{-\omega}(x, \xi) = H^\omega(x, -\xi)$ . On*



notera  $L^*(x, v) = L^\omega(x, -v)$  le lagrangien associé, et  $A^*$  l'action correspondante. Cela revient à changer  $\omega$  en  $-\omega$ , et au niveau des opérateurs,  $\mathbf{H}_\beta^\omega$  est remplacé par son adjoint. L'équation de Schrödinger rétrograde est

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \mathbf{H}_\beta^{\omega^*} \psi^* = \mathbf{H}_\beta^{-\omega} \psi^*, \quad (3.24)$$

et la formule de Feynman–Kac correspondante,

$$\psi_t^*(x) = \sum_{\gamma(t)=x} e^{-\beta A^*(\gamma)} \psi^*(0, \gamma(0)) = \sum_{\gamma(0)=x} e^{-\beta A(\gamma)} \psi^*(0, \gamma(t)). \quad (3.25)$$

Pour une solution positive, posant  $\psi^*(t, x) = e^{-\beta u_\beta^*(t, x)}$ , on voit qu'à présent  $u_\beta^*$  est solution de

$$-\frac{\Delta u_\beta^*}{2\beta} + \frac{\partial u_\beta^*}{\partial t} + H^\omega(x, -d_x u_\beta^*) = 0. \quad (3.26)$$

Comme précédemment, quand  $\beta \rightarrow +\infty$ ,  $u_\beta^*$  converge après extraction vers une solution de viscosité de l'équation non-visqueuse,

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + H^\omega(x, -d_x u^*) = 0. \quad (3.27)$$

Le semigroupe qui donne les solutions, après conjugaison par  $u \mapsto -u$ , admet maintenant l'expression

$$-u^*(t, x) = T_t^+(-u^*)(x) = \sup_{\gamma(0)=x} \left\{ -u^*(\gamma(t)) - \int_0^t L^\omega(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds \right\}; (t \geq 0).$$

**L'équation stationnaire.** Considérons les solutions *positives* de l'équation de Schrödinger stationnaire (3.15),  $\mathbf{H}_\beta^\omega \psi_\beta = E_\beta \psi_\beta$ , et de l'équation stationnaire rétrograde,  $\mathbf{H}_\beta^{\omega^*} \psi_\beta^* = E_\beta \psi_\beta^*$ .

Posant  $u_\beta^* = -\frac{\log \psi_\beta^*}{\beta}$  et  $u_\beta = -\frac{\log \psi_\beta}{\beta}$ , ces fonctions sont solutions de

$$-\frac{\Delta u_\beta}{2\beta} + H^\omega(x, d_x u_\beta) = E_\beta \text{ et } -\frac{\Delta u_\beta^*}{2\beta} + H^\omega(x, -d_x u_\beta^*) = E_\beta. \quad (3.28)$$

En utilisant le principe du maximum pour le laplacien, on peut montrer que les familles  $(u_\beta^*)$  et  $(u_\beta)$  sont équilipschiziennes; et que  $E_\beta$  reste borné. Après normalisation, on peut donc extraire des suites de fonctions  $(u_\beta^*)$  et  $(u_\beta)$  des sous-suites uniformément convergentes; par le principe de stabilité des solutions de viscosité, les valeurs d'adhérences doivent être, respectivement, solutions de viscosités de l'équation de Hamilton–Jacobi stationnaire,

$$H^\omega(x, d_x u) = E \text{ et } H^\omega(x, -d_x u^*) = E. \quad (3.29)$$

C'est une manière de montrer l'existence de solutions pour (3.29), dès que  $E$  est valeur d'adhérence de  $(E_\beta)$ .

Une conséquence de la compacité de  $X$  est qu'il existe un unique  $E$  tels que ces équations aient une solution [LPapVa, Fa, Fa97-1]. Ce nombre  $E$  est appelé hamiltonien effectif, ou encore "valeur critique" de l'énergie. Il peut être caractérisé comme la plus petite valeur de l'énergie telle que l'équation  $H^\omega(x, d_x u) = E$  ait une sous-solution globale (c'est-à-dire  $H^\omega(x, d_x u) \leq E$  presque partout). Par conséquent, la valeur propre  $E_\beta$ , première valeur propre de  $\mathbf{H}_\beta^\omega$ , tend vers la valeur critique  $E$  quand  $\beta \rightarrow +\infty$ .

Les équations de Hamilton–Jacobi stationnaires (3.29) sont équivalentes à

$$u = T_t^- u + Et \quad \text{et} \quad -u^* = T_t^+(-u^*) + Et. \quad (3.30)$$

pour tout  $t \geq 0$ . Une autre manière de montrer l'existence de solutions est donc d'établir l'existence d'un point fixe pour les semigroupes  $T_t^- + Et$ ,  $T_t^+ + Et$ . Ce résultat, appelé *théorème KAM faible*, est dû à Fathi et utilise la propriété de contraction au sens large des semigroupes. Il n'y a, en général, pas unicité du point fixe (paragraphe 3.3).

**Hamiltonien général.** La notion de solution de viscosité de l'équation de Hamilton–Jacobi, que nous avons vu apparaître pour des hamiltoniens de la forme (3.11), s'applique à des hamiltoniens plus généraux. Tous les résultats énoncés restent valables sous les seules hypothèses que  $H$  soit de classe  $C^2$ , strictement convexe, à croissance surlinéaire en la variable  $\xi$ . Dans ce cadre général, on perd bien sûr le lien avec l'équation de Schrödinger.

**Question 3 :** Pour un hamiltonien général, quand (3.29) a plusieurs solutions de viscosité, comment caractériser celles qui peuvent être obtenues comme valeurs d'adhérence des solutions de l'équation visqueuse (3.28) ?

### 3.3 Non-unicité des solutions stationnaires.

**Barrière de Peierls.** Voici une famille de solutions fondamentales de l'équation de Hamilton–Jacobi : les barrières de Peierls [Fa97-2]. Rappelons que l'action d'une courbe  $C^1$  par morceaux  $\gamma : [0, T] \rightarrow X$  est  $A(\gamma) = \int_0^T L^\omega(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds$ . Étant donné  $k \in \mathbb{R}$  on définit une fonction  $h_T^k$  sur  $X \times X$ ,

$$h_T^k(x, y) = \inf \{ A(\gamma) + kT \mid \gamma : [0, T] \rightarrow X \text{ joint } x \text{ à } y \},$$

puis  $h^k(x, y) = \liminf_{T \rightarrow \infty} h_T^k(x, y)$ . Il y a une seule valeur de  $k$  pour laquelle  $h^k$  ne vaut pas identiquement  $-\infty$  ou  $\infty$ , c'est le niveau critique  $E$ . On définit  $h_T = h_T^E$  et  $h = h^E$ . À l'instar de Fathi [Fa97-2], nous appellerons *barrière de Peierls* la fonction  $h : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour  $y \in X$  fixé, la fonction  $x \mapsto h(y, x)$  est une solution de viscosité de (3.22), alors que  $x \mapsto h(x, y)$  est

une solution de viscosité de l'équation rétrograde<sup>2</sup> (3.27). Autrement dit,  $x \mapsto -h(x, y)$  est point fixe de  $T_t^+ + Et$ .

Si  $u$  est un point fixe quelconque de  $T_t^+ + Et$ , alors  $u$  satisfait l'identité

$$u(x) = \max_{y \in X} u(y) - h(x, y). \quad (3.31)$$

En un sens, les fonctions  $x \mapsto -h(x, y)$  “engendrent” l'espace des solutions. Deux fonctions de la forme  $x \mapsto -h(x, y)$ , pour deux choix distincts de  $y$ , peuvent cependant être identiques, à une constante additive près. On veut donc, dans un premier temps, décrire des sous-ensembles  $X_U \subset X$  tels que

$$u(x) = \max_{y \in X_U} u(y) - h(x, y) \quad (3.32)$$

pour toute solution de viscosité  $u$ . Un tel  $X_U$  est appelé *ensemble d'unicité*, car les solutions de (3.21) sont entièrement déterminées par leurs valeurs sur  $X_U$ . On cherche ensuite  $X_U$  le plus petit possible de sorte que les  $x \mapsto -h(x, y)$  ( $y \in X_U$ ) forment une “base” de l'ensemble des solutions, c'est-à-dire une famille génératrice indépendante, au sens où un choix arbitraire de valeurs de  $u$  sur  $X_U$  permet de reconstituer une solution par la formule (3.31).

**Ensemble de Mather, mesures minimisantes.** Soit  $\alpha$  la fonction de Mather [Mn, Mn92, Mat91, Mn96, CoDI97] :

$$\alpha([\theta]) = - \inf_{\nu} \left\{ \int_{TX} (L^\omega(x, v) - \langle \theta_x, v \rangle) d\nu(x, v) \right\}, \quad (3.33)$$

l'infimum étant pris sur l'ensemble des mesures de probabilité  $\nu$  sur  $TX$ , invariantes sous l'action du flot d'Euler–Lagrange. La fonction  $\alpha$  est définie sur  $H^1(X, \mathbb{R})$ , vu comme le quotient de l'espace des 1-formes fermées par les 1-formes exactes. Différents choix de  $[\theta]$  correspondent aux différents choix de jauge  $\omega + \theta$  pour le potentiel magnétique, et donnent des valeurs différentes à la fonction  $\alpha$ , bien que tous les lagrangiens  $L^\omega(x, v) - \langle \theta, v \rangle$  engendrent la même dynamique si  $\theta$  est fermée. Selon un phénomène analogue, après quantification, le spectre du hamiltonien  $\mathbf{H}_\beta^{\omega+\theta}$  dépend de la jauge  $[\theta] \in H^1(X, \mathbb{R})$ , bien que tous ces opérateurs quantifient le même système classique. Nous avons fixé une fois pour toutes un choix de  $\omega$  correspondant à  $\theta = 0$ , on peut alors relier le niveau critique  $E$  à la fonction  $\alpha$  :  $E = \alpha([0]) = - \inf_{\nu} \left\{ \int_{TX} L^\omega(x, v) d\nu(x, v) \right\}$ .

Une mesure réalisant l'infimum (3.33) est appelée mesure minimisante au sens de Mather. L'ensemble

$$\tilde{\mathcal{M}} = \overline{\cup_{\nu} \text{supp}(\nu)} \subset TX,$$

---

<sup>2</sup>Pour étudier le passage de l'équation visqueuse vers l'équation non visqueuse, il est plus pratique de travailler avec les solutions rétrogrades, en accord avec la convention probabiliste qui considère toujours des chemins de condition *initiale* donnée.

où l'union est prise sur l'ensemble des mesures minimisantes, s'appelle l'ensemble de Mather. Il dépend, une fois de plus, de la jauge choisie. Sous des hypothèses adéquates de croissance à l'infini du hamiltonien, on montre que cet ensemble est non vide, compact; il est évidemment invariant par le flot d'Euler–Lagrange.

**Théorème 3.6.** (Graph theorem de Mather [Mat91]) *La projection  $\pi : TX \rightarrow X$ , restreinte à l'ensemble de Mather  $\tilde{\mathcal{M}}$ , est un homéomorphisme de  $\tilde{\mathcal{M}}$  sur son image  $\pi(\tilde{\mathcal{M}})$ . L'application réciproque  $\pi^{-1} : \pi(\tilde{\mathcal{M}}) \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$  est lipschitzienne.*

L'ensemble  $\mathcal{M} = \pi(\tilde{\mathcal{M}}) \subset X$  est lui aussi appelé ensemble de Mather.

**Exemple 3.7.** *Lagrangien mécanique  $L = \frac{1}{2}\|v\|_x^2 - V(x)$ . Une mesure est minimisante si et seulement si elle est portée par l'ensemble des points fixes du flot hamiltonien de la forme  $(x, 0)$ , où  $x$  est un maximum de  $V$ .*

**Exemple 3.8.** *Soit un lagrangien de la forme  $L = \frac{1}{2}\|v\|_x^2 - \langle \omega, v \rangle$ , où  $\omega$  est fermée. Le théorème 3.6 signifie que l'ensemble de Mather  $\mathcal{M}$  est une lamination géodésique, c'est-à-dire un fermé qui est réunion de géodésiques complètes sans auto-intersections. Par exemple, si  $X$  est une surface compacte de courbure strictement négative,  $\mathcal{M}$  est réunion disjointe de géodésiques fermées simples et de composantes minimales exceptionnelles, qui sont, transversalement, des ensembles de Cantor de dimension 0.*

**Exemple 3.9.** *Contrairement à ce que laissent penser les exemples précédents, la dynamique sur l'ensemble de Mather peut-être arbitrairement compliquée. Étant donné un flot arbitraire sur  $X$ , engendré par un champ de vecteurs  $Z$ , considérons le lagrangien*

$$L(x, v) = \frac{1}{2}\|v - Z\|_x^2.$$

*Les mesures minimisantes sont les mesures invariantes portées par l'ensemble  $\{(x, Z_x), x \in X\} \subset TX$ , elles s'identifient aux mesures invariantes par  $Z$ . Si l'on passe dans le cotangent par la transformation de Legendre, ce sont les mesures invariantes portées par la section nulle.*

Soit  $u$  un point fixe de  $T_t^+ + Et$ , autrement dit  $-u$  est solution de (3.27). Le graphe

$$\text{Graph}(du) = \{(x, du(x)), x \in X, u \text{ différentiable en } x\}$$

est invariant par les temps négatifs de  $\phi_H$ . L'ensemble  $\tilde{\mathcal{M}}$ , une fois transporté sur  $T^*X$  par transformée de Legendre, est inclus dans  $\text{Graph}(du)$ , il supporte en fait toutes les mesures invariantes de  $\text{Graph}(du)$ . Le théorème de Mather implique que  $u$  est de classe  $C^{1,1}$  sur  $\mathcal{M}$ .

**Théorème 3.10.** (Fathi [Fa97-2], [Fa]) *L'ensemble  $\mathcal{M}$  est un ensemble d'unicité pour l'équation de Hamilton–Jacobi.*

**Ensemble d'Aubry.** On définit l'ensemble d'Aubry  $\mathcal{A} \subset X$ ,

$$\mathcal{A} = \{x \in X, h(x, x) = 0\}.$$

Cet ensemble était appelé ensemble de Peierls dans la référence [Fa98-3], mais le nom d'Aubry a prévalu par la suite. Un point  $x$  est dans  $\mathcal{A}$  si l'on peut trouver des trajectoires du flot d'Euler–Lagrange de durée  $T$  arbitrairement grande, partant de  $x$  et y revenant, et dont l'action est arbitrairement proche de  $-ET$ . L'ensemble d'Aubry contient celui de Mather. De même que l'ensemble de Mather  $\mathcal{M}$ , l'ensemble  $\mathcal{A}$  se relève en un ensemble  $\tilde{\mathcal{A}} \subset TX$ , qui est invariant par le flot d'Euler–Lagrange et se projette homéomorphiquement sur  $\mathcal{A}$ . L'ensemble  $\tilde{\mathcal{A}}$  est le plus grand ensemble contenu dans tous les graphes  $\text{Graph}(du)$  et invariant par le flot complet  $(\phi_H^t)_{t \in \mathbb{R}}$ .

Par le *principe de calibration*, toute trajectoire complète de  $(\phi_H^t)_{t \in \mathbb{R}}$  contenue dans un graphe  $\text{Graph}(du)$  se projette sur  $X$  en une courbe  $(\gamma(t))_{t \in \mathbb{R}}$  *globalement minimisante*, ce qui signifie que, pour tout intervalle de temps  $[t_0, t_1]$ , et pour toute courbe  $\tilde{\gamma}$  telle que  $\tilde{\gamma}(t_i) = \gamma(t_i)$  ( $i = 0, 1$ ), on a

$$\int_{t_0}^{t_1} L^\omega(\gamma, \dot{\gamma}) \leq \int_{t_0}^{t_1} L^\omega(\tilde{\gamma}, \dot{\tilde{\gamma}}).$$

On ne demande pas que les deux courbes soient homotopes : cette définition dépend du choix de la jauge.

Les trajectoires contenues dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  ou  $\tilde{\mathcal{M}}$  sont globalement minimisantes. En fait, une probabilité invariante par le flot d'Euler–Lagrange est minimisante au sens de Mather *si et seulement si* elle est portée par des trajectoires globalement minimisantes, si et seulement si elle est portée par l'ensemble de Mather.

**Classes statiques.** Les *classes statiques* forment une partition de  $\mathcal{A}$ , définie par la relation d'équivalence sur  $\mathcal{A}$ :  $x \sim y$  si et seulement si

$$h(x, y) + h(y, x) = 0.$$

Une solution de viscosité est complètement déterminée par une valeur prise dans chaque classe statique [Co01]:

Appelons  $S_i$ , ( $i \in I$ ) les classes statiques, et choisissons arbitrairement un point  $x_i$  dans  $S_i$ . S'il existe une solution  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $u(x_i) = u_i$  pour tout  $i \in I$ , on doit avoir  $u_j - u_i \leq h(x_i, x_j)$  pour tout  $i, j$ . Inversement, si cette condition est satisfaite, il existe une unique solution  $u$  ayant les valeurs prescrites  $u_i$  en  $x_i$ . Elle est donnée par la formule

$$u(x) = \max_{i \in I} u_i - h(x, x_i). \quad (3.34)$$

En ce sens, les  $h(x, x_i)$  forment une base de l'ensemble des solutions de viscosité.

**Théorie KAM faible.** C'est le nom donné par Albert Fathi à l'ensemble des résultats reliant la notion de solution de viscosité, la recherche de points fixes des semi-groupes  $T_t$  (liés à la résolution de l'équation cohomologique  $L(x, v) - du(x).v + E = 0$ ) et la théorie d'Aubry-Mather. Ils constituent, si l'on veut, une version faible, dans un cadre non perturbatif, de la théorie KAM usuelle qui recherche des tores lagrangiens lisses invariants pour un système proche d'être intégrable. Loin du régime perturbatif, on peut considérer que les graphes  $\text{Graph}(du)$ , ou les ensembles d'Aubry-Mather selon les points de vue, remplacent les tores KAM.

### 3.4 Effet tunnel de fond de puits.

**Distance d'Agmon et barrière de Peierls.** Considérons le cas d'un hamiltonien  $H(x, \xi) = \frac{\|\xi\|^2}{2} + V(x)$  sur une variété riemannienne compacte. Soit  $\psi_{\hbar} > 0$  l'état fondamental de l'opérateur  $-\hbar^2 \frac{\Delta}{2} + V$ , d'énergie  $E_{\hbar}$  (pour  $\hbar$  petit,  $E_{\hbar} \simeq E_0 = \min V$ ). La mesure  $\nu_{\hbar}(dx) = \psi_{\hbar}^2(x) d\text{Vol}(x)$  est essentiellement localisée près des points où le potentiel  $V$  est minimal, mais n'est pas nulle dans la zone classiquement interdite,  $\{V > E_{\hbar}\}$ . Pour étudier la vitesse de localisation, on introduit la métrique d'Agmon,

$$\|\cdot\|_{E_{\hbar}, x}^2 = (V(x) - E_{\hbar})_+ \|\cdot\|_x^2$$

où  $\|\cdot\|_x$  est la métrique initiale. La distance d'Agmon est la distance associée. À la limite  $E_{\hbar} \rightarrow E_0$  elle coïncide avec la barrière de Peierls  $d_{E_0}(x, y) = h(x, y)$ , associée au lagrangien  $\frac{\|v\|^2}{2} + V(x)$ . Ce changement de signe de  $V$  est lié à la rotation de Wick : le comportement de  $\psi_{\hbar}$  dans la zone interdite  $\{V > E_0\}$  est décrit par les trajectoires d'Euler-Lagrange à temps complexe.

Soit  $\text{Min}(V) = \{x, V(x) = E_0\}$ . Les résultats du Chapitre 3 de [HisSig] montrent que, pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $s > d/2$ , il existe  $C > 0$  tel que

$$|\psi_{\hbar}(x)| \leq \frac{C}{\hbar^s} e^{-\frac{(1-\varepsilon)}{\hbar} d_{E_0}(x, \text{Min}(V))}.$$

Cela implique que

$$\limsup \hbar \log \nu_{\hbar}(F) \leq - \inf_{x \in F} d_{E_0}(x, \text{Min}(V))$$

pour tout fermé  $F$ . On veut compléter cette estimation en l'assortissant d'une borne inférieure.

**Un problème de grandes déviations.** On pose le problème plus général du comportement quand  $\beta \rightarrow +\infty$  des solutions des équations

$$-\frac{\Delta u_{\beta}^*}{2\beta} + H(x, -d_x u_{\beta}^*) = E_{\beta} \quad \text{et} \quad -\frac{\Delta u_{\beta}}{2\beta} + H(x, d_x u_{\beta}) = E_{\beta},$$

pour un hamiltonien  $H$  de classe  $C^3$ , convexe, surlinéaire en  $\xi$ . On sait que  $E_\beta$  tend vers la valeur critique  $E$  et que les valeurs d'adhérence en topologie uniforme des familles  $(u_\beta)$ ,  $(u_\beta^*)$  doivent être solutions de viscosité de (3.29). On veut caractériser les limites possibles des fonction  $(u_\beta)$  et  $(u_\beta^*)$ .

Dans le cas particulier d'un hamiltonien mécanique  $\frac{\|\xi+\omega\|^2}{2} + V$ , on sait que  $u_\beta^*$  et  $u_\beta$  sont reliées à l'état fondamental des opérateurs  $\mathbf{H}_\beta^\omega$  et  $\mathbf{H}_\beta^{\omega^*}$  par les relations  $u_\beta^* = -\frac{\log \psi_\beta^*}{\beta}$  et  $u_\beta = -\frac{\log \psi_\beta}{\beta}$ . Les fonctions  $u_\beta^*$  et  $u_\beta$  décrivent donc la décroissance exponentielle des fonctions propres, et leur comportement quand  $\beta \rightarrow +\infty$  est lié à l'existence d'un principe de grandes déviations pour les mesures  $(\nu_\beta)$  :

**Proposition 3.11.** *Supposons que  $u_\beta^* = -\frac{\log \psi_\beta^*}{\beta}$  et  $u_\beta = -\frac{\log \psi_\beta}{\beta}$  convergent uniformément, respectivement vers  $u^*$  et  $u$ . Alors la famille de mesures  $(\nu_\beta)_{\beta \rightarrow +\infty}$  satisfait un principe de grandes déviations, de taux  $\beta$ , de fonction de taux  $I(x) = u(x) + u^*(x)$ .*

*Autrement dit, pour tout ouvert  $O \subset X$ ,*

$$\liminf \frac{1}{\beta} \log \nu_\beta(O) \geq -\inf_O I,$$

*et pour tout fermé  $F \subset X$ ,*

$$\limsup \frac{1}{\beta} \log \nu_\beta(F) \leq -\inf_F I.$$

**Remarque 3.12.** *On a toujours une borne supérieure, valable pour tout fermé  $F$ ,*

$$\limsup \frac{1}{\beta} \log \nu_\beta(F) \leq -\inf_{x \in F} h_*(x, x),$$

*où  $h_*$  est la "seconde barrière de Peierls" [A04].*

On cherche donc à trouver des hypothèses sous lesquelles on puisse démontrer l'existence d'une (unique) limite pour  $u_\beta^*$  et  $u_\beta$ . Le théorème 3.13 qui vient est valable pour un hamiltonien général.

**De l'équation visqueuse vers l'équation sans viscosité.** Par la suite on fait l'hypothèse que l'ensemble d'Aubry  $\tilde{\mathcal{A}}$  est constitué d'un nombre fini  $m$  d'orbites périodiques *hyperboliques* du flot d'Euler–Lagrange. Ainsi, chaque classe statique est la projection sur  $X$  d'une orbite périodique hyperbolique, mettons  $\alpha_i : [0, T_i] \rightarrow X$ ,  $i = 1, \dots, m$ . On choisit un point  $x_i$  dans chaque classe statique,  $x_i = \alpha_i(0)$ , et on note  $h_i(x) = h(x, x_i)$ . L'hyperbolicité de l'ensemble d'Aubry implique que  $h_i$  est de classe  $C^2$  au voisinage de  $\alpha_i$  : c'est la fonction génératrice de la variété stable de  $\alpha_i$ . On peut donc définir

$$\lambda_i := \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \Delta h_i(\alpha_i(t)) dt.$$

Dans le cas d'un point fixe, c'est-à-dire  $T_i = 0$ , on pose  $\lambda_i = \Delta h_i(x_i)$ . On suppose qu'il y a exactement une classe statique  $\alpha_I$  telle que

$$\lambda_I = \min_{1 \leq i \leq m} \lambda_i \quad (3.35)$$

On montre alors un résultat qui généralise ceux de [JKM96] et [Bes03].

**Théorème 3.13.** [AIPS04] *Sous les hypothèses précédentes, la fonction  $u_\beta^*$ , normalisée de sorte que  $u_\beta^*(x_I) = 0$ , converge uniformément vers  $h_I$  quand  $\beta \rightarrow +\infty$ .*

**Exemple 3.14.** *Lagrangien "mécanique"  $L = \frac{1}{2}\|v\|^2 - V(x)$ . Si  $V$  a un nombre fini de maxima  $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ , les classes statiques sont les points  $x_i$ , et  $E = \max V$ . Les hypothèses du théorème demandent que ces maxima soient non dégénérés. On vérifie que  $\lambda(x_i) = \sum_{j=1, \dots, d} \sqrt{k_j(x_i)}$ , où l'on a appelé  $-k_j(x_i), j = 1, \dots, d$  les valeurs propres de la hessienne de  $V$  en  $x_i$ . La seconde hypothèse du théorème veut qu'il existe  $I \in [1, m]$  tel que*

$$\sum_j \sqrt{k_j(x_i)} > \sum_j \sqrt{k_j(x_I)}, \quad i \neq I. \quad (3.36)$$

Rappelons que dans ce cas la barrière de Peierls  $h$  est la distance associée à la métrique  $\sqrt{E - V(x)} \|\cdot\|_x$ .

La preuve du théorème 3.13 utilise une caractérisation variationnelle des solutions de (3.21), généralisant la formule (3.23). Quand il y a un terme de viscosité, il faut introduire un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  muni d'un mouvement brownien  $W(t) : \Omega \rightarrow X$  associé au laplacien  $\Delta$ . Notons  $\mathbb{E}$  l'espérance vis-à-vis de la mesure de probabilité  $\mathbb{P}$ . La solution de (3.21) obéit au principe variationnel de Lax : pour tout temps d'arrêt borné  $\tau$ ,

$$-u_\beta(x) = \sup_v \mathbb{E} \left( -u_\beta(X_\beta(\tau)) - \int_0^\tau L(X_\beta(s), v(s)) ds - E_\beta \tau \right), \quad (3.37)$$

où  $v$  est un processus de contrôle, et  $X_\beta$  est solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_\beta(t) &= v(t)dt + \frac{1}{\sqrt{\beta}} dW(t) \\ X_\beta(0) &= x \end{cases} \quad (3.38)$$

([FIS] Lemme IV 3.1). C'est en analysant le comportement des différents termes de (3.37) quand  $\beta \rightarrow +\infty$  qu'on obtient le théorème 3.13. Au passage, et sous les mêmes hypothèses, on montre la

**Proposition 3.15.** [AIPS04]

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \beta (E_\beta - E) = -\lambda_I.$$



**Entropie des mesures limites.** On s'intéresse maintenant au problème de l'“unique ergodicité quantique”, consistant ici à identifier les limites possibles  $\mu_\infty$  des relevés microlocaux  $\mu_\beta$ . Il résulte de la proposition 3.3 que  $\mu_\infty$  doit être une mesure minimisante au sens de Mather. Les exemples de la section précédente montrent qu'il y a souvent plusieurs telles mesures, on veut alors une caractérisation supplémentaire des  $\mu_\infty$ . On n'utilisera pas, dans la pratique, le relevé microlocal  $\mu_\beta$ , dont la définition dépend du choix de  $\text{Op}_{\beta^{-1}}$ , mais un objet beaucoup plus naturel, le processus stochastique défini par les intégrales de chemins (3.14), et dont  $\nu_\beta$  est la mesure invariante. On va donc considérer le processus markovien sur  $X$ , de distribution initiale  $\nu_\beta$  et de semigroupe de transition

$$f \mapsto P_{\beta,\omega}^t f = \frac{1}{e^{t\beta E_\beta} \psi_\beta} \exp t\beta \mathbf{H}_\beta^\omega.(\psi_\beta f).$$

La mesure  $\nu_\beta$  en est l'unique probabilité invariante. On étend la mesure  $\nu_\beta$  à l'espace des chemins continus,  $C(\mathbb{R}, X)$ , en posant désormais

$$\begin{aligned} & \nu_\beta (\{\gamma, \gamma|_{[0,t]} \in A\}) \\ &= e^{-t\beta E_\beta} \int_{\gamma|_{[0,t]} \in A} \psi_\beta^*(\gamma_0) d\gamma_0 \left( \int e^{\beta \int_0^t V(\gamma_s) ds + \beta \int_0^t \omega(\gamma(s)) \circ d\gamma(s)} \psi_\beta(\gamma_t) d\mathcal{W}_{\gamma_0}^\beta(\gamma|_{[0,t]}) \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

pour tout temps  $t \geq 0$  et tout sous-ensemble mesurable  $A$  de  $C([0, t], X)$ . De manière équivalente, pour tous temps  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  et toute collection d'ensembles mesurables  $P_0, \dots, P_n \subset X$ ,

$$\begin{aligned} & \nu_\beta (\{\gamma, \gamma_{t_0} \in P_0, \dots, \gamma_{t_n} \in P_n\}) \\ &= e^{-\beta(t_n - t_0)E_\beta} \left\langle \mathbb{1}_{P_n} e^{\beta(t_n - t_{n-1})\mathbf{H}_\beta^\omega} \dots \mathbb{1}_{P_1} e^{\beta(t_1 - t_0)\mathbf{H}_\beta^\omega} \mathbb{1}_{P_0} \psi_\beta, \psi_\beta^* \right\rangle_{L^2(X)} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Il est clair que la marginale  $t = 0$  de  $\nu_\beta$  est notre mesure  $\psi_\beta(x)\psi_\beta^*(x)d\text{Vol}(x)$ . La définition (3.39) montre que  $\nu_\beta$  peut-être vue comme la mesure de Gibbs (au sens de la mécanique statistique) sur  $C(\mathbb{R}, X)$ , associée à l'action  $A(\gamma) = \int L(\gamma, \dot{\gamma})$ , et invariante par l'action de  $\mathbb{R}$  sur  $C(\mathbb{R}, X)$  par le flot des translations temporelles  $\sigma = (\sigma^t)_{t \in \mathbb{R}}$ . La propriété de Gibbs est souvent liée à un principe variationnel thermodynamique, et c'est ce qui motive le théorème 3.17.

**Remarque 3.16.** *D'après un résultat de Fathi et Siconolfi [FaSi04], on peut toujours, quitte à remplacer  $L^\omega$  par  $L^\omega - du + E$  avec  $u$  de classe  $C^1$ , supposer que  $E = 0$  et  $L^\omega(x, v) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $(x, v) \in \tilde{\mathcal{A}}$ . C'est ce que nous supposons désormais.*

Soit  $\gamma : [0, T] \rightarrow X$ , on dira que c'est une courbe  $\delta$ -presque minimisante si  $A(\gamma) \leq \delta$ . On fera l'hypothèse suivante :

**Hypothèse (A) :** Il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $\delta > 0$  assez petit, pour tout temps  $T \geq 1$ , pour toute courbe  $\gamma : [0, T] \rightarrow X$   $\delta$ -presque minimisante, alors il existe exactement une trajectoire d'Euler–Lagrange  $\hat{\gamma} : [0, T] \rightarrow X$  telle que  $\hat{\gamma}(0) = \gamma(0)$ ,  $\hat{\gamma}(T) = \gamma(T)$ , et  $|\hat{\gamma}(t) - \gamma(t)| \leq c\delta$ , pour tout  $t \in [0, T]$ . De plus,  $\hat{\gamma}$  réalise le minimum de l'action parmi les courbes vérifiant toutes ces conditions, et le minimum est non dégénéré.

Si l'ensemble  $\tilde{\mathcal{A}}$  est uniformément hyperbolique, le *shadowing lemma* implique que l'hypothèse (A) est vérifiée. Réciproquement, l'hypothèse (A) implique certainement une forme assez forte d'hyperbolicité pour  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Les trois hypothèses de l'article original [A04], pénibles à énoncer, étaient conçues pour s'appliquer, au contraire, à des situations où il n'y a pas d'hyperbolicité, comme l'exemple trivial du flot géodésique sur un tore plat, ou l'exemple 3.7 quand certains maxima du potentiel sont dégénérés. Il n'était pas clair qu'elles s'appliquassent à des situations plus compliquées, sans doute plus intéressantes, comme le cas d'un lagrangien de la forme  $L^\omega(x, v) = \frac{\|v\|_x^2}{2} - \langle \omega, v \rangle$ , où  $\|v\|_x$  est une métrique à courbure strictement négative et  $\omega$  une 1-forme fermée non exacte. Dans ce dernier cas on peut utiliser la nouvelle hypothèse (A). Il est tout de même un peu dommage de ne pas avoir pu unifier le cas hyperbolique avec le cas “plat” sous un ensemble commun d'hypothèses.

**Théorème 3.17.** [A04] (i) Soit  $\nu_\infty$  une valeur d'adhérence de la famille  $(\nu_\beta)_{\beta \rightarrow +\infty}$  sur l'espace des chemins  $C(\mathbb{R}, X)$ . Alors  $\nu_\infty$  est  $\sigma$ -invariante, et portée par les trajectoires globalement minimisantes du flot d'Euler–Lagrange.

(ii) Soit  $\nu$  une autre mesure de probabilité ayant ces mêmes propriétés, on a

$$\begin{aligned} h_{KS}(\nu, \sigma) - \frac{1}{2} \int_{C(\mathbb{R}, X)} \sum_{j=1}^d \lambda_j^+(\gamma_0, \dot{\gamma}_0) d\nu(\gamma) \\ \leq h_{KS}(\nu_\infty, \sigma) - \frac{1}{2} \int_{C(\mathbb{R}, X)} \sum_{j=1}^d \lambda_j^+(\gamma_0, \dot{\gamma}_0) d\nu_\infty(\gamma). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ici, les  $\lambda_j^+(\gamma_0, \dot{\gamma}_0)$  sont les exposants de Lyapunov positifs du flot d'Euler–Lagrange, pour la condition initiale  $(\gamma_0, \dot{\gamma}_0)$ ; et  $h_{KS}(\nu, \sigma)$ ,  $h_{KS}(\nu_\infty, \sigma)$  désignent l'entropie de Kolmogorov–Sinai de  $\nu$  et  $\nu_\infty$  sous l'action du flot de translation temporelle  $(\sigma^t)$ .

L'ensemble des trajectoires paramétrées du flot d'Euler–Lagrange s'identifie naturellement à  $TX$ , et cette identification conjugue le flot de translation temporelle  $\sigma = (\sigma^t)_{t \in \mathbb{R}}$  au flot d'Euler–Lagrange. D'après le point (i) du

théorème, la mesure  $\nu_\infty$  est ainsi identifiée à une mesure sur  $TX$ , invariante par  $(\phi_{EL}^t)$ , et minimisant l'action. Par transformée de Legendre, celle-ci s'identifie à son tour à une mesure  $\mu_\infty$  sur  $T^*X$ , et le théorème peut-être reformulé ainsi :

**Théorème 3.18.** [A04] (i) Soit  $\mu_\infty$  une valeur d'adhérence de la famille  $(\mu_\beta)_{\beta \rightarrow +\infty}$  sur  $T^*X$ . Alors  $\mu_\infty$  est une mesure de probabilité invariante par le flot hamiltonien, portée par l'ensemble de Mather  $\mathcal{L}eg^{-1}(\tilde{\mathcal{M}})$ .

(ii) Soit  $\mu$  une autre mesure de probabilité ayant ces mêmes propriétés, on a de plus

$$\begin{aligned} h_{KS}(\mu, \phi_H) - \frac{1}{2} \int_{T^*X} \sum_{j=1}^d \lambda_j^+(x, \xi) d\mu(x, \xi) \\ \leq h_{KS}(\mu_\infty, \phi_H) - \frac{1}{2} \int_{T^*X} \sum_{j=1}^d \lambda_j^+(x, \xi) d\mu_\infty(x, \xi). \end{aligned}$$

Les  $\lambda_j^+$  sont ici les exposants de Lyapunov positifs du flot hamiltonien, et  $h_{KS}(\mu, \phi_H)$ ,  $h_{KS}(\mu_\infty, \phi_H)$  désignent l'entropie de Kolmogorov–Sinai de  $\mu$  et  $\mu_\infty$  sous l'action du flot hamiltonien  $(\phi_H^t)$ .

**Exemple 3.19.** (suite des exemples 3.14 et 3.7) Dans ce cas, le terme d'entropie est nul, et le théorème dit que  $\mu_\beta$  se concentre sur les maxima de  $V$  qui minimisent  $\sum_{j=1}^d \sqrt{k_j(x)}$ , où les  $-k_j(x)$  sont les valeurs propres de la hessienne de  $V$  en  $x$ . Ce résultat est une conséquence du théorème 3.13, ou encore des estimées semiclassiques [Hel].

**Exemple 3.20.** (suite de l'exemple 3.9) Dans ce cas, l'ensemble des orbites minimisantes s'identifie par transformée de Legendre à la section nulle du cotangent, c'est donc une variété lagrangienne lisse invariante, et on montre que  $\sum_{j=1}^d \lambda_j^+(x, 0)$  coïncide avec  $\sum_{j=1}^d |\lambda_j(x, 0)|$ , où il s'agit, dans la deuxième expression, des  $d$  exposants de Lyapunov du flot hamiltonien restreint à la section nulle. D'après le théorème, la mesure  $\mu_\infty$  est une mesure d'équilibre maximisant  $h_{\phi_H}(\mu_\infty) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d |\lambda_j(x, \xi)|$  parmi les mesures portées par la section nulle. Si le flot engendré par  $Z$  est un flot d'Anosov topologiquement transitif, alors une telle mesure est unique, c'est une sorte de mesure SRB "symétrique" (aucune orientation du temps n'est favorisée). En particulier, si  $Z$  possède une mesure invariante absolument continue,  $\mu_\infty$  doit être celle-ci.

La première partie du théorème 3.17 est une conséquence directe de la formule (3.39) définissant  $\nu_\beta$ . On esquisse ici la preuve du deuxième point, en détaillant les étapes qui sont différentes de la version publiée [A04]. Sans perte de généralité, on supposera que le "temps d'injectivité" du flot d'Euler–Lagrange, sur un voisinage de la couche d'énergie  $E$ , est supérieur

à 2 (notons que  $E = 0$  à cause de la remarque 3.16). On choisit alors d'évaluer l'entropie en travaillant sur le temps 1 du flot. La définition de l'entropie de Kolmogorov–Sinai est rappelée en fin de chapitre.

Soit  $\nu_\infty$  une valeur d'adhérence de  $\nu_\beta$ , et soit  $\nu$  une autre mesure de probabilité sur  $C(\mathbb{R}, X)$ ,  $\sigma$ -invariante et portée par des trajectoires minimisantes (donc par des trajectoires dans l'ensemble de Mather  $\tilde{\mathcal{M}}$ ).

Soit  $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_K)$  une partition finie mesurable de  $X$ , on supposera que le bord de chaque  $P_i$  est  $C^1$  par morceaux et n'est pas chargé par  $\nu_\infty$ . La partition  $\mathcal{P}$  détermine naturellement une partition de l'espace des chemins, formée des ensembles  $\{\gamma \in C(X, \mathbb{R}), \gamma(0) \in P_i\}$ , et on va chercher à démontrer une inégalité comparant les entropies  $h_{\mathcal{P}}(\nu, \sigma)$ ,  $h_{\mathcal{P}}(\nu_\beta, \sigma)$ , puis par passage à la limite  $\beta \rightarrow +\infty$ ,  $h_{\mathcal{P}}(\nu_\infty, \sigma)$ . On notera  $A_j = \mathbb{1}_{P_j}$ . Par commodité on introduit l'espace symbolique  $\Sigma = \{1, \dots, K\}^{\mathbb{Z}}$ . On a alors une application de codage  $\mathcal{J} : C(\mathbb{R}, X) \rightarrow \Sigma$  qui, à une trajectoire  $\gamma$ , associe la suite  $(\epsilon_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  telle que  $\gamma(j) \in P_{\epsilon_j}$  pour tous les temps entiers  $j \in \mathbb{Z}$ . Sur  $\Sigma$ , on définit la mesure de probabilités  $\nu_\beta^\Sigma$  (respectivement  $\nu^\Sigma$ ), image de  $\nu_\beta$  (resp.  $\nu$ ) par l'application  $\mathcal{J}$ . Ces mesures sont définies par

$$\nu_\beta^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) = \nu_\beta(P_{\epsilon_0} \cap \sigma^{-1}P_{\epsilon_1} \cap \dots \cap \sigma^{-n}P_{\epsilon_n}) \quad (3.42)$$

$$= \nu_\beta(A_{\epsilon_0} \cdot A_{\epsilon_1} \circ \sigma^1 \dots A_{\epsilon_n} \circ \sigma^n) \quad (3.43)$$

$$= e^{-\beta n E_\beta} \left\langle A_{\epsilon_n} e^{\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} \dots A_{\epsilon_1} e^{\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} A_{\epsilon_0} \psi_\beta, \psi_\beta^* \right\rangle_{L^2(X)} \quad (3.44)$$

et  $\nu^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) = \nu(A_{\epsilon_0} \cdot A_{\epsilon_1} \circ \sigma^1 \dots A_{\epsilon_n} \circ \sigma^n)$ , où l'on a noté  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]$  le "cylindre" de  $\Sigma$  formé des suites commençant par les lettres  $\epsilon_0, \dots, \epsilon_n$ .

On rappelle l'inégalité de convexité

$$-\sum p_i \log p_i + \sum p_i \log q_i \leq 0 \quad (3.45)$$

valable pour toutes probabilités  $(p_i)$  et  $(q_i)$ . On a donc, pour tout  $n$ ,

$$\begin{aligned} & -\sum \nu^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) \log \nu^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) \\ & \quad + \sum \nu^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) \log \nu_\beta^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) \\ & \leq 0 = -\sum \nu_\beta^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) \log \nu_\beta^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) \\ & \quad + \sum \nu_\beta^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) \log \nu^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) \end{aligned} \quad (3.46)$$

où les sommes portent sur tous les cylindres de longueur  $n$ . Par définition, les termes  $-\frac{1}{n} \sum \nu^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) \log \nu^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n])$  et  $-\frac{1}{n} \sum \nu_\beta^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) \log \nu_\beta^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n])$  convergent respectivement, quand  $n \rightarrow +\infty$ , vers  $h_{\mathcal{P}}(\nu, \sigma)$  et  $h_{\mathcal{P}}(\nu_\beta, \sigma)$ . Dans les termes restant, on va étudier le comportement asymptotique de  $\log \nu_\beta^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n])$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et  $\beta \rightarrow +\infty$ , avant d'insérer les estimées obtenues dans l'inégalité (3.46) pour obtenir finalement (3.41).

*Cylindres presque optimaux.* Soit  $\delta > 0$  un réel donné, vérifiant l'énoncé de l'hypothèse (A). On supposera que le diamètre des ensembles  $P_j$  composant la partition est bien inférieur à  $\delta$ . On note  $\Omega_j$  un voisinage de taille  $c\delta$  de  $P_j$ . Soit un cylindre  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]$ , définissons par récurrence

$$\begin{aligned} h_1^{\epsilon_0, \epsilon_1}(x, y) &= h_1(x, y) = \inf\{A(\gamma), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}; \\ H_{k+1}^{\epsilon_0, \dots, \epsilon_{k+1}} &= \inf\{h_k^{\epsilon_0, \dots, \epsilon_k}(x, z) + h_1(z, y), x \in P_{\epsilon_0}, y \in P_{\epsilon_{k+1}}, z \in P_{\epsilon_k}\} \\ h_{k+1}^{\epsilon_0, \dots, \epsilon_{k+1}}(x, y) &= \inf\{h_k^{\epsilon_0, \dots, \epsilon_k}(x, z) + h_1(z, y), z \in \Omega_{\epsilon_k}\}. \end{aligned}$$

Tant que  $H_k^{\epsilon_0, \dots, \epsilon_k} \leq \delta$ , l'hypothèse (A) implique que  $h_{k+1}^{\epsilon_0, \dots, \epsilon_{k+1}}(x, y)$  définit une fonction lisse sur  $P_{\epsilon_{k+1}}$ , qui peut se prolonger en une fonction lisse sur  $\Omega_{\epsilon_{k+1}}$  si  $\delta$  a été choisi assez petit. On dira que  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]$  est un cylindre  $(\delta)$ -presque optimal si  $H_k^{\epsilon_0, \dots, \epsilon_k} \leq \delta$  pour tout  $k \leq n$ .

Soit maintenant  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]$  un cylindre quelconque. On appelle  $T_1$  le premier temps auquel le cylindre cesse d'être optimal, c'est-à-dire que  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{T_1-1}]$  est optimal mais pas  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{T_1}]$ . On définit ensuite  $T_2$ , le deuxième temps après  $T_1$  où le cylindre cesse d'être optimal, par le fait que  $[\epsilon_{T_1}, \dots, \epsilon_{T_2-1}]$  soit optimal mais pas  $[\epsilon_{T_1}, \dots, \epsilon_{T_2}]$ , puis de même  $T_3, T_4$  etc. Enfin  $N = \max\{k, T_k \leq n\}$  est le nombre de fois où le cylindre cesse d'être optimal.

Comme dans la formule de Van Vleck (1.28), (1.29), si  $\gamma$  est une trajectoire d'Euler-Lagrange joignant  $x$  à  $y$  en temps  $t$ , on note  $J^{t, \gamma}(x, y)$  le jacobien de l'application  $\exp_x^t$  évalué en  $\dot{\gamma}(0)$ . On note  $J^t(x, y)$  le jacobien de l'application  $\exp_x^t$  évalué au vecteur  $v$  d'énergie  $|H| \leq 4\delta$  et tel que  $\exp_x^t(v) = y$  — si celui-ci existe. Si cette condition n'est pas remplie, on attribuera dans les calculs une valeur arbitraire, supérieure à 1, à  $J^t(x, y)$  (ces valeurs ne joueront aucun rôle dans notre analyse). Étant donnés  $\epsilon_0, \epsilon_1$ , on notera enfin  $J^1(\epsilon_0, \epsilon_1) = \inf\{J^1(x, y), x \in \Omega_{\epsilon_0}, y \in \Omega_{\epsilon_1}\}$ . Pour un cylindre  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]$ , on note alors

$$J^n(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n) = J^1(\epsilon_0, \epsilon_1) J^1(\epsilon_1, \epsilon_2) \dots J^1(\epsilon_{n-1}, \epsilon_n).$$

**Proposition 3.21.** Notons  $C(\beta) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{d/2} \max \psi_\beta \max \psi_\beta^*$ .

(i) Soit  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]$  un cylindre presque optimal, on a alors

$$\nu_\beta^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) \leq C(\beta) J^n(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)^{-1/2} e^{\frac{Cn}{\beta}}$$

(ii) On a pour tout cylindre

$$\nu_\beta^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) \leq C(\beta) J^n(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)^{-1/2} e^{\frac{Cn}{\beta}} C^N$$

où  $C$  est un réel positif et  $N \leq n$  est le nombre de fois où le cylindre cesse d'être optimal.

La proposition résulte immédiatement du lemme suivant, où l'on estime uniformément le noyau de l'opérateur  $A_{\epsilon_n} e^{\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} \dots A_{\epsilon_1} e^{\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} A_{\epsilon_0}$  :

**Lemme 3.22.** (i) Soit  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]$  un cylindre presque optimal, on a alors

$$\begin{aligned} & A_{\epsilon_n} e^{\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} \dots A_{\epsilon_1} e^{\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} A_{\epsilon_0} \delta_y(x) \\ & \leq C \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{d/2} e^{\frac{C_n}{\beta}} A_{\epsilon_n}(x) A_{\epsilon_0}(y) e^{-\beta h_n^{\epsilon_0, \dots, \epsilon_n}(y, x)} J^n(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)^{-1/2} \end{aligned}$$

(ii) Soit  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]$  un cylindre tel que, pour un certain  $k < n$ ,  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_k]$  soit un cylindre presque optimal mais pas  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{k+1}]$ . On a alors

$$\begin{aligned} & A_{\epsilon_n} e^{\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} \dots A_{\epsilon_1} e^{\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} A_{\epsilon_0} \delta_y(x) \\ & \leq e^{\frac{C_k}{\beta}} J^k(\epsilon_0, \dots, \epsilon_k)^{-1/2} \sup_{z \in \Omega_{\epsilon_{k+1}}} A_{\epsilon_n} e^{\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} \dots A_{\epsilon_{k+2}} e^{\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} A_{\epsilon_{k+1}} \delta_z(x) \end{aligned}$$

On démontre d'abord une estimée sur les solutions de type BKW,

**Lemme 3.23.** Soit  $a$  une fonction positive de classe  $C^2$  sur  $X$ , et  $S$  de classe  $C^2$  sur un voisinage  $\Omega$  du support de  $a$ . Considérons le graphe lagrangien  $\mathcal{L} = \{(x, dS(x)), x \in \Omega\}$ ; et supposons que pour  $0 \leq t \leq 2$ ,  $\mathcal{L}_t = \phi_{H^\omega}^t(\mathcal{L})$  soit toujours un graphe, c'est-à-dire que  $\mathcal{L}_t = \{(x, dS_t(x)), x \in \Omega_t\}$ , la fonction  $S_t$  étant de classe  $C^2$  sur l'ouvert  $\Omega_t = \pi(\mathcal{L}_t) \subset X$ . Alors  $S$  est solution de l'équation de Hamilton–Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H^\omega(x, dS(x)) = 0,$$

et l'équation

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \langle dS, da \rangle + a \frac{\Delta S}{2} = 0$$

a une solution  $a$  de classe  $C^2$  positive sur  $[0, 2] \times X$ , avec  $\text{supp}(a_t) \subset \Omega_t$ . La fonction  $a$  s'exprime explicitement comme

$$a(t, x) = \frac{a(0, (\exp_S^t)^{-1}x)}{\sqrt{J_S^t(x)}}$$

avec les notations du chapitre 1, paragraphe 1.5.

Appelons alors  $U_t = \{x \in X, a_t(x) > 0\}$ , et  $U = \{(t, x) \in [0, 1] \times X, x \in U_t\}$ . Introduisons la fonction  $v(t, x) = e^{-\beta S(t, x)} a(t, x)$ . Sur tout compact inclus dans  $U$ , on peut trouver une constante  $C > 0$  telle que

$$e^{\frac{Ct}{\beta}} v(t) \leq \exp(t\beta \mathbf{H}_\beta^\omega) v(0) \leq e^{\frac{Ct}{\beta}} v(t).$$

*Preuve.* Le champ de vecteur dépendant du temps  $\mathcal{L}eg(x, dS_t(x))$ , là où il est défini ( $t \in [0, 2], x \in \Omega_t$ ), engendre un flot  $g^{s,t}$ , dont les trajectoires sont des minimisantes de l'action, parmi les courbes restant dans cet ouvert. Plus précisément, l'application  $g^{s,t}$  réalise un difféomorphisme de  $\Omega_s$  sur  $\Omega_t$ , et selon le "principe de calibration" on a

$$S_t(x) = \inf_{\gamma(s) \in \Omega_s \text{ pour tout } s, \gamma(t)=x} \left\{ S_{t_0}(\gamma(t_0)) + \int_{t_0}^t L(\gamma, \dot{\gamma}) \right\}$$

pour tout  $t_0 \leq t$ . L'inf est atteint uniquement sur la trajectoire de  $g^{s,t}$  arrivant en  $x$  au temps  $t$ .

Sur l'expression explicite de  $a(t, x)$ , on remarque que  $U_t = g^{0,t} U_0$ . Considérons un compact  $K_0 \subset U_0$ , et  $K_t = g^{0,t} K_0 \subset U_t$ . On vérifie que  $v$  est solution de

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \beta \mathbf{H}_\beta^\omega \cdot v - \frac{\Delta a}{2\beta} e^{-\beta S}.$$

Si l'on note  $u(t, x) = \exp(t\beta \mathbf{H}_\beta^\omega) v(0)(x)$ , on a par le principe de Duhamel

$$u(t, x) = v(t, x) + \frac{1}{2\beta} \int_0^t e^{(t-s)\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} \left( \Delta a(s, x) e^{-\beta S(s, x)} \right) ds.$$

Introduisons alors un ouvert  $K_0 \subset G_0 \subset U_0$ , tel que  $\bar{G}_0 \subset U_0$  et  $\bar{G}_0$  soit compact. Comme précédemment on note  $G_t = g^{0,t} G_0$ . Sur le compact  $\bar{G}_s$ ,  $a(s)$  est strictement positive, on peut donc trouver un  $C > 0$  tel que  $\sup_{U_s} |\Delta a(s)| \leq C \inf_{G_s} a(s)$ . Pour  $x \in K_t$ , un argument standard de grandes déviations pour le noyau de  $e^{(t-s)\beta \mathbf{H}_\beta^\omega}$  montre dans un premier temps que

$$\begin{aligned} & \left| e^{(t-s)\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} \left( \Delta a(s) e^{-\beta S(s)} \right) (x) - e^{(t-s)\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} \left( \mathbf{1}_{G_s} \Delta a(s) e^{-\beta S(s)} \right) (x) \right| \\ & \leq C e^{-\frac{\beta}{2} \epsilon_{s,t}} e^{(t-s)\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} \left( \mathbf{1}_{G_s} a(s) e^{-\beta S(s)} \right) (x) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon_{s,t} = \inf_{x \in K_t} \inf_{\gamma(s) \notin G_s, \gamma(t)=x} \left\{ S_s(\gamma(s)) + \int_s^t L(\gamma, \dot{\gamma}) \right\} - \inf_{\gamma(t)=x} \left\{ S_s(\gamma(s)) + \int_s^t L(\gamma, \dot{\gamma}) \right\} \\ > 0. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$\begin{aligned} & - C(1 + e^{-\frac{\beta}{2} \epsilon_{s,t}}) e^{(t-s)\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} \left( \mathbf{1}_{G_s} a(s) e^{-\beta S(s)} \right) (x) \\ & \leq e^{(t-s)\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} \left( \Delta a(s) e^{-\beta S(s)} \right) (x) \\ & \leq C(1 + e^{-\frac{\beta}{2} \epsilon_{s,t}}) e^{(t-s)\beta \mathbf{H}_\beta^\omega} \left( \mathbf{1}_{G_s} a(s) e^{-\beta S(s)} \right) (x). \end{aligned}$$

Intégrant par rapport à  $s$ , et utilisant le fait que  $e^{(t-s)\beta\mathbf{H}_\beta^\omega}$  est positif, on obtient

$$\begin{aligned} v(t, x) - \frac{C}{2\beta}(1 + o(1)) \int_0^t e^{(t-s)\beta\mathbf{H}_\beta^\omega} v(s, x) ds \\ \leq u(t, x) \leq v(t, x) + \frac{C}{2\beta}(1 + o(1)) \int_0^t e^{(t-s)\beta\mathbf{H}_\beta^\omega} v(s, x) ds. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$e^{-\frac{Ct}{\beta}} v(t, x) \leq u(t, x) \leq v(t, x) e^{\frac{Ct}{\beta}}$$

pour  $x \in K_t$ . La constante  $C$  est uniforme sur tout intervalle de temps borné.

*Preuve de la proposition 3.21.* Elle résulte du lemme 3.22, qui donne une borne uniforme sur le noyau de l'opérateur  $A_{\epsilon_n} e^{\beta\mathbf{H}_\beta^\omega} \dots A_{\epsilon_1} e^{\beta\mathbf{H}_\beta^\omega} A_{\epsilon_0}$ , autrement dit sur la fonction  $A_{\epsilon_n} e^{\beta\mathbf{H}_\beta^\omega} \dots A_{\epsilon_1} e^{\beta\mathbf{H}_\beta^\omega} A_{\epsilon_0} \delta_y$ , pour des temps  $n$  arbitrairement grands. On examine dans un premier temps le cas des cylindres presque optimaux. En temps 1, l'asymptotique du noyau est donnée par le théorème 3.1 :

$$A_{\epsilon_1} e^{\beta\mathbf{H}_\beta^\omega} A_{\epsilon_0} \delta_y(x) \sim \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{d/2} \frac{e^{-\beta h_1(y, x)}}{\sqrt{J^1(y, x)}} A_{\epsilon_1}(x) A_{\epsilon_0}(y).$$

Si l'on a un cylindre presque optimal, la fonction  $h_1(y, x)$  est lisse sur le support de  $A_{\epsilon_1}(y) A_{\epsilon_0}(x)$ .

On montre ensuite par récurrence, à l'aide du lemme 3.23, que

$$\begin{aligned} A_{\epsilon_n} e^{\beta\mathbf{H}_\beta^\omega} \dots A_{\epsilon_1} e^{\beta\mathbf{H}_\beta^\omega} A_{\epsilon_0} \delta_y(x) \leq C \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{d/2} e^{\frac{Cn}{\beta}} A_{\epsilon_n}(x) A_{\epsilon_0}(y) e^{-\beta h_n^{\epsilon_0, \dots, \epsilon_n}(y, x)} \times \\ \sup_{x_0 \in \Omega_{\epsilon_0}, x_1 \in \Omega_{\epsilon_1}} J^1(x_0, x_1)^{-1/2} \dots \sup_{x_{n-1} \in \Omega_{\epsilon_{n-1}}, x_n \in \Omega_{\epsilon_n}} J^1(x_{n-1}, x_n)^{-1/2} \end{aligned}$$

ce qui prouve le premier point de la proposition. Pour le deuxième point, il se démontre en notant que, si  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]$  est presque optimal mais pas  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n+1}]$ , alors une itération supplémentaire donne

$$\begin{aligned} A_{\epsilon_{n+1}} e^{\beta\mathbf{H}_\beta^\omega} \dots A_{\epsilon_1} e^{\beta\mathbf{H}_\beta^\omega} A_{\epsilon_0} \delta_y(x) \leq C \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{d/2} e^{\frac{Cn}{\beta}} A_{\epsilon_{n+1}}(x) A_{\epsilon_0}(y) e^{-\beta\delta} \\ \times \sup_{x_0 \in \Omega_{\epsilon_0}, x_1 \in \Omega_{\epsilon_1}} J^1(x_0, x_1)^{-1/2} \dots \sup_{x_{n-1} \in \Omega_{\epsilon_{n-1}}, x_n \in \Omega_{\epsilon_n}} J^1(x_{n-1}, x_n)^{-1/2} \\ \leq C e^{\frac{C(n+1)}{\beta}} A_{\epsilon_{n+1}}(x) A_{\epsilon_0}(y) \sup_{x_0 \in \Omega_{\epsilon_0}, x_1 \in \Omega_{\epsilon_1}} J^1(x_0, x_1)^{-1/2} \dots \sup_{x_n \in \Omega_{\epsilon_n}, x_{n+1} \in \Omega_{\epsilon_{n+1}}} J^1(x_n, x_{n+1})^{-1/2} \end{aligned}$$



ce qui termine la preuve du lemme 3.22, donc de la proposition 3.21

On peut généraliser la borne supérieure de la proposition 3.21 en remplaçant le temps 1 par n'importe quel entier donné  $N$ . On introduit pour cela la notation

$$J^{(N),1}(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N) = \inf \left\{ J^{\gamma,N}(x, y), x \in \Omega_{\epsilon_0}, y \in \Omega_{\epsilon_N}, \right. \\ \left. |H(\gamma)| \leq 4\delta, \gamma(k) \in \Omega_{\epsilon_k} \text{ pour tout } k \in [[0, N]] \right\}.$$

Si ce dernier ensemble est vide, on attribue une valeur arbitraire, supérieure à 1, à  $J^{(N),1}(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N)$ . Pour un cylindre  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{nN}]$ , on note

$$J^{(N),n}(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{nN}) = J^{(N),1}(\epsilon_0, \dots, \epsilon_N) J^{(N),1}(\epsilon_N, \dots, \epsilon_{2N}) \dots J^{(N),1}(\epsilon_{(n-1)N}, \dots, \epsilon_{nN}).$$

On démontre, comme précédemment,

**Proposition 3.24.** *Soit  $N$  un entier donné. On a pour tout cylindre*

$$\nu_{\beta}^{\Sigma}([\epsilon_0, \dots, \epsilon_{nN}]) \leq C(\beta) J^{(N),n}(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{nN})^{-1/2} e^{\frac{CnN}{\beta}} C^N$$

où  $C$  est un réel positif et  $N \leq n$  est le nombre de fois où le cylindre cesse d'être optimal.

Notons qu'à la limite  $\beta \rightarrow +\infty$ , la mesure  $\nu_{\beta}^{\Sigma}$  ne charge que les cylindres optimaux, et que l'espérance de  $\mathcal{N}$  sous  $\nu_{\beta}^{\Sigma}$  est d'ordre  $o(n)$ .

La borne inférieure suivante est démontrée dans l'article [A04] (Lemme 3.2.10) :

**Proposition 3.25.** *Soit  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{nN-1}]$  un cylindre tel que l'ensemble  $P_{\epsilon_0} \cap \dots \cap \phi_{EL}^{-(n-1)} P_{\epsilon_{nN-1}}$  contienne un vecteur  $(x, v)$  dans l'ensemble de Mather  $\tilde{\mathcal{M}}$ .*

*Soit  $B > 0$  arbitraire. Appelons  $I(x, v)$  l'ensemble des temps entiers  $0 \leq k \leq nN - 1$  tels que  $\phi_{EL}^k(x, v)$  soit à distance au plus  $2B\beta^{-1/2}$  du bord de  $P_{\epsilon_k}$ .*

*Alors il existe une constante  $K(B)$ , dépendant de  $B$ , un réel  $\rho > 0$  ne dépendant pas de  $B$ , et un réel  $C^*(\beta) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{d/2} \min \psi_{\beta} \min \psi_{\beta}^* > 0$  dépendant de  $\beta$  — mais tous indépendants de  $n$  — tels que*

$$\nu_{\beta}^{\Sigma}([\epsilon_0, \dots, \epsilon_{nN-1}]) \geq C^*(\beta) e^{-\beta\varepsilon} K(B)^{\sharp I(x,v)} (1 - e^{-\rho^2 B})^{nN} \\ \left\{ J^{(N-1),1}(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{N-1}) + \varepsilon \right\}^{-1/2} \left\{ J^{(N-1),1}(\epsilon_N, \dots, \epsilon_{2N-1}) + \varepsilon \right\}^{-1/2} \\ \dots \left\{ J^{(N-1),1}(\epsilon_{nN}, \dots, \epsilon_{nN-1}) + \varepsilon \right\}^{-1/2}$$

où  $\varepsilon$  est une borne supérieure sur le diamètre des  $P_i$ .

Reprenons maintenant l'inégalité (3.46). On ne touche pas au premier terme de chaque membre, qui est le terme d'entropie. Dans les termes restant, on insère les résultats des propositions 3.24 et 3.25, qui permettent d'estimer inférieurement et supérieurement  $\log \nu_\beta^\Sigma$  en fonction du jacobien  $J^{(N)}$  pour  $N$  donné. On divise les deux côtés de l'inégalité par  $n$ , on fait ensuite tendre, successivement,  $n$  vers  $+\infty$ ,  $\beta$  vers  $+\infty$ ,  $\varepsilon = \text{diam}(P)$  vers 0 et  $N$  vers  $+\infty$ . Lors de ces passages à la limite successifs, le premier terme de chaque membre de (3.46) donnera l'entropie de Kolmogorov–Sinai de  $\nu$  (respectivement  $\nu_\infty$ ). Les exposants de Lyapunov apparaissent dans les termes restant, car on montre, lors du passage à la limite  $N \rightarrow +\infty$ , que

$$\frac{\log J^{\gamma, N}(\gamma(0), \gamma(N))}{N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^d \lambda_j^+(\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$$

si  $\gamma$  est une courbe globalement minimisante. Ceci conclut la preuve de l'inégalité (3.41) et donc du théorème 3.17.

## Annexe : définition de l'entropie d'un système dynamique.

**Entropie topologique d'un système dynamique.** Soit  $(\mathcal{E}, d)$  un espace métrique compact, et  $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une transformation continue. Pour tout  $n > 0$ , on définit la distance

$$d_n^T(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0 \leq m \leq n} d(T^m x, T^m y).$$

Étant donné  $r > 0$ , appelons  $N_T(r, n)$  le cardinal minimal d'un recouvrement de  $\mathcal{E}$  par des boules de rayon  $r$  pour la distance  $d_n^T$ . L'entropie topologique du système  $(\mathcal{E}, T)$  est

$$h_{\text{top}}(\mathcal{E}, T) = \lim_{r \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_T(r, n).$$

Souvent, il n'est pas nécessaire de prendre la limite  $r \rightarrow 0$ : pour un système expansif [KH], il existe  $r_0 > 0$  tel que, pour tout  $0 < r \leq r_0$ , l'entropie topologique vaille directement  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N_T(r, n)$ .

**Entropie métrique.** Soit  $\mu$  une mesure de probabilité  $T$ -invariante sur  $\mathcal{E}$ .

Soit  $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_n)$  une partition finie mesurable de  $\mathcal{E}$ , on définit l'entropie de la mesure  $\mu$  relativement à la partition  $\mathcal{P}$  comme

$$h_{\mathcal{P}}(\mu) = - \sum \mu(P_i) \log \mu(P_i). \quad (3.47)$$

Étant données  $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_n)$  et  $\mathcal{Q} = (Q_1, \dots, Q_m)$  deux partitions of  $\mathcal{E}$ , on définit la nouvelle partition  $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ , composée des ensembles  $P_i \cap Q_j$ .

L'entropie a la propriété de *sous-additivité* suivante :

$$h_{\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}}(\mu) \leq h_{\mathcal{P}}(\mu) + h_{\mathcal{Q}}(\mu). \quad (3.48)$$

En itérant l'application  $T$ , on obtient une série de partitions

$$\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P} \vee T^{-1}\mathcal{P} \vee \dots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{P}, \quad (3.49)$$

pour  $n \geq 1$ . Un élément de la partition  $\mathcal{P}^{(n)}$  est de la forme,  $P_{\epsilon_0} \cap T^{-1}P_{\epsilon_1} \dots \cap T^{-(n-1)}P_{\epsilon_{n-1}}$ , il s'agit donc de points dont les trajectoires visitent successivement  $P_{\epsilon_0}, P_{\epsilon_1}, \dots, P_{\epsilon_{n-1}}$  jusqu'à l'instant  $n - 1$ . La propriété de sous-additivité implique que  $h_{\mathcal{P}^{(n+m)}}(\mu) \leq h_{\mathcal{P}^{(n)}}(\mu) + h_{T^{-n}\mathcal{P}^{(m)}}(\mu)$ . Si la mesure  $\mu$  est  $T$ -invariante, on a  $h_{T^{-n}\mathcal{P}^{(m)}}(\mu) = h_{\mathcal{P}^{(m)}}(\mu)$ , d'où

$$h_{\mathcal{P}^{(n+m)}}(\mu) \leq h_{\mathcal{P}^{(n)}}(\mu) + h_{\mathcal{P}^{(m)}}(\mu). \quad (3.50)$$

Cette sous-additivité de la suite  $\{h_{\mathcal{P}^{(n)}}(\mu)\}_{n \geq 1}$  implique l'existence de la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h_{\mathcal{P}^{(n)}}(\mu) = \inf_{n \in \mathbb{N}_*} \frac{1}{n} h_{\mathcal{P}^{(n)}}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} h_{\mathcal{P}}(\mu, T), \quad (3.51)$$

appelée entropie de la mesure  $\mu$  sous l'action de  $T$ , relativement à la partition  $\mathcal{P}$ . L'entropie de Kolmogorov–Sinai du système  $(X, T, \mu)$ , ou entropie métrique, que nous noterons  $h_{KS}(\mu, T)$  ou simplement  $h_{KS}(\mu)$ , est le supremum des quantités  $h_{\mathcal{P}}(\mu, T)$  pris sur toutes les partitions mesurables  $\mathcal{P}$ . Bien souvent, et en particulier pour les systèmes Anosov, ce supremum est atteint pour un partition bien choisie, commune à toutes les mesures  $\mu$ . L'entropie est évidemment positive. Elle peut a priori être infinie, mais on peut montrer qu'elle est bornée supérieurement dans le cas où  $\mathcal{E}$  est une variété de dimension finie et  $T$  est lipschitzienne. De manière non complètement évidente, l'entropie métrique est une fonctionnelle affine sur le convexe compact des mesures de probabilité invariantes.

Le théorème de Shannon–MacMillan donne une interprétation plus intuitive de l'entropie : pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , on a

$$\frac{1}{n} \log \mu(\mathcal{P}^{(n)}(x)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -h_{KS}(\mu^x, \mathcal{P})$$

où l'on note  $\mathcal{P}^{(n)}(x)$  l'élément de la partition  $\mathcal{P}^{(n)}$  qui contient  $x$ , et  $\mu^x = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x}$  est la composante ergodique de  $x$ .

# Chapitre 4

## Le cas réel.

### 4.1 Ergodicité quantique.

Soit  $X$  une variété riemannienne connexe compacte; notons  $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$  les valeurs propres du laplacien, et  $(\psi_j)$  une base orthonormée de fonctions propres,  $-\Delta \psi_j = \lambda_j \psi_j$ . On note  $\mu_j$  la mesure semiclassique associée à  $\psi_j$ , pour le paramètre semiclassique  $\hbar_j = \lambda_j^{-1/2}$ . Il s'agit ici de décrire le comportement asymptotique des  $\psi_j$  ( $j \rightarrow +\infty$ ) en étudiant les limites faibles des mesures  $\mu_j$ . Les résultats du paragraphe 2.6 montrent que toute limite faible des  $\mu_j$  est une mesure de probabilité portée par le fibré unitaire cotangent  $S^*X$ , et invariante par le flot géodésique noté  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ .

**Théorème 4.1.** (*Théorème de Snirelman [Sn74]*) *Supposons que l'action du flot géodésique sur  $S^*X$  soit ergodique vis-à-vis de la mesure de Liouville normalisée  $L$ . Alors il existe un sous-ensemble  $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$  de densité 1, tel que*

$$\mu_j \xrightarrow{j \in \mathcal{S}} L.$$

Le fait que  $\mathcal{S}$  soit de densité 1 signifie que

$$\lim_{E \rightarrow +\infty} \frac{\#\{j \in \mathcal{S}, \lambda_j \leq E\}}{\#\{j \in \mathbb{N}, \lambda_j \leq E\}} = 1.$$

L'article [Sn74] décrit la preuve dans ses grandes lignes, sans donner de détails techniques, et en particulier sans construire explicitement de quantification positive. Zelditch [Ze87] a donné une preuve complète pour une surface compacte de courbure constante  $-1$ . De la dynamique, il n'utilise que le caractère ergodique : l'hypothèse de courbure négative constante n'intervient que pour fournir un calcul pseudodifférentiel hyperbolique [Ze86] basé sur la transformée de Fourier–Helgason. Un peu plus tard, Colin de Verdière [CdV85] a proposé une preuve valable en toute généralité; il construit une quantification positive en se ramenant, par un découpage en cartes

(2.6), au cas de  $\mathbb{R}^d$ , et donc sans avoir besoin d'une structure algébrique globale du cotangent. On peut rappeler rapidement l'argument [Ze96]. Pour tout  $a \in C_0^\infty(T^*X)$ , on montre d'abord, sans aucune hypothèse sur la dynamique, que

$$\sum_{j, \lambda_j \leq E} \int a d\mu_j \underset{E \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b_d}{(2\pi)^d} \text{Vol}(X) \int_{S^*X} a dL \times E^{d/2}. \quad (4.1)$$

Ce résultat se démontre en calculant de deux manières la trace de  $\text{Op}_h \left( a(x, \frac{\xi}{|\xi|}) \chi(x, \xi) \right)$ , où  $\chi$  est localisé dans un voisinage de  $S^*X$  : la trace s'exprime comme somme spectrale ou comme intégrale du noyau sur la diagonale. Le comportement asymptotique de cette intégrale s'évalue par la méthode de la phase stationnaire. On déduit de (4.1) l'asymptotique de Weyl :

$$N(E) = \#\{j, \lambda_j \leq E\} \sim \frac{b_d}{(2\pi)^d} \text{Vol}(X) E^{d/2}$$

( $b_d$  est ici le volume de la boule unité euclidienne de dimension  $d$ ). On a donc convergence au sens de Cesaro,

$$\frac{1}{N(E)} \sum_{j, \lambda_j \leq E} \int a d\mu_j \xrightarrow{E \rightarrow +\infty} \int_{S^*X} a dL.$$

L'hypothèse d'ergodicité permet de faire mieux :

$$\frac{1}{N(E)} \sum_{j, \lambda_j \leq E} \left| \int a d\mu_j - \int_{S^*X} a dL \right|^2 \xrightarrow{E \rightarrow +\infty} 0. \quad (4.2)$$

En effet, en utilisant le fait que les  $\mu_j$  deviennent asymptotiquement invariante par le flot géodésique quand  $j \rightarrow +\infty$ , on peut écrire pour tout  $T$  donné,

$$\begin{aligned} & \limsup \frac{1}{N(E)} \sum_{j, \lambda_j \leq E} \left| \int a d\mu_j - \int_{S^*X} a dL \right|^2 \\ &= \limsup \frac{1}{N(E)} \sum_{j, \lambda_j \leq E} \left| \int M^T a d\mu_j - \int_{S^*X} a dL \right|^2 \\ &\leq \limsup \frac{1}{N(E)} \sum_{j, \lambda_j \leq E} \mu_j \left( (M^T a - \int_{S^*X} a dL)^2 \right) \\ &= L \left( (M^T a - \int_{S^*X} a dL)^2 \right). \end{aligned}$$

On a noté  $M^T a = T^{-1} \int_0^T a \circ g^t dt$  la moyenne temporelle de  $a$  à l'instant  $T$ . On a utilisé le fait que  $\mu_j$  est positive pour écrire l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Enfin, pour passer à la dernière ligne, on a utilisé la convergence

des  $\mu_j$  au sens de Cesaro. Si l'on fait finalement tendre  $T$  vers  $+\infty$  dans la dernière ligne, l'ergodicité signifie que

$$L \left( (M^T a - \int_{S^*X} a dL)^2 \right) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0;$$

ce qui prouve (4.2).

**Lemme 4.2.** *Soit  $(a_n)$  une suite de réels positifs. Si  $(a_n)$  tend vers 0 au sens de Cesaro, alors il existe  $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$  de densité 1 telle que  $a_n \xrightarrow[n \in \mathcal{S}]{} 0$ .*

On en déduit le théorème de Snirelman, pour un flot géodésique ergodique. Le résultat s'étend aux hamiltoniens de la forme  $H(x, p) = \frac{\|p\|^2}{2} + V(x)$  [HelMR87], aux billards ergodiques [GL93, ZeZw96]; ainsi qu'à certains systèmes dynamiques symplectiques à temps discret sur le tore  $\mathbb{T}^d$ , convenablement quantifiés [BouDB96].

Il est naturel de se demander, dans des cas concrets, s'il est vraiment nécessaire d'extraire une sous-suite dans le théorème 4.1 : pourrait-il y avoir des sous-suites capricieuses qui convergent vers une mesure autre que celle de Liouville, par exemple vers une mesure portée par une union finie de géodésiques fermées ? Pour une variété compacte de courbure sectionnelle strictement négative, rappelons que les géodésiques périodiques sont en quantité dénombrable et sont denses dans le fibré cotangent. Intuitivement, on pourrait espérer démontrer, par un argument purement local, que les fonctions propres ne peuvent se concentrer sur une géodésique fermée instable. Colin de Verdière et Parisse ont cependant construit un exemple (complètement intégrable) pour lequel ce phénomène se produit [CdVP94]. Heller [Hell89, Sa95] a simulé numériquement les fonctions propres du laplacien de Dirichlet, pour le billard de Bunimovich, en forme de stade. Le flot du billard est ergodique, mais Heller constate que certaines fonctions propres semblent localisées sur les trajectoires qui rebondissent d'une tribune présidentielle à l'autre (*bouncing ball modes*); d'autre part, et de manière plus surprenante, certaines fonctions propres présentent des "balafres" (*scars*) situées au voisinage d'orbites périodiques instables<sup>1</sup>. Si l'on espère prouver l'absence de balafres, il faudra donc utiliser des propriétés globales fortes du flot ou de la géométrie : hyperbolicité uniforme, courbure strictement négative...

Rudnick et Sarnak [RudSa94, Sa95] définissent une notion de "balafre persistante" (*strong scar*) comme notion asymptotique quand la valeur propre  $\lambda_j$  tend vers l'infini : on dit que la suite  $(\psi_j)$  présente une balafre persistante sur l'ensemble  $\Lambda \subset X$  si la famille de mesures de probabilité  $(|\psi_j(z)|^2 dz)$  a une valeur d'adhérence faible  $\mu$ , dont la composante singulière est supportée par  $\Lambda$ . Rudnick et Sarnak se penchent sur le cas de

<sup>1</sup>Heller définit ces balafres comme ensemble de points où  $|\psi_j(z)|^2$  diffère "de manière significative" de sa valeur moyenne.

variétés  $X$  arithmétiques, de dimension 2 ou 3 – ces variétés ont une courbure sectionnelle constante  $-1$ , elles apparaissent comme quotient de  $\mathbb{H}^2$  ou  $\mathbb{H}^3$  par un sous-groupe discret, cocompact, défini à partir d'un ordre d'une algèbre de quaternions à division sur  $\mathbb{Q}$ . Ces variétés possèdent une famille dénombrable d'opérateurs dits de Hecke ( $T_m$ ), auto-adjoints sur  $L^2(X)$ , qui commutent entre eux et avec le laplacien. On peut donc considérer une base orthonormée de fonctions propres communes à tous ces opérateurs. Pour une telle base, Rudnick et Sarnak montrent grâce à la théorie des nombres qu'il ne peut pas y avoir de balafre persistante sur une union finie de géodésiques fermées (voir aussi [Wol01]).

Encouragés par ce résultat, ils formulent la conjecture d'*unique ergodicité quantique*,

**Conjecture 4.3.** [RudSa94, Sa95]. *Soit  $X$  une variété compacte à courbure strictement négative,  $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$  les valeurs propres du laplacien, et  $(\psi_j)$  une base orthonormée de fonctions propres,  $-\Delta\psi_j = \lambda_j\psi_j$ . Soient  $(\mu_j)$  les mesures semiclassiques associées, alors la suite  $(\mu_j)$  converge faiblement vers la mesure de Liouville sur le fibré unitaire cotangent.*

Voici le théorème d'*unique ergodicité quantique arithmétique* démontré par Lindenstrauss :

**Théorème 4.4.** [Li03] *Soit  $X$  une variété arithmétique de congruence, de dimension 2, et  $(\psi_j)$  une base de fonctions propres communes au laplacien et aux opérateurs de Hecke. Alors  $\mu_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} L$ .*

Si le spectre du laplacien présente des multiplicités, l'existence ou non de sous-suites exceptionnelles dans le théorème 4.1 pourrait dépendre du choix de la base de fonctions propres. Le théorème de Lindenstrauss concerne une base commune au laplacien et aux opérateurs de Hecke; il est de l'avis général que cette hypothèse n'est pas très restrictive, car le spectre devrait être simple ou de multiplicité bornée. La méthode utilisée par Lindenstrauss est cependant tout à fait spécifique aux variétés arithmétiques.

## 4.2 Des contre-exemples.

Dans cette section, on discutera la validité de la conjecture 4.3 pour deux modèles simples : les automorphismes linéaires hyperboliques du tore, puis l'application du boulanger. Du point de vue classique, ce sont des applications symplectiques du tore  $\mathbb{T}^2$  dans lui-même, deux exemples simples mais fondamentaux de systèmes chaotiques. On quantifie les automorphismes linéaires grâce au formalisme de Weyl, l'application du boulanger par le procédé de Walsh. Ces modèles sont suffisamment simples pour qu'on ait accès à certaines fonctions propres : on peut ainsi exhiber des contre-exemples à l'énoncé 4.3. Les contre-exemples dans le cas du boulanger paraîtront particulièrement triviaux; ils sont cependant instructifs, parce

qu'ils nous imposent de comprendre pourquoi de tels exemples ne pourraient pas exister pour un flot géodésique, si l'on croit en la conjecture 4.3.

Une remarque s'impose à propos des contre-exemples décrits dans cette section : les valeurs propres correspondantes ont une multiplicité exceptionnellement grande. La meilleure borne connue pour la multiplicité du spectre du laplacien sur une variété à courbure négative est celle obtenue par Bérard [Bera77]; pour le paramètre semiclassique  $\hbar$  la borne est d'ordre  $\hbar^{-(d-1)}|\log \hbar|^{-1}$ . Il semble qu'elle soit loin d'être optimale pour le laplacien (les plus optimistes s'attendent à ce que la multiplicité soit uniformément bornée), alors que pour les modèles présentés ici cette borne est atteinte. Cette multiplicité élevée est rendue responsable de l'échec de la conjecture 4.3 : une grande multiplicité donne beaucoup de souplesse dans le choix des fonctions propres et expliquerait l'apparition de phénomènes inattendus. Il serait bien sûr souhaitable d'exprimer par un énoncé mathématique ce lien constaté entre multiplicité et échec de l'unique ergodicité quantique. Si l'on réduit la multiplicité en rajoutant des hypothèses de type arithmétique sur les fonctions propres, 4.3 est vraie [KurRud00, Li03]. Par ailleurs, on s'attend à ce que les multiplicités exceptionnelles disparaissent par perturbation et soient donc des situations non génériques.

#### 4.2.1 Le chat.

**Le modèle.** *Cat-map* ou *chat d'Arnold* est le nom fréquemment donné aux automorphismes linéaires hyperboliques du tore. Du point de vue classique, il s'agit d'étudier l'action d'une matrice de  $SL(2, \mathbb{R})$  de la forme

$$A = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \frac{a}{b} \\ n_3 \frac{b}{a} & n_4 \end{pmatrix},$$

( $n_i \in \mathbb{Z}$ ), supposée hyperbolique ( $|Tr A| > 2$ ), sur le tore  $\mathbb{T}^2 = \Gamma \backslash \mathbb{R}^2$  où  $\Gamma$  est le réseau  $\{(na, nb), n, m \in \mathbb{Z}\}$ . Rappelons les principales propriétés de l'action de  $A$  (énoncées pour simplifier dans le cas  $a = b = 1$ ) :

- a) Dans  $\mathbb{R}^2$ , la matrice  $A$  a deux vecteurs propres  $v_+, v_-$  de pente irrationnelle, associés respectivement à deux valeurs propres réelles  $\varepsilon e^\lambda$ ,  $\varepsilon e^{-\lambda}$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ,  $\lambda > 0$ ).
- b) Ceci conduit à la *propriété d'Anosov* pour l'action de  $A$  sur  $\mathbb{T}^2$  : soient  $x$  et  $y$  tels que  $y \in (x + \mathbb{R}v_-) \bmod \Gamma$ , alors il existe  $C > 0$  tel qu'on ait  $d_{\mathbb{T}^2}(A^n x, A^n y) \leq C e^{-n\lambda}$  pour tout  $n > 0$ . De même, si  $x$  et  $y$  sont tels que  $y \in (x + \mathbb{R}v_+) \bmod \Gamma$ , alors on a  $d_{\mathbb{T}^2}(A^{-n} x, A^{-n} y) \leq C e^{-n\lambda}$  pour tout  $n > 0$ . L'image de  $(x + \mathbb{R}v_-)$  dans  $\mathbb{T}^2$  s'appelle la variété stable (ou feuille stable) de  $x$ , l'image de  $(x + \mathbb{R}v_+)$  est la variété instable de  $x$ . On obtient ainsi deux feuilletages transverses du tore en feuilles stables et instables. Le nombre  $\lambda > 0$  s'appelle l'exposant de Lyapunov, il reflète la sensibilité du système à la donnée initiale.



- c) Les vecteurs  $v_+, v_-$  étant de pente irrationnelle, chaque variété stable et instable est dense dans  $\mathbb{T}^2$ . On a en fait un phénomène équirépartition à la Kronecker–Weyl : si l’on note  $L$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{T}^2$ , on a pour tout ouvert  $\Omega \subset \mathbb{T}^2$ ,

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}_\Omega(x + tv_+) dt = L(\Omega),$$

uniformément en  $x$ .

- d) Cette dernière propriété est directement responsable de la propriété de mélange : pour tous sous-ensembles  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{T}^2$  mesurables,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L(\Omega_1 \cap A^{-n}\Omega_2) = L(\Omega_1)L(\Omega_2).$$

Cette propriété est plus forte que l’ergodicité. D’un point de vue probabiliste,  $\Omega_1$  et  $A^{-n}\Omega_2$  deviennent asymptotiquement indépendants, ce qui reflète une imprévisibilité de l’évolution du système en fonction des conditions initiales.

- e) La propriété de mélange implique l’existence d’un ensemble résiduel d’orbites denses. On peut aussi voir facilement que les points périodiques forment un ensemble dénombrable dense : ce sont ici les points à coordonnées rationnelles. Le nombre de points de période  $N$  est  $\det(A^N - 1) \sim e^{\lambda N}$ .

La question de la quantification d’applications linéaires symplectiques du tore a été étudiée par Hannay–Berry, Balasz–Voros, Degli Esposti, De Bièvre–Degli Esposti–Giachetti [HB80, BaVor89, DE93, DBDEG94]; nous résumons ici la construction simple et intuitive, donnée par Bouzouina–De Bièvre [BouDB96], qui consiste à périodiser la quantification de Weyl usuelle de  $\mathbb{R}^2$  (on utilisera les notations du paragraphe 1.4). Dans le formalisme de Weyl, l’action de la matrice  $A$  sur  $\mathbb{R}^2$  est quantifiée grâce à la représentation métaplectique, qui associe à  $A$  un opérateur  $M(A)$  sur  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , unitaire sur  $L^2(\mathbb{R})$ . Pour passer au tore, Bouzouina et De Bièvre proposent simplement de périodiser la quantification de Weyl en position et en impulsion : on considère donc des espaces de distributions qui sont  $a\mathbb{Z}$ -périodiques et dont la  $\hbar$ -transformée de Fourier est  $b\mathbb{Z}$ -périodique (à une phase près). Étant donné  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2) \in \mathbb{R}^2 / (2\pi a^{-1}\mathbb{Z} \times 2\pi b^{-1}\mathbb{Z})$  on définit ainsi

$$\mathcal{S}'(\kappa, \hbar) = \left\{ \psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \rho_\hbar(0, a, 0)\psi = e^{-i\kappa_1 a}\psi, \rho_\hbar(b, 0, 0)\psi = e^{i\kappa_2 b}\psi \right\}.$$

On vérifie facilement que cet espace est non vide si et seulement s’il existe un entier  $N$  tel que  $2\pi\hbar N = ab$ , et il est alors de dimension  $N$ . Il est stable par l’action du groupe de Weyl–Heisenberg discret  $\{(p, q, \phi), q \in \frac{a}{N}\mathbb{Z}, p \in \frac{b}{N}\mathbb{Z}, \phi \in \mathbb{R}\}$  via la représentation  $\rho_\hbar$ . Cet espace peut-être muni d’une unique

structure Hilbertienne qui rende unitaire cette représentation du groupe de Weyl–Heisenberg discret. L’espace de Hilbert obtenu sera noté  $\mathcal{H}_N(\kappa)$  : les  $\mathcal{H}_N(\kappa)$ , pour  $\kappa$  variant dans  $\mathbb{R}^2/(2\pi a^{-1}\mathbb{Z} \times 2\pi b^{-1}\mathbb{Z})$ , sont en fait les composantes irréductibles de l’action du groupe de Weyl–Heisenberg discret sur  $L^2(\mathbb{R})$ .

La quantification de Weyl d’une observable  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$  est naturellement définie en posant

$$\text{Op}^W(f) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} \hat{f}_{n,m} U\left(n \frac{b}{N}, m \frac{a}{N}\right)$$

si

$$f(q, p) = \sum \hat{f}_{n,m} e^{i\left(\frac{2\pi}{a}nq - \frac{2\pi}{b}mp\right)}$$

est le développement de Fourier de  $f$ .

Bouzouina-De Bièvre montrent que pour tout  $N$ , il existe un choix de  $\kappa$  tel que  $M(A)\mathcal{H}_N(\kappa) \subset \mathcal{H}_N(\kappa)$  : on peut, par exemple, prendre  $\kappa = (0, 0)$  si  $N$  est pair et  $\kappa = (\pi/b, \pi/a)$  si  $N$  est impair. On notera  $M_\kappa(A)$  la restriction de  $M(A)$  à  $\mathcal{H}_N(\kappa)$ . Le fait que la quantification de Weyl sur  $\mathbb{R}^2$  satisfasse un théorème d’Egorov exact pour les flots hamiltoniens linéaires sur  $\mathbb{R}^2$  (1.23) passe au quotient, on a en effet  $\text{Op}_\kappa^W(f \circ A) = M_\kappa(A)^* \text{Op}_\kappa^W(f) M_\kappa(A)$ . On peut aussi construire une quantification Anti-Wick positive (par périodisation de la construction dans  $\mathbb{R}^2$ ) et montrer qu’elle est asymptotiquement équivalente à la quantification de Weyl. Tous les ingrédients du théorème de Snirelman étant réunis, Bouzouina–De Bièvre démontrent alors :

*Appelons  $\lambda_1^N, \dots, \lambda_N^N$  les valeurs propres de  $M_\kappa(A)$  sur  $\mathcal{H}_N(\kappa)$ , et  $\psi_1^N, \dots, \psi_N^N$  une base orthonormée associée. Alors il existe  $E(N) \subset \{1, \dots, N\}$  tel que  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sharp E(N)}{N} = 1$ , tel que, pour tout  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty, j \in E(N)} \langle \phi_j^N, \text{Op}_\kappa^W(f) \psi_j^N \rangle = \int_{\mathbb{T}^2} f(q, p) \frac{dpdq}{ab}.$$

**Période de  $M_\kappa(A)$ .** Pour  $N$  donné, le comportement de la dynamique quantique est loin de refléter celui de la dynamique classique;  $M_\kappa(A)$  est en effet périodique. Le comportement chaotique ne se révèle donc qu’à la limite  $N \rightarrow +\infty$  ( $\hbar \rightarrow 0$ ).

Il existe nécessairement  $k > 0$  tel que  $A^k \equiv I \pmod{N}$ . On peut alors montrer que  $M_\kappa(A)^{2k}$  commute avec tous les  $U(p, q)$  sur  $\mathcal{H}_N(\kappa)$ , ce qui implique par le lemme de Schur que  $M_\kappa(A)^{2k} = e^{i\phi} I$ . On appellera période de  $M_\kappa(A)$  sur  $\mathcal{H}_N(\kappa)$ , notée  $P(N)$ , l’infimum des  $k$  tels que  $M_\kappa(A)^k = e^{i\phi} I$  sur  $\mathcal{H}_N(\kappa)$ .

Le comportement de  $P(N)$  en fonction de  $N$  est complètement erratique : on montre qu'il existe  $C$  tel que  $\frac{2}{\lambda} \log N - C \leq P(N) \leq CN \log \log N$  [Kea90], et que  $P(N) \geq \sqrt{N}$  pour la plupart des  $N$  [KurRud00]. Bonechi–De Bièvre et Faure–Nonnenmacher–De Bièvre [BDB00, FNDB03] montrent l'existence d'une sous-suite  $N_k$  telle que  $P(N_k) = \frac{2}{\lambda} \log N_k + O(1)$ . Ce sont ces périodes exceptionnellement courtes qui sont à l'origine du contre-exemple qui vient.

**Un contre-exemple.** La construction du contre-exemple se base sur l'étude de l'évolution temporelle d'un état cohérent [BDB00, FNDB03]. Dans  $\mathbb{R}^2$ , rappelons que l'état cohérent  $e_{(0,0)}$  est l'état gaussien centré en 0, de variance  $\hbar$ , et dont la transformée de Fourier est elle aussi centrée en 0, de variance  $\hbar$  (paragraphe 2.6). Dans l'espace des phases, cet état est localisé en  $(q, p) = (0, 0)$  autant que le permet le principe d'incertitude de Heisenberg : il est essentiellement supporté dans une boule de rayon  $\sqrt{\hbar}$  autour de  $(0, 0)$ . Après évolution, l'état  $M(A)^n e_{(0,0)}$  est encore gaussien, essentiellement localisé, dans l'espace des phases, dans une ellipse, toujours centrée en  $(0, 0)$ , mais allongée de  $\sqrt{\hbar} e^{\lambda n}$  dans la direction instable et  $\sqrt{\hbar} e^{-\lambda n}$  dans la direction stable. On appelle  $T_{Ehr} = \frac{|\log \hbar|}{\lambda}$  le *temps d'Ehrenfest* : pour  $n \leq (1 - \varepsilon) \frac{T_{Ehr}}{2}$ , ( $\varepsilon > 0$ ), l'état  $M(A)^n e_{(0,0)}$  reste localisé au voisinage de  $(0, 0)$ . Au contraire, pour  $n \geq (1 + \varepsilon) \frac{T_{Ehr}}{2}$ , l'état  $M(A)^n e_{(0,0)}$  s'allonge infiniment le long de la variété instable de  $(0, 0)$ .

Dans  $\mathcal{H}_N(\kappa)$ , l'état cohérent  $e_{\kappa, (0,0)}$  est défini par périodisation adéquate de  $e_{(0,0)}$  en position et en impulsion; et  $M_\kappa(A)^n e_{\kappa, (0,0)}$  est la périodisation de l'état gaussien  $M(A)^n e_{(0,0)}$ . Pour  $n \leq (1 - \varepsilon) \frac{T_{Ehr}}{2}$ , l'état  $M_\kappa(A)^n e_{\kappa, (0,0)}$  est localisé au voisinage de  $(0, 0)$  dans le tore. Mais pour  $n \geq (1 + \varepsilon) \frac{T_{Ehr}}{2}$ , son "support", essentiellement un long morceau de variété instable, commence à s'enrouler autour du tore et à s'équidistribuer. Pour des temps trop grands commencent à se produire des autointerférences, effet purement quantique difficile à contrôler : on ne peut plus donner que des informations grossières sur l'état  $M_\kappa(A)^n e_{\kappa, (0,0)}$ . Pour les temps intermédiaires, cependant, l'image classique reste correcte, et Bonechi–De Bièvre démontrent [BDB00] :

Pour toute fonction  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\langle e_{\kappa, (0,0)}, M_\kappa(A)^{-n} \text{Op}_\kappa^W(f) M_\kappa(A)^n e_{\kappa, (0,0)} \rangle \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} f(0)$$

uniformément pour  $n \in \left[ -(1 - \varepsilon) \frac{T_{Ehr}}{2}, (1 - \varepsilon) \frac{T_{Ehr}}{2} \right]$ , et

$$\langle e_{\kappa, (0,0)}, M_\kappa(A)^{-n} \text{Op}_\kappa^W(f) M_\kappa(A)^n e_{\kappa, (0,0)} \rangle \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \int f dp dq$$

uniformément pour  $n \in \left[ (1 + \varepsilon) \frac{T_{Ehr}}{2}, (1 - \varepsilon) T_{Ehr} \right]$ . Dans [FNDB03] enfin, Faure–Nonnenmacher–De Bièvre considèrent un état de la forme  $\Phi =$

$\sum_{n=-T_{Ehr}}^{T_{Ehr}} e^{i\phi n} M_\kappa(A)^n e_{\kappa,(0,0)}$  (convenablement normalisé), où  $\phi$  est une phase quelconque, et il est démontré que

$$\langle \Phi, \text{Op}_\kappa^W(f)\Phi \rangle \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left( \int f dpdq + f(0) \right) \quad (4.3)$$

pour toute fonction  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ . L'état  $\Phi$  n'est pas un état propre, a priori. Cependant, pour les valeurs particulières  $N = N_k$  pour lesquelles la période  $P(N)$  est courte, on a  $M(A)^{P(N)} = e^{i\phi_N} I$  avec  $P(N) = 2T_{Ehr} + O(1)$ , et on obtient une véritable fonction propre en posant

$$\Phi = \sum_{n=-P(N)/2}^{P(N)/2} e^{-i\frac{\phi_N}{P(N)}n} M(A)_\kappa^n e_{\kappa,(0,0)}.$$

Cette suite de fonctions propres satisfait (4.3) et contredit donc l'unique ergodicité quantique.

On peut généraliser cette construction et montrer que

**Théorème 4.5.** [FNDB03] *Pour tout  $\beta \in [0, 1/2]$ , pour toute orbite périodique  $\gamma$ , il existe une suite  $(\psi_k)$  de fonctions propres de  $M_\kappa(A)$  sur  $\mathcal{H}_{N_k}(\kappa)$  telles que, pour toute fonction  $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ ,*

$$\langle \psi_k, \text{Op}_\kappa^W(f)\psi_k \rangle_{k \rightarrow +\infty} \rightarrow (1 - \beta) \int f dpdq + \beta \int f d\gamma.$$

On a noté  $d\gamma$  l'unique mesure de probabilité  $A$ -invariante portée par  $\gamma$ . Les résultats de [BDB03, FN04] montrent que  $\beta$  ne peut pas être arbitrairement grand :

**Théorème 4.6.** [FN04] *Soit  $\nu$  une mesure limite associée aux fonctions propres de  $M_\kappa(A)$  sur  $\mathcal{H}_{N_k}(\kappa)$ , quand  $N \rightarrow +\infty$ . Soit  $\nu = \nu_{ac} + \nu_{sc} + \nu_{pp}$  sa décomposition en parties absolument continue, singulière continue et purement ponctuelle. Alors  $\nu_{ac}(\mathbb{T}^2) \geq \nu_{pp}(\mathbb{T}^2)$ .*

Il s'ensuit que  $\beta$  ne peut pas être supérieur à  $\frac{1}{2}$  dans les contre-exemples construits.

## 4.2.2 Le boulanger.

Avec Stéphane Nonnenmacher [AN05], nous avons étudié un autre modèle, particulièrement simple, qui fournit des contre-exemples à la conjecture d'unique ergodicité quantique. Il s'agit de l'application du boulanger  $B : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ,

$$\forall (q, p) \in \mathbb{T}^2, \quad B(q, p) = \left( Dq \bmod 1, \frac{p + [Dq]}{D} \right) \in \mathbb{T}^2, \quad (4.4)$$

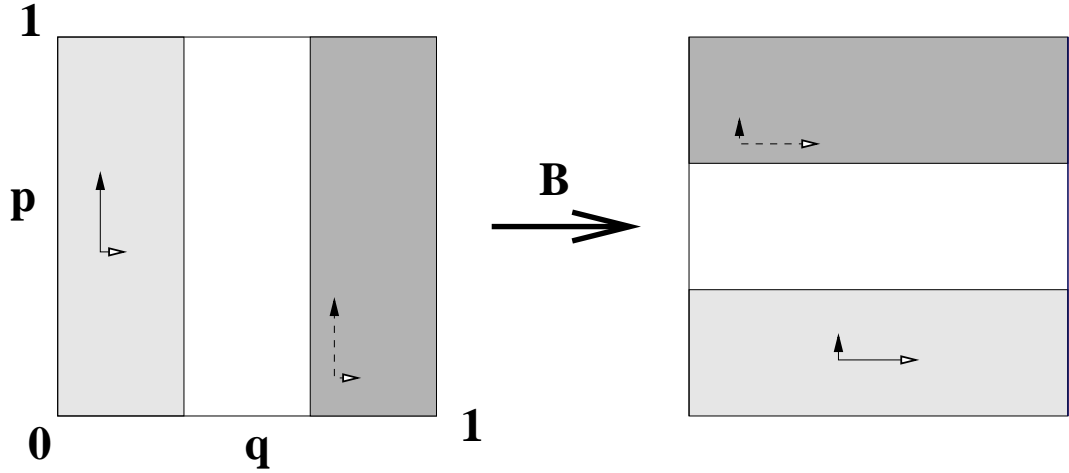


Figure 4.1: L’application du boulanger (4.4) pour  $D = 3$ . Les flèches indiquent la contraction verticale et la dilatation horizontale.

( $D$  est ici un entier), dont l’action est représentée schématiquement sur la figure 4.1 dans le cas  $D = 3$ . Cette application est affine par morceaux, symplectique et Anosov (les feuilles stables sont les verticales, les feuilles instables les horizontales) à ceci près qu’elle présente des discontinuités. Plusieurs auteurs [BaVor89, Sar90] ont quantifié cette application par le formalisme de Weyl : ce modèle souffre cependant des discontinuités de l’application  $B$ , qui entraînent lors de l’utilisation de la transformée de Fourier des phénomènes de “diffraction” difficiles à gérer. Comme dans l’article [NZw05], nous simplifions encore le cadre d’étude en utilisant la quantification de Walsh, où la transformée de Fourier est remplacée par la transformée de Walsh [Lif]. Ceci a pour effet de remplacer l’application (4.4) par sa version symbolique, l’application de décalage agissant (de manière continue !) sur  $\Sigma = \{0, \dots, D - 1\}^{\mathbb{Z}}$  :

Le développement  $D$ -adique fournit une application  $\Sigma \longrightarrow \mathbb{T}^2$  qui réalise naturellement une semiconjugaison entre le décalage (*shift*) et l’application du boulanger. Nous munissons l’espace symbolique  $\Sigma$  d’une distance ultramétrique qui rend cette semiconjugaison lipschitzienne. La mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{T}^2$  correspond à la mesure de Bernoulli uniforme sur  $\Sigma$ , plus précisément la mesure produit  $\prod(D^{-1} \sum_{j=0}^{D-1} \delta_j)$ . On ne décrira pas le modèle plus en détail : il suffit ici de signaler que le procédé de quantification de Walsh fournit pour tout  $h = D^{-k}$  un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_k$ , de dimension  $D^k$ , et un opérateur unitaire  $B_k$  sur  $\mathcal{H}_k$  qui quantifie  $B$ . À partir des “états cohérents de Walsh”, on peut définir une quantification Anti-Wick  $\text{Op}_k^+(a)$  pour les observables lipschitz sur  $\Sigma$ , avec la propriété

$$\|B_k^{-1} \text{Op}_k^+(a) B_k - \text{Op}_k^+(f \circ B)\| = O(\|f\|_{Lip} D^{-k/2}). \quad (4.5)$$

À tout état  $\psi \in \mathcal{H}_k$ , on associe sa mesure de Walsh-Husimi,

$$\mu_\psi^k : a \mapsto \langle \psi, \text{Op}_k^+(a)\psi \rangle,$$

mesure de probabilité sur  $\mathbb{T}^2$  qui décrit la localisation de  $\psi$  dans l'espace des phases. Le système classique étant ergodique, il satisfait l'énoncé du théorème de Snirelman pour les systèmes à temps discrets (paragraphe 4.2.1). Mais comme au paragraphe 4.2.1,  $B^k$  est périodique, avec une très courte période  $4k = 4 \frac{|\log h|}{\log D}$ . La conséquence immédiate de cette période logarithmique est la très grande dégénérescence des valeurs propres  $\{e^{2i\pi r/4k}, r = 0, \dots, 4k - 1\}$  : la multiplicité moyenne est de  $\frac{D^k}{4k}$ . Comme pour les automorphismes linéaires du tore, cette extrême dégénérescence donne la marge de manœuvre nécessaire pour construire des états propres qui se localisent partiellement sur une orbite périodique : la preuve du théorème 4.5 s'adapte aisément, ainsi que celle du 4.6.

Un aspect nouveau, par rapport au chat, est que l'on sait exhiber, par des formules explicites, des fonctions propres dont les mesures semiclassiques sont singulières continues, ergodiques. Dans la représentation symbolique  $\Sigma = \{0, \dots, D - 1\}^{\mathbb{Z}}$ , ce sont des mesures de Bernoulli autres que la mesure uniforme. Les mesures de Bernoulli que l'on peut obtenir comme limites semiclassiques ne sont cependant pas quelconques, on démontre une borne inférieure sur leur entropie,

**Théorème 4.7.** [AN05] *Soit  $\mu$  une mesure semiclassique pour l'application du boulanger, quantifiée "à la Walsh".*

*Alors*

(1) *L'entropie topologique de son support vérifie*

$$h_{\text{top}}(\text{supp } \mu) \geq \frac{\lambda}{2}.$$

(2) *Son entropie de Kolmogorov-Sinai vérifie*

$$h_{KS}(\mu) \geq \frac{\lambda}{2}$$

où  $\lambda = \log D$  est l'exposant de Lyapunov.

*On peut exhiber des suites de fonctions propres qui contredisent l'unique ergodicité quantique en saturant ces deux bornes.*

Pour comparer les théorèmes 4.6 et 4.7, on peut remarquer que 4.7 implique seulement

$$\mu_{\text{Leb}}(\mathbb{T}^2) + \mu_{\text{sc}}(\mathbb{T}^2) \geq \mu_{\text{pp}}(\mathbb{T}^2),$$

résultat moins fort que 4.6. Cependant, si  $\mu$  est singulière continue, 4.6 ne donne aucune information.

Le modèle du boulanger est trop trivial pour que l'on puisse réellement se réjouir de ces résultats. Cependant, ils sont instructifs car ils demandent

de comprendre s'ils peuvent être généralisés, ou non, aux flots hamiltoniens quantifiés selon Schrödinger. En fait, nous avons démontré le (1) dans une tentative de réécriture pédagogique de l'article [A05], qui concernait les flots géodésiques Anosov. Ce faisant, nous avons compris comment démontrer le (2), plus fort, pour l'application du boulanger. Nous avons plus tard réussi à généraliser l'argument du (2) à des flots [AN06]. La preuve du point (2) est bien sûr beaucoup plus simple dans le cas du boulanger, si l'on prend le temps de définir la quantification de Walsh; mais nous préférons donner plus loin les grandes lignes de l'argument général (section 4.4). Insistons sur le fait que les contre-exemples construits pour le chat et le boulanger utilisent des propriétés très spécifiques de ces applications et de leur quantification : ce sont les seuls contre-exemples connus à ce jour, et ce sont, de l'avis général, des situations non génériques.

### 4.3 Sur l'entropie des mesures semiclassiques.

Revenons au cas du flot géodésique d'une variété riemannienne compacte  $X$ , et introduisons quelques notations. On note toujours  $\|\cdot\|_x$  la norme sur  $T_x^*X$  donnée par la métrique. Le flot géodésique  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  est le flot hamiltonien sur  $T^*X$  engendré par le hamiltonien  $H(x, \xi) = \frac{\|\xi\|_x^2}{2}$ . L'opérateur hamiltonien est  $-\frac{\hbar^2 \Delta}{2}$ , qui engendre le flot unitaire  $U^t = (\exp(it\hbar \frac{\Delta}{2}))$ .

Soit  $(\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une base orthonormée de fonctions propres du laplacien, on notera dorénavant  $(-\frac{1}{\hbar_k^2})_{k \in \mathbb{N}}$  les valeurs propres, donc

$$-\hbar_k^2 \Delta \psi_k = \psi_k, \quad \text{avec} \quad \hbar_{k+1} \leq \hbar_k.$$

La limite semiclassique  $\hbar_k \rightarrow 0$  revient à étudier les fonctions propres de  $\Delta$  de grande valeur propre. Les mesures semiclassiques associées aux  $\psi_k$  sont définies par  $\mu_k(a) = \langle \psi_k, \text{Op}_{\hbar_k}(a) \psi_k \rangle_{L^2(X)}$ ,  $a \in C_c^\infty(T^*X)$ . Souvent, on notera simplement  $-\frac{1}{\hbar^2}$  la valeur propre, et, de manière un peu abusive,  $\psi_{\hbar}$ , une fonction propre associée et  $\mu_{\hbar}$  sa mesure de Wigner.

Si  $X$  est de courbure sectionnelle strictement négative, le flot  $(g^t)$  a la propriété d'Anosov, qui implique dans le cas d'un flot géodésique l'analogie des propriétés (c), (d), (e) du paragraphe 4.2.1 : équirépartition des variétés stables ou instables, mélange vis-à-vis de la mesure de Liouville, orbites périodiques dénombrables et denses. On rappelle que la propriété d'Anosov du flot  $(g^t)$  sur la couche d'énergie  $\mathcal{E} = S^*X$  signifie que, pour tout  $\rho \in \mathcal{E}$ , l'espace tangent  $T_\rho \mathcal{E}$  se scinde en une somme directe

$$T_\rho \mathcal{E} = E^u(\rho) \oplus E^s(\rho) \oplus \mathbb{R} X_H(\rho),$$

où  $X_H$  est le générateur du flot; et il existe des réels  $C > 0, \lambda > 0$  tels que, pour tout  $v \in E^s(\rho)$ , (respectivement  $v \in E^u(\rho)$ ) pour tout  $t > 0$ ,

$\|dg^t.v\| \leq Ce^{-\lambda t}$  (respectivement  $\|dg^{-t}.v\| \leq Ce^{-\lambda t}$ ). La distribution stable  $E^s$  est intégrable, les feuilles intégrales forment un feuilletage de  $\mathcal{E}$  appelé feuilletage stable; de même, les feuilles intégrales de  $E^u$  forment le feuilletage instable (voir [KH]).

Un flot géodésique Anosov a beaucoup de mesures de probabilité invariantes, en plus de la mesure de Liouville. Par exemple, chaque géodésique périodique porte une mesure invariante, et il y en a bien d'autres. L'entropie de Kolmogorov–Sinai, ou entropie métrique, d'une mesure de probabilité  $(g^t)$ -invariante  $\mu$  est un réel positif  $h_{KS}(\mu)$  qui décrit la complexité d'une orbite générique sous  $\mu$  (la définition en a été donnée au paragraphe 3.4). Par exemple, une mesure portée par une orbite périodique est d'entropie nulle. L'inégalité de Ruelle donne une borne supérieure sur l'entropie : pour toute mesure de probabilité invariante  $\mu$  on a

$$h_{KS}(\mu) \leq \left| \int_{\mathcal{E}} \log J^u(\rho) d\mu(\rho) \right|, \quad (4.6)$$

où  $J^u(\rho) < 1$  est le *jacobien instable* du flot au point  $\rho \in \mathcal{E}$ , défini comme le jacobien de  $g^{-1}$  restreint à la variété instable de  $g^1\rho$ . Si  $X$  est de dimension  $d$  et de courbure sectionnelle constante  $-1$ , cette inégalité se lit simplement  $h_{KS}(\mu) \leq d - 1$ . De plus, on a égalité dans (4.6) si et seulement si  $\mu$  est la mesure de Liouville sur  $\mathcal{E}$  [LY85].

Notons

$$\Lambda = \inf_{\mu} \left| \int_{\mathcal{E}} \log J^u(\rho) d\mu(\rho) \right|$$

où l'inf est pris sur les mesures de probabilités invariantes. De manière équivalente,  $\Lambda = \inf_p \sum_{j=1}^{d-1} \lambda_j^+(p)$  où l'inf est pris sur les points périodiques et les  $\lambda_j^+$  sont les exposants de Lyapunov. Pour une variété de dimension  $d$ , de courbure sectionnelle constante  $-1$ , on trouve  $\Lambda = d - 1$ . Notre premier résultat sur l'entropie des mesures limites s'énonce ainsi,

**Théorème 4.8.** [A05] *Soit  $X$  une variété riemannienne connexe compacte. Supposons que le flot géodésique ait la propriété d'Anosov. Soit  $\mu_0$  une mesure semiclassique associée à la suite des fonctions propres du laplacien sur  $X$ .*

*Il existe  $\bar{\kappa} > 0$ , et deux fonctions continues décroissantes  $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $\vartheta : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  avec  $\tau(0) = 1$ ,  $\vartheta(0) = +\infty$ , telles que:*

*Si  $\mu_0$  est une mesure semiclassique, dont la décomposition ergodique s'écrit*

$$\mu_0 = \int_{S^*X} \mu_0^x d\mu_0(x)$$

*alors, pour tout  $\delta > 0$ ,*

$$\mu_0 \left( \left\{ x, h_{KS}(\mu_0^x) \geq \frac{\Lambda}{2}(1 - \delta) \right\} \right) \geq \left( \frac{\bar{\kappa}}{\vartheta(\delta)} \right)^2 (1 - \tau(\delta)). \quad (4.7)$$



Ceci implique que l'entropie métrique  $h_{KS}(\mu_0)$  est strictement positive, et que l'entropie topologique du support de  $\mu_0$ ,  $h_{top}(\text{supp } \mu_0)$ , est supérieure à  $\frac{\Lambda}{2}$ .

Il y a donc forcément, parmi les composantes ergodiques de  $\mu_0$ , une proportion positive d'entre elles dont l'entropie est arbitrairement proche de  $\frac{\Lambda}{2}$ . Le résultat de [A05] concerne en fait les quasi-modes d'ordre  $\hbar |\log \hbar|^{-1}$  :

**Théorème 4.9.** [A05] Soit  $X$  une variété riemannienne connexe compacte. Supposons que le flot géodésique ait la propriété d'Anosov.

Il existe  $\bar{\kappa} > 0$ , et deux fonctions continues décroissantes  $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $\vartheta : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  avec  $\tau(0) = 1$ ,  $\vartheta(0) = +\infty$ , telles que :  
Si  $(\psi_\hbar)$  est une suite de fonctions normalisées dans  $L^2$ , avec

$$\|(-\hbar^2 \Delta - 1)\psi_\hbar\|_{L^2(X)} \leq c\hbar |\log \hbar|^{-1},$$

alors pour toute mesure semiclassique  $\mu_0$  associée à la famille  $(\psi_\hbar)$ , et pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\mu_0 \left( \left\{ x, h_{KS}(\mu_0^x) \geq \frac{\Lambda}{2}(1 - \delta) \right\} \right) \geq (1 - \tau(\delta)) \left( \frac{\bar{\kappa}}{\vartheta(\delta)} - c\vartheta(\delta) \right)_+^2 - c\bar{\kappa}.$$

Pour des valeurs de  $c$  suffisamment petites, ceci implique que l'entropie de  $\mu_0$  est strictement positive.

**Remarque** On obtient une expression explicite de  $\vartheta$  et  $\mu$  en fonction de  $\delta$ , et du plus grand exposant de Lyapunov du flot géodésique. La borne obtenue, cependant, est loin de la borne optimale attendue, même si l'on essaie d'optimiser toutes les étapes de la preuve.

Un résultat plus récent et plus joli, mais pas toujours plus fort :

**Théorème 4.10.** [AN06] Soit  $X$  une variété riemannienne connexe compacte. Supposons que le flot géodésique ait la propriété d'Anosov.

Soit  $\mu_0$  une mesure semiclassique associée aux fonctions propres du laplacien sur  $X$ . Alors son entropie métrique satisfait

$$h_{KS}(\mu_0) \geq \frac{3}{2} \left| \int_{\mathcal{E}} \log J^u(\rho) d\mu_0(\rho) \right| - (d-1)\lambda_{\max}, \quad (4.8)$$

où  $d = \dim X$  and  $\lambda_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \sup_{\rho \in \mathcal{E}} \|dg_\rho^t\|$  est le taux d'expansion maximal du flot géodésique sur  $\mathcal{E}$ .

Si en particulier  $X$  est de courbure sectionnelle constante  $-1$ , on a

$$h_{KS}(\mu_0) \geq \frac{d-1}{2}. \quad (4.9)$$

Si l'on compare le théorème 4.10 avec le 4.8, il apparaît en courbure constante que (4.9) est une borne plus satisfaisante que celle du théorème 4.8, qui n'est guère explicite. D'un autre côté, on prouve dans le théorème 4.8 l'entropie positive des mesures limites en courbure négative variable, sans aucune restriction, alors que le terme de droite de l'équation (4.8) peut être négatif, auquel cas le théorème est vide. Nous pensons qu'il ne s'agit que d'une faiblesse de la preuve, et espérons plutôt l'inégalité

$$h_{KS}(\mu_0) \geq \frac{1}{2} \left| \int_{\mathcal{E}} \log J^u(\rho) d\mu_0(\rho) \right|. \quad (4.10)$$

Le cas d'égalité dans l'inégalité de Ruelle (4.6) [LY85] montre que l'unique ergodicité quantique est équivalente à  $h_{KS}(\mu_0) \geq \left| \int_{\mathcal{E}} \log J^u(\rho) d\mu_0(\rho) \right|$ . Nous pensons cependant que (4.10) est le résultat optimal que l'on puisse obtenir sans utiliser d'information supplémentaire, sur la multiplicité spectrale par exemple. On a vu, en effet, comment construire des exemples de systèmes symplectiques Anosov, à temps discret, pour lesquels l'unique ergodicité quantique est en défaut, et la borne (4.10) sur l'entropie métrique est atteinte [FNDB03, Kelm05, AN06], ainsi que la borne analogue sur l'entropie topologique du support de  $\mu_0$ , pour le boulanger [AN06]. Dans ces exemples, la multiplicité du spectre exceptionnellement élevée est tenue responsable de l'échec de l'unique ergodicité quantique. Pour une variété de dimension  $d$  à courbure négative, la meilleure borne connue sur le nombre de valeurs propres dans l'intervalle  $[h^{-2} - c(h|\log h|)^{-1}, h^{-2} + c(h|\log h|)^{-1}]$  est donnée par  $(2c + K)h^{d-1}|\log h|^{-1}$  — où  $2ch^{d-1}|\log h|^{-1}$  vient du terme principal de l'asymptotique de Weyl et  $Kh^{d-1}|\log h|^{-1}$  est l'estimée du reste obtenue par Bérard [Bera77]. Le comportement attendu des quasimodes d'ordre  $ch|\log h|^{-1}$  dépend de manière subtile de la constante  $c$ , qui contrôle la multiplicité et donc notre degré de liberté dans le choix des fonctions propres : notons que le théorème 4.9 prouve seulement l'entropie positive de  $\mu_0$  quand  $c$  est suffisamment petit. Si  $c$  est assez grand, il est probablement possible de construire des quasimodes d'ordre  $ch|\log h|^{-1}$  pour lesquels  $\mu_0$  est d'entropie positive mais charge aussi une orbite périodique, comme dans le cas du chat. Dans ce dernier cas il faut souligner que les valeurs propres conduisant aux contre-exemples sont de multiplicité  $Ch|\log h|^{-1}$ , pour une valeur bien précise de  $C$  liée à l'exposant de Lyapunov, et que la construction de [FNDB03] ne marche que pour cette valeur-là de  $C$ . On pense que de tels contre-exemples ne devraient pas exister pour les fonctions propres du laplacien, si la multiplicité est réellement bien plus petite que  $h^{d-1}|\log h|^{-1}$ , mais le lien entre ces différents phénomènes n'est pas vraiment compris. De plus, il est difficile d'espérer une amélioration substantielle de la borne de Bérard, quand l'on découvre sur la page de Peter Sarnak [Sa-hp] tout le travail nécessaire pour simplement améliorer la constante multiplicative, dans le cas arithmétique !

En fin de compte, le théorème 4.8 ne doit pas être compris comme une

avancée vers la conjecture 4.3, mais comme une propriété générale, valable même quand on n'a pas l'unique ergodicité quantique.

Il est intéressant de noter que la preuve de Lindenstrauss de l'unique ergodicité quantique arithmétique (théorème 4.4), bien que se situant dans une sphère d'idées toute différente, passe par une estimation de l'entropie due à Bourgain et Lindenstrauss :

**Théorème 4.11.** *[BLi03] Soit  $X$  une variété arithmétique de congruence, de dimension 2, et  $(\psi_j)$  une base de fonctions propres communes au laplacien et aux opérateurs de Hecke.*

*Si  $\mu_0$  est une mesure semiclassique associée, dont la décomposition ergodique s'écrit  $\mu_0 = \int_{S^*X} \mu_0^x d\mu_0(x)$ , alors on a pour toute composante ergodique  $h_{KS}(\mu_0^x) \geq \frac{1}{9}$ .*

Ce résultat se démontre en utilisant des estimées sur les fonctions  $L$ , il est beaucoup plus fort que (4.7), qui prédit seulement que certaines des composantes ergodiques sont d'entropie strictement positive.

Mentionnons aussi cette autre contribution de Ledrappier–Lindenstrauss, qui s'articule curieusement sur le théorème 4.10 :

**Théorème 4.12.** *[LLi03] Soit  $X$  une surface compacte, de courbure strictement négative. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $S^*X$ , invariante par le flot géodésique, et ergodique. Si  $h_{KS}(\mu) > \frac{1}{2} |\int_{\mathcal{E}} \log J^u(\rho) d\mu_0(\rho)|$ , alors la projection de  $\mu$  sur  $X$  est absolument continue par rapport au volume riemannien.*

Le résultat technique qui mène aux théorèmes 4.8 et 4.9, et nous pousse à conjecturer (4.10) est le théorème 4.14 énoncé plus loin. Il s'agit d'estimer le propagateur de l'équation de Schrödinger, en temps long, dans un tube uniforme autour de chaque géodésique. On n'utilise que la propriété d'Anosov de la dynamique classique, et l'argumentation s'adapte à des systèmes dynamiques Anosov symplectiques beaucoup plus généraux. Afin de justifier l'intérêt du théorème 4.14, nous revenons sur la définition de l'entropie.

**Définition de l'entropie.** Reprenons les notions introduites en 3.4. Dans notre cas,  $\mathcal{E} = S^*X$  et  $T$  est le flot géodésique : nous considérerons le temps 1 du flot,  $T = g^1$ . La définition suivante, équivalente à la précédente, en est très légèrement différente, car nous considérerons uniquement des partitions de la base  $X$  (au lieu de  $S^*X$ ). Ce point de vue est évidemment motivé par tout le chapitre 3.

Soit donc  $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_K)$  une partition mesurable de  $X$ . On peut également considérer  $\mathcal{P}$  comme une partition de  $S^*X$ . On introduit l'espace symbolique  $\Sigma = \{1, \dots, K\}^{\mathbb{Z}}$ . À chaque vecteur  $v \in S^*X$  on peut associer un unique  $\mathcal{J}(v) = (\epsilon_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \Sigma$ , en imposant que  $g^j v \in P_{\epsilon_j}$  pour tous les entiers  $j$ . On définit ainsi une application de codage  $\mathcal{J} : S^*X \rightarrow \Sigma$ . Si l'on

considère le décalage  $\sigma$  agissant sur  $\Sigma$  par translation à gauche,

$$\sigma((\epsilon_j)_{j \in \mathbb{Z}}) = (\epsilon_{j+1})_{j \in \mathbb{Z}},$$

on a bien sûr  $\mathcal{J} \circ g^1 = \sigma \circ \mathcal{J}$ .

Soit  $\mu_0$  une mesure de probabilité  $(g^t)$ -invariante sur  $S^*X$  : par exemple, une mesure semiclassique associée aux fonctions propres. On introduit la mesure de probabilité  $\nu_0^\Sigma$  sur  $\Sigma$ , image de  $\mu_0$  par l'application de codage  $\mathcal{J}$ . Explicitement, les marginales finies de  $\nu_0^\Sigma$  sont données par l'expression

$$\nu_0^\Sigma([\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}]) = \mu_0(P_{\epsilon_0} \cap g^{-1}P_{\epsilon_1} \dots \cap g^{-n+1}P_{\epsilon_{n-1}}). \quad (4.11)$$

On a noté  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}]$  le sous-ensemble de  $\Sigma$ , constitué des suites qui commencent par les lettres  $(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1})$ ; un tel ensemble est appelé *cylindre* de longueur  $n$ . On notera  $\Sigma_n$  l'ensemble des cylindres de longueur  $n$  : ils forment une partition de  $\Sigma$ .

La mesure  $\mu_0$  étant  $(g^t)$ -invariante, son image  $\nu_0^\Sigma$  est  $\sigma$ -invariante. Par définition, l'entropie de  $\nu_0^\Sigma$  relativement à l'action de  $\sigma$  est

$$h_\sigma(\nu_0^\Sigma) = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \sum_{\mathcal{C} \in \Sigma_n} \nu_0^\Sigma(\mathcal{C}) \log \nu_0^\Sigma(\mathcal{C}) \quad (4.12)$$

$$= \inf_n -\frac{1}{n} \sum_{\mathcal{C} \in \Sigma_n} \nu_0^\Sigma(\mathcal{C}) \log \nu_0^\Sigma(\mathcal{C}). \quad (4.13)$$

Nous avons choisi de travailler avec le temps 1 du flot géodésique; il est alors sans importance de considérer des partitions  $\mathcal{P}$  dépendant uniquement du point-base, si le rayon d'injectivité est plus grand que 2 – hypothèse inoffensive que nous ferons dorénavant. On a l'égalité  $h_{KS}(\mu_0) = h_\sigma(\nu_0^\Sigma)$  dès que le diamètre de  $\mathcal{P}$  est suffisamment petit. L'équation (4.13) définit une fonctionnelle semicontinue supérieurement en  $\nu_0^\Sigma$ . Autrement dit, les bornes inférieures sur l'entropie sont conservées par passage à la limite faible.

### 4.3.1 L'estimée principale : décroissance exponentielle de la mesure des cylindres.

**Les mesures  $\nu_\hbar^\Sigma$ .** Pour mettre en œuvre cette idée, on construit des mesures  $\nu_\hbar^\Sigma$  ( $\hbar > 0$ ) sur  $\Sigma$ , convergeant vers  $\nu_0^\Sigma$  dans la limite semiclassique, et dont on voudra minorer l'entropie uniformément en  $\hbar$ . On reprend la construction précédente; mais pour disposer des résultats de l'analyse microlocale, il faut remplacer les fonctions caractéristiques  $\mathbb{1}_{P_i}$  par des fonctions lisses. On supposera que les  $P_i$  ont une frontière lisse par morceaux, et on introduit une partition  $C^\infty$  de l'unité  $(A_i)_{i=1, \dots, K}$  sur  $X$  ( $\sum A_i \equiv 1$ ), obtenue par convolution des fonctions caractéristiques  $\mathbb{1}_{P_i}$ . Plus précisément, on effectue la régularisation à une échelle dépendant de  $\hbar$ , de sorte que  $A_i \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 1$

uniformément sur tout compact contenu dans l'intérieur de  $P_i$ , et  $A_i \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 0$  uniformément sur tout compact à l'extérieur de  $P_i$ . Pour que les techniques microlocales s'appliquent, nous devons effectuer la régularisation à l'échelle  $\hbar^\kappa$  ( $\kappa \in [0, 1/2)$ ), de sorte que les dérivées de  $A_i$  soient contrôlées par  $\|D^n A_i\| \leq C(n)\hbar^{-n\kappa}$ . On appellera  $\Omega_i$  un ouvert de diamètre  $2 \text{ diam } P_i$ , qui contient le support de  $A_i$ .

On construit maintenant une fonctionnelle  $\nu_{\hbar}^{\Sigma}$ , définie sur une classe restreinte de fonctions sur  $\Sigma$ . Dans ce qui suit, on identifie les fonctions  $A_i$  avec les opérateurs de multiplication par  $A_i$  sur  $L^2(X)$ ; on notera  $A_i(t)$  leur évolution par le flot de Schrödinger :  $A_i(t) = \exp(-it\frac{\hbar\Delta}{2}) \circ A_i \circ \exp(it\frac{\hbar\Delta}{2})$ .

On définit les "mesures" des cylindres sous  $\nu_{\hbar}^{\Sigma}$ , par les formules

$$\nu_{\hbar}^{\Sigma}([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) = \langle A_{\epsilon_n}(n) \dots A_{\epsilon_1}(1) A_{\epsilon_0}(0) \psi_{\hbar}, \psi_{\hbar} \rangle_{L^2(X)} \quad (4.14)$$

$$= \left\langle e^{-in\frac{\hbar\Delta}{2}} A_{\epsilon_n} e^{i\frac{\hbar\Delta}{2}} A_{\epsilon_{n-1}} e^{i\frac{\hbar\Delta}{2}} \dots e^{i\frac{\hbar\Delta}{2}} A_{\epsilon_0} \psi_{\hbar}, \psi_{\hbar} \right\rangle_{L^2(X)}. \quad (4.15)$$

L'interprétation de cette formule est assez claire. Les opérateurs  $A_{\epsilon_n}(n) \dots A_{\epsilon_1}(1) A_{\epsilon_0}(0)$  jouent le rôle des ensembles  $P_{\epsilon_0} \cap g^{-1} P_{\epsilon_1} \dots \cap g^{-n} P_{\epsilon_n}$  utilisés dans la définition classique de l'entropie (voir (3.49), (4.11)) : la quantité  $\nu_{\hbar}^{\Sigma}([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n])$  peut s'interpréter comme l'amplitude de probabilité, pour le système dans l'état  $\psi_{\hbar}$ , d'être en  $P_{\epsilon_0}$  à l'instant 0, puis en  $P_{\epsilon_1}$  à l'instant 1, etc. La définition (4.14) est directement inspirée de la formule (3.44), mais contrairement au chapitre 3, la fonctionnelle  $\nu_{\hbar}^{\Sigma}$  n'est pas positive, et est seulement définie sur l'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques des cylindres. Il nous suffit, de toute façon, de savoir qu'elle satisfait les trois propriétés suivantes, si  $\psi_{\hbar}$  est une fonction propre normalisée du laplacien,

- Pour tout  $n$ , pour tout cylindre  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}] \in \Sigma_n$ ,

$$\sum_{\epsilon_n} \nu_{\hbar}^{\Sigma}([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]) = \nu_{\hbar}^{\Sigma}([\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}]).$$

(condition de compatibilité)

- Pour tout  $n$ , pour tout cylindre  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}] \in \Sigma_n$ ,

$$\sum_{\epsilon_{-1}} \nu_{\hbar}^{\Sigma}([\epsilon_{-1}, \epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}]) = \nu_{\hbar}^{\Sigma}([\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}]).$$

(invariance par décalage)

- Pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\sum_{[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}]} \nu_{\hbar}^{\Sigma}([\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}]) = 1.$$

(normalisation)

Pour les théorèmes 4.8, 4.9, on supposera dorénavant que l'on a extrait de la famille  $(\mu_{\hbar})_{-1/\hbar^2 \in Sp(\Delta)}$  une suite convergeant faiblement vers  $\mu_0$  sur  $T^*X$ . Lors du passage à  $\Sigma$ , les règles usuelles (2.5), (2.6) du calcul pseudodifférentiel permettent de montrer que

**Proposition 4.13.** *Sur  $\Sigma$ , la famille  $(\nu_{\hbar}^{\Sigma})$  converge vers  $\nu_0^{\Sigma}$  quand  $\hbar \rightarrow 0$ , au sens où  $\nu_{\hbar}^{\Sigma}([\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}]) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \nu_0^{\Sigma}([\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}])$  pour tout cylindre  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}]$ .*

Le résultat clef de [A05] exprime la décroissance exponentielle de la mesure  $\nu_{\hbar}^{\Sigma}([\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1}])$ , quand  $n$  est grand.

**Décroissance exponentielle de la mesure des cylindres.** Pour un flot géodésique Anosov, chaque couche d'énergie  $S_{\lambda}^*M = \{\rho \in T^*M, \|\rho\| = \lambda\}$  ( $\lambda > 0$ ) est feuilletée en variétés instables. Le jacobien instable  $J^u(\rho) < 1$  au point  $\rho \in T^*X$  est défini comme le jacobien de  $g^{-1}$ , restreint à la feuille instable de  $g^1\rho$ . Fixons  $\varepsilon > 0$ , et pour tout couple de lettres  $(\epsilon_0, \epsilon_1) \in [1, K]^2$ , définissons

$$J_1^u(\epsilon_0, \epsilon_1) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ J^u(\rho) : \rho \in T^*\Omega_{\epsilon_0}, 1 - \varepsilon \leq \|\rho\| \leq 1 + \varepsilon, g^1\rho \in T^*\Omega_{\epsilon_1} \} \quad (4.16)$$

si l'ensemble de droite n'est pas vide, et  $J_1^u(\epsilon_0, \epsilon_1) = e^{-R}$  sinon, où  $R > 0$  est fixé, très grand. Pour une suite  $\epsilon = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)$  de longueur  $n$ , on définit

$$J_n^u(\epsilon) = J_n^u(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n) \stackrel{\text{def}}{=} J_1^u(\epsilon_0, \epsilon_1) \dots J_1^u(\epsilon_{n-1}, \epsilon_n). \quad (4.17)$$

**Théorème 4.14.** [A05] (L'estimée principale) *Soit  $\chi \in C_c^{\infty}(T^*M)$ , à support compact dans un voisinage de  $S^*X : \{v \in T^*M, \|v\| \in [1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1 + \frac{\varepsilon}{2}]\}$ . Considérons les opérateurs  $A_{\epsilon_n}(n)A_{\epsilon_{n-1}}(n-1)\dots A_{\epsilon_0} \text{Op}(\chi)$ . Pour tout  $\mathcal{K} > 0$ , il existe  $\hbar_{\mathcal{K}} > 0$  tel qu'on ait, uniformément pour tout  $\hbar < \hbar_{\mathcal{K}}$ , pour tout  $n \leq \mathcal{K}|\log \hbar|$ ,*

$$\begin{aligned} & \|A_{\epsilon_n}(n)A_{\epsilon_{n-1}}(n-1)\dots A_{\epsilon_0} \text{Op}(\chi)\|_{L^2(X)} \\ & \leq 2(2\pi\hbar)^{-d/2} J_n^u(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)^{1/2} (1 + O(\varepsilon + \text{diam } \mathcal{P}))^n. \end{aligned}$$

À  $n$  fixé, cette estimation peut se démontrer en appliquant la méthode de la phase stationnaire au noyau de l'opérateur  $A_{\epsilon_n}(n)A_{\epsilon_{n-1}}(n-1)\dots A_{\epsilon_0}$ , qui s'exprime formellement comme l'intégrale de chemins

$$e^{\frac{i\hbar}{2}} \sum_{\gamma(0)=x, \gamma(n)=y, \gamma(i) \in P_{\epsilon_i}, i=0, \dots, n} e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^n \frac{\|\dot{\gamma}\|^2}{2}}.$$

La borne obtenue est cependant triviale quand  $\hbar \rightarrow 0$  à  $n$  fixé, car la constante  $(2\pi\hbar)^{-d/2}$  explose. Ce qui nous intéresse ici est de faire tendre simultanément  $\hbar \rightarrow 0$  et  $n \rightarrow +\infty$ . La borne supérieure annoncée n'est intéressante que si  $n$  est un multiple assez grand de  $|\log \hbar|$ , et la nouveauté

dans cette estimation est qu'elle vaut pour  $n = \mathcal{K} |\log \hbar|$  avec  $\mathcal{K}$  quelconque. C'est pour contrôler le comportement en temps grand qu'on utilise la propriété d'Anosov du flot classique. Le jacobien instable vient de la formule de Van Vleck (1.28).

**Corollaire 4.15.** *Pour tout  $\mathcal{K} > 0$ , il existe  $\hbar_{\mathcal{K}} > 0$  tel qu'on ait, uniformément pour tout  $\hbar < \hbar_{\mathcal{K}}$ , pour tout  $n \leq \mathcal{K} |\log \hbar|$ ,*

$$|\nu_{\hbar}^{\Sigma}([\epsilon_0, \dots, \epsilon_n])| \leq 2(2\pi\hbar)^{-d/2} J_n^u(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)^{1/2} (1 + O(\epsilon + \text{diam } \mathcal{P}))^n$$

pour tout cylindre  $[\epsilon_0, \dots, \epsilon_n]$ .

C'est l'analogie de la borne supérieure de la proposition 3.24. Par contre, pour des fonctions propres oscillant rapidement, on n'a pas de borne inférieure telle que celle de la proposition 3.25.

Ce corollaire, associé à la proposition 4.13 et à la semicontinuité supérieure de l'entropie, laisse espérer une borne inférieure sur l'entropie de la limite  $\nu_0^{\Sigma}$ . En fait, si les  $\nu_{\hbar}^{\Sigma}$  étaient des mesures de probabilité, l'inégalité (4.10) en découlerait immédiatement. Toute la difficulté se situe dans la non-positivité des  $\nu_{\hbar}^{\Sigma}$ ; on renvoie à [A05] pour la preuve, assez technique, des théorèmes 4.8, 4.9 à partir du corollaire 4.15. La preuve du théorème 4.10, plus simple, est résumée dans la section suivante.

## 4.4 Le principe d'incertitude entropique.

L'outil principal de la preuve du théorème 4.10 est une variante du *principe d'incertitude entropique* introduit par [Kraus87, MaaUff88]. Selon cette inégalité, si un opérateur unitaire a de “petits” éléments de matrice, alors ses vecteurs propres ont une “grande” entropie.

Soit  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$  un espace de Hilbert, et supposons que nous disposions d'une *partition quantique de l'unité*, c'est-à-dire, dans ce contexte, d'une famille finie d'opérateurs bornés  $\mathcal{P} = (P_j)_{j=1, \dots, N}$  sur  $\mathcal{H}$ , vérifiant

$$\sum_{j=1}^N P_j P_j^* = I_{\mathcal{H}}. \quad (4.18)$$

On a donc, pour tout  $\Psi \in \mathcal{H}$ ,  $\|\Psi\|^2 = \sum_j \|P_j^* \Psi\|^2$ . Nous noterons  $\Psi_j = P_j^* \Psi$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Soit  $(\alpha_j > 0)_{j=1, \dots, N}$  une famille de réels positifs. Grâce à la partition  $\mathcal{P}$ , on peut munir l'espace vectoriel  $\mathcal{H}$  de toute une famille de normes, toutes équivalentes à la norme initiale  $\|\cdot\|$  si  $N$  est fini :

$$\|\Psi\|_p^{(\alpha)} = \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^{p-2} \|\Psi_j\|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \text{et} \quad \|\Psi\|_{\infty}^{(\alpha)} = \max_j (\alpha_j \|\Psi_j\|).$$

Pour  $p = 2$ , remarquons que  $\|\cdot\|_2^{(\alpha)} = \|\cdot\|$ .

Tout opérateur  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  peut être décomposé en  $N^2$  composantes,  $T_{jk} = P_j^* T P_k$ , de sorte que l'action de  $T$  sur un vecteur  $\Psi \in \mathcal{H}$  s'écrit

$$(T\Psi)_j = \sum_{k=1}^N T_{jk} \Psi_k, \quad j = 1, \dots, N.$$

Soient  $(\alpha_j), (\beta_j)$  deux familles de poids. Étant donnés  $(a, b) \in [0, 1]^2$ , on s'intéresse à certaines normes de l'opérateur  $T$  :

$$\|T\|_{1/b, 1/a}^{(\beta), (\alpha)} = \sup_{\Psi \in \mathcal{H}, \|\Psi\|_{1/b}^{(\beta)} = 1} \|T\Psi\|_{1/a}^{(\alpha)}.$$

Dans le cas particulier  $a = 0, b = 1$ , on a

$$\|T\|_{1, \infty}^{(\beta), (\alpha)} = \sup_{\Psi \in \mathcal{H}, \|\Psi\|_1^{(\beta)} = 1} \max_j (\alpha_j \| (T\Psi)_j \|).$$

Pour tout  $\Psi \in \mathcal{H}$  et pour tout indice  $j$ , on a la série d'inégalités

$$\| (T\Psi)_j \| = \left\| \sum_k T_{jk} \Psi_k \right\| \leq \sum_k \beta_k \|T_{jk}\|_{\mathcal{H}} \beta_k^{-1} \|\Psi_k\| \leq \max_k (\beta_k \|T_{jk}\|_{\mathcal{H}}) \|\Psi\|_1^{(\beta)}.$$

Par conséquent,

$$\|T\|_{1, \infty}^{(\beta), (\alpha)} \leq \max_{j,k} (\alpha_j \beta_k \|T_{jk}\|_{\mathcal{H}}) = c^{\alpha, \beta}(T).$$

Supposons maintenant que les  $P_j$  soient des projecteurs orthogonaux :

$$P_j^* = P_j \text{ et } P_j P_k = \delta_{jk} P_k. \quad (4.19)$$

Sous cette hypothèse supplémentaire, une adaptation directe du théorème d'interpolation de Riesz–Thorin [DunSchw] montre que la fonction  $(a, b) \mapsto \log \|T\|_{1/b, 1/a}^{(\beta), (\alpha)}$  est convexe sur  $[0, 1]^2$ . Donc, si l'on sait que  $\|T\|_{2,2} = \|T\|_{2,2}^{(\beta), (\alpha)} \leq 1$ , on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad \forall \Psi \in \mathcal{H}, \quad \|T\Psi\|_{\frac{2}{1-t}}^{(\alpha)} \leq \left( c^{\alpha, \beta}(T) \right)^t \|\Psi\|_{\frac{2}{1+t}}^{(\beta)}. \quad (4.20)$$

On définit la *pression* d'un état  $\Psi \in \mathcal{H}$ , pour le poids  $\alpha$ , (et relativement à la partition  $\mathcal{P}$ ) comme

$$p_\alpha(\Psi) = p_{\alpha, \mathcal{P}}(\Psi) = - \sum_{j=1}^N \|\Psi_j\|^2 \log \|\Psi_j\|^2 - \sum_{j=1}^N \|\Psi_j\|^2 \log \alpha_j^2. \quad (4.21)$$

Cette expression met en balance un premier terme, l'*entropie* de  $\Psi$  (dans la partition  $\mathcal{P}$ ), avec un second terme qui s'interprète comme la moyenne de la quantité  $\log(\alpha_j^2)$  sous la loi de probabilité  $(\|\Psi_j\|^2)_{j=1, \dots, N}$ . Si  $T$  est une isométrie, alors à la limite  $t \searrow 0$  l'inégalité (4.20) entraîne la relation d'incertitude entropique :



**Théorème 4.16** (Principe d'incertitude entropique). *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert, et  $\mathcal{P} = (P_j)_{j=1,\dots,N}$  une famille de projecteurs orthogonaux sur  $\mathcal{H}$  formant une partition de l'unité (4.18), (4.19). Définissons, pour toute famille de poids positifs  $(\alpha_j)_{j=1,\dots,N}$ , et pour tout vecteur normalisé  $\Psi \in \mathcal{H}$ ,*

$$p_\alpha(\Psi) = p_{\alpha,\mathcal{P}}(\Psi) = - \sum_{j=1}^N \|\Psi_j\|^2 \log \|\Psi_j\|^2 - \sum_{j=1}^N \|\Psi_j\|^2 \log \alpha_j^2$$

avec  $\Psi_j = P_j^* \Psi$ .

Soit  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  une isométrie. Introduisons

$$c^{\alpha,\beta}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j,k} (\alpha_j \beta_k \|P_j^* T P_k\|_{\mathcal{H}}).$$

Alors on a, pour tout vecteur normalisé  $\Psi \in \mathcal{H}$ ,

$$p_\alpha(T\Psi) + p_\beta(\Psi) \geq -2 \log c^{\alpha,\beta}(T). \quad (4.22)$$

Le principe d'incertitude original de Maassen et Uffink [MaaUff88] concerne le cas  $\alpha_j = \beta_j = 1$  : la pression se réduit alors à l'entropie,  $h(\Psi) = - \sum_{j=1}^N \|\Psi_j\|^2 \log \|\Psi_j\|^2$ , qui mesure en quelque sorte la localisation de  $\Psi$  dans la décomposition  $\mathcal{P}$ . On obtient  $h(T\Psi) + h(\Psi) \geq -2 \log c^{1,1}(T)$ , c'est-à-dire que si  $T$  a de "petits" éléments de matrice  $T_{jk}$  (mesurés par la quantité  $c^{1,1}(T)$ ), alors les entropies de  $T\Psi$  et de  $\Psi$  ne peuvent pas être simultanément petites. Si  $\Psi$  est vecteur propre de  $T$ , on obtient  $h(\Psi) \geq -\log c^{1,1}(T)$ .

**L'estimée principale (bis).** On appliquera le principe d'incertitude entropique en partant d'une décomposition de l'espace des configurations en cellules de diamètre  $\varepsilon > 0$ . Plus précisément, on introduit une partition mesurable de  $X$  à bord lisse par morceaux,  $X = \sqcup_{k=1}^K O_k$ , en éléments de diamètre inférieur à  $\varepsilon/2$ . On considère un recouvrement ouvert  $(\Omega_k)_{k=1,\dots,K}$  de  $X$  tel que les  $\Omega_k$  soient de diamètre inférieur à  $\varepsilon$  et  $O_k \subset \Omega_k$ . Soit enfin une famille de fonctions régulières positives  $(P_k)_{k=1,\dots,K}$  sur  $X$ , obtenues en lissant les fonctions caractéristiques  $\mathbb{1}_{O_k}$  par convolution, avec  $\text{supp } P_k \Subset \Omega_k$ , et  $\sum_{k=1}^K P_k^2(x) = 1$  pour tout  $x \in X$ . On notera encore  $P_k$  l'opérateur de multiplication par  $P_k$  sur l'espace de Hilbert  $L^2(X) = \mathcal{H}$  : l'équation précédente montre qu'ils forment une partition quantique de l'unité (4.18), que nous appelons  $\mathcal{P}$ .

Pour des raisons techniques, nous autorisons les  $P_k$  à dépendre de  $\hbar$  de manière raisonnable :

$$\|\partial^\alpha P_k\| \leq C(\alpha) \hbar^{-\theta|\alpha|} \quad (4.23)$$

avec  $\theta > 0$ , très petit. Quand  $\hbar \rightarrow 0$ , on supposera que  $P_k$  tend vers 1 uniformément sur tout compact dans l'intérieur de  $O_k$ , et vers 0 à l'extérieur de  $O_k$ .

On note  $U^t = \exp(it\hbar\Delta/2)$  le flot de Schrödinger. Comme précédemment, on suppose que le rayon d'injectivité de  $X$  est supérieur à 2, et on considère le temps 1 du flot,  $U = U^1$ , qui quantifie le temps 1 du flot géodésique  $g^1$ .

Étant donné un temps  $n \in \mathbb{N}$ , on imite la construction classique (3.49) en itérant et raffinant la partition initiale  $\mathcal{P}$  sous l'évolution quantique, jusqu'au temps  $n$  : pour une suite de longueur  $n$ ,  $\epsilon = (\epsilon_0 \cdots \epsilon_n)$ ,  $\epsilon_i \in [1, K]$  on définit l'opérateur

$$P_\epsilon = P_{\epsilon_n}(n)P_{\epsilon_{n-1}}(n-1) \cdots P_{\epsilon_0} = U^{-n}P_{\epsilon_n}UP_{\epsilon_{n-1}} \cdots UP_{\epsilon_0} \quad (4.24)$$

La famille d'opérateurs  $(P_\epsilon)_{|\epsilon|=n}$  satisfait évidemment la relation

$$\sum_{|\epsilon|=n} P_\epsilon P_\epsilon^* = Id_{L^2},$$

et forme donc une partition quantique de l'unité, que nous notons  $\mathcal{P}^{(n)}$  comme dans le cas classique.

**Remarque 4.17.** *Nous avons imposé aux fonctions  $P_k$  d'être de classe  $C^\infty$ , de manière à pouvoir utiliser une description de type BKW des opérateurs  $P_\epsilon$  pour la preuve du prochain théorème, 4.18. Cela empêche, malheureusement, les  $P_\epsilon$  d'être des projecteurs orthogonaux, condition requise dans l'équation (4.19). Nous ne pouvons donc pas appliquer directement le théorème 4.16, et il nous faut restreindre l'action des  $P_\epsilon$  à un cône  $\mathcal{C}$  sur lequel ils agissent presque comme des projecteurs orthogonaux (à  $O(\hbar^\infty)$  près). Sans donner les détails, on fixe  $\delta > 0$  arbitraire, et  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\hbar$  est l'espace des fonctions microlocalisées dans un voisinage de taille  $\hbar^{1-\delta}$  de  $S^*X$ , là où le symbole de  $P_\epsilon$  vaut 0 ou 1. Il faut, bien sûr, définir  $\mathcal{C}_\hbar$  (et donc construire soigneusement les fonctions  $P_i$ ) de sorte qu'il contienne la fonction propre  $\psi_\hbar$ , ou du moins une fonction proche  $\phi_\hbar$  avec  $\|\phi_\hbar - \psi_\hbar\| = \mathcal{O}(\hbar^{\theta/8})$ , où  $\theta > 0$  est le même qu'en (4.23). On renvoie à [AN06] pour les détails techniques.*

Le théorème suivant, de la même veine que le 4.14, cherche à estimer les composantes  $P_{\epsilon'}^* U^n P_\epsilon$  de l'opérateur  $U^n$  dans la partition  $\mathcal{P}^{(n)}$  :

**Théorème 4.18.** [AN06] *Étant donnés une partition  $\mathcal{P}$  et  $\delta, \delta' > 0$  arbitrairement petits, il existe  $\hbar_{\mathcal{P}, \delta, \delta'}$  tel que, pour tout  $\hbar \leq \hbar_{\mathcal{P}, \delta, \delta'}$ , pour tout entier  $n \leq \frac{(1-\delta')|\log \hbar|}{\lambda_{\max}}$  et pour toutes suites  $\epsilon, \epsilon'$  de longueur  $n$ ,*

$$\sup_{\phi \in \mathcal{C}_\hbar, \|\phi\|=1} \|P_{\epsilon'}^* U^n P_\epsilon \phi\| \leq C \hbar^{-(d-1+c\delta)} J_n^u(\epsilon)^{1/2} J_n^u(\epsilon'). \quad (4.25)$$

( $c = 2 + 5/\lambda_{\max}$ )

**Sous-additivité de l'entropie jusqu'au temps d'Ehrenfest.** Une fois fixé  $\delta' > 0$ , on applique donc le principe d'incertitude entropique (théorème 4.16), aux objets suivants :

- l'espace de Hilbert est  $\mathcal{H} = L^2(X)$ ,
- on considère la partition quantique de l'unité  $\mathcal{P}^{(n)} = (P_\epsilon^*)_{|\epsilon|=n}$  associée aux suites de longueur  $n = \lfloor \frac{(1-\delta') \log \hbar}{\lambda_{\max}} \rfloor$
- les poids  $\alpha, \beta$  sont donnés par  $\alpha_\epsilon = J_n^u(\epsilon)^{-1}$ ,  $\beta_\epsilon = J_n^u(\epsilon)^{-1/2}$ ,
- on utilise l'opérateur unitaire  $T = U^n$ .

Suivant les notations mises au point précédemment, on note  $\Psi_\epsilon = P_\epsilon^* \Psi$  pour tout vecteur normalisé  $\Psi \in \mathcal{H}$ . L'entropie de  $\Psi$  dans la partition  $\mathcal{P}^{(n)}$  s'écrit

$$h_n(\Psi) = h_{\mathcal{P}^{(n)}}(\Psi) = - \sum_{|\epsilon|=n} \|\Psi_\epsilon\|^2 \log \|\Psi_\epsilon\|^2. \quad (4.26)$$

De même, la pression de  $\Psi$  dans la partition  $\mathcal{P}^{(n)}$ , associée aux poids  $\alpha$  ou  $\beta$ , s'écrit

$$p_{n,\alpha}(\Psi) = h_n(\Psi) + 2 \sum_{|\epsilon|=n} \|\Psi_\epsilon\|^2 \log J_n^u(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n), \quad (4.27)$$

$$p_{n,\beta}(\Psi) = h_n(\Psi) + \sum_{|\epsilon|=n} \|\Psi_\epsilon\|^2 \log J_n^u(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n). \quad (4.28)$$

L'inégalité (4.25) se réexprime sous la forme

$$c_{\mathcal{C}_\hbar}^{\alpha,\beta}(U^n) \leq C \hbar^{-(d-1+c\delta)}$$

avec la nouvelle notation

$$c_{\mathcal{C}_\hbar}^{\alpha,\beta}(U^n) = \sup_{\epsilon, \epsilon'} \sup_{\phi \in \mathcal{C}_\hbar, \|\phi\|=1} \alpha_{\epsilon'} \beta_\epsilon \|P_{\epsilon'}^* U^n P_\epsilon \phi\|.$$

Le théorème 4.16 ne s'applique pas, puisque les  $P_\epsilon$  ne sont pas des projecteurs orthogonaux. Mais comme nous nous sommes restreints aux cônes  $\mathcal{C}_\hbar$  sur lesquels les  $P_\epsilon$  agissent presque comme des projecteurs, on peut reprendre les détails techniques de la preuve du théorème de Riesz–Thorin et montrer une version approchée de l'inégalité (4.22), avec un terme correctif  $o(1)$  qui tend vers 0 avec  $\hbar$  :

$$p_{n,\alpha}(\psi_\hbar) + p_{n,\beta}(\psi_\hbar) \geq -2 \log c_{\mathcal{C}_\hbar}^{\alpha,\beta}(U^n) + o(1)$$

et donc

$$\begin{aligned} p_{n,\alpha}(\psi_\hbar) + p_{n,\beta}(\psi_\hbar) &\geq 2(d-1+c\delta) \log \hbar + \mathcal{O}(1) \\ &\geq -2 \frac{(d-1+c\delta) \lambda_{\max}}{(1-\delta')} n + \mathcal{O}(1). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Avant de prendre la limite  $\hbar \rightarrow 0$  dans cette inégalité, démontrons que la même borne inférieure est valide si l'on remplace le temps  $n \asymp |\log \hbar|$  par un temps fixé  $n_o$ , et la partition correspondante  $\mathcal{P}^{(n)}$ , dépendant de  $\hbar$ , par la partition fixée  $\mathcal{P}^{(n_o)}$ . On utilise pour cela la propriété de *sous-additivité* suivante, analogue semiclassique de la sous-additivité de l'entropie et de la pression classiques (3.50) :

**Proposition 4.19** (Sous-additivité). *Soit  $(\psi_\hbar)$  une fonction propre normalisée satisfaisant  $(-\hbar^2 \Delta - 1)\psi_\hbar = 0$ . Fixons  $\delta' > 0$  et  $n_o \in \mathbb{N}$ . Il existe alors une fonction  $R(\hbar) = \mathcal{O}(\hbar^{\delta'/4})$  telle qu'on ait l'inégalité suivante, pour  $\hbar$  petit, uniformément pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n_o + n \leq \frac{(1-\delta')|\log \hbar|}{\lambda_{\max}}$  :*

$$p_{n_o+n,\alpha}(\psi_\hbar) \leq p_{n_o,\alpha}(\psi_\hbar) + p_{n-1,\alpha}(\psi_\hbar) + R(\hbar).$$

De même pour  $p_{n_o+n,\beta}(\psi_\hbar)$ .

La preuve reprend les arguments utilisés pour les systèmes dynamiques classiques : elle n'est donc valable que jusqu'au temps d'Ehrenfest  $\frac{|\log \hbar|}{\lambda_{\max}}$ , qui est essentiellement le temps auquel le système dynamique  $(\Psi^{0,0}, U^t, \psi_\hbar)$  cesse d'être commutatif, dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$  [BouR02, AN06].

Cette sous-additivité nous permet de terminer la preuve du théorème 4.10. Fixons  $n_o \in \mathbb{N}$ , et soit  $n = \lfloor \frac{(1-\delta')|\log \hbar|}{\lambda_{\max}} \rfloor$ . En effectuant la division euclidienne  $n = q(n_o + 1) + r$  ( $r < n_o$ ), la proposition 4.19 implique

$$\frac{p_{n,\alpha}(\psi_\hbar)}{n} \leq \frac{p_{n_o,\alpha}(\psi_\hbar)}{n_o} + \frac{p_{r,\alpha}(\psi_\hbar)}{n} + \frac{R(\hbar)}{n_o}.$$

En utilisant (2.5), (4.29) et le fait que  $p_{r,\alpha}(\psi_\hbar) + p_{r,\beta}(\psi_\hbar)$  reste borné quand  $\hbar \rightarrow 0$ , on trouve

$$\frac{p_{n_o,\alpha}(\psi_\hbar)}{n_o} + \frac{p_{n_o,\beta}(\psi_\hbar)}{n_o} \geq -2 \frac{(d-1+c\delta)\lambda_{\max}}{(1-\delta')} + \mathcal{O}(1/n). \quad (4.30)$$

L'entier  $n_o$  étant désormais fixé, on fait tendre  $\hbar \rightarrow 0$  (de sorte que  $n \rightarrow \infty$ ). Remarquons que

$$\|P_\epsilon^* \psi_\hbar\|^2 = \|P_{\epsilon_0} P_{\epsilon_1}(1) \cdots P_{\epsilon_n}(n) \psi_\hbar\|^2. \quad (4.31)$$

Prenons une suite extraite de  $(\psi_\hbar)$  telle que les mesures de Wigner  $\mu_\hbar = \mu_{\psi_\hbar}$  convergent vers une mesure semiclassique  $\mu_0$  sur  $\mathcal{E} = S^*X$ , invariante par le flot géodésique. Supposons que  $\mu_0$  ne charge pas le bord de la partition  $O$ , ce qui est toujours possible quitte à modifier légèrement celle-ci. Pour toute suite  $\epsilon$  de longueur  $n_o$ , les lois (2.5), (2.6) du calcul pseudodifférentiel impliquent la convergence de  $\|P_\epsilon^* \psi_\hbar\|^2$  vers  $\mu_0(\{\epsilon\})$ , où  $\{\epsilon\}$  désigne l'ensemble  $O_{\epsilon_0} \cap g^{-1}O_{\epsilon_1} \cdots \cap g^{-n_o}O_{\epsilon_{n_o}}$  sur  $T^*X$ . Ainsi  $h_{n_o}(\psi_{\hbar_k})$  converge vers l'entropie classique

$$h_{O(n_o)}(\mu_0) = - \sum_{|\epsilon|=n_o} \mu_0(\{\epsilon\}) \log \mu_0(\{\epsilon\}) \stackrel{\text{def}}{=} h_{n_o}(\mu_0).$$

Par conséquent, le terme de gauche de (4.30) converge vers

$$\frac{2}{n_o} h_{n_o}(\mu_0) + \frac{3}{n_o} \sum_{|\epsilon|=n_o} \mu_0(\{\epsilon\}) \log J_{n_o}^u(\epsilon). \quad (4.32)$$

Comme  $\mu_0$  est  $g^t$ -invariante et que  $J_{n_o}^u$  a une structure multiplicative (4.17), le second terme de (4.32) se simplifie :

$$\sum_{|\epsilon|=n_o} \mu_0(\{\epsilon\}) \log J_{n_o}^u(\epsilon) = n_o \sum_{\epsilon_0, \epsilon_1} \mu_0(\{\epsilon_0 \epsilon_1\}) \log J_1^u(\epsilon_0, \epsilon_1).$$

On obtient la borne inférieure

$$\frac{h_{n_o}(\mu_0)}{n_o} \geq -\frac{3}{2} \sum_{\epsilon_0, \epsilon_1} \mu_0(\{\epsilon_0 \epsilon_1\}) \log J_1^u(\epsilon_0, \epsilon_1) - \frac{(d-1+c\delta)\lambda_{\max}}{(1-\delta')}; \quad (4.33)$$

$\delta$  et  $\delta'$  sont arbitrairement petits et peuvent à ce stade être annulés.

Faisons alors tendre  $n_o$  vers  $+\infty$  : par définition,  $\frac{h_{n_o}(\mu_0)}{n_o}$  converge vers  $h_O(\mu_0, g)$  (voir l'annexe du chapitre 3). Ensuite considérons des partitions  $(O_k)$  de diamètre  $\varepsilon/2$  arbitrairement petit. Le premier terme à droite de (4.33) converge vers  $-\frac{3}{2} \int_{\mathcal{E}} \log J^u(\rho) d\mu(\rho)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tandis que  $h_O(\mu_0, g)$  tend vers  $h_{KS}(\mu_0)$ , ce qui démontre (4.8).

Finalement, bien que cette preuve soit de la même veine que celle du théorème 4.8, certains aspects sont assez différents. Rappelons que la preuve du théorème 4.8 demandait d'étudier la dynamique quantique bien au-delà du temps d'Ehrenfest — qui est le temps nécessaire pour “délocaliser” un état initial gaussien de variance  $h$ . Ici on n'a eu besoin d'aller que jusqu'au temps d'Ehrenfest. Le fait que ce dernier puisse en courbure variable dépendre de la donnée initiale explique que l'inégalité obtenue (4.8) ne paraisse pas optimale. Il serait d'autant plus intéressant d'arriver à l'améliorer sous la forme (4.10), que la plupart des autres points de la preuve semblent pouvoir s'adapter au cas d'un flot géodésque sans points conjugués. Dans ce cas, l'inégalité (4.10) impliquerait qu'une mesure semiclassique ne peut être entièrement portée par une orbite périodique instable.

# Liste des travaux.

- N. Anantharaman, *Precise counting results for closed orbits of Anosov flows*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **33** no. 1, 33–56 (2000).
- N. Anantharaman, *Counting geodesics which are optimal in homology*, Ergodic Theory Dynam. Systems **23** no. 2, 353–388 (2003).
- N. Anantharaman, *On the zero-temperature or vanishing viscosity limit for Markov processes arising from Lagrangian dynamics*, J. Eur. Math. Soc. **6** no. 2, 207–276 (2004).
- N. Anantharaman, *Entropy and the localization of eigenfunctions*, à paraître dans Ann. Math.
- N. Anantharaman, R. Iturriaga, P. Padilla, H. Sánchez, *Physical solutions of the Hamilton-Jacobi equation*, Disc. Cont. Dyn. Syst. B **5** no. 3, 513–528 (2005).
- N. Anantharaman, S. Nonnenmacher, *Semi-classical entropy of the Walsh-quantized baker's map*, à paraître dans Ann. I.H.P.
- N. Anantharaman, S. Nonnenmacher, *Half-delocalization of eigenfunctions of the laplacian on an Anosov manifold*, prépublication.
- N. Anantharaman, S. Zelditch, *Patterson–Sullivan distributions and quantum ergodicity*, à paraître dans Ann. I.H.P.

# Bibliographie

- [AS82] M. Aizenmann, B. Simon, *Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators*, Comm. Pure Appl. Math. **35** no. 2, 209–273 (1982).
- [AF94] R. Alicki, M. Fannes, *Defining quantum dynamical entropy*, Lett. Math. Phys. **32** no. 1, 75–82 (1994).
- [A04] N. Anantharaman, *On the zero-temperature or vanishing viscosity limit for Markov processes arising from Lagrangian dynamics*, J. Eur. Math. Soc. **6** no. 2, 207–276 (2004).
- [A05] N. Anantharaman, *Entropy and the localization of eigenfunctions*, à paraître dans Ann. Math.
- [AIPS04] N. Anantharaman, R. Iturriaga, P. Padilla, H. Sánchez, *Physical solutions of the Hamilton-Jacobi equation*, Disc. Cont. Dyn. Syst. B **5** no. 3, 513–528 (2005).
- [AN05] N. Anantharaman, S. Nonnenmacher, *Semi-classical entropy of the Walsh-quantized baker’s map*, à paraître dans Ann. I.H.P.
- [AN06] N. Anantharaman, S. Nonnenmacher, *Half-delocalization of eigenfunctions of the laplacian on an Anosov manifold*, prépublication.
- [AZeld06] N. Anantharaman, S. Zelditch, *Patterson–Sullivan distributions and quantum ergodicity*, à paraître dans Ann. I.H.P.
- [Az82] R. Azencott, *Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d’intégrales de Feynman*, Seminar on Probability, XVI, Supplement, pp. 237–285, Lecture Notes in Math., 921, Springer, Berlin-New York, 1982.
- [AMB92] S. Aubry, R.S. McKay, C. Baesens, *Equivalence of uniform hyperbolicity for symplectic twist maps and phonon gap for Frenkel-Kontorova models*, Physica D **56**, 123–134 (1992).

- [BaVor89] N. L. Balazs and A. Voros, *The quantized baker's transformation*, Ann. Phys. (NY) **190**, 1–31 (1989).
- [BCD] M. Bardi, I. Capuzzo Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Birkhäuser 1997.
- [BA88] G. Ben Arous, *Méthodes de Laplace et de la phase stationnaire sur l'espace de Wiener*, Stochastics **25** no. 3, 125–153 (1988).
- [BA88-2] G. Ben Arous, *Développement asymptotique du noyau de la chaleur hypoelliptique hors du cut-locus*, Ann. Sci. E.N.S. 4<sup>e</sup> série **21**, 307–331 (1988).
- [BADs93] G. Ben Arous, J.D. Deuschel, D.W. Stroock, *Precise asymptotics in large deviations*, Bull. Sci. Math. **117** no. 1, 107–124 (1993).
- [Bera77] P. Bérard, *On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points*. Math. Z. **155** no. 3, 249–276 (1977).
- [Berr77] M.V. Berry, *Regular and irregular semiclassical wave functions*, J.Phys. **A 10**, 2083-2091 (1977).
- [Bes03] U. Bessi, *Aubry-Mather theory and Hamilton-Jacobi equations*, Comm. Math. Phys. **235** 3, 495-511 (2003).
- [Bo91] O. Bohigas, *Random matrix theory and chaotic dynamics*, in M.J. Giannoni, A. Voros and J. Zinn-Justin eds., *Chaos et physique quantique*, (École d'été des Houches, Session LII, 1989), North Holland, 1991.
- [BDB00] F. Bonechi, S. De Bièvre, *Exponential mixing and  $|\ln \hbar|$  time scales in quantized hyperbolic maps of the torus*, Comm. Math. Phys. **211**, 659–686 (2000).
- [BDB03] F. Bonechi, S. De Bièvre, *Controlling strong scarring for quantized ergodic toral automorphisms*, Duke Math. J. **117** no. 3, 571–587 (2003).
- [BHJ25-I] M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan, *Zur Quantenmechanik*, Zeitschrift f. Physik **34**, 858–888 (1925).
- [BHJ25-II] M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan, *Zur Quantenmechanik II*, Zeitschrift f. Physik **35**, 557–615 (1925).
- [BLi03] J. Bourgain, E. Lindenstrauss, *Entropy of quantum limits*. Comm. Math. Phys. **233** no. 1, 153–171 (2003).



- [BouDB96] A. Bouzouina and S. De Bièvre, *Equipartition of the eigenfunctions of quantized ergodic maps on the torus*, Commun. Math. Phys. **178**, 83–105 (1996).
- [BouR02] A. Bouzouina, D. Robert, *Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables*, Duke Math. J. **111** no. 2, 223–252 (2002).
- [Brill26] L. Brillouin, *La mécanique ondulatoire de Schrödinger; une méthode générale de résolution par approximations successives*, C. R. A. S. **183**, 24–26 (1926).
- [Broglie24] L. de Broglie, *Annales de Physique (10)* **3** 1925, p. 22 (Thèse, 1924).
- [CdV85] Y. Colin de Verdière, *Ergodicité et fonctions propres du laplacien*, Comm. Math. Phys. **102** no. 3, 497–502 (1985).
- [CdVP94] Y. Colin de Verdière, B. Parisse, *Equilibre instable en régime semi-classique I : concentration microlocale*, Comm. Partial Differential Equations **19** no. 9-10, 1535–1563 (1994).
- [CdV99] Y. Colin de Verdière, *Déterminants et intégrales de Fresnel*, Symposium à la Mémoire de François Jaeger (Grenoble, 1998), Ann. Inst. Fourier **49** no. 3, 861–881, 1999.
- [CNT87] A. Connes, H. Narnhofer, W. Thirring, *Dynamical entropy of  $C^*$  algebras and von Neumann algebras*, Comm. Math. Phys. **112** no. 4, 691–719 (1987).
- [Co01] G. Contreras, *Action Potential and Weak KAM Solutions*, Calc. Var. Partial Differential Equations **13** no. 4, 427–458 (2001).
- [CoDI97] G. Contreras, J. Delgado, R. Iturriaga. *Lagrangian flows: the dynamics of globally minimizing orbits II*, Bol. Soc. Bras. Mat. **28** no. 2, 155–196 (1997).
- [ConHopf64] E. D. Conway, E. Hopf, *Hamilton's theory and generalized solutions of the Hamilton-Jacobi equation*, Journal Math. Mech. **13** no. 6, 939–986 (1964)
- [CEL84] M.G. Crandall, L.C. Evans, P.-L. Lions, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** no. 2, 487–502 (1984).
- [CL83] M.G. Crandall, P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Trans. Amer. Math. Soc. **277** no. 1, 1–42 (1983).

- [DBDEG94] S. De Bièvre, M. Degli Esposti, R. Giachetti, *Quantization of a class of piecewise affine transformations on the torus*, Comm. Math. Phys. **176** no. 1, 73–94 (1996).
- [DENW06] M. Degli Esposti, S. Nonnenmacher B. Winn, *Quantum Variance and Ergodicity for the baker’s map*, Commun. Math. Phys. (in press) [math-ph/0412058]
- [DE93] M. Degli Esposti, *Quantization of the orientation preserving automorphisms of the torus*, Ann. I.H.P. **58**, 323–341 (1993).
- [DZ] A. Dembo, O. Zeitouni, *Large deviations techniques and applications*, Jones and Bartlett, 1992.
- [DimSjo] M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*. London Math. Soc. Lecture Notes Series 268, Cambridge University Press (1999).
- [Dirac33] P. A. M Dirac, *The principles of quantum mechanics*, The Clarendon Press, Oxford (1935), second edition; also, Physik. Zeits. Sowjetunion **3**, 64 (1933).
- [DVa76] M. Donsker, S. Varadhan, *Asymptotic evaluation of Markov process expectations for large time (III)*, Comm. Pure Appl. Math. **29**, 389–461 (1976).
- [DH72] J.J. Duistermaat, L. Hörmander, *Fourier integral operators. II*, Acta Math. **128** no. 3-4, 183–269 (1972).
- [DunSchw] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, Interscience, New York, 1958.
- [Ein17] A. Einstein, *Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein*, Verhandl. deut. physik. Ges. (1917).
- [E1744] L. Euler, *De Motu Projectorum in medio non resistente, per methodum maximorum ac minimorum determinando*, Opera Omnia, Seria Prima Vol. XXIV Bernae 1952, Additamentum II 298–308 (1744).
- [E] L.C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics 19, A.M.S., Providence R.I., 1998.
- [EGo01] L.C. Evans, D. Gomes *Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics. I*. Arch. Ration. Mech. Anal. **157** no. 1, 1–33 (2001).

- [Fa97-1] A. Fathi, *Théorème KAM faible et Théorie de Mather sur les systems Lagrangiens*, C.R. Acad. Sci. Paris Série I **324**, 1043–1046 (1997).
- [Fa97-2] A. Fathi, *Solutions KAM faibles conjuguées et barrières de Peierls*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **325**, 649–652 (1997).
- [Fa98-3] A. Fathi, *Orbites hétéroclines et ensemble de Peierls*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **326**, no. 10, 1213–1216 (1998).
- [Fa98-4] A. Fathi, *Sur la convergence du semi-groupe de Lax-Oleinik*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **327** no. 3, 267–270 (1998).
- [Fa] A. Fathi, *Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics*, livre en préparation.
- [FaSi04] A. Fathi, A. Siconolfi, *Existence of  $C^1$  critical subsolutions of the Hamilton Jacobi equation*, Invent. Math. **155** no. 2, 363–388 (2004).
- [FNDB03] F. Faure, N. Nonnenmacher, S. De Bièvre, *Scarred eigenstates for quantum cat maps of minimal periods*, Comm. Math. Phys. **239** no. 3, 449–492, (2003).
- [FN04] F. Faure, N. Nonnenmacher, *On the maximal scarring for quantum cat map eigenstates*, Comm. Math. Phys. **245** no. 1, 201–214 (2004).
- [Feyn48] R. P. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Rev. Modern Phys. **20** no. 2, 367–387 (1948).
- [FeynHibbs] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill (1965).
- [FIS] W. Fleming, M. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer 1993.
- [Foll] G. B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Princeton University Press 1989.
- [FrW] M.I. Freidlin, A.D. Wentzell. *Random Perturbations of Dynamical Systems*. Springer 1998.
- [GL93] P. Gérard and E. Leichtnam, *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem*, Duke Math. J. **71**(2), 559–607 (1993).
- [Go02] D. Gomes, *A stochastic analog of Aubry-Mather theory*, Nonlinearity **15** no. 3, 581–603 (2002).

- [GS77] V. Guillemin, S. Sternberg, *Geometric asymptotics*, Am. Math. Soc. Survey, Vol.14 (1977).
- [Gutz] M. C. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics*, Springer-Verlag New York, 1990.
- [H1830] W. R. Hamilton, *Theory of Systems of Rays*, Transactions of the Royal Irish Academy Vol. XV, 69–174 (1828). Supplement Vol. XVI Part I, 4–62 (1830). Second Supplement Vol. XVI Part II, 93–125 (1831).
- [H1834] W. R. Hamilton, *On a General Method in Dynamics; by which the Study of the Motions of all free Systems of attracting or repelling Points is reduced to the Search and Differentiation of one central Relation, or characteristic Function*, Philosophical transactions of the Royal Society of London, 247–308 (1834).
- [HB80] J.H. Hannay and M.V. Berry, *Quantization of linear maps on the torus—Fresnel diffraction by a periodic grating*, Physica **D** **1**, 267–290 (1980).
- [H25] W. Heisenberg, *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*, Zeitschrift f. Physik **33**, 879–893 (1925).
- [Hel] B. Helffer, *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, Lecture Notes in Mathematics, 1336. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [Helffer1] B. Helffer, *30 ans d'analyse semi-classique : bibliographie commentée*, notes disponibles sur la page personnelle de Bernard Helffer.
- [Helffer2] B. Helffer, *On  $h$ -pseudodifferential operators and applications*, à paraître dans Encyclopedia of Mathematical Physics.
- [HelMR87] B. Helffer, A. Martinez, D. Robert *Ergodicité et limite semi-classique*, Comm. Math. Phys. **109** no. 2, 313–326 (1987).
- [Hell89] E. J. Heller, in: *Chaos and Quantum Physics*, Les Houches 1989. Ed. M.J. Giannoni, A. Voros, J. Zinn-Justin, Amsterdam, North-Holland 549–661 (1991).
- [HisSig] P. D. Hislop, I. M. Sigal, *Introduction to spectral theory. With application to Schrödinger operators*. Applied Mathematical Science 113, Springer Verlag New York, 1996.
- [Hopf50] E. Hopf, *The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* , Comm. Pure Appl. Math. **3**, 201–230 (1950).

- [Ho71] L. Hörmander, *Fourier integral operators. I*, Acta Math. 127 no. 1-2, 79–183 (1971).
- [Ho79] L. Hörmander, *The Weyl Calculus of pseudodifferential operators*, Comm. Pure Appl. Math. 32, p. 359-443 (1979).
- [Ho] L. Hörmander, *The Analysis of linear Partial Differential Operators*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag (1984).
- [JKM96] H.R. Jauslin, H.O. Kreiss, J. Moser, *On the forced Burgers equation with periodic boundary conditions*, Differential Equations. La Pietra 1996, Proc. of Symp. Pure Math. **65**.
- [Kac49] M. Kac, *On distributions of certain Wiener functionals*, Trans. A.M.S. **65**, 1–13 (1949).
- [Kac51] M. Kac, *On some connections between probability theory and differential and integral equations*, Proc. 2nd Berkeley Symposium Math. Stat. Prob. 189–215 (1951).
- [Kac] M. Kac, *Probability and related topics in physical sciences*, Lectures in Applied Math. I, Proceedings of the Summer Seminar, Boulder Colorado 1957, Wiley.
- [KH] A.B. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its applications **54**. Cambridge University Press 1995.
- [Kea90] J.P. Keating, *Asymptotic properties of the periodic orbits of cat maps*, Nonlinearity **4**, 277–307 (1990).
- [Kell58] J. B. Keller, *Corrected Bohr-Sommerfeld Quantum conditions for Nonseparable Systems*, Ann. Physics **4**, 180–188 (1958).
- [Kelm05] D. Kelmer, *Arithmetic quantum unique ergodicity for symplectic linear maps of the multidimensional torus*, prépublication 2005.
- [Kr26] H. A. Kramers, *Wellenmechanik und halbzahlige quantisierung*, Zeitschrift f. Physik **39**, 828–840 (1926).
- [Kraus87] K. Kraus, *Complementary observables and uncertainty relations*, Phys. Rev. **D 35**, 3070–3075 (1987).
- [Kuo75] H.H. Kuo, *Gaussian measures in Banach spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 463. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

- [KurRud00] P. Kurlberg and Z. Rudnick, *Hecke theory and equidistribution for the quantization of linear maps of the torus*, Duke Math. J. **103**, 47–77 (2000).
- [L1788] J.-L. Lagrange, *Mécanique analytique* éd. A. Blanchard, Paris 1965 (1788).
- [Lax57] P. D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math **10**, 537–566 (1957).
- [LLi03] F. Ledrappier, E. Lindenstrauss, *On the projections of measures invariant under the geodesic flow*, Int. Math. Res. Not. **2003** no. 9, 511–526.
- [LY85] F. Ledrappier, L.-S. Young, *The metric entropy of diffeomorphisms. I. Characterization of measures satisfying Pesin’s entropy formula*, Ann. of Math. (2) **122** no. 3, 509–539 (1985).
- [Leray] J. Leray, *Lagrangian analysis and quantum mechanics. A mathematical structure related to asymptotic expansions and the Maslov index*. English transl. by Carolyn Schroeder. Cambridge, Massachusetts; London: The MIT Press (1981).
- [LS77] S. Levit, U. Smilansky, *A theorem on infinite products of eigenvalues of Sturm-Liouville type operators*, Proc. A.M.S. **65** no.2, 299–302 (1977).
- [Lif] J. Lifermann, *Les méthodes rapides de transformation du signal: Fourier, Walsh, Hadamard, Haar*, Masson, Paris, 1979.
- [Li03] E. Lindenstrauss, *Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity*, Ann. of Math. (2) **163** no. 1, 165–219 (2006).
- [Lions] P.L. Lions. *Generalized solutions of Hamilton Jacobi equations* Research Notes in Mathematics 69, Pitman Advanced Publishing Program, Boston 1982.
- [LPapVa] P.L. Lions, G. Papanicolaou, S.R.S Varadhan, *Homogenization of Hamilton–Jacobi equations*, manuscrit non publié.
- [MaaUff88] H. Maassen and J. B. M. Uffink, *Generalized entropic uncertainty relations*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1103–1106 (1988).
- [Mn92] R. Mañé, *On the minimizing measures of Lagrangian dynamical systems*, Nonlinearity **5** (3), 623–638 (1992).
- [Mn96] R. Mañé, *Generic properties and problems of minimizing measures of Lagrangian systems*, Nonlinearity **9**, 273–310 (1996).

- [Mn] R. Mañé, *Lagrangian flows: the dynamics of globally minimizing orbits*, International Congress on Dynamical Systems in Montevideo (a tribute to Ricardo Mañé), F. Ledrappier, J. Lewowicz, S. Newhouse eds, Pitman Research Notes in Math. **362** (1996) 120–131. Reprinted in Bol. Soc. Bras. Mat. Vol **28**, N. 2, (1997) 141-153.
- [MarRud00] J. Marklof and Z. Rudnick, *Quantum unique ergodicity for parabolic maps*, Geom. Funct. Anal. **10** 1554–1578 (2000).
- [Masl65] V. P. Maslov, *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*, suivi de deux notes complémentaires de V. I. Arnol'd et V. C. Bouslaev, préface de J. Leray, Dunod Paris (1965).
- [Mat91] J. Mather, *Action minimizing measures for positive definite Lagrangian systems*, Math. Z. **207** 169–207 (1991).
- [MeeLak05] N. Meenakshisundaram and A. Lakshminarayan, *Multifractal eigenstates of quantum chaos and the Thue-Morse sequence*, Phys. Rev. **E 71**, 065303 (2005).
- [M1744] P. L. Moreau de Maupertuis, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences MDCCXLVIII*, Paris, Imprimerie Royale, 417–426 (1744).
- [NVor98] S. Nonnenmacher and A. Voros, *Chaotic eigenfunctions in phase space*, J. Stat. Phys. **92**, 431–518 (1998).
- [NZw05] S. Nonnenmacher and M. Zworski, *Distribution of resonances for open quantum maps*, preprint (2005), arXiv:math-ph/0505034.
- [Ol56] O. A. Oleïnik, *The problem of Cauchy for non-linear differential equations of the first order with discontinuous initial conditions*, Trudy Moskov. Mat. Obšč. **5**, 433–454 (1956).
- [Ol57] O. A. Oleïnik, *Discontinuous solutions of non-linear differential equations*, A.M.S. Translations Series 2 **26**, 95–172 (1963).
- [Rob] D. Robert, *Autour de l'approximation semi-classique*. Progress in Mathematics no. 68, Birkhäuser (1987).
- [Ros05] L. Rosenzweig, *Quantum unique ergodicity for maps on the torus*, preprint (2005), arXiv:math-ph/0501044.
- [RudSa94] Z. Rudnick, P. Sarnak, *The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds*, Comm. Math. Phys **161** no. 1, 195–213 (1994).

- [Sar90] M. Saraceno, *Classical structures in the quantized baker transformation* Ann. Phys. (NY) **199**, 37–60 (1990).
- [SarVor94] M. Saraceno and A. Voros, *Towards a semiclassical theory of the quantum baker’s map*, Physica **D 79**, 206–268 (1994).
- [Sa95] P. Sarnak, *Arithmetic quantum chaos*, The Schur lectures (1992) (Tel Aviv), 183–236, Israel Math. Conf. Proc., 8, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1995.
- [Sa03] P. Sarnak, *Spectra of hyperbolic surfaces*, Bull. A.M.S. **40** no. 4, 441–478 (2003).
- [Sa-hp] [www.math.princeton.edu/sarnak/RudnickLtrSept2002.pdf](http://www.math.princeton.edu/sarnak/RudnickLtrSept2002.pdf)
- [Sn74] A. I. Snirelman, *Ergodic properties of eigenfunctions (Russe)*, Uspehi Mat. Nauk. **29** no. 6 (180), 181–182 (1974).
- [Sch66] M. Schilder, *Some asymptotic formulas for Wiener integrals*, Trans. A.M.S. **125**, 63–85 (1966).
- [Schr26-I] E. Schrödinger, *Quantisierung als Eigenwertproblem (erste Mitteilung)*, Annalen der Physik (4) **79** 361–376 (1926), traduit en français dans les *Mémoires sur la mécanique ondulatoire*, Librairie Félix Alcan Paris, 1933.
- [Schr26-II] E. Schrödinger, *Quantisierung als Eigenwertproblem (zweite Mitteilung)*, Annalen der Physik (4) **79** 489–527 (1926), traduit en français dans les *Mémoires sur la mécanique ondulatoire*, Librairie Félix Alcan Paris, 1933.
- [Schr26-III] E. Schrödinger, *Über das Verhältnis der Heisenberg–Born–Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen*, Annalen der Physik (4) **79** 734–756 (1926), traduit en français dans les *Mémoires sur la mécanique ondulatoire*, Librairie Félix Alcan Paris, 1933.
- [Sim] B. Simon, *Functional integration and quantum physics*. Pure and Applied Mathematics, 86. Academic Press, Inc. (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers), New York-London, 1979.
- [Somm] A. Sommerfeld, *Atombau und Spektrallinien*, Dritte Auflage, Braunschweig (1922), traduction française *La constitution de l’atome et les raies spectrales*, A. Blanchard (1923).
- [St30] M. H. Stone, *Linear transformations in Hilbert space III: operational methods and group theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **16**, 172–175 (1930).



- [VV28] J. H. Van Vleck, *The correspondence principle in the statistical interpretation of quantum mechanics*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **14**, 178–188 (1928).
- [Va66] S. R. S. Varadhan, *Asymptotic probabilities and differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **19**, 261–286 (1966).
- [Va67] S. R. S. Varadhan, *Diffusion processes in small time intervals*, Comm. Pure Appl. Math. **20**, 659–685 (1967).
- [Vo95] D. Voiculescu, *Dynamical approximation entropies and topological entropy in operator algebras*, Comm. Math. Phys **170** 249–281 (1995).
- [vN31] J. von Neumann, *Die Eindeutigkeit des Schrödingerschen Operatoren*, Math. Ann. **104**, 570–578 (1931).
- [Vor] A. Voros, *Développements semi-classiques*, Thèse d'état (1977).
- [Vor77] A. Voros, *Semiclassical ergodicity of quantum eigenstates in the Wigner representation*, *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, G. Casati, J. Ford, eds., in: Proceedings of the Volta Memorial Conference, Como, Italy, 1977, Lect. Notes Phys. Springer-Verlag, Berlin **93**, 326–333 (1979) .
- [Vor78] A. Voros, *An algebra of pseudodifferential operators and the asymptotics of quantum mechanics*, J. Funct. An. **29**, 104–132 (1978).
- [Weh79] A. Wehrl, *On the relation between classical and quantum-mechanical entropy*, Rept. Math. Phys. **16**, 353–358 (1979).
- [Wtz26] G. Wentzel, *Eine Verallgemeinerung der quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik*, Zeitschrift f. Physik **38**, 518–529 (1926).
- [Weyl27] H. Weyl, *Quantenmechanik und Gruppentheorie*, Z. Physik **46**, 1–46 (1927).
- [Wol01] S.A. Wolpert, *The modulus of continuity for  $\Gamma_0(m)/\mathbb{H}$  semi-classical limits*, Commun. Math. Phys. **216**, 313–323 (2001).
- [Ze86] S. Zelditch, *Pseudodifferential analysis on hyperbolic surfaces*, J. Funct. Anal. **68** no. 1, 72–105 (1986).
- [Ze87] S. Zelditch, *Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces*, Duke Math. J. **55** no. 4, 919–941 (1987).

- [Ze96] S. Zelditch, *Quantum ergodicity of  $C^*$  dynamical systems*, Commun. Math. Phys, **177**, 507–528 (1996).
- [ZeZw96] S. Zelditch and M. Zworski, *Ergodicity of eigenfunctions for ergodic billiards*, Commun. Math. Phys, **175**, 673–682 (1996).
- [Zyc01] K. Życzkowski, *Localization of eigenstates and mean Wehrl entropy*, Physica **E 9**, 583–590 (2001).