Université Louis Pasteur, Strasbourg — Mercredi 9 juin 2004
U.F.R. de mathématique et d'informatique

D.E.U.G. Sciences première année, mention MIAS

Histoire des Mathématiques — *Durée : 2 heures*

Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont interdits.

Exercice 1 — On attribue parfois le qualificatif de *père de l'Algèbre* à al-Khwārizmī, Diophante et Viète. Rappelez où et quand vécurent ces trois mathématiciens, en précisant pour chacun d'eux la langue dans laquelle il a écrit ses traités. Parmi les concepts suivants, dites en argumentant s'ils furent utilisés ou ignorés par chacun des trois mathématiciens :

(1) opérations sur les équations;
(2) notion d'inconnue (lorsque c'est possible, précisez les mots utilisés par chacun des trois mathématiciens pour la désigner);
(3) notation spécifique pour l'inconnue;
(4) calcul littéral (calcul avec des lettres représentant des nombres);
(5) écriture symbolique des calculs algébriques (emploi de symboles pour remplacer les descriptions en langage ordinaire);
(6) plusieurs inconnues dans une même équation.

Exercice 2 —

(a) A quelle époque et dans quels pays Newton et Leibniz ont-ils vécu ? Dans quelle langue ont-ils écrit la plupart de leurs œuvres ?

On considère la parabole semi-cubique d'équation $x^3 = ay^2$ (cf. figure 1).

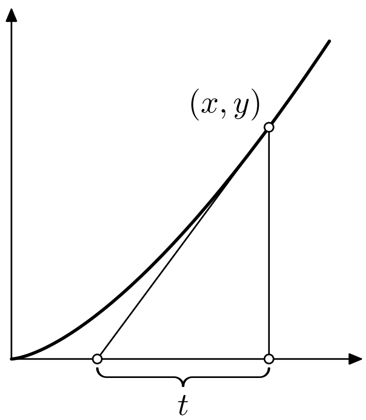


Figure 1

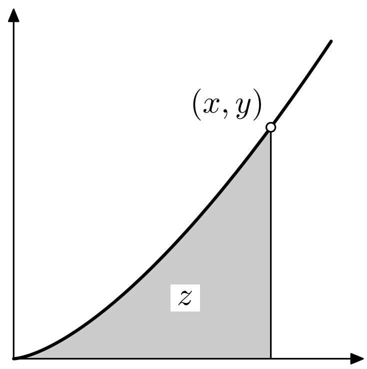


Figure 2

(b) En utilisant au choix soit la méthode des fluxions de Newton, soit la méthode des différences de Leibniz, déterminez la longueur t de la sous-tangente au point de coordonnées (x, y). Vous prendrez soin d'utiliser les notations de Newton ou Leibniz (selon la méthode choisie) et d'expliquer quelle est la nature des objets que vous manipulez.

(c) Toujours avec au choix soit la méthode de Newton, soit celle de Leibniz, calculez l'aire z de la surface située sous la parabole entre les abscisses 0 et x, représentée en grisé sur la figure 2.

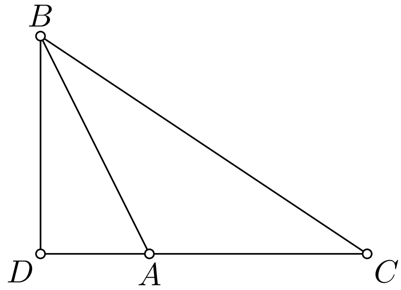
Exercice 3 — L'encadré suivant propose une traduction en français de la proposition 12 du deuxième livre des *Eléments* d'Euclide.

PROPOSITION 12

(1) Dans les triangles obtusangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle obtus est plus grand que les carrés sur les côtés contenant l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle obtus sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'extérieur par la perpendiculaire au-delà de l'angle obtus.

(2) Soit le triangle obtusangle ABC ayant l'angle sous BAC obtus, et, qu'à partir du point B soit menée BD, perpendiculaire sur CA, prolongée.

(3) Je dis que le carré sur BC est plus grand que les carrés sur BA, AC de deux fois le rectangle contenu par CA, AD.



(4) En effet, puisque la droite CD a été coupée au hasard au point A, le carré sur DC est donc égal aux carrés sur CA, AD et deux fois le rectangle contenu par CA, AD (Proposition 4 du Livre II).

(5) Que celui sur DB soit ajouté de part et d'autre. Les carrés sur CD, DB sont donc égaux aux carrés sur CA, AD, DB et à deux fois le rectangle contenu par CA, AD.

(6) Mais d'une part le carré sur CB est égal à ceux sur CD, DB; en effet l'angle en D est droit (Proposition 47 du Livre I). Et d'autre part le carré sur AB est égal à ceux sur AD, DB. Donc le carré sur CB est égal aux carrés sur CA, AB et deux fois le rectangle contenu par CA, AD.

(7) De sorte que le carré sur CB est plus grand que les carrés sur CA, AB de deux fois le rectangle contenu par CA, AD.

(8) Donc dans les triangles obtusangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle obtus est plus grand que les carrés sur les côtés contenant l'angle obtus de deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle obtus sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'extérieur par la perpendiculaire au-delà de l'angle obtus. Ce qu'il fallait démontrer.

Questions sur le texte :

(a) Le texte de chacune des propositions des *Eléments* d'Euclide suit une structure bien précise. Repérez dans le texte ci-dessus les différentes étapes, en indiquant si possible leur nom et en précisant en quelques mots leur fonction au sein du texte.

(b) Traduisez dans le langage algébrique moderne la phrase suivante, tirée de l'alinéa (3) du texte d'Euclide :

> *Le carré sur BC est plus grand que les carrés sur BA, AC de deux fois le rectangle contenu par CA, AD.*

(c) Pourquoi Euclide parle-t-il de *rectangle contenu par CA, AD* et non pas de *produit de CA par AD* ?

(d) Au cours de sa démonstration, Euclide fait appel à la Proposition 47 du Livre I. A votre avis, quel théorème cette proposition énonce-t-elle ?

(e) En utilisant le langage algébrique moderne, réécrivez la démonstration d'Euclide de façon concise.

Questions historiques sur Euclide :

(f) A quelle époque Euclide a-t-il vécu ? Dans quelle langue a-t-il rédigé les *Eléments* ? Dans quelle ville et dans le cadre de quelle institution a-t-il travaillé ?

(g) Indiquez plusieurs éléments montrant que les *Eléments* d'Euclide ont exercé une influence durable sur les mathématiques.

Corrigé et barème

Exercice 1 *(7,5 points)*

La trace la plus visible de l'existence de Diophante est qu'il nous a laissé un traité d'algèbre intitulé *Arithmétiques*, écrit en grec ancien. Sur les rares manuscrits de ce traité dont nous disposons, l'auteur est mentionné sous le nom de Diophante d'Alexandrie : Diophante aurait donc vécu à Alexandrie, en Egypte. Les textes antiques aujourd'hui connus ne permettent pas dire à quel siècle Diophante a vécu ; en outre, les mathématiques qu'il élabore n'appartiennent pas à la grande tradition de la géométrie grecque antique, de sorte que nous n'avons pas la possibilité de le placer chronologiquement par rapport aux autres savants du monde antique. Malgré ces incertitudes, l'hypothèse généralement retenue par les historiens est qu'il aurait vécu quelque part entre le I$^{\text{er}}$ et le III$^{\text{e}}$ après J.-C.

Nous avons des renseignements beaucoup plus précis sur al-Khwārizmī. Originaire d'une région montagneuse située au nord de l'actuel Iran, il a travaillé dans la première moitié du IX$^{\text{e}}$ siècle au sein de la *Maison de la Sagesse* à Bagdad, dans l'actuelle Irak. Il a rédigé ses traités en arabe, la langue officielle de la civilisation islamique du Moyen-Age.

Viète enfin est un mathématicien français de la fin de la Renaissance (fin XVI$^{\text{e}}$ début XVII$^{\text{e}}$ siècle). Comme la plupart des savants de l'époque, et comme tous les humanistes, Viète rédigeait ses traités en latin.

1 point pour chaque mathématicien si l'étudiant a fourni une réponse exacte aux trois questions posées.

Diophante s'intéressait à des problèmes de recherche de nombres satisfaisant à diverses conditions. La méthode qu'il expose dans son traité consiste à proposer une solution dans laquelle les nombres cherchés sont exprimés de façon astucieuse à l'aide d'un nombre inconnu, qu'il appelle *arithmos alogos* (littéralement : nombre non-dit ; souvent traduit en français par *arithme*). Les conditions du problème se traduisent alors par une équation. Toutefois, la notion d'équation n'est pas présentée de façon systématique dans les *Arithmétiques* : c'est seulement dans l'introduction de l'œuvre que Diophante explique comment simplifier une équation, et il ne donne pas de nom à ces opérations de simplification des équations. En revanche, Diophante dispose d'une notation abrégée pour écrire les quantités faisant intervenir l'inconnue ; cette dernière est même désignée par un symbole spécial qui ressemble à ς. Diophante n'utilise qu'une seule inconnue à chaque fois. Il ne dispose pas d'un vrai calcul littéral, qui permet de représenter les données par des lettres, et est donc forcé à toujours présenter la solution de ses problèmes sur un exemple numérique précis. Pour Diophante, la réponse la plus proche de la réalité est qu'il utilisait les concepts (2), (3) et (5).

Al-Khwārizmī a exposé une théorie systématique des équations du second degré. Il a notamment montré comment on pouvait toujours ramener une équation quelconque à une forme canonique grâce aux opérations de restauration et de comparaison. Qui dit équation dit inconnue ; al-Khwārizmī désignait cette dernière sous la nom de chose ou racine, et désignait son carré sous le nom de fortune ou *māl.* Al-Khwārizmī n'utilisait aucun symbolisme particulier : il décrivait les expressions faisant intervenir l'inconnue et son carré en mots, sans la moindre abréviation. Sa théorie ne concernait que les équations à une seule inconnue, toutes les quantités autres que l'inconnue et son carré étant des nombres explicites : donc une seule inconnue, et pas de calcul littéral. Al-Khwārizmī utilisait donc les concepts (1) et (2).

Viète a mis au point un calcul sur les espèces (selon ses propres mots), c'est-à-dire sur des lettres pouvant représenter des nombres ou des grandeurs géométriques. On lui attribue ainsi l'invention du calcul littéral. Les expressions qu'il manipule peuvent donc contenir plusieurs inconnues (représentées par des voyelles majuscules) et également des grandeurs données non-explicitées (représentées par des consonnes majuscules). Viète désigne les inconnues sous le nom de grandeurs cherchées. Les algébristes de la Renaissance avaient inventé différents procédés permettant de condenser l'écriture des expressions algébriques, avec notamment l'utilisation de différents symboles pour représenter les opérations arithmétiques ; Viète fait usage de ce symbolisme. Dans son traité l'*Art analytique*, Viète cherche à créer une théorie générale des expressions algébriques. Pour cela, il met au point plusieurs procédés permettant de transformer les équations, comme l'hypobibasme ou l'analogie. Viète utilisait donc tous les concepts (1) à (6).

La réponse des étudiants a été évaluée globalement sur 4,5 points. Notre grille de barème était de réserver 1 point pour des éléments corrects concernant le concept (1) (dont 0,5 point pour mentionner le nom des opérations qu'al-Khwārizmī utilisait — du mot arabe al-jabr (la restauration) vient notre mot algèbre), 1,5 point pour le concept (2) (0,5 point pour dire que les trois utilisaient le concept et 1 point pour les mots employés), 1,5 point pour les concepts (3), (4) et (5) (0,5 point par mathématicien), et 0,5 point pour le concept (6). Nous n'avions pas parlé en cours des opérations d'hypobibasme ou d'analogie et n'avions pas réservé de point dans le barème pour cela.

Exercice 2 *(7 points)*

(a) Newton (1642–1727) et Leibniz (1646–1716) ont travaillé dans le dernier tiers du XVII$^{\text{e}}$ siècle. La langue d'échange scientifique de l'époque était le latin, et c'est dans cette langue que ces deux savants ont rédigé la plupart de leurs œuvres. Newton était un Anglais ; il a surtout travaillé à Cambridge (Angleterre). Leibniz, un Allemand, a beaucoup voyagé ; il est à Paris (France) dans les années 1670, et c'est là qu'il commence à travailler sur son calcul différentiel ; à partir de 1676, Leibniz est au service du Duc de Hanovre (Saxe).

0,5 point pour chacun des 4 éléments demandés : fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle, Angleterre, France (avec justification) ou Etats allemands, latin.

(b) *Méthode de Newton.* On considère un point se mouvant sur la droite. Ses coordonnées, les variables x et y, sont des fluentes, des quantités qui s'écoulent. Leurs fluxions $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont les vitesses de variation. Dans un accroissement de temps infiniment petit o, les quantités x et y varient donc d'une quantité $\dot{x}o$ et $\dot{y}o$. La relation $x^3 = ay^2$ devant être valable à tout temps, nous avons

$$(x + \dot{x}o)^3 = a(y + \dot{y}o)^2.$$

En développant et en simplifiant par l'égalité $x^3 = ay^2$, nous obtenons

$$3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3 = 2ay\dot{y}o + a\dot{y}^2o^2.$$

En simpifiant par o, il vient

$$3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2 o + \dot{x}^3 o^2 = 2ay\dot{y} + a\dot{y}^2 o,$$

et comme o est infiniment petit, on arrive à $3x^2\dot{x} = 2ay\dot{y}$. En utilisant à présent la relation $y/t = \dot{y}o/\dot{x}o$, visible sur la figure 1, nous trouvons

$$t = \frac{y\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{2ay^2}{3x^2} = \frac{2}{3}x.$$

1 point pour le résultat juste, 1 point pour respecter la logique de l'époque (notations, utilisation d'une quantité infiniment petite ou du triangle infinitésimal), et 1 point pour des explications sur la nature des objets utilisés (définition d'une fluente ou d'une fluxion).

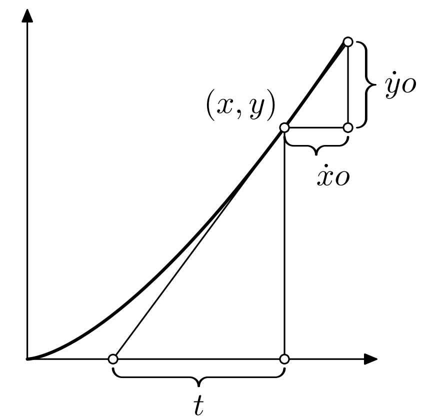


Figure 1

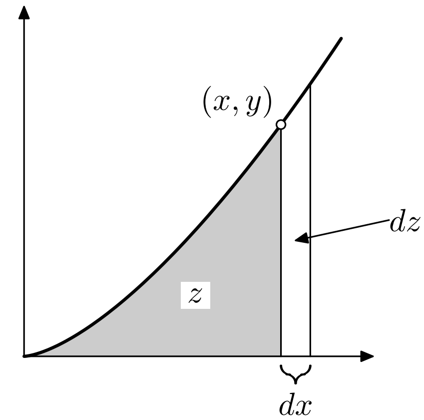


Figure 2

(c) *Méthode de Leibniz, pour changer.* Le point sur la courbe est vu comme occupant successivement des positions infiniment voisines les unes des autres. Ses coordonnées x et y, ainsi que l'aire z sous la courbe entre l'origine et l'abscisse x, sont ainsi considérées comme des quantités qui varient sur une série de valeurs infiniment proches. En formant les différences successives de la suite des valeurs que prend une variable u, on obtient une nouvelle variable, la différentielle de u, notée du. Réciproquement, l'intégrale $\int u$ d'une variable u s'obtient en formant les sommes des valeurs successives que prend la variable u.

Leibniz obtient les règles de calcul $u = \int du$ (pour toute variable u) et $dz = y\, dx$ (voir la figure 2 pour une justification de cette dernière). Nous avons donc

$$z = \int dz = \int y\, dx = \int \sqrt{\frac{x^3}{a}}\, dx = \int \frac{x^{3/2}}{\sqrt{a}}\, dx = \frac{2}{5}\frac{x^{5/2}}{\sqrt{a}}.$$

Remarque : La règle de calcul $u = \int du$ n'est pas toujours exacte : il vaudrait mieux écrire $u = \int du +$ constante. Dans le cas traité ci-dessus, la constante d'intégration est nulle car z s'annule pour $x = 0$.

Même barème que pour la question (b), sauf qu'il n'y a pas lieu d'attribuer de nouveau le point pour les explications sur la nature des objets utilisés.

Exercice 3 *(10 points)*

(a) L'alinéa (1) est l'énoncé de la proposition ; il est abstrait et général. L'alinéa (2) est l'exposition : Euclide y présente un cas particulier du problème à résoudre, en désignant les différents éléments du problème par des lettres et en rappelant les hypothèses. L'alinéa (3) est la détermination : Euclide énonce quel est le but à atteindre dans la construction et la démonstration. Les alinéas (4) à (7) présentent la démonstration. L'alinéa (8), la conclusion, répète l'énoncé de la proposition désormais prouvée.

La question était notée sur 2 points.

(b) Dans le langage algébrique moderne, l'assertion d'Euclide se traduit par la formule $BC^2 = BA^2 + AC^2 + 2\,CA \cdot AD$.

1 point.

(c) La question posée demande d'expliquer pourquoi Euclide utilise un langage géométrique plutôt qu'un langage algébrique. Le fait est que les philosophes grecs de la période classique (VII$^{\text{e}}$– IV$^{\text{e}}$ siècle) privilégient la géométrie comme sujet d'étude (comme en témoigne l'existence d'une tradition de problèmes géométriques tels la duplication du cube, la quadrature du cercle ou la trisection de l'angle) ; leurs préférences et leurs habitudes de pensées se reflètent naturellement dans le langage qu'ils utilisent. On peut toutefois approfondir la réflexion et raffiner l'argument. Chez les civilisations antérieures, algèbre, calcul arithmétique et géométrie étaient mélangées : la géométrie fournissait une interprétation visuelle des règles de calcul, tandis que les nombres servaient à mesurer toutes les grandeurs géométriques. Les premiers mathématiciens grecs suivaient cette approche. A partir de l'époque de Pythagore, le rôle des mathématiques change : elles ne sont plus un outil, mais sont à la base d'un système d'explication du monde. Une réflexion sur la nature des nombres est alors menée et conduit à la découverte de l'existence de grandeurs incommensurables. Cette découverte a provoqué une rupture entre la théorie des nombres (le calcul arithmétique) et la géométrie, cette dernière ne pouvant pas être réduite à la première par des mesures. Dès lors, la notion de produit ne concerna plus que les nombres et ne put plus être utilisée pour les longueurs de segments.

1 point pour une réponse correspondant à la deuxième phrase du paragraphe ci-dessus ; on accorde un deuxième point si des arguments historiques complémentaires et pertinents sont fournis.

(d) La proposition 47 du Livre I des *Eléments* d'Euclide est le théorème de Pythagore ; nous avons d'ailleurs vu ce texte en TD.

1 point.

(e) Gardons les notations proposées par Euclide dans l'exposition de la proposition (alinéa (2)). Le point A est situé entre les points C et D, car l'angle $\widehat{CAB}$ est obtus. Donc $DC = DA + AC$. En mettant au carré, nous trouvons $DC^2 = DA^2 + AC^2 + 2\,DA \cdot AC$. Ajoutons DB^2 aux deux membres de cette égalité. Il vient

$$DB^2 + DC^2 = DB^2 + DA^2 + AC^2 + 2\,DA \cdot AC.$$

L'angle $\widehat{CDB}$ étant droit, le théorème de Pythagore s'applique dans les triangles CDB et ADB et nous donne $DB^2 + DC^2 = CB^2$ et $DB^2 + DA^2 = AB^2$. Nous trouvons alors $CB^2 = AB^2 + AC^2 + 2\,DA \cdot AC$, ce qui était notre objectif.

2 points.

(f) Euclide a vécu vers 300 avant J.-C. La datation est rendue possible par deux éléments : d'une part, Archimède mentionne le nom d'Euclide, donc lui est postérieur ; d'autre part, Aristote utilisait comme manuel d'enseignement en mathématiques un traité dans lequel on trouvait un cercle vicieux dans les démonstrations de la théorie des parallèles. Ce cercle vicieux fut éliminé par l'introduction par Euclide du cinquième postulat de ses *Eléments*. Euclide est donc postérieur à Aristote.
Euclide a vraisemblablement reçu son éducation mathématique à Athènes auprès des disciples de Platon. Plus tard, il aurait été invité par Ptolémée, le roi d'Egypte, à travailler au Musée d'Alexandrie. C'est peut-être là qu'il a rédigé les *Eléments*. Euclide écrivait en grec ancien, la langue scientifique utilisée dans toute la partie orientale du bassin méditerranéen à l'époque.

1,5 point (0,5 point pour chacune des trois questions).

(g) Les *Eléments* ont servi de manuel d'enseignement dès l'Antiquité (ceci se voit par exemple par les nombreuses gloses à but pédagogique qui ont été ajoutées dans le texte original à la fin de l'Antiquité) et jusqu'au début du XX$^{\text{e}}$ siècle en Europe. A travers cet ouvrage, l'enseignement d'Euclide a donc duré plus de deux millénaires. Aujourd'hui encore, on enseigne à rédiger un texte mathématique selon le modèle adopté par Euclide et présenté dans la question (a).
Un autre argument qui montre l'influence durable des *Eléments* est que l'ouvrage a fait l'objet de nombreuses traductions et éditions. On sait ainsi qu'il a été étudié dans l'Empire islamique du Moyen-Age dès le IX$^{\text{e}}$ siècle. En Europe, il fut traduit en latin une première fois au XII$^{\text{e}}$ siècle, puis fut à nouveau traduit et sérieusement étudié à partir de la Renaissance. Les carnets de Newton montrent que ce dernier a étudié les ouvrages d'Euclide.
Un troisième argument est que certains aspects de la théorie présentée par Euclide ont été une source d'inspiration ou de questionnement. Ainsi, les mathématiciens qui ont suivi Euclide ont cherché à déduire son cinquième postulat (le postulat des parallèles) des quatre autres postulats. La question ne fut définitivement tranchée qu'au XIX$^{\text{e}}$ siècle par Gauss, Bolyai et Lobachevsky.

1,5 point (0,5 point par argument pertinent ; d'autres arguments sont possibles).

Université Louis Pasteur, Strasbourg
U.F.R. de mathématique et d'informatique

1$^{\text{er}}$ septembre 2004

D.E.U.G. Sciences première année, mention MIAS

Histoire des Mathématiques — *Durée : 2 heures*

Les calculatrices, les téléphones portables et les documents sont interdits. Le barême de notation indiqué ci-dessous sera peut-être légèrement modifié lors de la correction des copies.

Exercice I : Calcul de l'inverse chez les Babyloniens *(5 points)*

Le nombre que nous écrivons 123,45 vaut $1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2}$. Le fait que des puissances de dix apparaissent reflète le fait que nous utilisons un système de numération en base dix. Les anciens Mésopotamiens (souvent appelés Babyloniens) utilisaient un système en base soixante. Pour transcrire les textes mathématiques de cette civilisation, nous adoptons la même convention que celle du cours, c'est-à-dire que nous écrivons par exemple $1, 12, 7; 30$ pour désigner le nombre dont la valeur en base dix est

$$1 \times 60^2 + 12 \times 60 + 7 + \frac{30}{60} = 3600 + 720 + 7 + 0{,}5 = 4327{,}5.$$

Autrement dit, nous utilisons notre système de numération moderne pour représenter les chiffres entre zéro et cinquante-neuf nécessaires à l'écriture en base soixante.

1°) Quelles sont les valeurs en base dix des nombres désignés en base soixante par les écritures $4, 10$ et $14, 24$?

2°) Quelle méthode les anciens Babyloniens utilisaient-ils pour représenter les chiffres de zéro à cinquante-neuf ? Quelles ambiguïtés peuvent-elles apparaître lorsqu'on juxtapose de tels chiffres pour former un nombre ? (Vous pouvez justifier votre réponse en l'illustrant par quelques exemples.)

3°) Ce système de numération en base soixante est-il encore utilisé de nos jours ?

Voici la traduction d'un extrait du texte inscrit sur la tablette babylonienne VAT 6505, conservée au Musée de Berlin.

(a) Le nombre est $4, 10$. Quel est son inverse ? Procède comme suit :
(b) Cherche l'inverse de 10, tu trouveras 6.
(c) Multiplie 6 par 4, tu trouveras 24.
(d) Ajoute 1, tu trouveras 25.
(e) Cherche l'inverse de 25, tu trouveras $2, 24$.
(f) Multiplie $2, 24$ par 6, tu trouveras $14, 24$.
(g) L'inverse est $14, 24$. Telle est la manière de procéder.

4°) D'après ce texte, l'inverse du nombre $4, 10$ est $14, 24$. Comment faut-il interpréter ce résultat ?

5°) Que doit faire le scribe pour *chercher* les inverses de 10 (ligne (b)) et de 25 (ligne (e)) ?

6°) Le texte babylonien décrit une procédure qui permet de calculer l'inverse des nombres à deux chiffres sexagésimaux (donc de la forme $60x + y$ avec x et y des nombres entiers positifs plus petits que cinquante-neuf) quand le deuxième chiffre y est un diviseur de soixante. En utilisant nos notations algébriques modernes, démontrez que cette procédure fonctionne correctement.

Indication : Pour vous permettre de bien comprendre la procédure babylonienne, nous reproduisons ci-dessous un autre exemple parmi la dizaine que propose la tablette.

> Le nombre est $8, 20$. Quel est son inverse ? Procède comme suit :
> Cherche l'inverse de 20, tu trouveras 3.
> Multiplie 3 par 8, tu trouveras 24.
> Ajoute 1, tu trouveras 25.
> Cherche l'inverse de 25, tu trouveras $2, 24$.
> Multiplie $2, 24$ par 3, tu trouveras $7, 12$.
> L'inverse est $7, 12$.

Exercice II : La quatrième équation canonique selon Al-Khwārizmī *(6 points)*

1°) Quand Al-Khwārizmī a-t-il vécu ? Dans quelle ville et dans le cadre de quelle institution a-t-il travaillé ?

2°) Dans son traité d'Algèbre, Al-Khwārizmī distingue plusieurs formes canoniques pour les équations du second degré. Quelles sont ces formes ?

Voici à présent le texte dans lequel Al-Khwārizmī présente la méthode de résolution pour la quatrième forme canonique : des *māl** et des racines égalent un nombre. (La traduction est celle d'Ahmed Djebbar.)

> Quant aux *māl* et aux racines qui égalent le nombre, c'est comme lorsque tu dis : un *māl* et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams.
>
> Sa signification est que ce *māl*, si tu lui ajoutes l'équivalent de dix de ses racines, est tel que cela atteindra trente-neuf.
>
> Son procédé de résolution consiste à diviser les racines par deux, et c'est cinq dans ce problème. Tu le multiplies par lui-même et ce sera vingt-cinq. Tu l'ajoutes à trente-neuf, cela donnera soixante-quatre. Tu prends alors sa racine carrée qui est huit et tu en retranches la moitié du nombre des racines et c'est cinq. Il reste trois et c'est la racine du *māl* que tu cherches, et le *māl* est neuf.

* Le mot arabe *māl* se traduit par *bien* en français. Pour éviter tout risque de confusion, nous avons préféré conserver le mot arabe dans le texte d'Al-Khwārizmī.

3°) Dans la phrase

un māl *et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams,*

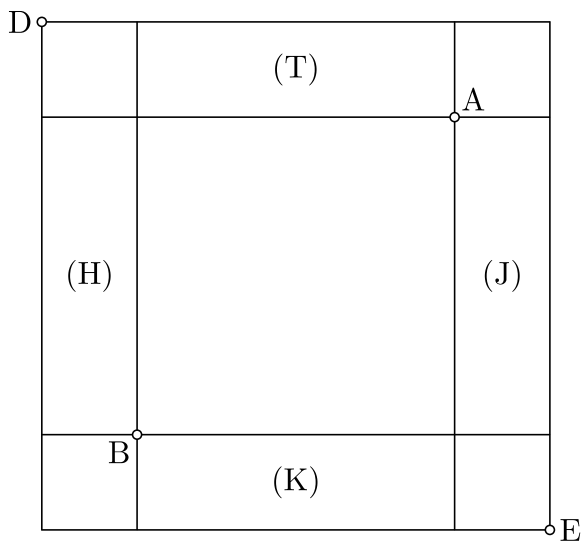
un mot correspond à notre x^2 et un autre correspond à notre x. Lesquels ? Quelle est, en notations modernes, l'équation du second degré étudiée ici ?

4°) Quelle solution Al-Khwārizmī trouve-t-il ? Cette équation a-t-elle d'autres solutions de son point de vue ? Et d'un point de vue moderne ?

Al-Khwārizmī poursuit ainsi :

Quant à la cause de cela, la figure est une surface carrée de côtés inconnus, et c'est le *māl* que tu veux connaître et dont tu veux connaître la racine. C'est la surface (AB), et chacun de ses côtés est sa racine.

Chacun de ses côtés, si tu le multiplies par un nombre, sera un nombre de racines, chaque racine étant comme la racine de cette surface. Comme on a dit qu'avec le *māl* il y a dix de ses racines, nous prenons le quart de dix — et c'est deux et un demi — et nous transformons chacun de ses quarts en segment avec l'un des côtés de la surface. Il y aura ainsi, avec la première surface, qui est la surface (AB), quatre surfaces égales, la longueur de chacune d'elles étant comme la racine de la surface (AB) et sa largeur deux et un demi, et ce sont les surfaces (H), (T), (K), (J). Il en résulte une surface à côtés égaux, inconnue aussi, et déficiente en ses quatre coins, chaque coin étant déficient de deux et demi par deux et demi. Alors, ce dont on a besoin comme ajout pour que la surface soit carrée, sera deux et demi par lui-même, quatre fois ; et la valeur de tout cela est vingt-cinq.



Or, nous avons appris que la première surface, qui est la surface du *māl*, et les quatre surfaces qui sont autour d'elle et qui sont dix racines, sont égales à trente-neuf en nombre. Si on leur ajoute les vingt-cinq qui sont les quatre carrés dans les coins de la surface (AB), la quadrature de la surface la plus grande, et qui est (DE), sera alors achevée. Or nous savons que tout cela est soixante-quatre, et que l'un de ses côtés est sa racine, et c'est huit. Si l'on

> retranche de huit l'équivalent de deux fois le quart de dix — et c'est cinq — aux extrémités du côté de la surface la plus grande qui est la surface (DE), il reste le côté trois, et c'est la racine de ce *māl*.

5°) Pour quelle raison Al-Khwārizmī a-t-il jugé souhaitable d'inclure ce paragraphe géométrique ?

6°) L'équation qu'Al-Khwārizmī traite ici n'est qu'un cas particulier de la quatrième forme canonique, puisqu'elle correspond à un choix explicite de valeurs numériques pour les coefficients. Montrez au correcteur que vous avez compris le texte géométrique ci-dessus en transcrivant les explications d'Al-Khwārizmī pour le cas de l'équation générale de la quatrième forme canonique. Vous prendrez notamment soin de recopier la figure en y indiquant les valeurs des longueurs des segments et des aires des rectangles.

Exercice III : Question de cours *(6 points)*

Retracez dans ses grandes lignes l'histoire entre le XVII^{e} et le début du XIX^{e} siècle de la branche mathématique appelée aujourd'hui Analyse. Votre résumé devra notamment :
- expliquer l'origine du mot *analyse* ;
- expliquer la nouveauté qu'a constituée le calcul infinitésimal de Newton et Leibniz ;
- mentionner les différences entre le calcul de Newton et Leibniz et l'Analyse moderne ;
- citer les noms des principaux mathématiciens ayant pris part au développement de l'Analyse et attribuer à chacun ses principales contributions.

Exercice IV : Question de cours *(3 points)*

Citez plusieurs différences dans les conditions et les méthodes de travail des savants européens entre le XVII^{e} et le XVIII^{e} siècle.

Corrigé

Exercice I

1°) La valeur en base dix de $4,10$ est $4 \times 60 + 10 = 250$. La valeur en base dix de $14,24$ est $14 \times 60 + 24 = 864$.

2°) Les chiffres utilisés par les anciens Babyloniens étaient formés en juxtaposant deux types de symboles : le clou ($/$) qui vaut un et le chevron ($\prec$) qui vaut dix. Ainsi le chiffre quarante-cinq est représenté par l'assemblage

$$\begin{array}{c} \prec\prec /// \\ \prec\prec // \end{array}.$$

Le chiffre zéro est donc représenté par un absence de marque. Il peut donc passer inaperçu, causant des ambiguïtés de lecture, puisqu'il est difficile dans ces conditions de distinguer par exemple $3,42$ de $3,0,42$. D'autres ambiguïtés apparaissent si l'on songe que les anciens Babyloniens utilisaient ce système pour noter non seulement les nombres entiers, mais aussi les nombres fractionnaires. Un des chiffres indique le nombre d'unités, celui à sa gauche indique le nombre de soixantaines, celui un cran plus loin encore indique le nombre des trois-mille-six-centaines, et ainsi de suite ; et le chiffre à droite du chiffre des unités indique le nombre des soixantièmes. L'ambiguïté provient du fait qu'aucun signe n'indique quel est le chiffre des unités.

3°) Le système de numération sexagésimale est encore utilisé de nos jours pour les unités de temps (une heure vaut soixante minutes, lesquelles valent chacune soixante secondes) et d'angle (l'unité de base est l'angle à la base du triangle équilatéral, lequel se décompose en soixante degrés, qui se décomposent eux-mêmes en soixante minutes).

4°) Nous avons vu à la question 1°) que $4,10$ et $14,24$ valent respectivement 250 et 864 en base dix. Le produit de ces deux nombres est 216 000, soit 60^3. Ce dernier nombre s'écrit $1,0,0,0$ en base soixante. Mais nous avons vu que les anciens Babyloniens n'indiquaient ni les zéros, ni la position du chiffre des unités. Avec leur système, le produit de $4,10$ par $14,24$ s'écrit simplement 1.

5°) Pour toutes les opérations arithmétiques un peu compliquées comme la multiplication, la mise au carré, l'extraction de racines ou la recherche de l'inverse des nombres, les scribes mésopotamiens avaient recours à des tables. Les instructions (b) et (e) de ce texte mésopotamien demandent au lecteur de consulter sa table d'inverses pour y lire les inverses de 10 et de 25.

6°) Etudions cette procédure en examinant les calculs auxquels elle conduit quand on l'utilise pour déterminer l'inverse d'un nombre s'écrivant en base soixante sous la forme x, y, où x et y sont deux chiffres sexagésimaux tels que y soit un diviseur de soixante. L'étape (b) demande de chercher $60/y$. L'étape (c) demande de multiplier ce qu'on vient d'obtenir par le premier chiffre sexagésimal x ; on trouve $60x/y$. On ajoute 1 dans l'étape (d), et dans l'étape (e), on prend l'inverse du tout, soit $1/(60x/y + 1)$. Enfin dans l'étape (f), on multiplie ce $1/(60x/y + 1)$ par le nombre $60/y$ qu'on avait trouvé dans l'étape (b). Le résultat final est donc

$$\frac{60/y}{60x/y + 1} = \frac{60}{60x + y}.$$

Or le nombre dont on cherchait l'inverse était $60x + y$. La procédure fonctionne donc correctement, au petit ajustement près mentionné dans la question 4°) qui veut que le résultat ne soit calculé qu'à multiplication par une puissance de soixante près.

Exercice II

1°) Al-Khwārizmī a vécu dans la première moitié du neuvième siècle après J.-C. Originaire d'une région au nord de l'Iran actuel, il est venu travailler à Bagdad, la capitale de l'Empire islamique de Moyen-Age. Il a travaillé au sein de la *Maison de la Sagesse*, une institution financée par le Calife dans laquelle les savants étaient réunis et pouvaient se consacrer à leurs recherches à l'abri de tout souci matériel.

2°) Les six formes canoniques d'al-Khwārizmī sont les six formes que peut prendre l'équation du second degré quand on l'écrit de la façon la plus simple possible, c'est-à-dire quand on a supprimé les soustractions grâce à l'opération de restauration et qu'on a simplifié au maximum les termes présents dans les deux membres grâce à l'opération de comparaison. Ces six formes sont :

- Les carrés sont égaux aux racines (avec une notation moderne, ce sont les équations de la forme $ax^2 = bx$).
- Les carrés sont égaux aux nombres ($ax^2 = c$).
- Les racines sont égales à un nombre ($bx = c$).
- Les carrés et les racines sont égaux à un nombre ($ax^2 + bx = c$).
- Les carrés et les nombres sont égaux aux racines ($ax^2 + c = bx$).
- Les racines et les nombres sont égaux aux carrés ($bx + c = ax^2$).

Dans les formules entre parenthèses ci-dessus, a, b et c représentent des nombres strictement positifs.

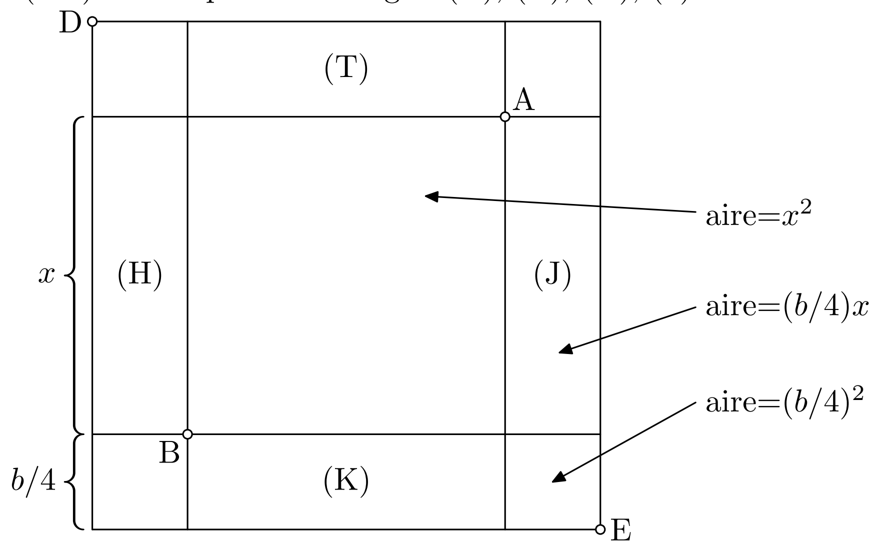
3°) Le mot arabe *māl*, qui signifie en français bien matériel, fortune, est utilisé pour désigner le carré x^2 de notre inconnue. Le mot racine désigne notre inconnue x. L'équation qu'al-Khwārizmī étudie ici est donc $x^2 + 10x = 39$.

4°) Al-Khwārizmī donne la solution à la fin de son texte : la racine x du *māl* vaut 3, le *māl* lui-même vaut 9. De notre point de vue moderne, l'équation $x^2 + 10x - 39 = 0$ est équivalente à $(x-3)(x+13) = 0$; elle a donc les deux racines 3 et -13. Mais al-Khwārizmī ne connaissait pas les nombres négatifs ; pour lui, l'équation *un* māl *et dix de ses racines égalent trente-neuf dirhams* n'a qu'une solution, qui est trois.

5°) Al-Khwārizmī n'a exposé la procédure de résolution que sur un exemple numérique particulier. Le succès de la méthode sur cet exemple ne suffit pas à en établir la validité. On peut donc penser que ce paragraphe géométrique a une fonction justificative. Cette hypothèse est d'autant plus vraisemblable que la notion de démonstration et la science de la géométrie, toutes deux issues des travaux des philosophes grecs de l'Antiquité, étaient probablement restées étroitement associées dans l'esprit des savants.

6°) Nous sommes ici dans le cas de l'équation $x^2 + bx = c$, avec b et c deux nombres (réels) strictement positifs. Nous voulons justifier par un argument géométrique que la solution positive de cette équation est représentée par notre formule moderne $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$.

Considérons un carré de diagonale (AB), de longueur de côté x et d'aire x^2. Prenons le quart de b, à savoir $b/4$, plaçons des segments de longueur $b/4$ dans le prolongement de chacun des côtés du carré (AB), de façon à avoir quatre rectangles de longueur x et de largeur $b/4$. Ces rectangles sont désignés par les lettres (H), (T), (K), (J). Il en résulte un carré (DE), des coins duquel quatre carrés de longueur de côté $b/4$ ont été retranchés. Pour obtenir l'aire de (DE), il faut donc ajouter quatre fois $(b/4)^2$, c'est-à-dire $(b/2)^2$, à l'aire du carré (AB) et des quatre rectangles (H), (T), (K), (J).



Par hypothèse, l'aire du carré (AB) est x^2, notre *māl* ; et l'aire totale des quatre rectangles autour de lui est bx, c'est-à-dire b racines. Le total fait $x^2 + bx$, c'est-à-dire c. Si on y ajoute l'aire $(b/2)^2$ des quatre carrés dans les coins, alors nous obtenons l'aire du grand carré (DE). L'aire du grand carré (DE) est donc $(b/2)^2 + c$ et la longueur du côté de (DE) est $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$. Si on retranche aux extrémités du côté de (DE) deux fois le segment de longueur $b/4$, il reste le coté de (AB), de longueur $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$, et c'est la racine x de notre *māl*.

Exercice III

Il s'agissait dans cette question de faire un résumé des paragraphes 7.5, 9.1, 10.2.1 et 10.3.4 du polycopié et de mentionner au minimum les noms et les principales contributions de Descartes et/ou Fermat, Newton, Leibniz, Johann Bernoulli, Euler, d'Alembert et Lagrange (ils sont ici classés dans l'ordre chronologique).

Exercice IV

Au XVII^{e} siècle, les savants ne sont généralement pas rétribués matériellement pour leur production scientifique. Ils doivent donc mener leurs travaux de recherche en parallèle avec leur activité professionnelle, à moins qu'ils ne disposent d'une fortune personnelle. Peu de personnes ont la motivation nécessaire pour cela. A la fin du XVII^{e} et au début du XVIII^{e} siècle, les souverains européens fondent des Académies des sciences ; les meilleurs savants deviennent pensionnaires de ces institutions et sont ainsi assurés d'une vie matérielle dégagée des soucis financiers.

Au XVII^e siècle, les savants travaillaient de manière isolée, sans réel moyen de pouvoir se tenir au courant les uns des travaux des autres. Les communications entre savants étaient essentiellement assurées par des échanges de lettres, une méthode qui ne garantit pas la diffusion rapide et universelle des connaissances. De fait, il n'est pas rare au XVII^e siècle qu'un résultat soit obtenu plusieurs fois par plusieurs personnes de manière indépendante. Les progrès sont donc irréguliers et les querelles de priorité sont fréquentes. Les premières revues scientifiques apparaissent à la fin du XVII^e et au début du XVIII^e siècle : les *Philosophical Transactions of the Royal Society* sont créées à Londres en 1665 et les *Acta Eruditorum Lipsiensium* sont créés à Leipzig en 1682. Ces revues facilitent les échanges d'information entre savants, contribuant ainsi à une plus grande régularité dans les progrès de la science.

Au XVII^e siècle, les savants ont surtout pour objectif de découvrir de nouveaux résultats ; peu importe s'ils sont généraux ou particuliers, l'important est de savoir faire des choses que les concurrents ne savent pas faire. Au XVIII^e siècle au contraire, le monde savant est pris d'un désir d'universalité ; c'est une époque où l'on rédige de grands traités à vocation encyclopédique. Cette tendance se manifeste aussi en mathématique : par exemple, Euler rédige trois traités d'analyse et un traité d'algèbre.

Mentionnons une quatrième différence pour conclure. Les travaux de Newton à la fin du XVII^e siècle ouvrent la porte à une explosion de la physique au XVIII^e siècle. La physique, qui n'était qu'une science balbutiante au XVII^e, joue un rôle moteur au XVIII^e siècle ; les problèmes de mécanique stimulent fortement le développement de l'analyse. Les grands mathématiciens du XVIII^e siècle ont d'ailleurs souvent la double casquette de mathématicien et de physicien.

Pour plus de détails, je renvoie aux paragraphes 8.2 et 10.1 du polycopié.