nicolas.juillet@math.unistra.fr

Variables aléatoires continues, à une ou plusieurs dimensions

Une sélection des exercices les plus classiques ou fondamentaux peut être 1, 2, 5, 8, 16, 17, 18, 22.

1 Ajouts 2019

1.

Soit X une variable aléatoire positive à densité, d'espérance finie. Établir l'identité suivante

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\mathrm{d}t.$$

Comment cette inégalité se généralise-t-elle pour $\mathbb{E}[X^p]$ où $p > 0$?

2.

Soit X et Y deux variables aléatoires possédant une densité de probabilité. On supposera X et Y indépendantes. Montrer que $X + Y$ possède une densité. On proposera deux démonstrations :

— Calcul de $\mathbb{E}[\varphi(X + Y)]$ où φ est une fonction continue bornée (par exemple $\varphi_t : x \mapsto \exp(ixt)$).

— Calcul de la fonction de répartition $F_{X+Y} : t \mapsto \mathbb{P}(X + Y \leq t)$.

2 Variables aléatoires

3. Là où la feuille commence

Pour $c > 0$, on définit une fonction f_c par :

$$f_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, 2], \\ cx & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 2c - cx & \text{si } x \in [1, 2]. \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f_c.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de c la fonction f est-elle une densité de probabilité ?

On suppose dans la suite que c est une telle valeur, et on note $f = f_c$.

3. On considère une variable X de densité f. Calculer F_X. (Tracer F_X)
4. Calculer $\mathbb{P}(\{1 \leq X\})$ et $\mathbb{P}(\{|1 - X| \leq 1/2\})$.
5. On pose $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?
6. Calculer l'espérance de X et sa variance.

4. Loi uniforme

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur un intervalle de $\mathbb{R}$. L'espérance de X est 1 et elle prend ses valeurs jusqu'à 9.

1. Quelle est est la densité de X ?
2. Tracez la fonction de répartition de X.
3. Calculez la variance de X.

5. Loi uniforme 2

Soit X de loi uniforme sur $[-2, 2]$. Quelle est la loi de $|X|$? Quelle est la loi de $\lfloor X \rfloor$? Même questions pour Y uniforme sur $[-1, 3]$.

6.

Soit X une variable aléatoire réelle de densité $f(x) = x\, e^{-x^2/2} 1_{\{x>0\}}$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Montrer que $Y = X^2$ est une variable aléatoire continue, dont on précisera la densité. Reconnaître la loi de Y.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.

7.

Soit une variable aléatoire X, à valeurs réelles, de densité de probabilité f, définie pour $n > 1$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^{n-1}, & \text{si } 0 \leq x < 1,\ a \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{si } x \notin [0, 1[. \end{cases}$$

1. Calculer a.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.

8.

Montrer qu'une variable aléatoire X non identiquement nulle à valeur dans $\mathbb{R}^+$ suit une loi exponentielle si et seulement si elle est sans mémoire, c'est-à-dire que pour tout $s, t > 0$, on a $\mathbb{P}(X > s+t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$.

9.

La durée de vie, exprimée en années, d'un circuit électronique est une variable aléatoire T dont la fonction de répartition F est définie par : $F(t) = (1 - e^{-t^2/2}) 1_{\{t \geq 0\}}$.

1. Donner la densité de probabilité f de T. Calculer $\mathbb{E}[T]$.
2. Sachant que le circuit a déjà fonctionné durant 1 an, quelle est la probabilité qu'il continue à fonctionner encore pendant 3 ans ou plus ? La loi est-elle sans mémoire ?

10. Temps d'attente

Vous arrivez à la poste. À ce moment deux guichets sont libres. Deux clients s'y présentent avant vous. On modélise la durée nécessaire pour servir ces client par deux variables aléatoires indépendentes X et Y de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ pour un même λ.

1. La durée moyenne pour servir un client étant de 140 secondes, que vaut λ ?
2. Que représente $M = \min(X, Y)$? Quelle est la loi de M ?
3. Vous attendez depuis 2 minutes, quelle est la loi du temps qu'il vous reste à attendre ?

11. Difficile et technique

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{\ln(2)}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   est la fonction de répartition d'une variable à densité notée X.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,1[$. Calculer $P(k \leq \frac{1}{X} \leq k+t)$.
3. Soit $Y = \frac{1}{X} - \lfloor \frac{1}{X} \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x . Montrer que Y est une variable aléatoire de même loi que X.

12. Technique mais moins difficile

On observe une population de bactéries en croissance asynchrone. Soit T l'âge d'une bactérie choisie au hasard. On admet que la densité de probabilité de T est :

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0 \\ k2^{1-\frac{t}{\theta}}, & \text{si } 0 < t \leq \theta \\ 0, & \text{si } t \geq \theta \end{cases}$$

1. Calculer k.
2. Calculer la probabilité pour que l'âge d'une bactérie choisie au hasard soit compris entre 0 et $\theta/2$.
3. On admet que la masse d'une bactérie est fonction linéaire de son âge : $m = m_0(1+\frac{t}{\theta})$. Calculer l'espérance de la masse d'une bactérie choisie au hasard.

13. Ampoule halucinogène

Soit X la durée de vie d'une ampoule au krypton. On suppose que X admet pour densité la fonction définie sur $[0; +\infty]$ par : $f_\theta(t) = \theta e^{-\theta t}$ où θ est une constante positive.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X. On pourra, au choix, donner le résultat ou utiliser les calculs de la première partie.
3. Calculer le réel positif m tel que : $P(X < m) = 1/2$. Comparer m et $E(X)$. Peut-on conclure que la moitié des ampoules ont une durée de vie supérieure à $E(X)$?
4. Calculer $P(X > E(X))$. Commenter ce résultat.

3 Vecteurs aléatoires

14.

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq y \leq 1\}$. Soit f la fonction de deux variables constante sur D et nulle en dehors de D . On suppose que f est une densité de probabilité d'un couple (X, Y) de variables aléatoires.

1. Déterminer la valeur de f sur D .
2. Donner les densités marginales de X et Y et étudier leur indépendance.

15. Rendez-vous

Paul et Valérie ont rendez-vous chez Robert, entre 12h et 14h. Par hypothèse, les instants d'arrivée de Paul et Valérie sont des variables aléatoires X et Y indépendantes, de distribution uniforme sur $[0, 2]$, l'instant zéro correspondant à midi, l'unité de temps étant l'heure.

1. Soit U la variable aléatoire représentant le temps d'attente de Robert jusqu'à la première arrivée. Déterminer la densité de probabilité de U .
2. Soit V la variable aléatoire représentant le temps d'attente de Robert jusqu'à ce que ses deux amis soient arrivés. Déterminer la densité de probabilité de V .
3. Soit W la variable aléatoire représentant le temps d'attente de Robert entre les deux arrivées. Déterminer la densité de probabilité de W.

16. Aiguille de Buffon

Sur un sol plat sont tracées des droites parallèles régulièrement espacées de L. Ce sont les rainures d'un plancher. On laisse tomber (de haut par rapport à L) une aiguille de longueur l, puis on note x la distance du centre de l'aiguille à la rainure, et θ l'angle que fait l'aiguille avec la direction des lattes de plancher. On supposera (x, θ) uniforme

1. Commentez et précisez la modélisation.
2. On suppose $L > l$. Avec quelle probabilité, l'aiguille coupera-t-elle une rainure de plancher ?
3. Même question si $L \leq l$
4. En déduire une méthode de détermination de π. Commenter la vitesse et le fait que π, irrationel est approché par une méthode probabiliste.

17. Paradoxe de Bertrand

On considère les arcs d'un cercle de rayon 1 ainsi que trois modélisations pour choisir aléatoirement un de ces segments. Dans ces trois méthodes le hasard est génénré par des lois uniformes :

— on choisit uniformément et indépendament deux points sur la circonférence,
— on choisit uniformément sur le disque (privé du centre) le milieu du segment aléatoire,
— on choisit uniformément un rayon et uniformément sur ce rayon le milieu du segment aléatoire.

1. Faire une figure où apparaît un triangle équilatéral inscrit. Avec quelle probabilité, la longueur du segment est-elle supérieure à $\sqrt{3}$?
2. Calculer pour chacune des modélisations la longueur moyenne du segment

18. Une course

Sur un lac gelé, deux patineurs (A et B) disputent une course. Soit $T = (T_A, T_B)$ le vecteur aléatoire de leurs temps à l'arrivée, en minute. Ce vecteur admet une densité sur $(\mathbb{R}^+)^2$ d'expression

$$h(s,t) = \frac{1_{[2,4]\times[1,4]}(s,t) + 4 \times 1_{[2,3]\times[3,4]}(s,t)}{10}.$$

1. Faire un dessin puis vérifier que h est une densité.
2. Quelle est la probablité que A mette moins de 3 minutes ?
3. Quelle est la loi de T_A ? Quelle est son espérance ?
4. Quelle est la probabilité que A gagne la compétition ?
5. Les temps $T_{A'}$ et $T_{B'}$ de deux nouveaux coureurs (A' et B') suivent les lois de T_A et T_B respectivement. En revanche, on suppose que $T_{A'}$ et $T_{B'}$ sont indépendants. Qui a le plus de chance de gagner des deux ?

19.

Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres λ_1, λ_2.

1. Calculer les lois de $m := \min\{X_1, X_2\}$ et $M := \max\{X_1, X_2\}$.
2. Supposant que $\lambda_1 = \lambda_2$, montrer que m et $M - m$ sont des variables indépendantes.

20.

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes et ont la même loi, laquelle ?.
2. Calculer la densité de X/Y.

21.

Les véhicules spatiaux désirant s'arrimer à la Station Spatiale Internationale (ISS) s'appuient sur le système de guidage GPS (Global Positioning system) pour la phase d'approche de la station. Cependant, à faible distance de l'ISS, les signaux émits par la constellation de satellites qui constituent le système GPS sont fortement perturbés par les phénomènes de réflexions multiples sur la structure métallique de la station. L'onde électromagnétique reçue par le récepteur GPS du véhicule spatial se présente donc comme la superposition de deux ondes en quadrature dont les amplitudes X et Y sont des variables aléatoires de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ supposées indépendantes (pour des raisons d'isotropie). L'étude de l'amplitude $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ de l'onde reçue est de première importance pour assurer un guidage fiable du vaisseau lors de la manoeuvre d'arrimage.

1. Quelle est la loi du couple (X, Y) ?
2. En faisant le changement de variable $X = R\cos\theta$, $Y = R\sin\theta$, donner la loi du couple (R, θ).
3. Montrer que R et θ sont indépendantes. Reconnaître la loi de θ. Donner la densité de la loi de R. Cette loi est appelée loi de Rayleigh.
4. Calculer l'espérance et la variance de R.

22. Vecteurs gaussiens ou carrés magiques continus

1. trouver la loi d'un vecteur gaussien (X, Y) tel que X et Y suivent des lois normales centrées réduites.
2. trouver divers vecteurs aléatoires uniformes tels que X et Y sont tout deux uniformes sur $[0, 1]$.
3. trouver les lois de tous les vecteurs gaussiens (X, Y) tels que X et Y suivent des lois normales centrées réduites.
4. trouver un vecteur non gaussien tel que X et Y sont normales centrés réduites.
5. trouver un vecteur non gaussien tel que X et Y sont normales centrés réduites, et tel que la covariance de X et Y est nulle.

Listes d'exercices sur les probabilités continues issus d'ouvrages recommandables

Pour bien préparer les épreuves de l'agrégation interne, vous le plus tôt possible disposer d'outils de travail. La solution la plus simple est de tout d'abord acheter quelques livres bien choisis.

En tant que professeur du secondaire, inscris à la préparation au concours de l'agrégation interne, vous devez par ailleurs avoir accès aux trois bibliothèques

— Bibliothèque de l'IRMA (Locaux de l'UFR de Math-Info) ;
— Bibliothèque de l'IREM (Bâtiment IRMA) ;
— Bibliothèque Blaise Pascal (détruite, pauvre Blaise... Voir en U2-U3).

L'épreuve de l'agrégation vous demandera de vous constituer votre propre catalogue de références. Je vous conseille de commencer le plus possible à vous intéresser aux livres. La méthode alternative, également formatrice, est de stocker le maximum de connaissance dans votre mémoire.

Voici maintenant une liste d'exercices classiques corrigés, sur le thème des probabilités continues.

Gégoire Dupont : "Probabilités et statistiques pour l'enseignement"

Ce livre possède des illustrations en très grand nombre. Les exercices sont corrigés et bien choisis. On trouve aussi des programmes informatiques. Fortement recommandé par une élève qui a été admise, à la deuxième tentative, avec un excellent classement. Exemples d'exercices

— Exercice 2.5 Une discrétisation de la loi exponentielle
— Exercice 2.6 Une utilisation concrète de la loi normale
— Exercice 3.2 Un premier intervalle de fluctuations pour une proportion (il y a en fait plus d'un chapitre sur le sujet, le chapitre 6 du livre)
— Exercice 6.1 Sondage et représentativité
— Exercice 6.2 Deux problèmes de sur-réservation

Jean-Yves Ouvrard :"Probabilités, tome 1"

— Ex 6.1 Loi triangulaire et indépendance
— Ex 6.2 Loi exponentielle et temps d'arrivée : loi sans vieillissement, lien avaec la loi géométrique
— Ex 6.3 Loi uniforme et écriture décimale
— Ex 6.4 Loi uniforme et triangulaire ; convolution
— Ex 6.5 Loi d'un carré, d'une somme de variables aléatoires
— Ex 6.8 Loi uniforme sur $[0,1]^2$
— Ex 6.9 Loi uniforme sur le disque de centre $(0,0)$.

Garet-Kurtzmann : "De l'intégration aux probabilité", Ellipse

Le exercices suivants sont corrigés

— Ex 39 Loi de Cauchy et projection angulaire
— Ex 42 Polynôme du second degré à coefficient aléatoire. Discrimanant
— Ex 43 Aire d'un triangle à sommets placés aléatoirement
— Ex 45 v.a sans mémoire
— p177 Polynômes de Bernstein et Théorème de Weierstrass
— Ex 62 Aire d'un triangle de sommets aléatoires. Lois exponentielles et leur somme.
— Ex 63 Rapport de lois normales. Vecteur aléatoire.
— Ex 96-97 Vecteur Gaussien et mesure uniforme sur une sphère. Sphères de grandes dimensions.

Exercices de probabilités (Cottrel, Genon-Catalot, Duhamel et Meyre)

Tous les exercices sont corrigés.

Jérôme Escoffier : “Probabilités et statistiques”, Ellipse

Ce livre semble être très apprécié parmi les candidats. Comme d’autre, il est écrit par un membre ou ancien membre du jury du concours.

Ramis-Warusfel : “Mathématiques, tout-en-un pour la licence, tomes 1 et 2”, Dunod

Ce “pavé” en deux tomes couvre tout le programme de Licence L1 et L2 (algèbre-analyse-géométrie-probabilités-statistiques. . .) Il est conseillé par certains de mes collègues. Le cours semble bien écrit et la présentation est agréable.

4 Programme officiel de la session 2019

Je remercie Florian Hechner pour m’avoir permis de reproduire cette section ainsi que celle qui suivent.

13.2 Modélisation d’une expérience aléatoire.
Espace Ω des épreuves (ou des événements élémentaires) ; tribu (ou σ-algèbre) F des événements ; mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur cette tribu. Étude d’exemples dans le cas où Ω est fini ou infini dénombrable.
13.3 Espace probabilisé.
Propriétés d’une probabilité. Probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B(A)$ de A sachant B si $\mathbb{P}(B)$ est non nul.
Formule des probabilités composées (ou totales) et formule de Bayes.
Indépendance d’un ensemble fini d’événements.
13.4 Variables aléatoires réelles.
Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, F, \mathbb{P})$,on appelle variable aléatoire réelle (v.a.r. en abrégé) toute application $\mathbf{X}$ de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que l’image réciproque $\mathbf{X}^{-1}(I)$ de tout intervalle I de $\mathbb{R}$ appartienne à la tribu F.
On admettra que la somme, ou le produit, de v.a.r. est une v.a.r..
On se bornera à l’étude des deux familles suivantes de v.a.r. :
13.4.1 Variables aléatoires réelles discrètes.
Une v.a.r. est dite discrète si elle prend un nombre fini ou infini dénombrable de valeurs.
Loi et fonction de répartition d’une v.a.r. discrète.
Moments d’une v.a.r. discrète : espérance, variance et écart-type. Espérance d’une somme de v.a.r. discrètes.
Fonction génératrice d’une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Lois discrètes usuelles : loi hypergéométrique, loi de Bernoulli, loi binomiale, loi géométrique et loi de Poisson.
13.4.2 Variables aléatoires réelles possédant une loi avec densité.
On appelle densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et d’intégrale égale à 1.
Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. On dit qu’une v.a.r. $\mathbf{X}$ possède la loi de densité f si, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}(\{\mathbf{X} \in I\}) = \int_I f(x)dx$.
Fonction de répartition et moments ; espérance, variance et écart-type d’une v.a.r. possédant une loi avec densité.
Espérance d’une somme de v.a.r. possédant une densité (résultat admis).
Lois usuelles possédant une densité : loi uniforme sur un intervalle borné, loi exponentielle, loi de Cauchy, loi normale, loi Gamma à un paramètre.
On admettra le résultat suivant (théorème de transfert) : si $\mathbf{X}$ est une v.a.r. de loi de densité f et si Φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux sur tout segment et telle que la fonction $|\Phi|f$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\Phi(\mathbf{X})$ est une v.a.r. dont l’espérance est donnée par : $\mathbb{E}((\Phi(\mathbf{X}))) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)f(x)dx$.
13.5 Vecteurs aléatoires.
On dira qu’une application $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_p)$ de Ω dans $\mathbb{R}^p$ est un vecteur aléatoire si chacune de ses composantes est une v.a.r.
On se limitera aux deux cas suivants :

13.5.1 Vecteurs aléatoires discrets.
Un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_p)$ de Ω dans $\mathbb{R}^p$ est dit discret si chacune de ses composantes est une v.a.r. discrète.
Loi d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X}$.
Indépendance de p v.a.r. discrètes. Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. discrètes.
Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. discrètes indépendantes.
13.5.2 Vecteurs aléatoires possédant une loi avec densité.
On appelle densité de probabilité sur $\mathbb{R}^p$ toute fonction f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^+$, intégrable sur $\mathbb{R}^p$ et d'intégrale égale à 1 (on se limitera à la notion d'intégrale définie dans le paragraphe 13.1).
Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^p$. On dit qu'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_p)$ possède la loi de densité f si on a, pour tous intervalles I_1,...,I_p de $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}(\{\mathbf{X}_1 \in I_1\} \cap \cdots \cap \{\mathbf{X}_p \in I_p\}) = \int_{I_1} \cdots \int_{I_p} f(x_1, ..., x_p) dx_1 ... dx_p$.
Soit $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_p)$ un vecteur aléatoire de loi de densité f. Soit ψ un produit d'une fonction continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ par une fonction indicatrice d'un domaine géométriquement simple de $\mathbb{R}^p$ et telle que la fonction $|\psi| f$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^p$. On admettra que $\psi(\mathbf{X})$ est une v.a.r. dont l'espérance est donnée par : $\mathbb{E}(\psi(\mathbf{X})) = \int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} \psi(x_1, ..., x_p) f(x_1, ..., x_p) dx_1 ... dx_p$.
Indépendance de p v.a.r. possédant une loi avec densité.
Covariance et coefficient de corrélation d'un couple de v.a.r. possédant une loi avec densité.
Espérance et variance d'une somme de p v.a.r. indépendantes et possédant une loi avec densité. Application aux lois normales.
13.6 Théorèmes limites.
Suites de v.a.r. indépendantes.
Notions de convergences en loi, en probabilité, presque sûre.
Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres. Lemme de Borel-Cantelli.
Les résultats suivants sont admis :
loi forte des grands nombres pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées possédant une espérance, théorème de la limite centrale pour une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées et de variance finie.
Approximations de la loi binomiale par la loi de Poisson et par la loi normale.
13.7 Estimation.
Estimation ponctuelle : n-échantillon d'une variable aléatoire ; estimateur, biais d'un estimateur, estimateur asymptotiquement sans biais ; estimateur convergent, risque quadratique ; moyenne empirique, variance empirique.
Estimation par un intervalle : intervalle de confiance, intervalle de confiance asymptotique.
Estimation du paramètre d'une loi de Bernoulli. Application : méthode de Monte-Carlo pour le calcul approché d'une intégrale ou d'une somme de série.

5 Leçons de probabilités

5.1 Liste des leçons dont le thème principal porte sur des probabilités

229 : Suites de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale.
230 : Probabilité conditionnelle et indépendance. Variables aléatoires indépendantes. Covariance. Exemples.
231 : Espérance, variance ; loi faible des grands nombres. Applications.
232 : Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.
241 : Diverses notions de convergence en analyse et en probabilités. Exemples et applications. (Les définitions des notions de convergence sont supposées connues).
244 : Inégalités en analyse et en probabilités. Par exemple : Cauchy-Schwarz, Markov, Bessel, convexité...
249 : Loi normale en probabilités et statistiques.
258 : Couples de variables aléatoires possédant une densité. Covariance. Exemples d'utilisation.

260 : Variables aléatoires discrètes, couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples d'application.

5.2 Liste des leçons d'exemples et exercices dont le thème principal porte sur des probabilités

435 : Exemples de modélisations de situations réelles en probabilités.
437 : Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.
438 : Exemples de problèmes de dénombrement. Utilisation en probabilités.
448 : Exemples d'estimation en statistiques : estimation ponctuelle, estimation par intervalles de confiance.
453 : Exercices illustrant l'utilisation de la loi binomiale en probabilités et en statistiques.

6 Conseils de lecture

Voici quelques idées de lecture (par ordre alphabétique) :

- Barbé-Ledoux : Probabilité. Belin.
- Brancovan-Jeulin : Probabilités. Ellipses. ($\star$, plus technique).
- Escoffier : Probabilités et statistiques, Ellipses.
- Foata-Fuchs (ou Foata-Fuchs-Franchi pour la dernière édition) : Calcul des probabilités. Dunod (ou Masson).
- Grimett-Stirzaker : Probability and random processes. Clarendon Press.
- Grimett-Stirzaker : Probability and random processes, problems and solutions. Clarendon Press.
- Jacod-Protter : l'essentiel en théorie des probabilités. Cassini.
- Lesigne : Pile ou Face : une introduction aux théorèmes limites du calcul des probabilités.
- Ouvrard : probabilités 1. Cassini.
- Ouvrard : probabilités 2 ($\star$, plus technique).