# Petite sélection d'exercices d'analyse et de topologie.

Été 2019
Florian HECHNER

## 1 Bibliographie

Voici quelques idées de manuels que vous pouvez consulter pour vos révisions (à la bibliothèque de l'IREM ou ailleurs) :

Des manuels de classes préparatoires, par exemple ceux de la collection **Prépas Scientifiques** de l'éditeur De Boeck. Pour ce qui nous concerne :
• COSTANTINI Gilles – Analyse MPSI/PCSI, *De Boeck*, 2013.
• RODOT Olivier – Analyse MP/MP*, *De Boeck*, 2014.
Ou des manuels de mathématiques plus anciens, par exemple la collection de Jean-Marie ARNAUDIES et Henri FRAYSSE , parue chez *Dunod* vers 1990.

Des livres d'exercices de préparation aux concours d'entrées aux grandes écoles. Notamment :
• Les ouvrages de Serge FRANCINOU, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS, chez Cassini. Une nouvelle édition (prévue en 8 tomes) commence à être publiée.
• Les ouvrages MethodiX de Xavier MERLIN, chez *Ellipses*.

Spécifiques à l'agrégation interne :
• Jean-François DANTZER : Mathématiques pour l'agrégation interne, analyse et probabilités, *Vuibert*, 2007.
• Marci PULKOWSKI et Pierre MONTAGNON, Exercices de mathématiques pour l'agrégation interne, *Ellipses*, 2018 ;
• Les ouvrages de Jean-Étienne ROMBALDI

Autres ouvrages utiles :
• DEMAILLY Jean-Pierre – Analyse numérique et équations différentielles, *EDP sciences*, 2006
• GOURDON Xavier, Les maths en tête, *Ellipses*.
• HAUCHECORNE, Bertrand, Les contre-exemples en mathématiques, *Ellipses*.

## Suites et séries.

# 2 Extrait du programme

9.1 Nombres réels, nombres complexes.
Corps $\mathbb{R}$ des nombres réels et $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
Suites convergentes, divergentes, suites extraites, valeurs d'adhérence. Opérations sur les limites. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure. Toute suite croissante majorée est convergente. Suites adjacentes, théorème des segments emboités. Droite numérique achevée.
Complétude de $\mathbb{R}$ : toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge. Théorème de Bolzano-Weierstrass :de toute suite bornée de $\mathbb{R}$ on peut extraire une sous-suite convergente. Extension de ces résultats à $\mathbb{C}$. Développement décimal d'un nombre réel. Cas des nombres rationnels.
Comportement asymptotique d'une suite. Relations de comparaison :domination,prépondérance ($u$ est négligeable devant $v$), équivalence. Notations $u = O(v)$ et $u = o(v)$. Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Suites définies par une relation de récurrence linéaire à deux termes et à coefficients constants, ou par une relation homographique.
9.2 Séries de nombres réels ou complexes.
Séries à termes positifs. La série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée. Étude de la convergence par utilisation des relations de comparaison, comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence pour les séries convergentes et divergentes. Comparaison d'une série et d'une intégrale, cas des séries de Riemann. Critère de Cauchy pour les séries à termes réels ou complexes. Convergence absolue. Convergence d'une série alternée dont le terme général décroît vers 0 en valeur absolue, signe et majoration du reste. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général. Opérations sur les séries. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. 9.11 Analyse numérique Approximations d'un nombre par des suites : vitesse de convergence,ordre d'un algorithme. Accélération de la convergence, méthode de Richardson-Romberg. Approximation d'une solution d'une équation $f(x) = 0$. Méthode de dichotomie. Approximations successives, méthode de Newton. Estimation de l'erreur. Valeurs approchées d'une intégrale : méthode du point milieu, des trapèzes, de Simpson. Estimation de l'erreur. Recherche d'une valeur approchée de la somme de certaines séries convergentes ; majoration de l'erreur. Évaluation asymptotique du reste d'une série convergente. Solutions approchées d'une équation différentielle $x' = f(t, x)$ par la méthode d'Euler.

# 3 Exercices sur les suites

## 3.1 Questions de cours

Démontrer les résultats de cours suivants :
• Le théorème de la limite monotone.
• Toute suite d'entiers convergente est stationnaire.
• $\mathbb{R}$ est complet.
• Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites à termes strictement positifs. Soient $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites. On suppose $x_n \sim u_n$ et $y_n \sim v_n$. Alors $x_n + y_n \sim u_n + v_n$.
• L'étude des suites arithmético-géométriques.
• L'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
• Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites équivalentes. A–t–on $(u_n^n) \sim (v_n^n)$ ?
• Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites équivalentes. A–t–on $u_n - v_n \to 0$ ?
• Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites telles que $u_n - v_n \to 0$. Les deux suites sont–elles équivalentes ?
• Soit $(u_n)$ une suite de termes positifs qui tend vers 0. Est-elle nécessairement décroissante à partir d'un certain rang ?

## 3.2 Exercices

**Exercice 1 :**
Étudier la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} := \frac{u_n^3+6u_n}{3u_n^2+2}$.

**Exercice 2 :**
Étudier la convergence de la suite de terme général (où $E$ désigne la partie entière)

$$u_n := \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k}).$$

**Exercice 3 :**
On considère les suites $(u_n)$, $(v_n)$, $(w_n)$ et $(x_n)$ définies pour tout $n \geqslant 0$ par $u_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $v_n := u_n + \frac{1}{n!}$, $w_n := u_n + \frac{1}{n.n!}$ et $x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite $\ell$.
2. Montrer que $\ell$ n'est pas un nombre rationnel.
3. Déterminer (avec une calculatrice ou un ordinateur) une valeur approchée de cette limite à $10^{-7}$ près.
4. Montrer que la suite $(x_n)$ est croissante et majorée, et que sa limite est supérieure à 2.
5. Montrer que $(u_n)$ et $(x_n)$ ont la même limite.
6. Déterminer, en utilisant $(x_n)$ une valeur approchée de cette limite à $10^{-7}$ près. Qu'en pensez-vous ?
7. Montrer que $\ell$ n'est autre que $e$ (mais au fait, qui est $e$ ?).

**Exercice 4 :**
Soit $(u_n)$ une suite réelle. Montrer successivement :

a) Si $u_n \to 0$, alors $v_n =: \frac{u_0+\ldots+u_n}{n+1} \to 0$.
b) Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $v_n \to \ell$.
c) Si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.
d) A–t–on $v_n \longrightarrow \ell \Longrightarrow u_n \longrightarrow \ell$ ?
e) Si $(u_n)$ est monotone et $v_n \to \ell$, alors $u_n \to \ell$.
f) Soit $a_n$ une suite réelle. Si $a_{n+1} - a_n \longrightarrow \ell$, alors $\frac{a_n}{n} \longrightarrow \ell$.
g) Soit $\alpha_n > 0$. Si $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \longrightarrow \ell$, alors $\sqrt[n]{\alpha_n} \longrightarrow \ell$.
h) Montrer que $u_n := \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \longrightarrow e$.
i) On considère la suite définie par la donnée de $u_0 \in ]0,1[$ et pour tout $n$ entier naturel, $u_{n+1} := u_n - u_n^2$. Déterminer un équivalent de $(u_n)$.

**Exercice 5 :**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $\theta \not\equiv 0[\pi]$. Montrer que les suites $u_n := \cos(n\theta)$ et $v_{n+1} := \sin(n\theta)$ n'ont pas de limite.
Que se passe-t-il si $\theta \equiv 0[\pi]$?

**Exercice 6 :**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer : $\exists ! \alpha_n \in ]0,1[,\ \alpha_n^n + \alpha_n - 1 = 0$.
Étudier la suite $(\alpha_n)$.
Déterminer un équivalent simple de $\beta_n := 1 - \alpha_n$.

**Exercice 7 :**
Soit $(a_n)$ une suite à termes positifs telle que $a_{n+2} \leqslant \frac{a_{n+1}+a_n}{3}$. Montrer que $(a_n)$ tend vers 0.

**Exercice 8 :**
Le but de l'exercice est de prouver la divergence de la suite de terme général

$$u_n := \frac{1}{n \sin(n)}.$$

1. Prouver que la suite $(u_n)$ est bien définie.
2. Démontrer que, si cette suite converge, sa limite est nécessairement 0.
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe des entiers $p_n$ et $q_n$ tels que :

$$0 \leqslant p_n \leqslant n\pi \qquad \text{et} \qquad |q_n \pi - p_n| \leqslant \frac{1}{n}.$$

   (On pourra utiliser le principe des tiroirs de Dirichlet.)
4. Démontrer que la suite $(p_n)$ définie à la question précédente diverge vers $+\infty$.
5. En déduire que la suite $\left(\frac{1}{n\sin(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

**Exercice 9 :**
Soit $\mathbf{T}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indiquant la date à laquelle un certain matériel tombe en panne.
On suppose $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(\mathbf{T} > n) > 0$.
On appelle *taux de défaillance* associé à la variable $\mathbf{T}$ la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\lambda_n := \mathbb{P}_{\{\mathbf{T}\geqslant N\}}(\mathbf{T} = n)$.

1. Interpréter le taux de défaillance, et justifier que celui-ci appartient à $[0,1[$.
2. Exprimer, à l'aide des $\lambda_n$, la probabilité $\mathbb{P}(\mathbf{T} \geqslant n)$.
3. En déduire que $\sum \lambda_n$ diverge.
4. Réciproquement, si $(\lambda_n)$ est une suite d'éléments de $[0,1[$ qui diverge, montrer qu'elle peut se comprendre comme un taux de défaillance associé à une certaine variable aléatoire $\mathbf{T}$.

# 4 Exercices sur les séries

## 4.1 Questions de cours

Démontrer les résultats de cours suivants :
- La convergence absolue d'une suite numérique implique la convergence.
- Les résultats classiques $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- Le théorème concernant la convergence des séries de Riemann.
- Le théorème concernant la convergence des séries de Bertrand.
- Les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs.
- Les théorèmes donnant les équivalents de sommes partielles et restes.

• Le théorème spécial des séries alternées.
• Démontrer la règle d'Abel : si $(\alpha_n)$ est une suite de réels décroissante et tendant vers 0 et que $(v_n)$ est une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé complet $E$ vérifiant que la suite des sommes partielles $(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k)$ est bornée, alors la série $\sum \alpha_n v_n$ est convergente. Applications ?

## 4.2 Exercices

**Exercice 10 :**
Convergence et somme de la série de terme général $(u_n)$ avec :
a) $u_n := \ln\left(\cos \frac{1}{2^n}\right)$, b) $u_n := \frac{2n^3+n^2-4n-2}{n!}$, c) $u_n = \frac{n(n+3)}{3^{n+2}}$, d) $u_n := 1 + \frac{1}{2n}^{2n} - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-2n}$.

**Exercice 11 :**
Prouver la convergence de la série de terme général $u_n := \frac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})\cdots(1+\sqrt{n+1})}$ et calculer sa somme.

**Exercice 12 :**
On pose, pour tout $n$ entier naturel non nul, $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.
En utilisant les résultats sur les équivalents des sommes partielles et restes, déterminer les trois premiers termes du développement asymptotique de $(H_n)$.
Donner une autre façon d'obtenir les deux premiers termes.

**Exercice 13 :**
On pose, pour $n$ entier positif,

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt \quad \text{et} \quad J_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt.$$

On pose également, pour tout $n$ entier positif,

$$u_n := \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$.
2. Montrer que la suite $(J_n)$ est convergente.
3. Déterminer la limite de $(J_n)$.
4. Trouver une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n+2}$.
5. En déduire l'expression de $I_n$ en fonction de $n$.
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.
7. Montrer que $\frac{I_{n+1}}{I_n} \longrightarrow 1$, puis que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire à nouveau la limite de $I_n$.
8. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et en déduire que la suite $(u_n)$ converge.
9. En déduire la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

**Exercice 14 (Règle de Duhamel) :**
Soit $\alpha$ un réel et $(u_n)$ une suite strictement positive vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Montrer que si $\alpha > 1$ la série $\sum u_n$ converge, et que si $\alpha < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
Soit $a > 0$ fixé. Étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{n!}{(a+1)\cdots(a+n)}.$$

**Exercice 15 (Lemme de condensation de Cauchy) :**
Soit $(u_n)$ une suite positive et décroissante. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.
Application : convergence des séries de Riemann.
Application 2 : montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \min(u_n, 1/n)$ diverge.

**Exercice 16 :**

1. Soit $x \in [0,1[$ fixé. Montrer qu'il existe une unique suite $(a_n)$ d'éléments de $\{0,\ldots,9\}$, non stationnaire à 9, telle que $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$.
2. Montrer que $x$ est rationnel si et seulement si la suite $(a_n)$ est périodique à partir d'un certain rang.
3. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

**Exercice 17 :**
Soit $\sum a_n$ une série réelle semi-convergente et $\ell$ un réel. Montrer qu'il existe une permutation $\sigma$ telle que $\sum a_{\sigma(n)}$ soit convergente de somme $\ell$.

**Exercice 18 :**
Soit $\mathbf{X}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbf{X}$ admet une espérance si et seulement si $\sum \mathbb{P}(\mathbf{X} > n)$ converge et que dans ce cas $\mathbb{E}\mathbf{X} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{X} > n)$.

## Exercices de topologie.

# 5 Extraits du programme

10.1 Topologie des espaces métriques. Distance, boules ouvertes, boules fermées. Parties ouvertes, parties fermées. Voisinages. Intérieur, adhérence et frontière d'une partie. Distance à une partie, diamètre d'une partie. Parties denses, points isolés, points d'accumulation. Produits finis d'espaces métriques. Normes usuelles sur les espaces $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$.
Suites,limites, valeurs d'adhérence, sous-suites, suites de Cauchy. Caractérisation de l'adhérence par les suites. Applications d'un espace métrique dans un autre, continuité en un point, caractérisation par les suites. Continuité sur une partie, caractérisation par les images réciproques des ouverts ou des fermés. Homéomorphismes. Applications uniformément continues. Algèbre des fonctions numériques continues.
10.2 Espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Normes. Distance associée à une norme. Normes équivalentes. Continuité des opérations (addition, multiplication par un scalaire). Applications linéaires continues, normes de ces applications. Applications multilinéaires continues.
10.3 Espaces métriques compacts
Définition séquentielle. Parties compactes d'un compact. Parties compactes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Produit d'un nombre fini d'espaces métriques compacts. Parties compactes de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$.
Image continue d'un compact. Théorème de Heine de continuité uniforme des applications continues sur un compact.
10.4 Espaces métriques connexes.
Définitions. Parties connexes. Union de parties connexes d'intersection non vide. Parties connexes de $\mathbb{R}$. Image continue d'un connexe. Théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs : elle implique la connexité et lui équivaut sur un ouvert d'un espace vectoriel normé.
10.5 Espaces métriques complets.
Définition. Parties complètes d'un espace complet. Exemples de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Méthode des approximations successives, théorème du point fixe pour les contractions d'un espace complet dans lui-même. Critère de Cauchy pour l'existence de la limite d'une application en un point.
10.6 Espaces vectoriels normés de dimension finie.
Théorème d'équivalence des normes. Les parties compactes sont les fermés bornés. De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet. Continuité des applications linéaires et multilinéaires en dimension finie.
10.7 Espaces de Banach.
Définition. Critère de Cauchy pour les séries. L'absolue convergence d'une série implique la convergence. Espaces de Banach usuels de suites et de fonctions. Espace de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Banach vers un autre. Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergences simple,uniforme,uniforme sur tout compact. Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Critère de Cauchy uniforme. Dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe $C^1$ simplement convergente et dont la suite des dérivées converge uniformément. Séries d'applications à valeurs dans un espace de Banach. Convergences simple et uniforme. Convergence normale. Critère de Cauchy uniforme. Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

# 6 Questions de cours

• Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, l'application $\|\cdot\|_p : \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^p$.
• Montrer que sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
• Définition et propriétés de l'exponentielle matricielle

**Exercice 19 :**
Soit $(E, N)$ un espace normé complexe. Montrer que si la sphère unité est compacte, alors $E$ est de dimension finie.

# 7 Exercices

**Exercice 20 :**
On note $E$ l'ensemble des fonctions de classe $C^1$ sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour toute $f$ dans $E$, on pose $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E$, qui n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

**Exercice 21 :**
Soit $n \geqslant 1$ et notons $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $E$.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que l'adhérence de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $E$ est $E$. (On pourra considérer, pour $A \in E$, $A_p = A - \frac{1}{p} I_n$.)
3. Montrer que l'application $A \longmapsto \chi_A$ est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}[X]$.
4. Déduire des questions précédentes que, pour tous $(A, B) \in E^2$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. (On pourra commencer par traiter le cas où $B$ est inversible.)
5. Montrer que l'adhérence de $\mathcal{D}$ dans $E$ est $E$. (On pourra commencer, pour $A \in E$, par justifier que $A$ est trigonalisable, trigonaliser $A$ (sous la forme $A = PTP^{-1}$), et enfin construire une suite de matrices $T_p$ à coefficients diagonaux tous différents qui converge vers $T$.)
6. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton. (On pourra considérer l'application $f : A \longmapsto \chi_A(A)$.)

**Exercice 22 :**
Montrer qu'une partie $B$ de $\mathbb{R}^n$ est la boule unité fermée pour une norme de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $B$ est convexe, compacte, symétrique par rapport à l'origine et d'intérieur non vide.

**Exercice 23 :**
Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés complets. On suppose $F$ complet. Soit $A$ une partie dense de $E$ et soit $f : A \to F$ une application uniformément continue. Montrer que $f$ admet un unique prolongement continu à $E$ tout entier.

**Exercice 24 :**
Soit $N : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$ une application vérifiant les trois axiomes d'une norme. Montrer que $N$ se prolonge de façon unique en une norme sur $\mathbb{R}^2$.
On pourra utiliser le théorème de prolongement des applications uniformément continues et le principe des tiroirs.

**Exercice 25 :**
Soit $H$ un hyperplan d'un espace vectoriel normé $E$.

1. Montrer que si $E$ est de dimension finie, alors $H$ est fermé.
2. Montrer que si $H$ n'est pas fermé, alors son adhérence est $E$ entier.

**Exercice 26 :**
Soit $E$ un espace vectoriel normé et $f$ une forme linéaire non nulle. Montrer que $f$ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

**Exercice 27 :**
Soit $E$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. On munit $E$ de la norme $\|\cdot\|_1$, définie pour $f \in E$ par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

1. On considère, pour $g \in E$ fixée, l'application $u_g : f \in E \longmapsto u_g(f) := \int_0^1 g(t)f(t)dt$. Montrer que $u_g$ est continue et déterminer sa norme triple.
2. Même question avec l'application $\Phi_g$ qui, à $g \in E$ fixée associe l'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_0^x f(t)\varphi(t)dt$.
3. La forme linéaire $B : f \longmapsto \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}}dt$ est-elle continue ?

**Exercice 28 (Point fixe, cas compact) :**
Soit $E$ un espace vectoriel normé et $K$ une partie compacte non vide de $E$. Soit $f : K \to K$ une application vérifiant, pour tous $x$ et $y$ distincts de $K$,

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

.

1. Montrer que $f$ admet un unique point fixe $\alpha$.
2. On considère la suite définie par la donnée de $x_0 \in K$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)$ converge vers $\alpha$.

**Exercice 29 (Point fixe, cas complet) :**
Soit $E$ un espace vectoriel normé, $A$ une partie complète de $E$ et $f\ : A \to A$ une application $K$-llpschitzienne, avec $k < 1$.

1. Montrer que $f$ admet un unique point fixe $\alpha$ dans $A$.
2. On considère la suite définie par la donnée de $x_0 \in A$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)$ converge vers $\alpha$.