Groupes

Exercice 1. — Ecrire les tables de tous les groupes à 2, 3, 4 et 5 éléments.

Exercice 2. — Déterminer les groupes de symétrie du triangle équilatéral, du carré, du pentagone, du tétraèdre, du cube.

Exercice 3. — Montrer que toute permutation est une composée de transposition. Montrer que la parité du nombre de transpositions ne dépend pas de la décomposition.

Exercice 4. — Montrer que la signature est un morphisme de groupes entre $\mathfrak{S}_n$ et $\{\pm 1\}$.

Exercice 5. — Démontrer l'isomorphisme $GL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$

Exercice 6. — Montrer que le développement décimal d'une fraction $\frac{p}{q}$ est périodique et que la longueur de la période est un diviseur de $\varphi(q)$ où φ désigne l'indicatrice d'Euler.

Exercice 7. — Soit G un groupe et H un sous-groupe d'indice fini. Montrer que l'intersection des conjugués de H par les éléments de G est un sous-groupe distingué de G et d'indice fini dans G. Montrer que c'est le plus grand sous-groupe distingué de G contenu dans H.

Exercice 8. — Montrer que les translations forment un sous-groupe distingué dans le groupe des déplacements du plan.

Exercice 9. — Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Expliquer et démontrer la suite de morphismes suivante:

$$\operatorname{Ker}(f) \longrightarrow G \longrightarrow G/\operatorname{Ker}(f) \longrightarrow \operatorname{Im}(f) \longrightarrow G'.$$

Que peut-on dire si f est injective? surjective? bijective?

Exercice 10. — Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe fini G

1) Montrer que l'ensemble $HK = \{xy \mid x \in H, y \in K\}$ est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.

2) Montrer que l'on a $|HK| = \frac{|H|\times|K|}{|H\cap K|}$.

Exercice 11. — Soit G un groupe et soit $a \in G$. On définit l'application $f_a : G \to G$ par $f_a(x) = axa^{-1}$ pour $x \in G$.

1) Montrer que f_a est un automorphisme de G. On appelle *automorphismes intérieurs* les automorphismes de ce type et on note $\operatorname{Int}(G)$ leur groupe, sous-groupe du groupe $\operatorname{Aut}(G)$ des automorphismes de G.

2) Démontrer l'isomorphisme de groupes $\operatorname{Int}(G) \simeq G/Z(G)$ où $Z(G)$ désigne le centre de G.

Exercice 12. — On remplit une grille carrée de taille 5×5 des 25 premiers entiers dans le sens de l'écriture du français. Sur cette grille on fait opérer le groupe des symétries du carré. Déterminer les cardinaux des orbites, puis les orbites de chacun des entiers (Utiliser la formule des classes).

Exercice 13. — De combien de manières différentes peut-on colorier un cube avec trois couleurs? (Utiliser la formule de Burnside).

Anneaux et corps

Exercice 14. — Soient m et n deux entiers premiers entre-eux. Démontrer l'isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Exercice 15. — Soit $f : A \to A'$ un morphisme d'anneaux. Expliquer et démontrer la suite de morphismes suivante:

$$\operatorname{Ker}(f) \longrightarrow A \longrightarrow A/\operatorname{Ker}(f) \longrightarrow \operatorname{Im}(f) \longrightarrow A'.$$

Que peut-on dire si f est injective? surjective? bijective?

Exercice 16. — Soit A un anneau commutatif. Montrer qu'un anneau commutatif est un corps si et seulement (0) est son seul idéal propre

Exercice 17. — Soit $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des entiers de Gauß.

1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau.
2) Déterminer l'ensemble de ses inversibles.
3) Montrer que le corps de fractions de $\mathbb{Z}[i]$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[i]$.
4) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.
5) Décomposer 70 en produit d'éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 18. — Définir $\mathbb{C}$ comme un quotient de $\mathbb{R}[X]$, puis comme un sous-anneau de l'aneau des matrices $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 19. — Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombre décimaux

1) Montrer $\mathbb{D}$ est un anneau.
2) Déterminer l'ensemble de ses inversibles.
3) Déterminer le corps de fractions de $\mathbb{D}$.
4) Montrer que $\mathbb{D}$ est euclidien.

Exercice 20. — Factoriser $X^5 - 1$ et $X^6 - 1$ sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Exercice 21. — Quels sont tous les polynômes unitaires de degré 2 de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$ irréductibles? Même question pour $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 22. — Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Exercice 23. — Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.