Université de Strasbourg **Agrégation interne**

2019-2020 **Y. Le Floch**

Feuille de révisions sur l'intégration

1 Programme et conseils

Voici des extraits du programme assortis d'une liste non exhaustive de conseils de révision.

9.6 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Définition de l'intégrale de Riemann, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne, relation de Chasles. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle. Intégration par parties, changement de variable, calculs de primitives et d'intégrales.
Convergences en moyenne et en moyenne quadratique pour les suites de fonctions. Comparaison avec la convergence uniforme.

Savoir expliquer l'idée de la définition de l'intégrale de Riemann, faire le lien avec les sommes de Riemann. Revoir les primitives usuelles et s'entraîner aux calculs explicites avec changements de variables et intégrations par parties. Il peut être utile d'avoir une idée d'autres techniques de calcul (par exemple : intégration des fractions rationnelles, linéarisation pour les fonctions trigonométriques). Trouver des exemples et contre-exemples pour illustrer les relations entre les différents modes de convergence des suites de fonctions.

9.7 Intégrales sur un segment d'une fonction dépendant d'un paramètre. Théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme.

9.8 Intégration sur un intervalle quelconque. Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont supposées continues par morceaux sur l'intervalle I de définition, c'est-à-dire continues par morceaux sur tout segment contenu dans I.
Intégrale d'une fonction positive (comme borne supérieure, éventuellement infinie, des intégrales sur les segments inclus dans I). Emploi des relations de comparaison.

Une fonction définie sur I à valeurs complexes est dite intégrable si l'intégrale de son module est finie.
Les trois théorèmes suivants sont admis :

— Théorème de convergence monotone : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions intégrables, convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I. Alors f est intégrable sur I si, et seulement si, la suite des intégrales des f_n est majorée ; en ce cas, l'intégrale de f est la limite de celles des f_n.

— Théorème de convergence dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I. Si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et son intégrale est la limite de celles des f_n.

— Théorème d'intégration terme à terme : Soit une suite (u_n) de fonctions à valeurs complexes, intégrables sur I, telle que la série $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I, et telle que la série $\sum \int_I |u_n|$ converge. Alors S est intégrable sur I et on a $\int_I S = \sum_n \int_I u_n$.

Connaître les énoncés précis des trois théorèmes ci-dessus, en particulier savoir citer **toutes leurs hypothèses** *; pour ce faire, trouver des contre-exemples dans les cas où chacune de ces hypothèses manque. S'entraîner à les appliquer, en particulier trouver g,* **qui ne doit pas dépendre de** *n, dans le théorème de convergence dominée.*

9.9 Intégrales impropres. Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy.
Convergence absolue, lien avec l'intégrabilité. Emploi des relations de comparaison, de l'intégration par parties pour l'étude de la convergence. Intégration de relations de prépondérance et d'équivalence. Pour une fonction f définie sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, comparaison entre la convergence de la série de terme général $f(n)$ $(n > a)$ et l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ (méthode des rectangles). Si f est décroissante et positive sur $[0, +\infty[$, alors la série de terme général $f(n) - \int_{[n,n+1]} f(t)\, dt$ converge.

Savoir justifier soigneusement la convergence d'une intégrale impropre. En particulier, faire très attention aux termes de bord si une intégration par parties intervient. Savoir retrouver rapidement la méthode pour comparer une série et une intégrale (faire un dessin).

9.10 Intégrales sur un intervalle quelconque d'une fonction dépendant d'un paramètre. Théorème de continuité : Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $X \times I$ et à valeurs complexes. On suppose que, pour tout t dans I, la fonction partielle $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X et que, pour tout x dans X, la fonction partielle $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I. S'il existe une fonction g intégrable sur I et telle que, pour tout x dans X et tout t dans I, $|f(x,t)| \leq g(t)$, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x,t)$ sur I est continue sur X.

Théorème de dérivation : Soient X et I deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $X \times I$ et à valeurs complexes, telle que, pour tout x dans X, la fonction partielle $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I. On suppose que f admet une dérivée partielle $f'_x(x,t)$ en tout point de $X \times I$, que pour tout t dans I, la fonction $x \mapsto f'_x(x,t)$ est continue sur X. S'il existe une fonction h intégrable sur I et telle que, pour tout x dans X et tout t dans I, $|f'_x(x,t)| \leq h(t)$, alors la fonction F associant à x de X l'intégrale de $f(x,t)$ sur I est dérivable sur X et on a $F'(x) = \int_I f'_x(x,t)\ dt$.

Application des théorèmes précédents à la fonction Gamma d'Euler, à la transformée de Fourier, à la transformée de Laplace.

Encore une fois, apprendre ces théorèmes avec **toutes leurs hypothèses** *; comprendre le lien avec le théorème de convergence dominée peut aider. Les fonctions g et h ne doivent pas dépendre du paramètre. S'entraîner à les appliquer et à ne pas se tromper dans les variables (notamment quand on dérive).*

13.1 Intégrales multiples. Tous les théorèmes de ce paragraphe sont admis.
Intégrales curvilignes, longueur d'un arc de courbe, travail d'une force.
Formule de Fubini et définition de l'intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle $[a,b] \times [c,d]$. Adaptation à l'intégrale triple.
Théorème de Fubini-Tonelli : Si f est une fonction de deux variables continue positive sur un rectangle borné ou non, on peut intervertir l'ordre des intégrations ; lorsque la valeur commune de ces intégrales est finie, f est dite intégrable et son intégrale double est cette valeur commune.
Si f est une fonction complexe de deux variables continue sur un rectangle borné ou non, on dit que f est intégrable si son module est intégrable. Dans ce cas, on peut intervertir l'ordre des intégrations et l'intégrale de f est la valeur commune des deux intégrales superposées.
Extension des résultats précédents au cas de fonctions de plusieurs variables.
Extension au cas du produit d'une fonction de plusieurs variables continue positive par une fonction indicatrice d'un ensemble « géométriquement

simple ». Linéarité et additivité relativement à la fonction et relativement aux ensembles.
Applications à des calculs d'intégrales.
Théorème du changement de variables ; passage en coordonnées polaires.
Exemples de calculs d'aires planes et de volumes.

Savoir montrer l'intégrabilité d'une fonction de plusieurs variables pour des exemples simples. Apprendre la formule du changement de variables dans les intégrales multiples ; savoir justifier qu'une application est un $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme et calculer son jacobien en tout point.*

2 Quelques références

Voici une liste (encore une fois, pas du tout exhaustive) de références dans lesquelles vous pourrez retrouver les résultats de cours et/ou des exercices supplémentaires pour vous entraîner. Attention, le programme de l'agrégation interne se limite à l'intégrale de Riemann ; il faudra donc penser à éviter le point de vue de Lebesgue dans les références (mais cela peut être une bonne idée de savoir expliquer rapidement la différence entre ces deux théories).

— B. HAUCHECORNE, Les contre-exemples en mathématiques,

— X. GOURDON, Les maths en tête : analyse,

— M. BRIANE, G. PAGES, Théorie de l'intégration (seulement le premier chapitre),

— J.-P. RAMIS, A. WARUSFEL, Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 2.

3 Exercices

Exercice 1. Calculer une primitive de chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, là où cela a un sens :

1. $x \mapsto \ln x$,
2. $x \mapsto \frac{1}{x^2+x-2}$,
3. $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$,
4. $x \mapsto \sin^3 x$,
5. $x \mapsto \sqrt{2x+8-x^2}$,
6. $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$.

Exercice 2 (Avec des sommes de Riemann)**.** Étudier la convergence des suites ci-dessous :

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$,
2. $v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$,
3. $w_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^{n} (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 3 (Phase instationnaire)**.** Soient $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ dont la dérivée ne s'annule jamais et $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact. Montrer que

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} \exp(in\phi(x))a(x)\ dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 4. Trouver une suite de fonctions continues sur un segment qui converge en moyenne et en moyenne quadratique, mais pas simplement, vers une fonction donnée.

Exercice 5. Soient $a, b > 0$ avec $b > a$; montrer que

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

Exercice 6. Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^1 x^{\frac{1}{n}}\ dx$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ admet une limite et calculer celle-ci.

Exercice 7. Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n\ dx$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ admet une limite et calculer celle-ci.

Exercice 8. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que chacune des suites ci-dessous converge et calculer la limite de chacune d'elles.

1. $\int_0^1 f(t^n)\ dt$,
2. $\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{f(t)}{n\left(t^2+\frac{1}{n^2}\right)}\ dt$.

Exercice 9. Étudier la convergence de la suite

$$I_n = \int_0^1 nx(1-x)^n\ dx.$$

Exercice 10. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 \frac{dx}{x^x}.$$

Indication : écrire $x \mapsto \frac{1}{x^x}$ à l'aide de la fonction exponentielle et développer en série entière.

Exercice 11. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{\sin t}{t}$. Montrer qu'elle n'est pas intégrable mais que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.

Exercice 12 (Intégrales de Bertrand)**.** Étudier, selon les valeurs des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de l'intégrale

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\ dx.$$

Exercice 13. Étudier la convergence des intégrales impropres ci-dessous selon la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$,
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-t)-1}{t^\alpha}\ dt$,
3. $\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\ dt$,
4. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\ dt$.

Exercice 14. Soit $\alpha \leq 1$. Par comparaison avec une intégrale, obtenir un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 15. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)\ln t}{t}\ dt$ existe et vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 16 (Intégrale de Fresnel)**.** On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \exp(-it^2).$$

1. f est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?
2. Montrer que l'intégrale impropre $I = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-(t^2+i)x^2)}{t^2+i}\ dt$$

3. Expliquer pourquoi ceci a un sens.
4. Montrer que g admet une limite quand $x \to +\infty$ et calculer celle-ci.
5. Prouver que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer g' (on rappelle que $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\ dx = \sqrt{\pi}$).
6. En déduire la valeur de I.

Exercice 17. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)\exp(-t)}{t}\ dt.$$

1. Justifier pourquoi F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer F'.
3. En déduire une expression simple de F à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 18 (Autour de la transformée de Fourier)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable. On définit sa transformée de Fourier $\hat{f}$ par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \qquad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-ix\xi) f(x)\ dx.$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est bien définie, continue, bornée, et que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
2. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\hat{f}(\xi) \underset{\xi \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Montrer que cela reste vrai même si on ne suppose pas f de classe $\mathcal{C}^1$ (on pourra passer par les fonctions en escalier).
4. On suppose que $x \mapsto xf(x)$ est intégrable. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $\hat{f}'$.
5. On suppose que f est dérivable et que f' est intégrable. Prouver que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$.

Exercice 19 (Transformée de Fourier d'une gaussienne)**.** Soit $\alpha > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(-\alpha x^2)$; on veut calculer la transformée de Fourier

$$\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-ix\xi)\ dx$$

de la fonction f.

1. Expliquer pourquoi $\hat{f}$ est bien définie.

2. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et trouver une équation différentielle simple dont elle est solution.
3. En déduire une expression explicite de $\hat{f}$ (on rappelle que $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\ dx = \sqrt{\pi}$).

Exercice 20 (Autour de la fonction Gamma)**.** On définit la fonction Gamma d'Euler par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t)\ dt$$

pour tout $x > 0$.

1. Justifier que cela a un sens.
2. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et calculer ses dérivées successives.
3. Étudier la concavité de Γ
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\ dx$; déduire de cette relation et de la question précédente la valeur de $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Trouver un équivalent de Γ en 0^+.

Exercice 21. Calculer l'aire de

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 4 - x^3\}.$$

Exercice 22 (Intégrale gaussienne)**.** Le but de cet exercice est de calculer $I = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\ dx$.

1. Exprimer $J = \int\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(x^2 + y^2))\ dx\ dy$ en fonction de I.
2. Calculer J à l'aide d'un changement de variables.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 23. On veut calculer la valeur de

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\ dx.$$

1. Montrer que $I = \int\int_D \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\ dx\ dy$ où $D = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$.
2. En déduire que $2I = \int\int_D \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}\ dx\ dy$.
3. Calculer I explicitement.

Exercice 24 (Volume de la boule unité)**.** Le but de cet exercice est de calculer le volume

$$V_d = \int_{x_1^2+\ldots+x_d^2<1} dx_1 \ldots dx_d$$

de la boule unité $B_d(0,1)$ de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$, pour $d \geq 2$.

1. Montrer que l'application $\phi :]0,1[\times]0,\pi[^{d-2}\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^d$ définie par $\phi(r,\theta_1,\ldots,\theta_{d-1}) = (x_1,\ldots,x_d)$ avec

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1, \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ \vdots \\ x_{d-1} = r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{d-2}\cos\theta_{d-1}, \\ x_d = r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1}, \end{cases}$$

réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur son image, et décrire celle-ci. Calculer le jacobien de ce difféomorphisme.

2. En déduire que

$$V_d = \frac{2\pi}{d}\left(\int_0^\pi \sin^{d-2}\theta_1\ d\theta_1\right)\ldots\left(\int_0^\pi \sin\theta_{d-2}\ d\theta_{d-2}\right).$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\int_0^\pi \sin^k\theta\ d\theta = \int_0^1 \frac{t^{\frac{k-1}{2}}}{\sqrt{1-t}}\ dt.$$

4. En écrivant $\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ comme une intégrale double et en effectuant un changement de variables, en déduire que

$$I_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}.$$

5. Conclure.