

Le GPS : une précision toute relativiste

Table des matières

1	Structure du poster	1
2	Anecdotes	2
3	Signaux transmis par les satellites	3
4	Effets relativistes	4
5	Traversée de l'atmosphère	6
6	Galileo	7

1 Structure du poster

Le plan est de commencer par expliquer le principe du dispositif général, en insistant sur la nécessité de maintenir tout le système parfaitement synchronisé. En effet, l'application du GPS peut-être la plus connue du grand public est le guidage des conducteurs de véhicules. Cela nécessite que la position du véhicule puisse être estimée avec une précision de quelques mètres. Or les mesures de distances effectuées par le système sont basées sur des mesures de durée de propagation d'un signal électromagnétique, lequel voyage dans le vide à la vitesse $c = 299\,792\,458$ m/s. Pour avoir la précision en position voulue, il est nécessaire que tout le système soit synchronisé à quelques nanosecondes près. Cette exigence est résolue grâce à plusieurs technologies : horloges atomiques à haute performance dans les satellites, surveillance permanente de ceux-ci, synchronisation permanente de l'horloge à quartz des récepteurs avec les horloges des satellites. Toute cette introduction occupe la première moitié du poster.

La seconde moitié du poster est destinée à vanter les mérites de la recherche fondamentale, même si cette dernière paraît déconnectée des applications immédiates. Je souhaitais expliquer que sans les travaux de Riemann sur la notion de variété abstraite au milieu du XIX^e siècle, Einstein n'aurait pas pu concevoir sa théorie de la relativité générale (voir le poster de Marc et Jürgen). Or celle-ci prédit des effets qui compliquent la synchronisation du système : le potentiel gravitationnel de la Terre d'une part, et le fait que les satellites et

les récepteurs soient en mouvement par rapport au référentiel inertiel géocentrique (c'est-à-dire le référentiel galiléen d'origine le centre de la Terre et dont les axes de coordonnées pointent vers trois étoiles fixes) d'autre part, font que toutes les horloges du système GPS ne battent pas au même rythme. Ce phénomène n'est pas du tout anecdotique : le tableau à la fin du poster montre même que les dérives provenant de ces effets relativistes seraient la source principale d'erreur si elles n'avaient pas été prises en compte lors de la conception du système, loin devant le bruit des mesures ou les imprécisions sur la mesure de distance dues aux retards de propagation du signal lors de la traversée de l'atmosphère.

2 Anecdotes

Le nom officiel du GPS (Global Positioning System) est NAVSTAR (NAVigation System by Timing And Ranging). Il a été conçu et est géré par le Department of Defense (DoD) des Etats-Unis. Le DoD peut restreindre l'utilisation du système à tout moment, grâce à deux systèmes de protection. Le premier système, l'AntiSpoofing (AS), consiste à ne rendre possible la synchronisation précise du récepteur avec les satellites qu'aux utilisateurs autorisés ; en fait, les signaux rapides permettant cette synchronisation précise (le code P, voir plus loin) sont cryptés. Le second système de protection, la Selected Availability (SA), fait que les satellites transmettent des paramètres d'horloge et de position dégradés ; la dégradation est déterministe mais l'algorithme permettant la restitution des valeurs non dégradées est classifié militairement. La SA fait que le positionnement des utilisateurs non autorisés devient beaucoup moins précis (100 m). L'AS est activé en permanence, la SA a été désactivée en mai 2000 sur recommandation du président Clinton et ordre du Congrès américain.

La première génération de satellites GPS (bloc I), lancée entre 1978 et 1985, avait pour rôle de tester la faisabilité du système. Plus aucun satellite du bloc I n'est opérationnel. Ce sont les satellites de la seconde génération (bloc II), lancés à partir de 1989, qui nous guident actuellement (le système a été déclaré opérationnel en 1995). Ces satellites sont équipés de plusieurs horloges atomiques, peuvent utiliser les systèmes AS et SA, et ont une durée de vie de l'ordre de dix ans. Les derniers modèles ont des fonctions de communication directe entre satellites GPS, permettant de pallier une éventuelle destruction de stations au sol (tout est prévu...)

Le système GPS comporte 24 satellites en activité, plus quelques uns en réserve. Leurs orbites sont quasiment circulaires (la plus forte excentricité est 0,01486). Les satellites sont répartis sur six plans orbitaux inclinés de 55° sur l'équateur ; la période est d'environ 12h.

En principe, un récepteur a besoin de recevoir les signaux de quatre satellites pour établir sa position et caler son horloge. En pratique, un récepteur capte davantage de satellites (jusqu'à douze) et se sert des signaux redondants pour améliorer sa position via une méthode des moindres carrés (encore des mathématiques...)

Certains responsables doutaient, au début du programme GPS, de la nécessité de tenir compte des effets de la relativité générale. Ainsi durant l'étude de faisabilité, il était possible de brancher ou de débrancher le système de compensation des effets relativistes sur un des

premiers satellites GPS (NTS-2, lancé le 23 juin 1977). Après vingt jours de mesure, il fut décidé de laisser le système branché en permanence. De fait, là où la relativité générale prévoyait une dérive de $4,465 \cdot 10^{-10}$, la mesure donna $4,425 \cdot 10^{-10}$. L'effet relativiste est donc largement mesurable et maîtrisable. L'erreur résiduelle de 1% s'explique par des dérives d'horloges, des imprécisions sur l'orbite, etc.

3 Signaux transmis par les satellites

Le débit d'information du signal émis par un satellite GPS est très lent : 50 bits/s. Ce signal contient :

- l'identification du satellite émetteur ;
- l'heure selon l'horloge du satellite ;
- les coefficients d'un polynôme quadratique donnant l'écart entre l'horloge du satellite et le temps atomique international ;
- les éphémérides de tous les satellites de la constellation (éléments képlériens de l'orbite et leur dérivée première par rapport au temps) ;
- des coefficients d'un modèle ionosphérique global simplifiée permettant d'estimer le retard pris par le signal GPS lors de la traversée de l'ionosphère ;
- des informations sur l'état de santé du satellite.

Ce signal est ensuite multiplié (multiplication dans le groupe $\{\pm 1\}$) à un code dit « pseudo-aléatoire », qui est en fait périodique. Il y a en fait deux codes pseudo-aléatoires, le code C/A (Coarse/Acquisition, de fréquence 1,023 Mbits/s et de période 1 ms), ouvert à tous les utilisateurs et le code P (Precision, de fréquence 10,23 Mbits/s et de période 267 jours), classifié militairement. C'est en se synchronisant sur l'un ou l'autre de ces codes que les récepteurs peuvent établir le temps de réception du signal satellite (le code C/A est facilement repérable car lui ou son complémentaire est répété vingt fois dans chaque bit de données GPS transmis). Le signal P, dix fois plus rapide, offre une précision dix fois meilleure (bruit de mesure dix fois plus faible).

Le signal GPS ainsi encodé est alors émis en modulation de phase, sur deux fréquences (L1=1575,42 MHz et L2=1227,60 MHz). En comparant les temps d'arrivée du même signal sur les deux fréquences, un récepteur bifréquence peut estimer finement l'effet de l'ionosphère et le compenser en temps réel. Les récepteurs usuels ne sont que monofréquences (le code C/A n'est envoyé que sur la porteuse L1) et doivent donc se reposer sur le modèle simplifié transmis dans le signal des satellites pour estimer l'effet de l'ionosphère : c'est moins précis et le modèle n'est réactualisé qu'une fois par jour.

Les satellites ont une vitesse de quelques km/s par rapport aux récepteurs. Les signaux qu'ils émettent sont donc soumis à un effet Doppler, qui pourrait rendre ambiguë la détermination de l'instant précis où le signal à moduler change. Les concepteurs du système ont ici trouvé une astuce géniale : la porteuse est une onde électromagnétique polarisée circulairement. Quand le signal à moduler change de +1 à -1, la phase de la porteuse change de 180° , et alors toutes les composantes du tenseur champ électromagnétique s'annulent. La transformation de Lorentz préserve cette annulation du tenseur, ce qui garantit que le

récepteur et l'émetteur voient bien le même événement, même s'ils sont relativement en mouvement.

Certains récepteurs sont capables de se synchroniser non pas sur les codes pseudo-aléatoires, mais sur la porteuse elle-même, atteignant ainsi une précision millimétrique. Cette possibilité, très délicate à mettre en œuvre, n'est utilisée que pour effectuer des positionnements relatifs entre deux récepteurs — c'est fréquemment le cas en géodésie. Dans ce cas, la plupart des sources d'erreur (connaissance imprécise de l'orbite des satellites, fluctuations de leurs horloges internes, délais de propagation du signal lors de la traversée de l'atmosphère...) sont quasiment les mêmes pour les deux récepteurs et s'éliminent donc dans le résultat final.

4 Effets relativistes

Un excellent article de survol est disponible sur le Web : *Relativity in the Global Positioning System*, par Neil Ashby, Living Rev. Relativity **6**, (2003), <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-1>.

Les spécifications officielles du système GPS prévoient la prise en compte de cinq effets relativistes :

- l'effet de la masse de la Terre sur le décalage gravitationnel en fréquence des horloges atomiques de référence fixées à la surface de la Terre par rapport à des horloges à l'infini ;
- l'effet de la distribution de masse non sphérique de la Terre pour le décalage gravitationnel en fréquence des horloges atomiques fixées à la surface de la Terre ;
- le décalage Doppler du second ordre sur les horloges fixées à la surface de la Terre dû à la rotation de la Terre ;
- le décalage gravitationnel en fréquence des horloges des satellites GPS dû à la masse de la Terre ;
- le décalage Doppler du second ordre sur les satellites GPS dû à leur mouvement dans un référentiel inertiel géocentrique.

Les lignes qui suivent ont vocation à expliquer ce charabia. Les trois premiers points concernent l'établissement du temps de référence disponible sur toute la surface de la Terre. Reprenons la formule du poster pour le ds^2 :

$$-ds^2 = - \left(1 + \frac{2V}{c^2} \right) (c dt)^2 + \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (*)$$

avec

$$V = -\frac{GM_T}{r} \left(1 - J_2 \frac{R_T^2}{r^2} P_2(\cos \theta) \right).$$

Ici t (temps mesuré par une horloge idéale placée à l'infini, au repos et hors de tout champ de pesanteur), r (distance au centre), θ (colatitute), et φ (longitude) sont des coordonnées dans un référentiel inertiel géocentrique (c'est-à-dire un référentiel galiléen d'origine le centre de la Terre et dont les axes de coordonnées pointent vers trois étoiles fixes). Pour

passer à un référentiel lié à la Terre (tournant avec elle), il faut faire la substitution $\varphi = \varphi' + \omega_T t$, où φ' est la longitude mesurée à partir du méridien de Greenwich et $\omega_T = 7,2921151467 \cdot 10^{-5}$ rad/s est la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même. On arrive alors à

$$-ds^2 = -\left(1 + \frac{2V}{c^2} - \frac{\omega_T^2 r^2 \sin^2 \theta}{c^2}\right) (c dt)^2 + 2\omega_T r^2 \sin^2 \theta d\varphi' dt + \left(1 - \frac{2V}{c^2}\right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi'^2).$$

Notons $\Phi = V - (\omega_T^2 r^2 \sin^2 \theta)/2$ le potentiel gravitationnel effectif, incluant un terme potentiel dû à la force centripète. La racine carrée du coefficient $g_{00} = -(1 + 2\Phi/c^2)$ de la métrique pseudo-riemannienne est alors égale au rapport entre le temps coordonné t et la fréquence propre d'une horloge atomique fixe dans le référentiel lié à la Terre et placée dans le champ de pesanteur de cette dernière. Le géoïde de référence est la surface équipotentielle $\Phi = \Phi_0$, où Φ_0/c^2 est conventionnellement fixé à $6,969290134 \cdot 10^{-10}$. Ce géoïde est en gros un ellipsoïde aplati représentant la surface de notre planète au niveau moyen des mers. Sur ce géoïde de référence, toutes les horloges atomiques battent au même rythme : quand on s'approche du pôle, le potentiel newtonien augmente, causant un ralentissement de l'horloge, mais cet effet est exactement compensé par un effet Doppler du second ordre (appelé « dilatation des temps » dans la littérature traitant de la relativité restreinte) dû au fait que la vitesse par rapport au référentiel inertiel diminue. Il est alors possible de définir une échelle de temps qui soit donnée par des horloges idéales fixées au géoïde. Cet échelle, réalisée physiquement par un réseau mondial d'horloges atomiques, est appelé temps UTC (temps universel coordonné).

C'est avec cette échelle de temps (plus exactement, sur sa réalisation par l'US Naval Observatory) que les satellites GPS sont synchronisés. C'est un choix heureux, car nos récepteurs GPS indiquent alors ce temps UTC lorsqu'ils se calent lors d'une mesure de position.

Les deux derniers des cinq effets de la relativité générale prise en compte dans les spécifications du système GPS concernent les satellites. On part à nouveau de (*). Le potentiel V provoque un ralentissement des horloges embarquées par rapport au temps t des horloges à l'infini, mais ce ralentissement est moindre que celui des horloges au sol. Ainsi les horloges embarquées battent plus vite que les horloges au sol. De plus, les satellites sont aussi en mouvement, d'où un effet Doppler du second ordre. (Pour calculer précisément ce dernier, il faut substituer les équations du mouvement du satellite dans (*).) Ce sont ces deux facteurs qui engendrent la dérive entre horloges au sol et horloges embarquées de $38,5 \mu\text{s}/\text{jour}$ mentionnée sur le poster. Les satellites sont programmés « en usine » pour modifier la fréquence de leur horloge atomique et compenser cet effet, qui reste donc caché à l'utilisateur final.

Enfin, les orbites des satellites ne sont pas parfaitement circulaires. Les variations d'altitude du satellite entraînent une variation du potentiel gravitationnel et une variation de leurs vitesses (les deux variations sont liées par le principe de conservation de l'énergie et

par le théorème du viriel), d'où à nouveau deux termes correctifs à ajouter pour le calcul de l'influence sur les fréquences d'horloge. Pour le satellite le plus excentré, l'écart en temps maximal est de l'ordre de 23 ns. Les récepteurs GPS sont programmés pour tenir compte de cet effet, qui est calculable puisque le récepteur dispose des paramètres de l'orbite de tous les satellites. (Les satellites GPS pourraient effectuer la correction eux-mêmes et modifier le signal qu'ils émettent en conséquence. Ils ne le font pas, au contraire des satellites du système concurrent russe, le GLONASS.)

Signalons pour finir que le terme quadrupolaire dans le potentiel gravitationnel terrestre V , causé par l'aplatissement de notre planète, contribue à faire que les orbites des satellites ne sont pas circulaires. De fait, il cause une variation d'altitude de l'ordre de quelques centaines de mètres. L'effet de cette variation sur la fréquence d'horloge des satellites est très faible (beaucoup plus que tous les autres effets mentionnés ici), mais le fait en lui-même est amusant et méconnu.

5 Traversée de l'atmosphère

L'atmosphère est modélisée en plusieurs couches, tel un onion. Entre 0 et 10 km se trouve la troposphère ; c'est là où se trouve l'humidité et les nuages. Entre 10 et 50 km, il y a la stratosphère : la couche d'ozone ou ce qu'il en reste y est localisée. Puis la mésosphère, entre 50 et 80 km, consomme les étoiles filantes. Entre 80 et 500 km est la thermosphère, qui abrite notamment l'ionosphère, une zone où les molécules sont ionisées et où il y a donc des électrons libres qui perturbent le signal électromagnétique. Au delà, il y a l'exosphère.

En présence de matière, la vitesse d'un signal électromagnétique est inférieure à c . Il faut tenir compte de cela quand on estime la distance entre un récepteur et les satellites à partir de la durée de propagation du signal. Les couches atmosphériques incriminées sont l'ionosphère (sa traversée cause un retard de quelques dizaines de nanosecondes pour un satellite au zénith) et la troposphère (retard de l'ordre de 10 ns). La valeur (1 ou 10 ns) indiquée sur le poster est assez fantaisiste, je ne sais plus d'où je l'ai tirée... L'estimation précise de ces retards est assez délicate, surtout pour la troposphère. L'erreur induite sur le positionnement horizontal du récepteur est cependant limitée, les signaux de tous les satellites étant affectés (le retard est en fait d'autant plus grand que le satellite est bas sur l'horizon).

Du fait de la présence d'électrons libres, la troposphère est un milieu dispersif : la vitesse de groupe, à laquelle se propagent les signaux C/A et P, varie selon la fréquence. Le retard de propagation du signal est donc différent pour la fréquence L1 et la fréquence L2. Les récepteurs bi-fréquence peuvent alors faire une estimation précise de la densité d'électrons libres dans l'ionosphère et compenser cet effet. Les récepteurs habituels (monofréquence L1) se reposent quand à eux sur le modèle simplifié de l'ionosphère transmis dans le signal délivré par les satellites. A noter enfin que le système GPS est fortement perturbé dans les régions subissant des aurores boréales.

Les retards que cause la traversée de la troposphère sont difficiles à estimer, car ils dépendent des conditions météorologiques (température, présence de nuages ou d'humidité

dans l'air, etc.) C'est actuellement la première cause d'imprécision du système GPS pour la détermination de la hauteur. Inversement, la mesure de cet effet à des stations de position connue avec précision fournit des données sur l'état de la troposphère qui peuvent ensuite être prises en compte dans les modèles météorologiques ou climatiques.

6 Galileo

Galileo est le futur système européen de positionnement par satellites. Son mode de financement public et privé est à l'origine d'un gros retard dans le programme. Là où le GPS américain est d'utilisation essentiellement gratuite (on paie certes le fabricant du récepteur et l'éditeur du logiciel et des cartes, mais on ne paie pas pour l'accès aux signaux des satellites), le système européen devrait être en partie payant. Contrairement à ce que disent nos médias, beaucoup d'états ou d'entreprises européens sont prêts à payer, mais peu acceptent de partager le contrôle du système. En attendant que nous résolvions nos querelles intestines, le parc de récepteurs du système américain augmente très rapidement...

Signalons pour conclure que les Russes, les Japonais et les Chinois commencent également à mettre en place leur système, le système japonais ne visant toutefois pas à une couverture mondiale.