Agrégation interne **8 octobre 2019**

Révisions d'algèbre linéaire

Karelle Jullian

? **Vrai/Faux**

Soient E,F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, u et v des endomorphismes de E.

1. Si $(e_1, ..., e_p)$ est une famille libre de E, alors, pour toute famille $(f_1, ..., f_p)$, il existe un automorphisme de E qui transforme chaque e_j en f_j. . . . . | V | F |
2. Si $(e_1, ..., e_p)$ est une famille génératrice de E, alors, pour toute famille $(f_1, ..., f_p)$, il existe un endomorphisme de E qui transforme chaque e_j en f_j. . . . . . | V | F |
3. Si $(u(e_1), ..., u(e_p))$ est libre, alors, il en est de même de $(e_1, ..., e_p)$. . . . | V | F |
4. Si $(u(e_1), ..., u(e_p))$ est une famille génératrice de E, alors, il en est de même de $(e_1, ..., e_p)$. . . . . | V | F |
5. Si $(u(e_1), ..., u(e_p))$ est une base de Im u, alors, $(e_1, ..., e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de Ker u. . . . . | V | F |
6. $\mathcal{L}\,(E \times F)$ et $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(F)$ sont isomorphes. . . . . | V | F |
7. Si p et q sont deux projecteurs associés , pour tous réels a, b, $E = \text{Ker}\,(ap + bq) \oplus Im(ap + bq)$. . . . . | V | F |
8. Si u est un endomorphisme de E qui ne fixe aucune droite, et s'il existe un vecteur x non nul de E tel que $u^2(x) = x$, alors $u(x) = -x$. . . . . | V | F |
9. Si u est inversible à droite, alors ${}^t u$ aussi. . . . . | V | F |
10. Si u est un projecteur, alors ${}^t u$ aussi . . . . | V | F |
11. u et ${}^t u$ commutent . . . . | V | F |
12. Une famille $(e_1^*, ..., e_p^*)$ de E^* est libre ssi $\dim \cap_{j=1}^{p} \ker(e_j^*) = \dim E - p$. . | V | F |
13. Tout endomorphisme de rang 1 est colinéaire à un projecteur. . . . . | V | F |
14. Si pour tout triplet d'endomorphismes, u, v, w de E,
$$Tr(uvw) = Tr(vuw)$$
alors u est une homothétie. . . . . | V | F |

Indépendance linéaire dans $\mathbb{K}[X]$

1. Remarque : l'indépendance d'une famille indexée par un ensemble infini est, *par définition*, l'indépendance de toute sous-famille finie.
2. Utilisation du degré : degrés échelonnés $\Rightarrow$ liberté.
3. Utilisation de la valuation en un point : valuations échelonnées $\Rightarrow$ liberté.
4. Utilisation de l'orthogonalité dans le dual : on construit une forme linéaire s'annulant sur tous les polynômes sauf un. (Penser à l'évaluation en un point, ou à l'évaluation d'une dérivée itérée).

Exercice 1

1. Soient Q un polynôme irréductible, $P_1, ..., P_n$ des éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$ dont les valuations relativement à Q sont deux à deux distinctes. Montrer que les polynômes $P_1, ..., P_n$ sont linéairement indépendants.
2. En déduire que si U et V sont deux polynômes linéairement indépendants, alors la famille $P_r = U^r V^{n-r}$ oùr parcourt $[|0, n|]$ est, pour tout entier n, libre.

Exercice 2 *Translation et identité de Vandermonde*
Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$, et u_α l'endomorphisme de E_n défini par $u_\alpha(P) = P(X + \alpha)$.

1. Montrer que $G = \{u_\alpha, \alpha \in \mathbb{C}\}$ est un sous-groupe commutatif de $GL(E)$ et que $\alpha \mapsto u_\alpha$ est un isomorphisme de groupes entre $(\mathbb{C}, +)$ et G.
2. Expliciter la matrice M_α de u_α dans la base canonique de E.
3. Comparer $M_{\alpha+\beta}$, M_α et M_β.
4. Etablir la relation

$$\forall 0 \leq q \leq p, \quad \sum_{k=1}^{p} \begin{pmatrix} p-1 \\ p-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k-1 \\ k-q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-1 \\ p-q \end{pmatrix}$$

Indépendance linéaire dans les espaces fonctionnels

La question est fréquente en analyse (équations différentielles, développements limités, asymptotiques, séries de Fourier, suites récurrentes,...)

1. Etude locale par un DL,
2. Etude aux bords du domaine, notamment à l'infini,
3. Utilisation des dérivées qui vérifient les mêmes relations linéaires,
4. Utilisation de l'orthogonalité dans le dual : on construit une forme linéaire s'annulant sur toutes les fonctions sauf une. (Penser à l'évaluation en un point, ou à l'évaluation d'une dérivée itérée, à l'intégration,...).

Exercice 3 *Raisonnement en $+\infty$ et développement asymptotique*
Soit a un nombre réel et E l'espace vectoriel des fonctions définies sur $[a,+\infty[$, à valeurs réelles.

1. Soit I un ensemble totalement ordonné, et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de E ne s'annulant pas sur $[a,+\infty[$, et telle que pour tout $i<j$, f_i soit négligeable devant f_j au voisinage de $+\infty$. Montrer que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est libre.
2. Prouver que les familles suivantes sont libres :

   $(x\mapsto e^{bx})_{b\in\mathbb{R}}$,
   $(x\mapsto x^b)_{b\in\mathbb{R}}$,
   $(x\mapsto |\log x|^b)_{b\in\mathbb{R}}$,
   $(x\mapsto e^{bx}x^c|\log x|^d)_{b,c,d\in\mathbb{R}}$,

Exercice 4 *Raisonnement par orthogonalité*
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, 2π-périodiques. On appelle polynome trigonométrique tout élément du sev F de E engendré par les fonctions $e_n : x\mapsto e^{inx}$, $n\in\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de F.
2. Prouver que les fonctions $x\mapsto\cos nx$ et $x\mapsto\sin nx$, pour $n\in\mathbb{N}^*$ forment une base de F.

Exercice 5 *Puissances réelles d'une fonction*

1. Soient $a_1,\ldots,a_n$ des réels deux à deux distincts, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ des réels non tous nuls. En utilisant le théorème de Rolle, montrer par récurrence sur n que l'ensemble des nombres $x>0$ tels que
$$\lambda_1x^{a_1}+\ldots+\lambda_nx^{a_n}=0$$
a au plus n éléments.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.
Déduire de la question précédente, que pour toute fonction réelle strictement positive f définie sur I, dont l'ensemble des valeurs est infini, la famille $(f^a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.
Montrer que la famille $(x\mapsto e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Dimension d'un (sous-)espace vectoriel

1. Décomposer E comme somme directe de sev , ou déterminer une base,
2. Ecrire E comme noyau d'une application linéaire,
3. Ecrire E comme image d'une application linéaire,
4. Ecrire E comme intersection de noyaux de p formes linéaires indépendantes.

Exercice 6 *Multiples d'un polynôme*
Soit $n\in\mathbb{N}$.

1. Soient B un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ et p le degré de B. Déterminer la dimension du sev de $\mathbb{K}_n[X]$ constitué des multiples du polynôme B.

2. Dans cette question $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soient $a_1, ..., a_p$ des réels deux à deux distincts. Déterminer la dimension du sev F_0 de $\mathbb{K}_n[X]$ constitué des polynômes P s'annulant aux points $a_1, ..., a_p$, et celle du sev F_1 constitué des polynômes P s'annulant en ces points ainsi que leur dérivée.
   Déterminer de même la dimension du sev G de $\mathbb{K}_n[X]$ constitué des polynômes P tels que , pour tout élément j de $[|1, p|]$,
$$\int_0^{a_j} P(t)dt = 0$$

Exercice 7 *Polynômes en X^p*
Soit $p \geq 2$ un entier.

1. Montrer que tous les éléments de $\mathbb{C}[X]$ de la forme $P = Q(X^p)$ avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ constituent un sev de $\mathbb{C}[X]$ que l'on note $\mathbb{C}[X^p]$. Quelle est la dimension de $\mathbb{C}[X^p] \cap \mathbb{C}_n[X]$?
2. Prouver que tout élément P de $\mathbb{C}[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme $P = \sum_{i=0}^{p-1} X^i Q_i(X^p)$ où les Q_i sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P \in \mathbb{C}[X^p]$ si et seulement si $P(e^{\frac{2i\pi}{p}} X) = P(X)$.

Exercice 8 *Matrices centrosymétriques*
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n muni d'une base $B = (e_1, ..., e_n)$. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est centrosymétrique si, pour tout couple (i, j) d'indices
$$m_{i,j} = m_{n+1-i,n+1-j}$$
Par exemple à l'ordre 3 :
$$M = \begin{pmatrix} \circ & & * & & \diamond \\ & \ddots & \vdots & \iddots & \\ \triangle & \dots & \bullet & \dots & \triangle \\ & \iddots & \vdots & \ddots & \\ \diamond & & * & & \circ \end{pmatrix}$$

1. Montrer que l'ensemble $C_n(\mathbb{K})$ des matrices centrosymétriques est une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer sa dimension et en donner une base.
2. Soit F le sev de E engendré par $(f_1, ..., f_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor})$ où
$$\begin{array}{lll} f_j = e_j + e_{n+1-j} & \text{si} & 2j < n+1 \\ f_j = e_j & \text{si} & 2j = n+1 \end{array}$$
   et soit G le sev de E engendré par $(g_1, ..., g_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ où
$$g_j = e_j - e_{n+1-j} \quad \text{si} \quad 2j < n$$
   Soit u un endomorphisme de E, montrer qu'il y a équivalence entre
   a) u stabilise les sev F et G.
   b) La matrice de u dans B est centrosymétrique.
   Retrouver ainsi la structure et la dimension de $C_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9 *Espace engendré par les matrices de permutation*
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $n \geq 2$ un entier. Pour $r \in [|1, n|]$, on définit les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivantes
$$\sigma_r(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{rj}, \quad \tau_r(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{jr}$$
. Soit enfin J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients valent 1.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Prouver qu'il y a équivalence entre :
   a) Pour tous (r,s), $\sigma_r(M) = \sigma_s(M)$
   b) Il existe une scalaire α tel que $MJ = \alpha J$.
   Montrer que dans ces conditions , pour tout r, $\sigma_r(M) = \alpha$. Si on note L l'ensemble des matrices satisfaisant à ces conditions, montrer que L est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que l'application $\psi : M \mapsto \alpha$ est un morphisme de L dans $\mathbb{K}$.
   Prouver que $L = \ker\psi \oplus vect(I_n)$. On notera $L_0 = \ker\psi$.
2. Montrer que les formes linéaires σ_r sont linéairement indépendantes. En déduire la dimension de $\ker\psi$. En expliciter une base.
3. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   a) Pour tous (r,s), $\sigma_r(M) = \tau_s(M)$
   b) Il existe une scalaire α tel que $MJ = JM = \alpha J$.
   Montrer que dans ces conditions , pour tout r, $\sigma_r(M) = \tau_r(M) = \alpha$.
   Si on note C l'ensemble des matrices satisfaisant à ces conditions, montrer que C est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, stable par transposition, et que l'application $\psi : M \mapsto \alpha$ est un morphisme de C dans $\mathbb{K}$.
   Prouver que $C = \ker\psi \oplus vect(I_n)$. On notera $C_0 = \ker\psi$.
4. Expliciter une relation linéaire simple entre les formes linéaires $(\sigma_1, ..., \sigma_n, \tau_1, ..., \tau_n)$.
   Prouver que la famille $(\sigma_1, ..., \sigma_n, \tau_1, ..., \tau_{n-1})$ est libre ; en déduire la dimension de $\ker\psi$.
   Prouver que $(A_{r,s})_{2\le r,s\le n}$ est une base de $\ker\psi$, où la matrice $A_{r,s}$ est définie par
   $$a_{11} = a_{rs} = 1, a_{1s} = a_{r1} = -1, a_{ij} = 0 \text{ sinon}$$
5. Montrer que pour tout $2 \le r, s \le n$, $A_{r,s}$ peut s'écrire comme la différence de deux matrices de permutation.
   En déduire que C est engendré par les matrices de permutation.
   Par exemple
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L$$
   $$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in C$$

Exercice 10 *Matrices magiques*
Les notations sont celles de l'exercice précédent. $\mathbb{K}$ est supposé de caractéristique non nulle et on notera $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques respectivement.

1. Calculer $\dim L_0 \cap S_n(\mathbb{K})$. Montrer que $L \cap A_n(\mathbb{K}) = L_0 \cap A_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $C = L_0 \cap S_n(\mathbb{K}) \oplus L_0 \cap A_n(\mathbb{K}) \oplus vect(J)$.
3. On désigne par t et t'' les formes linéaires suivantes
   $$t(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}, \quad t''(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,n+1-i}$$
   Soit E l'espace vectoriel des matrices dites magiques, ie vérifiant pour tout r, $\sigma_r(M) = \tau_r(M) = t(M) = t''(M)$, et soit E_0 le sev des matrices de E telles que $t(M) = 0$.
   Prouver que $E = E_0 \oplus vect(J)$. Calculer la dimension de E_0.

remarque : les matrices magiques de taille n dont les éléments sont exactement les n^2 premiers entiers s'appellent les carrés magiques.

Exercice 11 *codimension et inclusion*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E_1 et E_2 des sev de E tels que $E_1 \subset E_2$.
Montrer que E_1 est de codimension finie dans E ssi E_1 est de codimension finie dans E_2 et E_2 est de codimension finie dans E.
Prouver que dans ces conditions

$$codim_E E_1 = codim_{E_2} E_1 + codim_E E_2$$

En particulier, $E_1 = E_2$ ssi

$$codim_E E_1 = codim_E E_2$$

Exercice 12 *codimension, somme et intersection*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E_1 et E_2 des sev de E.

1. Montrer que si E_1 est de codimension finie dans E, $E_1 \cap E_2$ est de codimension finie dans E_2 et que, dans ce cas :

$$codim_E E_1 = codim_E(E_1 + E_2) + codim_{E_2}(E_1 \cap E_2)$$

2. Montrer que si E_1 et E_2 sont de codimension finie dans E, il en est de même de $E_1 + E_2$ et de $E_1 \cap E_2$. Prouver que, dans ces conditions,

$$codim_E(E_1 + E_2) + codim_E(E_1 \cap E_2) = codim_E E_1 + codim_E E_2$$

Noyau, image, rang

Leur recherche est à la base de résolutions d'équations linéaires $u(x) = b$

1. Usage du théorème d'isomorphisme,
2. Le noyau est en général plus simple à déterminer,
3. L'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image.

Exercice 13 *Noyau contenu dans un ev donné*
Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

1. Soit F' un sev de F. Montrer que $\mathcal{L}_{F'}(E,F) = \{u \in \mathcal{L}(E,F), Im(u) \subset F'\}$ est un sev de $\mathcal{L}(E,F)$. Construire un isomorphisme entre $\mathcal{L}_{F'}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E,F')$. En déduire la dimension de $\mathcal{L}_{F'}(E,F)$.
2. Soit E' un sev de E. Montrer que $\mathcal{L}_{E'}(E,F) = \{u \in \mathcal{L}(E,F), \ker(u) \supset E'\}$ est un sev de $\mathcal{L}(E,F)$. Soit E'' un sev supplémentaire de E' dans E. Construire un isomorphisme entre $\mathcal{L}_{E'}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E'',F)$. En déduire la dimension de $\mathcal{L}_{E'}(E,F)$.

Exercice 14 *Endomorphismes d'endomorphismes*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.
Déterminer noyau , image, trace et déterminant de l'endomorphisme de $\mathcal{L}_(E)$ défiini par $v \mapsto u \circ v$.

Exercice 15 *Factorisation à travers une application linéaire*
Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient a une application linéaire de E dans F et b une application linéaire de E dans G. Prouver que l'existence d'une application linéaire u de F dans G telle que $u \circ a = b$ équivaut à $\ker a \subset \ker b$.
2. Soient a une application linéaire de F dans G et b une application linéaire de E dans G. Prouver que l'existence d'une application linéaire u de E dans F telle que $a \circ u = b$ équivaut à $Imb \subset Ima$.
   (Faire des schémas)

Exercice 16 *Dimension d'image et d'image réciproque*
Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, u une application linéaire de E dans F.

1. Montrer que pour tout sev E' de E :

$$\dim u(E') = \dim E' - \dim(E' \cap \ker u)$$

2. Montrer que pour tout sev F' de F :

$$\dim u^{-1}(F') = \dim \ker u + \dim(F' \cap Imu)$$

Exercice 17 *Supplémentarité du noyau et de l'image*
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

1. Prouver l'équivalence

$$\ker u \cap Im(u) = \{0\} \Longleftrightarrow \ker(u^2) = \ker(u)$$

2. Prouver que

$$\ker u + Im(u) = E \Longleftrightarrow Im(u^2) = Im(u)$$

3. Montrer qu'il est équivalent de dire
   a) Noyau et image de u sont supplémentaires
   b) Il existe des sev F, G supplémentaires dans E, stables par u, tels que la restriction de u à G soit nulle et que u induise un automorphisme de F.
   Prouver dans ces conditions que $G = \ker u$ et $F = Im(u)$.
4. On suppose que E est de dimension finie . Montrer l'équivalence entre :
   a) $E = \ker u \oplus Im(u)$
   b) $\ker(u^2) = \ker(u)$
   c) $Im(u^2) = Im(u)$
5. Dans $E = \mathbb{K}[X]$, donner un exemple d'endomorphisme injectif tel que $Im(u^2) \neq Im(u)$ et un autre surjectif tel que $\ker(u^2) \neq \ker(u)$.

Exercice 18 *Nilespace et coeur d'un endomorphisme*
Soient E un espace vectoriel, u un endomorphisme de E.
On note

$$F = \cup_{n\in\mathbb{N}}(\ker u^n), \quad G = \cap_{n\in\mathbb{N}}(Imu^n)$$

F et G sont respectivement appelés nilespace et coeur de u.
On notera $F_n = \ker u^n$ et $G_n = Imu^n$.

1. Montrer que F et G sont des sev stables par u, que u est injectif ssi $F = \{0\}$ et surjectif ssi $G = E$.

2. Montrer que s'il existe r tel que $F_{r+1} = F_r$ alors u induit un endomorphisme nilpotent de F et injectif de G, et que , si p désigne le plus petit entier r vérifiant l'égalité, alors $F \cap G_p = \{0\}$.
3. Montrer que s'il existe r tel que $G_{r+1} = G_r$ alors u induit une surjection de G sur lui-même, e et que , si q désigne le plus petit entier r vérifiant l'égalité, alors $F_q \oplus G = E$.
4. On dit que u est de caractère fini s'il existe r, s tels que $F_{r+1} = F_r$ et $G_{s+1} = G_s$. Montrer que dans ce cas $E = F \oplus G$, et que $p = q$ (montrer que $G_p = G$).
5. Réciproquement s'il existe des supplémentaires F' et G', stables par u, tels que u induise un endomorphisme nilpotent de F' et un automorphisme de G', montrer que u est de caractère fini, que $F' = F$ et $G' = G$.
6. Montrer que si E est de dimension finie, tout endomorphisme est de caractère fini.

   Dans le cas où $E = \mathbb{K}[X]$, exhiber un endomorphisme tel que $F = G = \{0\}$, et un autre tel que $F = G = E$.

Ce résultat est fondamental en réduction, et peut aussi être exploité dans d'autres situations (résolution d'équations).

Sommes directes, projecteurs

La notion de projecteur est indisociable de celle de supplémentaires.

1. tantôt des supplémentaires définiront des projecteurs associés,
2. tantôt des projecteurs associés fourniront des supplémentaires,
3. tout endomorphisme diagonalisable pourra s'écrire comme somme de tels projecteurs.

Exercice 19 *Supplémentaires classiques*
A revoir le cas échéant :

1. Fonctions paires et impaires
2. Fonctions réelles et imaginaires pures
3. Fonctions s'annulant en un point et les fonctions constantes
4. Fonctions polynomiales de degré inférieur à n et fonctions négligeables devant x^n.
5. Matrices symétriques et antisymétriques
6. Hermitiennes et antihermitiennes
7. Les multiples de P et $\mathbb{K}_n[X]$ (division euclidienne)

Exercice 20 *Relation d'ordre sur les projecteurs*
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soient p et q des projecteurs de E. Caractériser à l'aide des noyaux et des images de p et q les cas suivants

   a) $pq = 0$

   b) $pq = p$

   c) $qp = p$

2. Montrer que la relation binaire sur (p, q) définie par $pq = qp = p$ est une relation d'ordre. On la note $p \leq q$.
   Trouver une CNS portant sur les images et noyaux de p et q pour que $p \leq q$.
   Montrer qu'alors $q - p$ est un projecteur, dont on explicitera noyau et image.
3. Déterminer les éléments minimaux et maximaux de l'ensemble des projecteurs privés de 0 et I_E.

Formes linéaires, dualité

Formes linéaires, rang de leur famille, orthogonalité et transposition sont au coeur de la dualité.

1. L'étude d'un problème dans E peut être résolu dans E^* avant de revenir à E
2. L'interpolation de fonctions fait intervenir la dualité
3. L'intégration, la théorie de la mesure et toute l'analyse fonctionnelle utilisent les espaces duaux,
4. La dualité en dimension finie offre un isomorphisme dans lequel les bases duales jouent un role important.

Exercice 21 *Indépendance de formes linéaires*
Déterminer le rang de la famille (l_1, l_2, l_3) de formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$ définies par les relations :

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \langle l_1, x\rangle & = & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 \\ \langle l_2, x\rangle & = & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 \\ \langle l_3, x\rangle & = & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 \end{array}$$

Exercice 22 *Base duale*
Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2, f_3) des vecteurs définis par

$$f_1 = 2e_1 + e_2 + e_3, \quad f_2 = e_1 + 2e_2 + e_3, \quad f_3 = e_1 + e_2 + 2e_3$$

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer sa base duale.

Exercice 23 *Propriétés de la transposition*

1. Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, E^*, F^* leurs duaux.
   Prouver que $u \mapsto {}^t u$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{L}(F^*, E^*)$.
2. Soient B_1, B_2 des bases de E, u l'endomorphisme de E transformant B_1 en B_2. Prouver que ${}^t u$ transforme B_2^* en B_1^*.
3. Soit B_0 une base de E, B_0^* sa base duale et B' une base de E^*. A l'aide des questions précédentes, montrer qu'il existe une base B de E et une seule dont B' soit la base duale.
   En déduire que l'application qui à toute base de E associe sa base duale est une bijection de l'ensemble des bases de E sur l'ensemble des bases de E^*.

Exercice 24 *Dual d'une somme directe de deux sev*
Soit E un espace vectoriel, E', E'' deux sev supplémentaires dans E, p' et p'' les projecteurs associés. Montrer que ${}^t p'$ et ${}^t p''$ sont des projecteurs de E^* dont on déterminera noyaux et images.

Exercice 25 *Noyau et image de la transposée*
Soit E, F des espaces vectoriels de dimension finie, u, v des applications linéaires de E dans F.
Montrer que $(\ker u \subset \ker v) \Longleftrightarrow Im({}^t v) \subset Im({}^t u)$.
Montrer que $(Imu \subset Imv) \Longleftrightarrow \ker({}^t v) \subset \ker({}^t u)$.

Exercice 26 *Propriétés de l'orthogonal*
Soit E un espace vectoriel et E^* son dual.

1. Soient E_1, E_2 deux sev de E. Montrer que
   a) $(E_1 + E_2)^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$
   b) $(E_1 \cap E_2)^\perp = E_1^\perp + E_2^\perp$
2. Soient F_1, F_2 des sev de E^*. Montrer que
   a) $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$
   b) $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$
   Examiner le cas où F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E^*.

Exercice 27 *Interpolation et dualité*
Dans $\mathbb{K}_n[X]$, on note d_a la forme linéaire $P \mapsto P(a)$, $a \in \mathbb{K}$.

1. Soient $(a_0, ..., a_n)$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que $(d_{a_i})_{i \in [|0,n|]}$ forme une base C de $\mathbb{K}_n[X]^*$.
   Déterminer sa base antéduale.
2. Pour tout $p \in [|0, n|]$ et tout $a \in \mathbb{K}$, on note $d_{ap}(P) = P^{(p)}(a)$. Montrer que pour a fixé, la famille $(d_{ap})_{p \in [|0,n|]}$ forme une base C' de $\mathbb{K}_n[X]^*$.
3. Ecrire la décomposition de d_{ap} dans C.

Exercice 28 *Interpolation d'une primitive*
Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note, pour $(a_0, ..., a_n)$ scalaires deux à deux distincts, la forme linéaire suivante :

$$e_j^*(P) = \int_0^{a_j} P(t)dt$$

Prouver que les formes linéaires (e_j^*) forment une base du dual de $\mathbb{R}_n[X]$, et trouver sa base antéduale.

Exercice 29 *Transposition de la dérivation*

1. Déterminer la transposée de l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, $D : P \mapsto P'$.
   Déterminer son noyau et son image.
2. Reprendre la question en travaillant dans $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note
   $$l(P) = \int_a^b P, P \in \mathbb{R}[X]$$
   Calculer ${}^t D(l)$.

Exercice 30 *Formes linéaires coordonnées en dimension infinie*
Soit E un espace vectoriel, $(e_j)_{j \in J}$ une base de E et $(e_j)^*_{j \in J}$ les formes linéaires coordonnées associées.

1. Prouver que $(e_j^*)_{j \in J}$ est libre et que l'unique forme linéaire l telle que $l(e_j) = 1$, $\forall j \in J$ n'appartient pas à $\text{vect}(e_j^*)_{j \in J}$. Par conséquent $(e_j^*)_{j \in J}$ n'est pas une base de E^*.
2. Soit I une partie de J. Montrer que le sev de E formé des vecteurs orthogonaux aux $(e_j^*)_{j \in I}$ est $\text{vect}(e_j)_{j \in J \setminus I}$.

Références

[1] Bernard GOSTIAUX, *Algèbre, cours de mathématiques spéciales.* PUF, 1993

[2] J.L. OVAERT, J.L. VERLEY, *Algèbre, vol. 1, exercices et problèmes.* CEDIC/ FERNAND NATHAN, Collection Léonard Epistemon, 1981.

[3] B. HAUCHECORNE, *Les contre-exemples en mathématiques.* ELLIPSES, 1988.

[4] Michel GONNORD, *Les exercices de maths en MP-MP*.* ELLIPSES, 2000.