Chapitre 1

Les variétés pseudo-riemanniennes et symplectiques connectées dont la courbure de Ricci est parallèle

Introduction

Ce chapitre classifie les différents types possibles de variétés pseudo-riemanniennes et de variétés symplectiques munies d'une connexion symplectique, dont la courbure de Ricci est parallèle. Le cas pseudo-riemannien est traité dans un article soumis à une revue et joint en annexe page 3 ; les motivations, le résulat et quelques commentaires sont repris ici. Le cas symplectique connecté apparaît comme corollaire du premier cas et n'est, lui, traité que dans la thèse.

Les variétés riemanniennes Ricci-parallèles ont une courbure de Ricci diagonalisable et sont par conséquent isométriques à un produit de variétés d'Einstein, au moins localement. Ce n'est plus vrai pour les variétés pseudo-riemanniennes ou pour les variétés symplectiques connectées. Cependant, en exploitant les propriétés de leur holonomie et notamment de leurs éventuels sous-espaces totalement isotropes stables par holonomie, on aboutit à un résultat proche. Il permet alors une classification locale de ces variétés ; à côté des produits (locaux) de variétés d'Einstein, quelques autres types apparaissent.

La démonstration repose sur deux théorèmes : d'une part un résultat d'algèbre portant sur les paires de formes bilinéaires et dû à W.Klingenberg [Kli54], d'autre part un résultat classique de de Rham et Wu sur l'holonomie (voir [Wu67]).

Les deux premières sections reprennent la teneur de l'article porté en annexe ; la première rappelle les motivations de la démarche et la deuxième traite le cas pseudo-riemannien. La troisième section propose, comme corollaire du théorème pseudo-riemannien, un théorème correspondant sur les variétés symplectiques connectées.

Rappel sur les variétés symplectiques. Une connection symplectique sur une variété symplectique $(\mathcal{M},\omega)$ est une connexion D pour laquelle la forme symplectique est parallèle, c'est-à-dire telle qu'en tout point p de $(\mathcal{M},\omega)$ et pour tous champs de vecteurs A et B au voisinage de p : $\forall V \in \mathrm{T}_p\mathcal{M}, L_V\omega(A,B) = \omega(D_V A,B) + \omega(A,D_V B)$. Contrairement aux connections riemannienne ou pseudo-riemannienne, elle n'est pas déterminée de façon unique sur $\mathcal{M}$ par cette condition.

Notations. Dans tout le chapitre, on notera $(\mathcal{M},g)$ une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne, en notant parfois $< \cdot,\cdot >$ la métrique g ; $(\mathcal{M},\omega)$ désignera une variété symplectique. La forme $(u,v) \mapsto \mathrm{tr}\, R(u,\cdot)v$ est une forme bilinéaire symétrique sur les variétés connectées ; c'est leur courbure de Ricci, notée ric. On notera Ric l'endomorphisme respectivement g-autoadjoint ou ω-antiautoadjoint associé à ric : $\mathrm{ric}(\cdot,\cdot) = g(\mathrm{Ric}\,\cdot,\cdot)$ ou $\mathrm{ric}(\cdot,\cdot) = \omega(\mathrm{Ric}\,\cdot,\cdot)$. On notera H le groupe d'holonomie restreint de $\mathcal{M}$ et les algèbres de Lie par des minuscules gothiques : $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{so}$ ...

1 Motivation : quelques mots sur le cas riemannien

Comme dit plus haut, une base de ce travail est un théorème de de Rham sur l'holonomie riemannienne, généralisé au cas pseudo-riemannien par Wu. Citons-en l'essentiel.

Théorème (de Rham, Wu) *Soit $(\mathcal{M},g)$ une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne complète, simplement connexe et $m \in \mathcal{M}$. Si l'espace tangent en m à $\mathcal{M}$ admet une décomposition orthogonale stable par holonomie :*

$$\mathrm{T}_m\mathcal{M} = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2,$$

alors il existe un unique couple $((\mathcal{M}_1,g_{|\mathcal{M}_1}),(\mathcal{M}_2,g_{|\mathcal{M}_2}))$ *de sous-variétés de* $\mathcal{M}$ *contenant* m *et une unique isométrie* f *tels que :*

- $\mathrm{T}_m\mathcal{M}_1 = E_1$ *et* $\mathrm{T}_m\mathcal{M}_2 = E_2$,
- $f \ : \ \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}$,
- $f_{|\mathcal{M}_1\times\{m\}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_1}$ *et* $f_{|\mathcal{M}_2\times\{m\}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2}$.

où $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ *désigne le produit riemannien de* $\mathcal{M}_1$ *et* $\mathcal{M}_2$.

Pour une variété riemannienne ou pseudo-riemannienne quelconque, le même résultat est vérifié seulement avec une isométrie locale.

Le théorème complet précise de plus dans quelle mesure le triplet $((\mathcal{M}_1,g_{|\mathcal{M}_1}),(\mathcal{M}_2,g_{|\mathcal{M}_2}), f)$ est unique, une fois supprimées les conditions $\mathrm{T}_m\mathcal{M}_1 = E_1$, $\mathrm{T}_m\mathcal{M}_2 = E_2$, $f_{|\mathcal{M}_1\times\{m\}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_1}$ et $f_{|\mathcal{M}_2\times\{m\}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_2}$.

Les sous-espaces E_1 et E_2 de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ sont stables par holonomie ; ils se prolongent donc dans $\mathrm{T}\mathcal{M}$ en distributions parallèles. Les sous-variétés $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont en fait les feuilles intégrales issues de m de ces distributions.

Le résultat annoncé en introduction sur les variétés riemanniennes Ricci-parallèles est une conséquence immédiate de ce théorème.

Corollaire riemannien *Soit* $(\mathcal{M},g)$ *une variété riemannienne complète, simplement connexe, dont la courbure de Ricci est parallèle. Elle est alors canoniquement isométrique à un produit riemannien de variétés d'Einstein. Plus précisément, il existe une unique suite* $(\lambda_i)_{i=1}^n$ *de réels, une unique suite de variétés d'Einstein* $((\mathcal{M}_i)_{i=1}^n,g_i)$, *telles que* $\mathrm{ric}_i = \lambda_i g_i$*sur chaque* $\mathcal{M}_i$, *et une isométrie* f *de* $\mathcal{M}$ *sur le produit riemannien* $\prod_i \mathcal{M}_i$. *L'isométrie* f *est unique à composition près avec un produit d'isométries de chaque facteur* $\mathcal{M}_i$. *Si* $\mathcal{M}$ *n'est pas complète et simplement connexe,* f *n'est en général qu'une isométrie locale.*

Démonstration. Elle est classique, et rappelée dans l'article en annexe. Donnons ici sa substance. L'endomorphisme Ric est autoadjoint pour la forme g, bilinéaire *symétrique définie positive.* Il est donc diagonalisable et en tout point p, $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$ est somme directe orthogonale de ses sous-espaces propres, on note $(\lambda_i)_{i=1}^n$ ses valeurs propres. Comme de plus Ric est supposé parallèle, ces sous-espaces propres sont stables par holonomie ; le théorème de de Rham fait le reste.

Remarque. Ce corollaire n'est pas vrai pour une variété pseudo-riemannienne $(\mathcal{M},g)$ ou symplectique connectée $(\mathcal{M},\omega,D)$, car, respectivement, g n'est pas définie ou ω n'est pas symétrique. L'endomorphisme Ric n'a donc plus de raison d'être diagonalisable et $\mathcal{M}$, plus de raison d'être produit de variétés d'Einstein. Cependant, dans le cas pseudo-riemannien, certaines propriétés de l'holonomie et le travail de Klingenberg [Kli54] permettent de montrer que Ric, bien que non nécessairement diagonalisable, ne peut être «trop compliqué» : son polynôme minimal, bien que non nécessairement scindé sur $\mathbb{R}$, n'a que peu d'autres formes possibles. A son tour, ce résultat pseudo-riemannien permet de montrer un résultat du même genre pour les variétés symplectiques connectées. Des remarques préliminaires plus fournies sont données dans la section 1 de l'article.

2 Le cas pseudo-riemannien

2.1 Le théorème et le principe de sa démonstration

Théorème 1 *Soit* $(\mathcal{M},g)$ *une variété pseudo-riemannienne dont la courbure de Ricci est parallèle et soit* μ *le polynôme minimal de* Ric. *Alors :*

(i) $\mu = \prod_i P_i$ *où :*

- $\forall i \neq j, P_i \wedge P_j = 1$,
- $\forall i, P_i$ *est irréductible ou* $P_i = X^2$.

(ii) *Il existe une unique famille* $(\mathcal{M}_i)_i$ *de variétés pseudo-riemanniennes telles que le polynôme minimal de* $\mathrm{Ric}_i = \mathrm{Ric}_{\mathcal{M}_i}$ *sur chaque* $\mathcal{M}_i$ *est* P_i *et une isométrie locale du produit riemannien* $\prod_i \mathcal{M}_i$ *sur* $\mathcal{M}$. *Cette isométrie* f *est unique à composition près avec un produit d'isométries de chaque facteur* $\mathcal{M}_i$. *Si* $\mathcal{M}$ *est complète et simplement connexe et* Ric *globalement parallèle sur* $\mathcal{M}$, f *est une isométrie globale.*

Localement, la variété $\mathcal{M}$ se décompose donc canoniquement en un produit riemannien, dont les facteurs $\mathcal{M}_i$ sont d'un des quatre types suivants :

- soit $P_i = X - \alpha_i$, $\alpha_i \neq 0$ *i.e.* $\mathrm{Ric}_i = \alpha_i g$ et $\mathcal{M}_i$ est d'Einstein, non Ricci-plate,
- soit $P = X^k$, $k \in \{1,2\}$:
  - ∗ si $k = 1$, $\mathcal{M}_i$ est Ricci-plate, donc en particulier est d'Einstein,
  - ∗ si $k = 2$, Ric est nilpotent d'indice 2 ; cette possibilité est nouvelle par rapport au cas riemannien,
- soit P est un polynôme irréductible de degré deux : Ric est alors semi-simple mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$. On montre alors que $\mathcal{M}_i$ est une variété complexe, d'Einstein pour cette structure. Cette possibilité est également nouvelle par rapport au cas riemannien.

Démonstration. Elle comporte deux grandes étapes. Notons $\mu = \prod_i P_i^{n_i}$ la décomposition du polynôme minimal de Ric en produit de puissances de polynômes irréductibles premiers entre eux : $\forall (i,j), i \neq j \Rightarrow P_i \wedge P_j = 1$. Résumons brièvement ces étapes.

Déjà, on montre que les sous-espaces caractéristiques de Ric dans l'espace tangent $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ à $\mathcal{M}$ en un point m, c'est-à-dire les noyaux des $P_i^{n_i}(\mathrm{Ric})$, sont orthogonaux. Leur somme directe forme $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ par définition du polynôme minimal et d'autre part ils sont stables par holonomie car Ric est supposé parallèle. Il correspond donc à cette décomposition de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$, par le théorème de de Rham-Wu, une décomposition de $\mathcal{M}$ en produit riemannien local au voisinage de m. A chaque $P_i^{n_i}$ correspond une des variétés en facteur dans le produit riemannien ; sur chacune de ces variétés, le polynôme minimal de Ric est alors ce facteur $P_i^{n_i}$. C'est le point **(ii)** du théorème. On restreint désormais l'étude à chaque facteur, c'est-à-dire aux variétés pseudo-riemanniennes Ricci-parallèles dont le polynôme minimal de Ric est une puissance d'un irréductible. Reste à montrer le **(i)**, c'est-à-dire dresser la liste de ces polynomes minimaux possibles.

Remarque. Dans le cas riemannien, les sous-espaces caractéristiques sont de plus des sous-espaces propres : sur chaque variété facteur, Ric est donc proportionnel à la métrique. Chacune de ces variétés est d'Einstein ; on retrouve le corollaire riemannien.

Techniquement, la deuxième étape procède elle-même par étapes. On note P^n le polynôme minimal de Ric, où P est irréductible. Il est successivement montré que $n > 1 \Rightarrow$

$P = X$, que $P = X \Rightarrow n \leq 3$ et enfin que $P = X \Rightarrow n \neq 3$. La démonstration du premier point repose sur deux faits.

• D'une part, un résultat formel sur un espace $(E,< \cdot\,,\cdot >)$ muni d'un tenseur R vérifiant les propriétés algébriques d'un tenseur de courbure riemannien, notamment la première identité de Bianchi. Si un tel espace admet un sous-espace D totalement isotrope stable par tous les $R(x,y)$, alors la valeur de $\mathrm{ric}(d,\cdot)$, pour $d \in D$, s'exprime en partie comme la trace de $R(\cdot\,,d)$.

• D'autre part, le sous-espace $D = \mathrm{Im}(P^{n-1}(\mathrm{Ric}))$ de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ est totalement isotrope pour g, stable par holonomie car Ric est parallèle, donc stable par tous les $R(x,y)$. Il est également muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée canonique, construite à partir de g et $P(\mathrm{Ric})$. En particulier, tous les $R(x,y)_{|D}$ pour $x,y \in \mathrm{T}_m\mathcal{M}$ sont antiautoadjoints pour cette forme, donc de trace nulle.

Ces deux éléments combinés donnent que $D \subset \ker \mathrm{Ric}$. Si $n > 1$, $D \neq \{0\}$ et donc $\ker \mathrm{Ric} \neq \{0\}$. Le polynôme minimal de Ric étant une puissance d'un irréductible, ce dernier ne peut donc être que X.

Le deuxième point est très semblable. Le troisième en revanche, s'il repose encore sur le même principe, est un peu plus compliqué et utilise le résultat algébrique de Klingenberg [Kli54]. Celui-ci donne l'existence d'une certaine famille de bases «adaptées», en un sens qu'il définit, à la donnée de deux formes bilinéaires symétriques a et b non dégénérées sur un espace vectoriel de dimension finie. Il revient à mieux comprendre la structure du groupe de Lie $O(a) \cap O(b)$. On l'applique aux deux formes g et ric sur $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$.

Remarque importante. Cette démonstration prouve un peu plus que l'énoncé donné plus haut, car elle n'utilise que les propriétés algébriques ponctuelles en m des tenseurs R et ric. On a en fait prouvé que :

• si (E,g,R) est un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique g non dégénérée et d'un (3,1)-tenseur R vérifiant les propriétés algébriques ponctuelles d'un tenseur de courbure riemannien, *i.e.* l'identité de Bianchi et : $\forall x,y \in E, R(x,y) = -R(y,x)$ et encore : $g(R(x,y)\ \cdot\ ,\cdot) = -g(\cdot\,,R(x,y)\,\cdot)$,

• si les sous-espaces caractéristiques du tenseur de Ricci formellement associé à R (*i.e.* de la 2-forme $(x,y \mapsto \mathrm{tr}(R(x,\cdot\,)y))$ sont stables par les $R(x,y)$,

alors le polynôme minimal de Ric peut s'écrire $\mu = \prod_i P_i$ où :

• $\forall i \neq j, P_i \wedge P_j = 1$,

• $\forall i, P_i$ est irréductible ou $P_i = X^2$.

Cette remarque est essentielle pour aborder le cas symplectique connecté.

2.2 Commentaires et compléments du résultat pseudo-riemannien

On renvoie ici à l'article en annexe. Contentons-nous de lister les résultats complémentaires apportés.

• Le cas où le polynôme minimal P de Ric est irréductible de degré deux ressemble en un sens au cas riemannien. Comme annoncé plus haut, on montre qu'alors la variété $\mathcal{M}$ admet une structure riemannienne complexe, *i.e.* un champ parallèle d'endomorphismes J t.q. $J^2 = -\mathrm{Id}$, et une forme bilinéaire symétrique complexe h dont D est la connexion de Levi-Civita. La métrique réelle g est en outre la partie réelle de cette forme h. La variété *complexe* $(\mathcal{M},h)$ est alors d'Einstein, de facteur $\frac{1}{2}\alpha$ où α est une racine complexe de P. Il y a proportionnalité complexe non réelle entre h et $\mathrm{ric}_{\mathbb{C}}$.

• En dimension inférieure ou égale à trois, ric détermine toute la courbure. Les variétés Ricci-parallèles (complexe ou réelles) d'une telle dimension sont donc à courbure constante, si ric est non dégénéré.

• Il convient de distinguer la décomposition, canonique, de $\mathcal{M}$ en produit riemannien construite ici quand ric est parallèle, de la décomposition maximale, plus fine et non unique en général, donnée par le théorème de de Rham-Wu.

• Enfin, le cas dégénéré : $\mathrm{Ric}^2 = 0$ est à distinguer des autres. Si Ric n'est pas dégénéré, seule une famille à un paramètre de métriques — les $\lambda\,\mathrm{ric}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dans le cas Einstein —, ou à deux paramètres — les $\lambda\,\mathrm{ric} + \nu g$, dans le cas «Einstein complexe non réel» cité plus haut —, admettent sur $\mathcal{M}$ Ricci-parallèle indécomposable la même connexion de Levi-Civita D. Ce n'est plus le cas si Ric est nul ou nilpotent d'indice 2. L'article fournit des exemples symétriques classiques de telles variétés, notamment à courbure de Ricci nilpotente d'indice deux : il en existe donc. Les variétés de ce dernier type sont, elles, loin d'être comprises et classifiées. Au moins sait-on que l'indice de nilpotence de Ricci ne peut excéder deux. Un outil possible pour les étudier pourrait être les coordonnées locales du type proposé au chapitre trois, par exemple en les adaptant au drapeau $\{0\} \subset (\ker \mathrm{Ric} \cap \mathrm{Im}\,\mathrm{Ric}) \subset \ker \mathrm{Ric} \subset \mathrm{T}_m\mathcal{M}$.

3 Le cas symplectique connecté

Un résultat similaire, bien que plus faible, portant sur les variétés symplectiques munies d'une connexion symplectique, découle du théorème pseudo-riemannien 1 page 19 et de la «remarque importante» page 20. Deux propriétés du cas riemannien font ici cette fois défaut :

• Ric n'est pas nécessairement diagonalisable.

• Le théorème de de Rham-Wu ne s'applique plus ; à une décomposition de $\mathrm{T}_m\mathcal{M}$ en somme directe ω-orthogonale stable par holonomie ne correspond pas nécessairement de décomposition locale de $\mathcal{M}$ en produit «riemannien», *i.e.* ici en produit pour ω doublé d'un produit affine pour D.

Le théorème obtenu est le suivant.

Théorème 2 *Soit $(\mathcal{M},\omega,D)$ une variété symplectique munie d'une connection symplectique D dont la courbure de Ricci est parallèle et soit μ le polynôme minimal de* Ric. *Alors $\mu = \prod_i P_i$ où :*

- $\forall i \neq j, P_i \wedge P_j = 1,$
- $\forall i, P_i$ *est irréductible ou* $P_i = X^2$ *ou* $P_i = X^3$.

Remarque. Quitte à renuméroter les facteurs de μ qui apparaissent dans l'énoncé, notons P_0 l'éventuel facteur X^p de μ et P_i avec $i \geq 1$ les autres, prenons m un point de $\mathcal{M}$ et notons $M_i = \ker P_i(\mathrm{Ric}_{|m}) \subset \mathrm{T}_m\mathcal{M}$. La décomposition :

$$\mathrm{T}_m\mathcal{M} = \overset{\perp}{\oplus}_i M_i$$

est stable par holonomie, il lui correspond donc une famille de distributions parallèles de $\mathrm{T}\mathcal{M}$. On note alors, pour tout i, $\mathcal{F}_i$ le feuilletage intégral de la distribution M_i et $\mathcal{M}_i$ la feuille de $\mathcal{F}_i$ issue de m. Les feuilletages $\mathcal{F}_i$ sont supplémentaires, il existe donc un difféomorphisme local canonique au voisinage de m

$$\varphi\ : \mathcal{M} \to \prod_i \mathcal{M}_i.$$

(φ provient d'une carte au voisinage de m d'un atlas de fibré de $\mathcal{M}$, vue comme fibré en les $\mathcal{F}_i$.) La forme symplectique ω est parallèle car D est une connexion symplectique. Par conséquent, φ envoie ω sur la forme symplectique produit $\otimes_i \omega_i$ de $\prod_i (\mathcal{M}_i,\omega_{|\mathcal{M}_i})$:

$$\varphi\ : (\mathcal{M},\omega) \to \prod_i (\mathcal{M}_i,\omega_{|\mathcal{M}_i}).$$

Cependant, l'isomorphisme avec la variété produit s'arrête là ; le théorème de de Rham-Wu ne s'applique pas et, en général :

$$\varphi\ : (\mathcal{M},\omega,D) \not\to \prod_i (\mathcal{M}_i,\omega_{|\mathcal{M}_i},D_{\mathcal{M}_i}).$$

En effet, la connexion $D_{|\mathcal{F}_i}$ n'est pas nécessairement parallèle le long des feuilles des $\mathcal{F}_j$ pour $j \neq i$. Ce parallélisme est vérifié par $\omega_{|\mathcal{F}_i}$ mais, contrairement aux formes riemanniennes ou pseuso-riemanniennes, cette forme symplectique *ne* détermine *pas* une unique connexion symplectique $D_{|\mathcal{F}_i}$. Ainsi, tout en restant une connection symplectique pour $\omega_{|\mathcal{F}_i}$, la connexion $D_{|\mathcal{F}_i}$ peut varier d'une feuille de $\mathcal{F}_i$ à une autre, c'est-à-dire ne pas être le prolongement par transport parallèle de la connexion $D_{|\mathcal{M}_i}$ de la sous-variété $\mathcal{M}_i$.

Toutefois, dans le cas précis étudié ici d'une variété Ricci-parallèle, le théorème de de Rham-Wu s'applique partiellement. En effet, la forme de Ricci de la variété quotient $\mathcal{M}/\mathcal{F}_0$ est parallèle, non dégénérée, elle en constitue donc une métrique pseudo-riemannienne, dont $D_{\mathcal{M}/\mathcal{F}_0}$ est la connexion de Levi-Civita. Notons π la projection canonique $\mathcal{M} \to \mathcal{M}/\mathcal{F}_0$, alors, par le théorème de de Rham-Wu, $\pi(\mathcal{M}, \mathrm{ric})$ est isomorphe au produit riemannien $\prod_{i\geq 1} \pi(\mathcal{M}_i, \mathrm{ric}_i)$. Dans $\mathcal{M}$, ceci revient à dire les $D_{|\mathcal{F}_i}$ pour $i \neq 0$ *sont parallèles* le long des feuilles de $\mathcal{F}_j$ pour $j \neq i$. Seule la restriction $D_{|\mathcal{F}_0}$ de D peut ne pas être parallèle le long des feuilles des $\mathcal{F}_i$, $i \neq 0$.

Démonstration du théorème. En quotientant par $\ker \mathrm{ric}$, on se ramène en un sens au cas pseudo-riemannien. On utilisera le résultat préliminaire suivant :

Affirmation 1. Le tenseur :

$$\overline{R} = [(a,b) \mapsto R(\mathrm{Ric}\, a, \mathrm{Ric}\, b)] \in (\otimes^3(\mathrm{T}\mathcal{M}/\ker \mathrm{Ric})) \otimes (\mathrm{T}\mathcal{M}/\ker \mathrm{Ric})^*$$

est bien défini et a en tout point les propriétés algébriques ponctuelles d'un tenseur de courbure. De plus, la 2-forme ric passe au quotient sur $\mathrm{T}\mathcal{M}/\ker \mathrm{ric}$ en une forme non-dégénérée, parallèle, qu'on notera g. Les $\overline{R}(a,b)$ sont g-antiautoadjoints. Le triplet $(\mathrm{T}\mathcal{M}/\ker \mathrm{ric}\,, g, \overline{R})$ a donc, en chaque point p de $\mathcal{M}$, les propriétés algébriques ponctuelles d'un triplet ($\mathrm{T}_p\mathcal{M}$, métrique, courbure).

Vérifions les propriétés annoncées de $\overline{R}$.

• Comme $\ker \mathrm{Ric}$ est stable par holonomie, pour tous a,b : $R(a,b)$, passe au quotient en un endomorphisme de $\mathrm{End}(\mathrm{T}_p\mathcal{M}/\ker \mathrm{Ric})$. Il en est donc ainsi pour les $R(\mathrm{Ric}\, a, \mathrm{Ric}\, b)$ et $\overline{R}$

est donc bien défini.

• $\overline{R}$ est antisymétrique en a et b.

• pour tous a et b, $R(\operatorname{Ric} a, \operatorname{Ric} b)$ est ric-antiautoadjoint donc $\overline{R}(a,b)$ est g-antiautoadjoint.

• Vérifions que $\overline{R}$ satisfait l'identité de Bianchi : $\forall a,b,c, \overline{R}(a,b)c+\overline{R}(b,c)a+\overline{R}(c,a)b=0$. Comme $\overline{R}$ est défini dans $(\otimes^3(\mathrm{T}\mathcal{M}/\ker \operatorname{Ric}))\otimes(\mathrm{T}\mathcal{M}/\ker\operatorname{Ric})^*$, il suffit de vérifier que: $\forall a,b,c,d$, $\operatorname{ric}(\overline{R}(a,b)c+\overline{R}(b,c)a+\overline{R}(c,a)b,d)=0$; soient donc a,b,c,d quatre vecteurs quelconques de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$. Rappelons que Ric, parallèle, commute avec l'algèbre d'holonomie donc en particulier avec tous les $R(x,y)$.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ric}(\overline{R}(a,b)c+\overline{R}(b,c)a+\overline{R}(c,a)b,d)\\
&=\omega(\operatorname{Ric}(R(\operatorname{Ric} a,\operatorname{Ric} b)c+R(\operatorname{Ric} b,\operatorname{Ric} c)a+R(\operatorname{Ric} c,\operatorname{Ric} a)b),d)\\
&=\omega(\operatorname{Ric}(R(\operatorname{Ric} a,\operatorname{Ric} b)\operatorname{Ric} c+R(\operatorname{Ric} b,\operatorname{Ric} c)\operatorname{Ric} a+R(\operatorname{Ric} c,\operatorname{Ric} a)\operatorname{Ric} b),d)\\
&=0 \qquad \text{par l'identité de Bianchi sur } R.
\end{aligned}$$

D'où le résultat préliminaire. Ajoutons une remarque :

Affirmation 2. Le tenseur de Ricci formel $\overline{\operatorname{ric}}(a,b)=\operatorname{tr}\overline{R}(a,\cdot\,)\,b$ associé au tenseur $\overline{R}$ vérifie alors : $\overline{\operatorname{ric}}(\,\cdot\,,\cdot\,)=g(-\operatorname{Ric}^2\cdot\,,\cdot\,)$, où Ric est ici vu comme endomorphisme de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}/\ker\operatorname{Ric}$.

Vérifions-le. Soient a,b dans $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$ et $(e_i)_{i=1}^k$ une base g-pseudo-orthonormée de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}/\ker\operatorname{ric}$: $g(e_i,e_j)=\varepsilon_i\delta_{i,j}$, avec $\varepsilon_i=\pm1$; soient $(\hat{e}_i)_{i=1}^k$ des relevés des e_i dans $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$.

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{ric}}(a,b) &= \operatorname{tr}_{\mathrm{T}_p\mathcal{M}/\ker\operatorname{ric}}(R(\operatorname{Ric} a,\operatorname{Ric}\cdot\,)b)\\
&\qquad (\text{ici } R(\operatorname{Ric} a,\operatorname{Ric}\cdot\,)b \text{ est vu comme un endomorphisme de } \mathrm{T}_p\mathcal{M}/\ker\operatorname{ric}\,)\\
&= \sum_i \varepsilon_i g(R(\operatorname{Ric} a,\operatorname{Ric} e_i)b,e_i)\\
&= \sum_i \varepsilon_i \operatorname{ric}(R(\operatorname{Ric} a,\operatorname{Ric}\hat{e}_i)b,\hat{e}_i)\\
&= \sum_i \varepsilon_i \operatorname{ric}(R(b,\hat{e}_i)\operatorname{Ric} a,\operatorname{Ric}\hat{e}_i)\\
&= -\sum_i \varepsilon_i \operatorname{ric}(\operatorname{Ric} R(b,\hat{e}_i)\operatorname{Ric} a,\hat{e}_i) \text{ car Ric est ric-antiautoadjoint}\\
&= -\sum_i \varepsilon_i \operatorname{ric}(R(b,\hat{e}_i)\operatorname{Ric}^2 a,\hat{e}_i)\\
&= -\Big[\operatorname{tr}[R(b,\cdot\,)\operatorname{Ric}^2 a]-\operatorname{tr}[(R(b,\cdot\,)\operatorname{Ric}^2 a)_{|\ker\operatorname{Ric}}]\Big].
\end{aligned}$$

Or, $(R(b,\cdot\,)\operatorname{Ric}^2 a)_{|\ker\operatorname{Ric}}=0$. Soit en effet $c\in\ker\operatorname{Ric}$, $d\in\mathrm{T}_p\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
\omega(R(b,c)\operatorname{Ric}^2 a,d) &= \omega(\operatorname{Ric}^2 R(b,c)a,d)\\
&= -\omega(\operatorname{Ric} R(b,c)a,\operatorname{Ric} d)\\
&\qquad \text{car Ric est } \omega-\text{antiautoadjoint}\\
&= -\operatorname{ric}(R(b,c)a,\operatorname{Ric} d)\\
&= -\operatorname{ric}(R(a,\operatorname{Ric} d)b,c)\\
&= 0 \quad \text{car } c\in\ker\operatorname{ric}\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\overline{\mathrm{ric}}(a,b) = -\operatorname{tr}(R(b,\cdot)\operatorname{Ric}^2 a) = -\operatorname{ric}(b,\operatorname{Ric}^2 a)$ par définition de ric. Enfin $-\operatorname{ric}(b,\operatorname{Ric}^2 a) = -\operatorname{ric}(\operatorname{Ric}^2 b,a)$ car Ric est ric-antiautoadjoint. La remarque annoncée suit.

Soit maintenant $\mu = \prod_i P_i^{n_i}$ la décomposition de μ en produit de puissances de polynômes irréductibles, deux à deux premiers entre eux. Quitte à permuter les indices, on suppose que $P_0 = X$, avec éventuellement $n_0 = 0$. Soit $\mathbf{F}_i = \ker P_i(\mathrm{Ric})$, c'est une distribution parallèle, car Ric est supposé parallèle, on considère alors pour chaque i, $\mathcal{M}_i$ une feuille intégrale de cette distribution. Les $\mathcal{M}_i$ sont des sous-variétés totalement géodésiques de $\mathcal{M}$. En particulier, leur tenseur de Ricci propre Ric_i est la restriction de tenseur Ric de $\mathcal{M}$ à $\mathrm{T}\mathcal{M}_i$, de même pour R_i, restriction de R à $(\otimes^3(\mathrm{T}\mathcal{M}_i)) \otimes (\mathrm{T}^*\mathcal{M}_i)$.

Par conséquent, pour tout $i \geq 1$, ric_i est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée ; $\overline{R}_i$ est donc défini comme R_i sur $(\otimes^3(\mathrm{T}_p\mathcal{M}_i)) \otimes (\mathrm{T}_p^*\mathcal{M}_i)$. Vis-à vis de la métrique g_i, il satisfait les propriétés algébriques ponctuelles d'un tenseur de courbure sur $\mathcal{M}_i$ et pour tous a et b, $\overline{R}(a,b)$ est dans l'algèbre d'holonomie. Cela suffit pour appliquer le théorème 1 page 19 au triplet $(\mathrm{T}_p\mathcal{M}_i,g_i,\overline{R}_i)$. Comme $\overline{\mathrm{ric}}_i(\cdot,\cdot) = g_i(\cdot,-\mathrm{Ric}_i^2\cdot)$ et comme Ric_i^2 est non dégénéré, on obtient : Ric_i^2 est semi-simple. Ric_i l'est donc aussi, *i.e.* $n_i = 1$.

Traitons le cas $i = 0$. On applique cette fois le théorème 1 à $(\mathrm{T}_p\mathcal{M}_0/\ker \mathrm{ric}_0, g_0, \overline{R}_0)$, qui vérifie de même les hypothèses nécessaires. Comme $\overline{\mathrm{ric}}_0(\cdot,\cdot) = g_0(\cdot,-\mathrm{Ric}_0^2\cdot)$ et que Ric_0^2 est nilpotent, on obtient : $(\mathrm{Ric}_0^2)^2 = 0$, *i.e.* $\mathrm{Ric}_0^4 = 0$ **où $\mathbf{Ric_0}$ est compris comme endomorphisme de $\mathbf{T_p\mathcal{M}_0/\ker ric}$**, c'est-à-dire en fait, dans $\mathrm{T}_p\mathcal{M}_0$: $\mathrm{Ric}_0^5 = 0$.

On peut cependant obtenir un peu mieux. Montrons que $\overline{\mathrm{ric}}_0 = 0$, donc que $\mathrm{Ric}_0^2 = 0$, vu comme élément de $\mathrm{End}(\mathrm{T}_p\mathcal{M}_0/\ker \mathrm{ric})$. L'endomorphisme Ric de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$ vérifie alors : $\mathrm{Ric}_0^3 = 0$, ce qui est le résultat annoncé.

$\mathrm{T}_p\mathcal{M}/\ker \mathrm{ric}$ est muni de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée g_0 et de l'endomorphisme g_0-autoadjoint Ric^2. Nécessairement $(\mathrm{Ric}^2)^2 = 0$, supposons que : $\mathrm{Ric}^2 \neq 0$; le travail de Klingenberg [Kli54] ou le chapitre 2 de cette these (voir le théorème 2 page 62 ou bien la table récapitulative en fin de chapitre, cas a et b symétriques) donne alors l'existence d'une base β simultanément :

- de Jordan pour Ric^2, *i.e.* : $\mathrm{Mat}_\beta(\mathrm{Ric}) = \begin{array}{c} \overbrace{}^{E_2} \quad \overbrace{}^{\mathrm{Ric}^2(E_1)} \quad \overbrace{}^{E_1} \\ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n_2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$

- «canonique» pour g, en ce sens : $\mathrm{Mat}_\beta(g) = \left(\begin{array}{c|cc} I_{r_2,s_2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{r_1,s_1} \\ 0 & I_{r_1,s_1} & 0 \end{array}\right)$

avec $n_1 = \dim E_1 = \dim \mathrm{Im}\,\mathrm{Ric}^2$,
$n_2 = \dim E_2 = \dim\,[\ker \mathrm{Ric}^2 / (\ker \mathrm{Ric}^2 \cap \mathrm{Im}\,\mathrm{Ric}^2)]$ et :

$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, les r_i et s_i étant des entiers satisfaisant : $r_i + s_i = n_i$.

Notons $\beta = ((e_i^2)_{i=1}^{n_2},(\mathrm{Ric}^2(e_i^1))_{i=1}^{n_1},(e_i^1)_{i=1}^{n_1})$. Alors, pour tout $i \in [\![1,n_1]\!]$:

$$\begin{aligned}
\pm 1 &= g(\mathrm{Ric}^2 e_i^1,e_i^1) = \overline{\mathrm{ric}}(e_i^1,e_i^1) \\
&= \sum_{j=1}^{n_2} \pm \underbrace{g(\overline{R}(e_i^1,e_j^2)e_i^1,e_j^2)}_{A_{i,j}} + \sum_{j=1}^{n_1} \pm \underbrace{g(\overline{R}(e_i^1,e_j^1)e_i^1, \mathrm{Ric}^2 e_j^1)}_{B_{i,j}} + \sum_{j=1}^{n_1} \pm \underbrace{g(\overline{R}(e_i^1, \mathrm{Ric}^2 e_j^1)e_i^1,e_j^1)}_{C_{i,j}}.
\end{aligned}$$

Comme dans la démonstration du théorème 1, il apparaît que tous les termes sont nuls.

- $$\begin{aligned}
A_{i,j} &= g(\overline{R}(e_i^1,e_j^2)e_i^1,e_j^2) \\
&= g(R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_j^2)e_i^1,e_j^2) \\
&= g(R(e_i^1,e_j^2)\,\mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_j^2) \\
&= g(\mathrm{Ric}\, R(e_i^1,e_j^2)e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_j^2) \\
&= -g(R(e_i^1,e_j^2)e_i^1, \mathrm{Ric}^2\, e_j^2) \\
&= -g(R(e_i^1,e_j^2)e_i^1,0) = 0
\end{aligned}$$
- $B_{i,j} = C_{i,j}$ et :

$$\begin{aligned}
C_{i,j} &= g(R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}(\mathrm{Ric}^2\, e_j^1))e_i^1,e_j^1) \\
&= g(R(e_i^1,e_j^1)\,\mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}^3\, e_j^1)) \\
&= g(\mathrm{Ric}\, R(e_i^1,e_j^1)e_i^1, \mathrm{Ric}^3\, e_j^1)) \\
&= -g(R(e_i^1,e_j^1)e_i^1, \mathrm{Ric}^4\, e_j^1)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

D'où contradiction. Par conséquent, $\mathrm{Ric}^2 = 0$ dans $\mathrm{End}(\mathrm{T}_p\mathcal{M}_0/\ker \mathrm{ric}_0)$ *i.e.* $\mathrm{Ric}^3 = 0$. □

Remarque. Une démonstration directe, n'utilisant pas le résultat pseudo-riemannien qui précède, est sans doute possible. Nous n'en avons cependant pas trouvé. Elle ne peut notamment pas résulter d'un simple aménagement de la preuve pseudo-riemannienne, celle-ci reposant profondément sur une propriété du tenseur R qui n'a pas d'équivalent symplectique :

$$\forall a,b,c,d,\, g(R(a,b).c,d) = g(R(c,d).a,b).$$

Annexe : l'article sur les variétés pseudo-riemanniennes Ricci-parallèles

On the pseudo-Riemannian manifolds whose Ricci tensor is parallel

Charles BOUBEL, Lionel BÉRARD BERGERY

Nancy, April 9th, 1999
Revised December 16th, 1999

Abstract: Ricci-parallel Riemannian manifolds have a diagonal Ricci endomorphism Ric and are therefore, at least locally, a product of Einstein manifolds. This fails in the pseudo-Riemannian case. Using, on the one side, a general result in linear algebra due to Klingenberg (see [Kli54]) and on the other side, a theorem on the holonomy of pseudo-Riemannian manifolds (see [Wu67]), this work classifies the different types of pseudo-Riemannian manifolds whose Ricci tensor is parallel.

Mathematics Subject classification (1991): 53 B 30, 53 C 50.
Keywords: pseudo-Riemannian manifolds, Ricci curvature, holonomy group.

Foreword: The first section discusses de Rham – Wu's theorem, its consequences in our problem, and the reasons why the pseudo-Riemannian case allows specific phenomena. The main theorem, that classifies these phenomena, is stated in section 2 and is proven in sections 3 and 4. Section 5 considers the complex case, i.e. complex manifolds with a complex Riemannian structure, which appears as a special case of the main theorem. Finally, section 6 gives some details on certain low-dimensional cases, on the holonomy decomposition as compared with the Ricci-decomposition, on the number of (linearly independant) metrics with the same connection (hence the same Ricci curvature), together with some symmetric examples.

The authors want to thank the referees for their (very) careful reading of the manuscript and helpful suggestions to improve it.

Notations: If (M,g) is a Riemannian or pseudo-Riemannian manifold, R is its (3,1)-curvature tensor and ric its Ricci tensor, *i.e.* ric is a bilinear symmetric form on each tangent space defined by ric : $u,v \mapsto \operatorname{tr} R(u,.)v$. We will also denote by $< .,. >$ the metric g, and by Ric the g-selfadjoint endomorphism induced by ric, *i.e.* the endomorphism such that $\mathrm{ric}(.,.) =< \mathrm{Ric}\,.,. >$. We denote by H the restricted holonomy group of M, simply called "holonomy group" here, and classical Lie algebras by old german letters: $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{so}$.

1 Motivation: a look at the Riemannian case

The main tool of this work is a theorem by Wu, linking decomposition of the holonomy and Riemannian products (see [Wu67]). This is a generalization to pseudo-Riemannian geometry of a well-known theorem due to de Rham. We give in this section only a part of the result (existence theorem), and postpone to section 6.2 all questions about uniqueness.

Theorem (de Rham – Wu) *Let* (M,g) *be a complete, simply connected pseudo-Riemannian manifold and* $x \in M$. *Suppose that* $T_xM = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2$ *is a holonomy stable decomposition of* T_xM. *Then there is a unique couple* $((M_1,g_{|M_1}),(M_2,g_{|M_2}))$ *of submanifolds of* M *containing* x *and a unique isometry* f *such that:*

– $T_xM_1 = E_1$ *and* $T_xM_2 = E_2$,

– $M_1 \times M_2 \xrightarrow{f} M$,

– $f_{|M_1\times\{x\}} = \mathrm{Id}_{M_1}$ *and* $f_{|\{x\}\times M_2} = \mathrm{Id}_{M_2}$.

Remarks: 1) Here " $M_1 \times M_2$ " stands for the Riemannian product of M_1 and M_2.
2) By hypothesis, E_1 and E_2 are holonomy-stable, mutually orthogonal. So there exist Σ_1 and Σ_2 two mutually orthogonal parallel distributions equal to E_1 and E_2 at x, respectively. M_1 and M_2 are the maximal integral manifolds of Σ_1 and Σ_2, containing x. They are g-non-degenerate. The other maximal integral manifolds of Σ_1 and Σ_2 are isometric to M_1 and M_2, so M_1 and M_2 do not depend of the choice of x, up to isometry.
3) Without requiring the completeness and the simple connectedness, the same result holds with a local isometry.

Corollary *If* (M,g) *is a complete, simply connected Riemannian manifold with a parallel Ricci tensor* ric, *then* M *splits canonically into a Riemannian product of Einstein manifolds. That is to say, there is a unique sequence of reals* $(\lambda_i)_{i=1}^n$, *a unique sequence of Riemannian Einstein manifolds* $(M_i)_{i=1}^n$, *[such that* $\mathrm{ric} = \lambda_i g$ *on each* M_i*], and an isometry* f *mapping the Riemannian product* $\prod_{i=1}^n M_i$ *onto* M. *That isometry* f *is unique up to composition with a product of isometries of each factor* M_i.

In particular, simply connected Riemannian symmetric spaces are all a canonical product of Einstein factors. Once again, without completeness and simple connectedness, these results hold locally.

The above corollary is a classical and immediate consequence of de Rham – Wu's theorem. Nevertheless, in view of future comparison, we recall the

Proof of the corollary: Ric is g-selfadjoint and g is positive definite, so Ric is diagonalizable. Let us denote by $E_{i,x} = \ker(\mathrm{Ric} - \lambda_i \,\mathrm{Id})$ the eigenspaces of Ric at a point x, then we have an orthogonal product:

$$T_xM = \overset{\perp}{\underset{i}{\oplus}} E_{i,x}.$$

By assumption now, ric is parallel, g too, and thus Ric and the $E_{i,x}$ are parallel. The decomposition of each T_xM is thus holonomy-stable. As it is also orthogonal, de Rham – Wu theorem gives an isometry $f : M \to \prod_i M_i$, where the M_i are maximal integral submanifolds of the parallel distributions generated by the $E_{i,x}$. $\mathrm{Ric}_{|M_i}$ has the only eigenvalue λ_i, and is diagonalizable, thus $\mathrm{ric}_{|M_i} = \lambda . g_{|M_i}$, *i.e.* the M_i are Einstein. The decomposition $T_xM = \oplus E_{i,x}$ is canonical, so the corresponding values of λ_i and the associated M_i too (up to isometry).

The uniqueness of f is not a deep result here but requires a few technical lines. Let us suppose f and h are two isometries mapping $\prod_i M_i$ onto M; let us denote by a the n-uple

$(a_i)_{i=1}^n = f^{-1}(x)$ and by b the n-uple $(b_i)_{i=1}^n = h^{-1}(x)$. By definition, $T_a(\prod_i M_i) = \oplus_i T_{a_i} M_i$ is the decomposition of $T_a(\prod_i M_i)$ into the eigenspaces of its Ricci operator. And similarly with h and b. So, necessarily: $\forall i, df(T_{a_i} M_i) = E_{i,x}$ and $\forall i, dh(T_{b_i} M_i) = E_{i,x}$. Now, for each i:

- $\{a_1\} \times \ldots \times \{a_{i-1}\} \times M_i \times \{a_{i+1}\} \times \ldots \times \{a_n\}$ is by definition the maximal integral submanifold of the parallel distributions generated by $T_{a_i} M_i$,
- M_i is by definition the maximal integral manifold of the parallel distribution generated by $E_{i,x}$.

Since f is an isometry, necessarily, $f(\{a_1\} \times \ldots \times \{a_{i-1}\} \times M_i \times \{a_{i+1}\} \times \ldots \times \{a_n\}) = M_i$, and similarly with h: $h(\{b_1\} \times \ldots \times \{b_{i-1}\} \times M_i \times \{b_{i+1}\} \times \ldots \times \{b_n\}) = M_i$. So, in restriction to the factor M_i, $h^{-1} \circ f$ is an isometry ϕ_i of this factor (mapping b_i on a_i). Finally, $f = h \circ (\phi_1, \ldots ,\phi_n)$. □

Notice that the above corollary is not true in the pseudo-Riemannian case.

Indeed, Ric is still a g-selfadjoint operator, but g is no longer positive definite, so Ric is no longer necessarily diagonalizable. In particular, it may have pairs of non-real complex conjugate eigenvalues and it may have a non-trivial nilpotent part. Now [Kli54], [this thesis, next chapter] or [BBB] gives a complete description of what may be an endomorphism S of a vector space [on any field], when S is selfadjoint with respect to a non-degenerate bilinear form h. It gives a normal form for such an S, which is a particular Jordan form. When the field is $\mathbb{R}$, the signature of h and the nilpotence index of the nilpotent part of S are linked, but both obstructions for S to be diagonalizable may occur: non-real eigenvalues and a non-trivial nilpotent part. So a Ricci-parallel pseudo-Riemannian manifold is *a priori* quite different from a product of Einstein manifolds. For example, there exists some pseudo-Riemannian symmetric spaces with a Ricci endomorphism satisfying $\mathrm{Ric} \neq 0$, $\mathrm{Ric}^2 = 0$.

However, some properties of the holonomy group and some consequences of [Kli54] prevent Ric from being too complicated. A good part of the Riemannian result holds again: Einstein factors appear in the Riemannian product, and two other new types of factors. The main theorem below explains it in terms of (conditions on) the minimal polynomial of the operator Ric. We recall that the minimal polynomial is the unique unitary polynomial generating the ideal of all polynomials which annihilates the operator Ric. Notice that in the Riemannian case, Ric is diagonalizable, so in these terms, the corollary above is the geometric counterpart of the fact that the minimal polynomial of Ric is a product of mutually prime polynomials which are irreducible of degree one. In the pseudo-Riemannian case, the minimal polynomial of Ric may have irreducible factors of degree two and also there may be one irreducible factor to the power two. After the proof of the theorem, we will give in section 5 a few more explanations of one of the new factor types and make a few remarks on the low-dimensional cases in section 6.

2 The main result in the pseudo-Riemannian case

The Main Theorem *Let (M,g) be a pseudo-Riemannian manifold with a parallel Ricci tensor* ric, *and let μ be the minimal polynomial of* Ric. *Then:*

(i) $\mu = \prod_i P_i$ *where:*

- $\forall i \neq j, P_i \wedge P_j = 1$, *[i.e. P_i and P_j are mutually prime],*
- $\forall i, P_i$ *is irreducible or* $P_i = X^2$.

(ii) *There is a canonical family $(M_i)_i$ of pseudo-Riemannian manifolds such that the minimal polynomial of* $\mathrm{Ric}_i = \mathrm{Ric}_{M_i}$ *on each M_i is P_i, and a local isometry f mapping the Riemannian product $\prod_i M_i$ onto M. f is unique up to composition with a product of isometries of each factor M_i. If M is complete and simply connected, f is an isometry.*

That is to say, M splits canonically into a Riemannian product, with factors M_i of one of the four following types — we denote by P_i the minimal polynomial of Ric_i, the Ricci endomorphism of M_i—:

- if $P_i = (X - \alpha_i)^k$ $(\alpha_i \neq 0)$, then $k = 1$, *i.e.* M_i is Einstein,
- if $P_i = X^k$, then $k \leq 2$, so
  - ⋆ either $k = 1$, *i.e.* M_i is Ricci-flat, [which is a particular case of Einstein],
  - ⋆ or Ric_i is nilpotent of index 2,
- if $P_i = (X^2 + p_i X + q_i)^k$ (power of an irreducible), then $k = 1$, so Ric_i has no nilpotent part but is not diagonalizable on $\mathbb{R}$. We will see in section 5 that M_i is then a complex Riemannian manifold, which is Einstein for this structure.

The last two types do not appear in the Riemannian case.

Warning: the obtained decomposition is not the holonomy decomposition (see section 6.2).

3 Two algebraic lemmas

Lemma 1 *Let E be a real or complex vector space endowed with a non-degenerate bilinear form $g =<.,.>$. Let D be a totally isotropic subspace of E. Let R be a (3,1)-tensor with the algebraic properties of a curvature tensor,* i.e. *:*

- $R(x,y) = -R(y,x)$
- $R(x,y).z + R(y,z).x + R(z,x).y = 0$ *("Bianchi identity"),*
- $< R(x,y).z,t >=< R(z,t).x,y >$ *(which follows from the first two relations).*

By definition, $\mathrm{ric}(u,v) = \mathrm{tr}(x \mapsto R(u,x).v)$*, and* Ric *is the g-selfadjoint associated endomorphism,* i.e. *the endomorphism such that* $< \mathrm{Ric}\,.,. >= \mathrm{ric}(.,.)$.
We assume that, for each couple (x,y) in E^2, the endomorphism $R(x,y)$ preserves D.
Then we have:

(i) $\forall x \in D, \forall y \in D^\perp, R(x,y) = 0$
(this is true in particular for x and y in D because $D \subset D^\perp$),

(ii) Ric *preserves D (i.e.* $\mathrm{ric}(D,D^\perp) = \{0\}$*),*

(iii) *If $\beta = (e_i)_{i=1}^p$ is a basis of D and $(e'_i)_{i=1}^p$ a family such that: $\forall i,j,\ < e_i,e'_j >= \delta_{i,j}$ and $< e'_i,e'_j >= 0$),*
then $ric(e_i,e'_j) = \mathrm{tr}(R(e'_j,e_i)_{|D})$.

Proof: **(i)** Let us take $x \in D$, $y \in D^\perp$ and $z,t \in E$. Then $< R(x,y).z,t >=< R(z,t).x,y >$. By assumption, $R(z,t).x \in D$, thus both terms are zero and **(i)** follows.
(ii) Let us take $(e_i)_{i=1}^p$ a basis of D and $(e'_i)_{i=1}^p$ a "dual" family of $(e_i)_{i=1}^p$ as defined in **(iii)**. Let D' be the vector space generated by the e_i and the e'_i, and $(f_i)_{i=1}^q$ a pseudo-orthonormal basis of $D'^\perp$, *i.e.* such that $\forall i,j,\ < f_i,f_j >= \varepsilon_i \delta_{i,j}$, with $\varepsilon_i = \pm 1$. Then, for $i,j \in \{1,..,p\}$,

point **(i)** of the Lemma implies:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ric}(e_i,e_j) &= \sum_{k=1}^{p} < R(e_i,e_k).e_j,e'_k > + \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k < R(e_i,f_k).e_j,f_k > + \sum_{k=1}^{p} < R(e_i,e'_k).e_j,e_k > \\
&= \sum_{k=1}^{p} < 0.e_j,e'_k > + \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k < 0.e_j,f_k > + \sum_{k=1}^{p} < R(e_j,e_k).e_i,e'_k > \\
&= 0 + 0 + \sum_{k=1}^{p} < 0.e_i,e'_k > = 0
\end{aligned}$$

and for $i \in \{1,..,p\}$ and $j \in \{1,..,q\}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ric}(e_i,f_j) &= \sum_{k=1}^{p} < R(e_i,e_k).f_j,e'_k > + \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k < R(e_i,f_k).f_j,f_k > + \sum_{k=1}^{p} < R(e_i,e'_k).f_j,e_k > \\
&= \sum_{k=1}^{p} < 0.f_j,e'_k > + \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k < 0.f_j,f_k > + \sum_{k=1}^{p} < R(f_j,e_k).e_i,e'_k > \\
&= 0 + 0 + \sum_{k=1}^{p} < 0.e_i,e'_k > = 0
\end{aligned}$$

For **(iii)**, we will show a little more.

<u>Claim:</u> $\forall i,j,k,l \in \{1,..,p\}, \ < R(e'_i,e_j).e'_k,e_l > = < R(e'_k,e_j).e'_i,e_l >$.

Using again **(i)**, this implies:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ric}(e_i,e'_j) &= \sum_{k=1}^{p} < R(e_i,e_k).e'_j,e'_k > + \sum_{k=1}^{q} \varepsilon_k < R(e_i,f_k).e'_j,f_k > + \sum_{k=1}^{p} < R(e_i,e'_k).e'_j,e_k > \\
&= 0 + 0 - \sum_{k=1}^{p} < R(e'_k,e_i).e'_j,e_k > \\
&= -\sum_{k=1}^{p} < R(e'_j,e_i).e'_k,e_k > = \sum_{k=1}^{p} < R(e'_j,e_i).e_k,e'_k > \\
&= \mathrm{tr}\, R(e'_j,e_i)_{|D}
\end{aligned}$$

The initial claim follows from Bianchi identity:

$$\begin{aligned}
< R(e'_i,e_j).e'_k,e_l > &= - < R(e_j,e'_k).e'_i,e_l > - < R(e'_k,e'_i).e_j,e_l > \\
&= < R(e'_k,e_j).e'_i,e_l > - < R(e_j,e_l).e'_k,e'_i > \\
&= < R(e'_k,e_j).e'_i,e_l > - < 0.e'_k,e'_i > \\
&= < R(e'_k,e_j).e'_i,e_l > .
\end{aligned}$$

□

Lemma 2 *Let (E,g) be a vector space endowed with a non-degenerate symmetric bilinear form $g = < .,. >$, let h be another symmetric bilinear form and let S be the g-selfadjoint endomorphism induced by h: i.e. $h(.,.) = < S.,. >$.*

Let P be the minimal polynomial of S and $\prod_i P_i^{n_i}$ its decomposition into a product of powers of prime polynomials P_i and let $E_i = \ker P_i^{n_i}(S)$ be the characteristic subspaces of S. Then the E_i are both g- and h-orthogonal.

Proof: Let us take $x \in E_i$, $y \in E_j$ $(i \neq j)$, U and V in $\mathbb{R}[X]$ such that: $UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j} = 1$.

$$\begin{aligned}
\text{Then: } g(x,y) &= g((UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j})(S).x,y) \\
&= g(U(S)P_i^{n_i}(S).x,y) + g(x,V(S)P_j^{n_j}(S).y) \\
&= g(0,y) + g(x,0) \;=\; 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{and: } h(x,y) &= g((UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j})(S).Sx,y) \\
&= g(SU(S)P_i^{n_i}(S).x,y) + g(x,SV(S)P_j^{n_j}(S).y) \\
&= g(0,y) + g(x,0) \;=\; 0.
\end{aligned}$$

□

4 Proof of the theorem

4.1 First part

We will first prove the following

Claim: Let $\mu = \prod_i P_i^{n_i}$ be the decomposition of μ into a product of powers of mutually prime irreducible polynomials. Then M is locally isometric to a canonical Riemannian product $\prod_i M_i$, where the minimal polynomial of each Ric_{M_i} is $P_i^{n_i}$. This isometry is global if M is moreover complete, simply connected.

Let us apply Lemma 2 to the tangent space (T_xM,g) at each point x of M, with $h = \mathrm{ric}$. It splits T_xM into a g-orthogonal sum of canonical subspaces: $T_xM = \overset{\perp}{\underset{i}{\oplus}} E_{x,i}$, where the $E_{x,i} = \ker P_i^{n_i}$ are now the characteristic subspaces of Ric at the point x. By assumption, ric is moreover parallel, and therefore Ric and the $E_{x,i}$ too. Thus the obtained decomposition of T_xM is holonomy-stable. By de Rham – Wu theorem, M is locally isometric to the Riemannian product $\prod_i M_i$, where the M_i are submanifolds such that: $\forall x \in M_i, T_xM_i = E_{x,i}$ (the M_i are integral submanifolds of the parallel distributions $E_{x,i}$).

By definition of the $E_{x,i}$, $\mathrm{Ric}_i = \mathrm{Ric}_{|M_i} = \mathrm{Ric}_{|E_i}$ has a minimal polynomial of the form $P_i^{n_i}$, P_i prime. The uniqueness of the local isometry $M \simeq \prod_i M_i$ follows from that of the decomposition of $T_xM = \oplus_i E_{x,i}$ and from the explanations detailed in the proof of the corollary of section 1. So the first part is proved.

In the following, we will deal with one of the $(M_i,g_{|M_i})$ and forget the index i. That is to say, we deal with a manifold (M,g), the Ricci endomorphism Ric of which has a minimal polynomial of the form P^n, where P is irreducible.

4.2 Second part

We will prove here that $n = 1$, except possibly if $P = X$, in which case $n \leq 2$. Points (i) and (ii) of the theorem follow. Let us begin with a few notations.

• If $\deg P = 1$, *i.e.* $P(X) = (X - \alpha)$, let E be the tangent space T_xM of M at a certain point x, and $T = P(\mathrm{Ric})$. Remark: T is a nilpotent endomorphism.

• If $\deg P = 2$, *i.e.* $P(X) = (X - \alpha)(X - \overline{\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, let F be the complexified space of T_xM. Let us denote again by g, R, ric, and Ric the complexified tensors. We take $E = \ker(\mathrm{Ric} - \alpha \mathrm{Id}_F)^n \subset F$ and $T = \mathrm{Ric} - \alpha \mathrm{Id}_E$ on E. T is nilpotent.

Notice that by Lemma 2, $E^\perp = \ker(\mathrm{Ric} - \overline{\alpha}\mathrm{Id})^n$.

First Claim: if $n > 1$, then $\alpha = 0$. [In particular, if $n > 1$, $\deg P = 1$.]

Let us suppose $n > 1$. Let $D = \mathrm{Im}\, T^{n-1}$. D is totally isotropic: let $x = T^{n-1}u \in D$, $y = T^{n-1}v \in D$, we have $< x,y > = < T^{n-1}u, T^{n-1}v > = < T^{2n-2}u, v > = < 0,v > = 0$. Indeed, $n > 1$, so $2n - 2 \geq n =$ nilpotence index of T. Let $d = \dim D$, $(e_i)_{i=1}^d$ a basis of D, $(e'_i)_{i=1}^d$ a dual family of $(e_i)_{i=1}^d$ [in the sense of lemma 1 (iii)]. Applying Lemma 1, (iii) with E, D and R:

$$\mathrm{ric}(e_i, e'_j) = \mathrm{tr}(R(e'_j, e_i)_{|D})$$

But D is endowed with a non-degenerate bilinear form: let $g_1 : (x,y) \mapsto < T^{n-1}x, y >$; $\ker g_1 = \ker T^{n-1}$, so g_1 is well defined, non-degenerate on the quotient space $E/\ker T^{n-1}$. Now, $T^{n-1} : E/\ker T^{n-1} \to D = \mathrm{Im}\, T^{n-1}$ is an isomorphism, and so the following formula:

$$g'_1(T^{n-1}\,\cdot\,, T^{n-1}\,\cdot\,) = g_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$$

defines a non-degenerate symmetric bilinear form g'_1 on D. Now g_1 is holonomy stable, and ric is parallel by hypothesis. As a consequence, all the $R(x,y)$ are g_1- and ric-antiselfadjoint, whether we are dealing with the complexified version of R or not. And so the same statement holds for g'_1 on D. Therefore $\forall x,y \in E, R(x,y)_{|D} \in \mathfrak{o}(g'_1)$. But as g'_1 is non-degenerate, the elements of $\mathfrak{o}(g'_1)$ are trace free. So, $\forall x,y \in E, \mathrm{tr}(R(x,y)_{|D}) = 0$.

Now, from lemma 1,(ii), it follows that: $\forall x \in D, \forall y \in D^\perp, \mathrm{ric}(x,y) = 0$. Summing up the results,

- $\forall i \in \{1,..,d\}, \forall y \in D^\perp$, $\mathrm{ric}(e_i, y) = 0$
- $\forall i \in \{1,..,d\}, \forall j \in \{1,..,d\}$, $\mathrm{ric}(e_i, e'_j) = 0$

But $\mathrm{codim}\, D^\perp = \dim D = d$, so we have reached: $\forall i \in \{1,..,d\}, \forall x \in E$, $\mathrm{ric}(e_i, x) = 0$. That is to say, $\{0\} \subsetneq D \subset \ker(\mathrm{ric})$. So ric is degenerate, and $\alpha = 0$.

Second Claim: If $\alpha = 0$, that is if $P = X^n$, then $n \leq 2$.

Here $T = \mathrm{Ric}$. We cut again the proof into two steps: $n \leq 3$, and then $n \neq 3$.

$n \leq 3$: Let us suppose $n \geq 4$, and take $D = \mathrm{Im}\,\mathrm{Ric}^{n-2}$. We use exactly the same arguments. D is totally isotropic: let $x = \mathrm{Ric}^{n-2} u \in D, y = \mathrm{Ric}^{n-2} v \in D$, we have:

$$< x,y > = < \mathrm{Ric}^{n-2} u, \mathrm{Ric}^{n-2} v > = < \mathrm{Ric}^{2n-4} u, v > = < 0,v > = 0.$$

Indeed, $n \geq 4$, so $2n - 4 \geq n =$ nilpotence index of T. Let us define g_2 by the formula: $g_2(x,y) = < \mathrm{Ric}^{n-2} x, y >$. Then g_2 is well defined, non-degenerate on $E/\ker \mathrm{Ric}^{n-2}$. As above, $\mathrm{Ric}^{n-2} : E/\ker \mathrm{Ric}^{n-2} \to D = \mathrm{Im}\,\mathrm{Ric}^{n-2}$ is an isomorphism, and so the following formula:

$$g'_2(\mathrm{Ric}^{n-2}\,\cdot\,, \mathrm{Ric}^{n-2}\,\cdot\,) = g_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$$

defines a non-degenerate symmetric bilinear form g'_2 on D. By the same way: $\forall x,y \in E, R(x,y)_{|D} \in \mathfrak{o}(g'_2)$, g'_2 is non-degenerate on D, and so the $R(x,y)$ are tracefree.

By lemma one and the same remarks, this implies that D is Ricci-flat, *i.e.* that $\mathrm{Im}\,\mathrm{Ric}^{n-1} = \mathrm{Ric}(D) = \{0\}$. But the nilpotence index of Ric is n, so it is impossible. So $n \leq 3$.

$\underline{n \neq 3}$: Let us now suppose $n = 3$. $\mathrm{Im}\,\mathrm{Ric}^{n-2}$ is no longer totally isotropic. Let us now take $D = \mathrm{Im}\,\mathrm{Ric} \cap \ker \mathrm{Ric}$, which is totally isotropic.

Now is involved the purely algebraic result which was told about at the beginning. In our case, [Kli54], [this thesis, next chapter] or [BBB] give the existence of some canonical basis β which is both:
(1) Jordan for Ric, i.e.:

$$\mathrm{Mat}_\beta(\mathrm{Ric}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \overbrace{\quad}^{E_3} & \overbrace{\qquad}^{\mathrm{Ric}(E_2)} & \overbrace{\quad}^{E_2} & \overbrace{\qquad}^{\mathrm{Ric}^2(E_1)} & \overbrace{\qquad}^{\mathrm{Ric}(E_1)} & \overbrace{\quad}^{E_1} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{n_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

where $n_1 = \dim E_1 = \dim\,[\ker \mathrm{Ric} \cap \mathrm{Im}\,\mathrm{Ric}^2]$,
$n_2 = \dim E_2 = \dim\,[(\ker \mathrm{Ric} \cap \mathrm{Im}\,\mathrm{Ric})/(\ker \mathrm{Ric}\ \cap \mathrm{Im}\,\mathrm{Ric}^2)]$ and
$n_3 = \dim E_3 = \dim\,[\ker \mathrm{Ric}\,/(\ker \mathrm{Ric} \cap \mathrm{Im}\,\mathrm{Ric})]$.

(2) "canonical" for g, in the following sense:

$$\mathrm{Mat}_\beta(g) = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} I_{r_3,s_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{r_2,s_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{r_2,s_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r_1,s_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{r_1,s_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{r_1,s_1} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

where $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ and the r_i and s_i are some integers satisfying $r_i + s_i = n_i$. We do not need more here, but to be more precise, the three couples (r_i,n_i) characterize the couple (g, ric) of bilinear forms on E, up to pull back by a isomorphism U of E: $g \rightsquigarrow g(U.,U.)$, $\mathrm{ric} \rightsquigarrow \mathrm{ric}(U.,U.)$.

Remark: To avoid a misunderstanding, it is important to note that the subspaces E_1, E_2 and E_3 are **not** canonical — but however, are not **any** Jordan subspaces.

Let us denote by $(e_i^k)_{i=1}^{n_k}$ the vectors of β which generate each E_k, $k = 1$,2 or 3. So $\beta = ((e_i^3)_{i=1}^{n_3}, (\mathrm{Ric}\, e_i^2)_{i=1}^{n_2}, (e_i^2)_{i=1}^{n_2}, (\mathrm{Ric}^2\, e_i^1)_{i=1}^{n_1}, (\mathrm{Ric}\, e_i^1)_{i=1}^{n_1}, (e_i^1)_{i=1}^{n_1})$. Then:

$$\pm 1 = < \mathrm{Ric}^2 e_i^1, e_i^1 > = \mathrm{ric}(\mathrm{Ric}\, e_i^1, e_i^1) = \mathrm{tr}(v \mapsto R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, v).e_i^1) =$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} \pm \underbrace{< R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}^2 e_j^1).e_i^1, e_j^1 >}_{A_{i,j}} + \sum_{j=1}^{n_1} \pm \underbrace{< R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_j^1).e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_j^1 >}_{B_{i,j}}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n_1} \pm \underbrace{< R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, e_j^1).e_i^1, \mathrm{Ric}^2 e_j^1 >}_{C_{i,j}} + \sum_{j=1}^{n_2} \pm \underbrace{< R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_j^2).e_i^1, e_j^2 >}_{D_{i,j}}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n_2} \pm \underbrace{< R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, e_j^2).e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_j^2 >}_{E_{i,j}} + \sum_{j=1}^{n_3} \pm \underbrace{< R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, e_j^3).e_i^1, e_j^3 >}_{F_{i,j}}.$$

But all terms are zero. Indeed:

- From Lemma 1, **(i)**:
  - $\forall i,j \leq n_1$, $\mathrm{Ric}^2 e_j^1 \in D$ and $\mathrm{Ric}\, e_i^1 \in D^\perp$, so $R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}^2 e_j^1) = 0$,
  - $\forall i \leq n_1, \forall j \leq n_2$, $\mathrm{Ric}\, e_j^2 \in D$ and $\mathrm{Ric}\, e_i^1 \in D^\perp$, so $R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_j^2) = 0$
  - $\forall i \leq n_1, \forall j \leq n_3, R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, e_j^3) = 0$,

  thus all the $A_{i,j}$, $D_{i,j}$ and $E_{i,j}$ are zero.
- Using Bianchi identity:

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= < R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, e_j^1).e_i^1, \mathrm{Ric}^2 e_j^1 > \\ &= - < R(e_j^1, e_i^1).\, \mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}^2 e_j^1 > - < R(e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_i^1).e_j^1, \mathrm{Ric}^2 e_j^1 > \\ &= - < \underbrace{R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, \mathrm{Ric}^2 e_j^1)}_{=0 \text{ by lemma 1, } \textbf{(i)}}.e_j^1, e_i^1 > + < R(e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_i^1).\, \mathrm{Ric}^2 e_j^1, e_j^1 > \\ &= < R(e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_i^1).\, \mathrm{Ric}^2 e_j^1, e_j^1 > \end{aligned}$$

  As ric is parallel we have: $\forall x,y$, $\mathrm{ric}(R(x,y)\,.\,,.\,) = -\mathrm{ric}(\,.\,,R(x,y)\,.\,)$, and thus its g-selfadjoint associated endomorphism Ric commutes with all the $R(x,y)$. So:

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= < R(e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_i^1).\, \mathrm{Ric}^2 e_j^1, e_j^1 > \\ &= < \mathrm{Ric}^2 R(e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_i^1).e_j^1, e_j^1 > \\ &= < R(e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_i^1).e_j^1, \mathrm{Ric}^2 e_j^1 > \\ &= - < e_j^1, R(e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_i^1).\, \mathrm{Ric}^2 e_j^1 > \\ &= -C_{i,j} \end{aligned}$$

  and $\forall i,j, C_{i,j} = 0$
- With the previous remark on the commutation of Ric:

$$\begin{aligned} F_{i,j} &= < R(\mathrm{Ric}\, e_i^1, e_j^3).e_i^1, e_j^3 > \\ &= < R(e_i^1, e_j^3).\, \mathrm{Ric}\, e_i^1, e_j^3 > \\ &= < \mathrm{Ric}(R(e_i^1, e_j^3).e_i^1), e_j^3 > \\ &= < R(e_i^1, e_j^3).e_i^1, \mathrm{Ric}\, e_j^3 > \\ &= < R(e_i^1, e_j^3).e_i^1, 0 > = 0. \end{aligned}$$

- With the same remark, and commuting this time the role of i and j:

$$\begin{aligned} B_{i,j} &=< R(\operatorname{Ric} e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^1).e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^1 > \\ &=< R(e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^1). \operatorname{Ric} e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^1 > \\ &=< R(e_i^1, \operatorname{Ric} e_j^1). \operatorname{Ric}^2 e_i^1, e_j^1 > \\ &= C_{j,i} = 0 \end{aligned}$$

Thus the case $n = 3$ is impossible, which completes the proof. □

5 The case where Ric has two complex conjugate eigenvalues

This part is devoted to the fourth case announced in section 2: the case where the minimal polynomial P of Ric is irreducible of degree 2. So, Ric has no nilpotent part but is not diagonalizable on $\mathbb{R}$.

Proposition 1 *Let (M,g) be a pseudo-Riemannian manifold whose Ricci tensor is parallel and such that the minimal polynomial of* Ric *is of the form: $[(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})]^k$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Let us denote by D the Levi-Civita connection of M. Then $k = 1$, and M, endowed with the same connection D, admits a complex Riemannian structure, the real part of which is the original metric. That is to say, M admits:*
- *For each $x \in M$, an endomorphism $J \in End(T_xM)$, such that $J^2 = -\operatorname{Id}$, integrable,*
- *h a complex non-degenerate bilinear symmetric form (warning: not a hermitian product) such that D is its Levi-Civita connection (*i.e. *$Dh = 0$), and such that $g = \Re h$.*

Moreover, $(M_{\mathbb{C}},h)$ is Einstein with factor $\frac{\alpha}{2}$ (or $\frac{\overline{\alpha}}{2}$, it depends on the choice of h), i.e. $\operatorname{ric}_{\mathbb{C}} = \frac{\alpha}{2}h$. *Finally, $\Re(\alpha h) = \operatorname{ric}_{\mathbb{R}}$, so M is Einstein for this —real— metric $\Re(\alpha h)$, that admits the same connection D, so the same R and the same* ric, *as g.*

Remark: With such a minimal polynomial for Ric, M is of even dimension $2n$ and any real metric giving this ric has signature (n,n).

Proof: Let $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ be such that $\alpha = \lambda + i\mu$. $\alpha \notin \mathbb{R}$, so $\mu \neq 0$. Let $J = \frac{1}{\mu}(\operatorname{Ric} - \lambda \operatorname{Id})$. Then:

$$\begin{aligned} J^2 &= \frac{1}{\mu^2}((\operatorname{Ric} - \alpha \operatorname{Id}) + i\mu \operatorname{Id})((\operatorname{Ric} - \overline{\alpha} \operatorname{Id}) - i\mu \operatorname{Id}) \\ &= \frac{1}{\mu^2}((\operatorname{Ric} - \alpha \operatorname{Id})(\operatorname{Ric} - \overline{\alpha} \operatorname{Id}) + i\mu\alpha \operatorname{Id} - i\mu\overline{\alpha} \operatorname{Id} + \mu^2 \operatorname{Id}) \\ &= \frac{1}{\mu^2}(0 + 2\Re(i\mu\alpha) \operatorname{Id} + \mu^2 \operatorname{Id}) \\ &= \frac{1}{\mu^2}(-\mu^2 \operatorname{Id}) \\ &= -\operatorname{Id}. \end{aligned}$$

Since Ric is parallel and J is a polynomial in Ric, J is parallel. By Newlander and Nirenberg theorem [NN57], the almost-complex structure induced by J is thus complex.

Let now x be a point in M, let us define on T_xM the following complex bilinear form: $h : u,v \mapsto h(u,v) = g(u,v) - ig(u,J.v)$. J is g-selfadjoint, so $h(u,v) = h(v,u)$. One easily verifies that: $\forall \gamma,\delta \in \mathbb{R}, h((\gamma + i\delta)u,v) = \gamma h(u,v) + i\delta h(u,v)$. g is non-degenerate, thus so is h; J being parallel, $Dh = 0$, so D is the Levi-Civita connection of h. By definition, $g = \Re h$.

Useful remark: If $A \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(T_xM)$ commutes with J, *i.e.* is in $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(T_xM)$ too, then:

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{C}}\, A = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}\, A - i\, \mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(J.A)).$$

As a consequence, $\mathrm{ric}_{\mathbb{C}}(u,v) = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}\, R(u,.)v = \frac{1}{2}[\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}\, R(u,.)v - i\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(J.R(u,.)v)]$. J is parallel, so commutes with all the $R(a,b)$, and so $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(J.R(u,.)v) = \mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(R(u,.)Jv)$. Finally,

$$\mathrm{ric}_{\mathbb{C}}(u,v) = \frac{1}{2}(\mathrm{ric}_{\mathbb{R}}(u,v) - i\, \mathrm{ric}_{\mathbb{R}}(u,J.v)).$$

¿From the main theorem one knows that $k = 1$ so Ric is semi-simple and one may find a real basis $\beta = (e_1,e'_1,\dots,e_n,e'_n)$ of T_xM such that:

$$\mathrm{Mat}_\beta(\mathrm{Ric}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \mathrm{Mat}_\beta(g) = \begin{pmatrix} K_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & K_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{and thus } \mathrm{Mat}_\beta(\mathrm{ric}) = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A' \end{pmatrix},$$

where $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$ and $A' = \begin{pmatrix} -\mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$.

Remark: with that basis, $\mathrm{Mat}_\beta(J) = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}$, where $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Let $\widetilde{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}((e_1 + e'_1),\dots,(e_n + e'_n))$. That $\widetilde{\beta}$ is a basis of T_xM as $\mathbb{C}$-vectorspace and, using the formula linking $\mathrm{ric}_{\mathbb{C}}$ and $\mathrm{ric}_{\mathbb{R}}$: $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\beta}}(\mathrm{ric}_{\mathbb{C}}) = \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{Id}$. As $\mathrm{Mat}_{\widetilde{\beta}}(h) = \mathrm{Id}$, it follows: $\mathrm{ric}_{\mathbb{C}} = \frac{\alpha}{2}h$. Thus, $(M_{\mathbb{C}},h)$ is Einstein.

Now, if we let $g' = \Re(\alpha h)$, $\mathrm{ric}_{\mathbb{R}} = 2\Re\,\mathrm{ric}_{\mathbb{C}} = 2\Re(\frac{\alpha}{2}h) = g'$, so (M,g') is Einstein. Indeed, g' induces the same connection D as g, so the same Ricci tensor. □

6 Further remarks

6.1 A few words about low dimensions

In low dimensions, we have more precise results.

Proposition 2 *Let (M,g) be an indecomposable pseudo-Riemannian manifold of dimension n whose Ricci tensor is parallel.*

- *If $n \leq 3$, then M has constant curvature.*
- *If $n \leq 6$, and if the minimal polynomial of* Ric *is a power of an irreducible polynomial of degree 2, then M is complex, locally symmetric. As complex manifold, it has constant curvature.*

Proof: This result is only a technical remark, short to explain with the following tools, which are classical and can be found in for example in [Bes87], pp.47 and 49:

Definition *If a and b are two symmetric bilinear forms, their Kulkarni-Nomizu product is the following 4-tensor:*

$$(a \owedge b)(x,y,z,t) = a(x,z)b(y,t) + a(y,t)b(x,z) - a(x,t)b(y,z) - a(y,z)b(x,t).$$

Lemma 3 *Let (M,g) be a Riemannian, pseudo-Riemannian or complex Riemannian manifold with dimension n. Let us denote by $s = \operatorname{tr}\mathrm{Ric}$ its scalar curvature. As in [Bes87], let us denote (in this lemma) by R the (4,0) tensor associated to the curvature.*
If $n = 2$, then $R = \frac{s}{4} g \owedge g$ and $\mathrm{ric} = \frac{s}{2} g$.
If $n = 3$, then $R = \frac{s}{12} g \owedge g + (\mathrm{ric} - \frac{s}{3} g) \owedge g$.

The first point of the proposition follows directly from the lemma: if $n \leq 3$, M is Ricci-parallel $\Leftrightarrow D\,\mathrm{ric} = 0 \Rightarrow DR = 0 \Leftrightarrow M$ is locally symmetric. M is irreducible, it has then moreover constant curvature. In the case of the third point, proposition 1 and the previous point imply that M is a complex manifold of dimension $p = 2$ or $p = 3$ ($n = 2p$), with a complex Riemannian structure h. Applying again lemma 3, we conclude that M is locally symmetric and that, as complex manifold, it has constant curvature. By proposition 1, the real manifold M is moreover Einstein for a well-chosen metric. □

Examples All Ricci-parallel pseudo-Riemannian manifolds of dimension 6 or less, such that Ric is non-degenerate and non-diagonalizable over $\mathbb{R}$, are complex symmetric spaces. So Berger's classification of the irreducible symmetric spaces (see [Ber57]) give them; they are:

$$SL_2(\mathbb{C}), \text{ of complex dimension } 3,$$

$$SL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\star, \text{ of complex dimension } 2.$$

As complex manifolds, they are Einstein for their "natural" metric, respectively h and $\widetilde{h}$. Here h is given by the complex Killing form of $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ [up to some scaling] and $\widetilde{h}$ is deduced from h on the quotient $SL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\star$. As real manifolds, they are Einstein for the real metrics $g = \Re h$ and $\widetilde{g} = \Re\widetilde{h}$ respectively, and not Einstein for the $g_\alpha = \Re(\alpha h)$ and $\widetilde{g}_\alpha = \Re(\alpha\widetilde{h})$ respectively, when $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

6.2 Ricci decomposition and holonomy decomposition

The (local or global) product decomposition in Main Theorem is unique, but it may be pursued. More precisely, each factor may be a (local or global) Riemannian product of pseudo-Riemannian manifolds, and decomposing in that way, we get at the end only indecomposable factors. This final decomposition is the holonomy decomposition, and it is not unique in general, as indicated in Wu's paper (see [Wu67], theorem 5 in Appendix I, p.390).

On each factor on which Ric is non-degenerate, the decomposition is unique up to ordering of the factors (one may switch isometric factors).

Now, the factor M^0 on which $\mathrm{Ric}^2 = 0$ may have a further holonomy decomposition too: $M^0 = M^0_0 \times \prod_{i\in I} M^0_i \times \prod_{j\in J} M^0_j$, with a flat M^0_0, irreducible M^0_i and indecomposable-reducible M^0_j. Then, if M^0_0 is non-trivial and if J is not empty, the way in which the factor M^0_0 may be inbedded in M^0 is not unique. On the other hand, if M^0_0 is only a point or if J is empty (i.e. there is no indecomposable reducible factor), then the holonomy decomposition is unique up to ordering.

6.3 Families of metrics with the same connection

Proposition 3 *Let M be an indecomposable pseudo-Riemannian manifold with a parallel, non-degenerate Ricci tensor, and* D *its covariant derivative. Then, the metrics over M associated to the same* D *are:*

- *either* $\{\lambda \operatorname{ric} / \lambda \in \mathbb{R}^*\}$,
- *or* $\{\lambda \operatorname{ric} + \mu g / (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)\}$, *where g is a metric such that the minimal polynomial of* Ric_g *is irreducible of degree 2 (and then M admits a unique complex structure, corresponding to this family of real metrics).*

Proof: By hypothesis, g and ric are D-parallel, and D is torsion-free, so D is the Levi-Civita connection of any non-degenerate pseudo-Riemannian metric $\lambda \operatorname{ric} + \mu g$.

Conversely, let g be a metric on (M,g) inducing the same covariant derivative D.
M is irreducible and Ricci is non-degenerate, so, either $\operatorname{Ric} = \lambda \operatorname{Id}$ and g is type 1 or $(\operatorname{Ric} - \alpha \operatorname{Id})(\operatorname{Ric} - \overline{\alpha} \operatorname{Id}) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ and g is type 2. Then:

- If all such metrics are of type 1, we are in the first case of the proposition. Then, M does not admit a parallel J with $J^2 = -\operatorname{Id}$, else $h : u,v \mapsto g(u,v) - ig(u,J.v)$ is a complex Riemannian structure of M and all the $g_\beta = \Re(\beta h)$ for $\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ are real metrics of type 2.
- If there exists two metrics g and g' of type 2 (with corresponding α, Ric, J, α', Ric$'$ and J'), they both belong to the family $\{\lambda \operatorname{ric} + \mu g\}$ and $J = J'$. Indeed, g and g' give as in Proposition 1 complex Riemannian metrics h and h'. But $\Re(\alpha h) = \Re(\alpha' h') = \operatorname{ric}$, so $\alpha h = \alpha' h'$ and $g' = \Re(\frac{\alpha}{\alpha'} h) = \Re((\mu + \lambda\alpha)h)$ for some real numbers λ and μ, what gives the result. Furthermore, $\forall u,v, h(u,J.v) = ih(u,v) = i\frac{\alpha'}{\alpha} h'(u,v) = \frac{\alpha'}{\alpha} h'(u,J'.v) = h(u,J'.v)$, so $J = J'$. If M admits another J'', it induces other metrics of type 2, which are then in the family below, and $J'' = J$. $\square$

Remark: *The assumption "*Ric *is non-degenerate" shall not be omitted. Indeed, there exist indecomposable Ricci-parallel manifolds M that admit any number of linear independant metrics associated to the same connection. For those cases,* Ric *is nilpotent. Such M may even be choosen symmetric.*

6.4 Some examples

A family of symmetric spaces due to Cahen and Wallach (*cf.* [CW70]) may be used here as example.

As explained in [CP70], a simply connected pseudo-Riemannian symmetric space is associated to each pseudo-Riemannian symmetric triple $(\mathcal{G},\sigma,<\ ,\ >)$. Such a triple consists of a finite dimensional Lie algebra $\mathcal{G}$, a non-degenerate symmetric bilinear form $<\ ,\ >$ on $\mathcal{G}$, invariant by $\mathcal{G}$, and an involutive automorphism σ of $\mathcal{G}$, orthogonal for $<\ ,\ >$, satisfying the following property: $[\mathcal{Q},\mathcal{Q}] = \mathcal{H}$, where $\mathcal{H} = \ker(\sigma - \operatorname{Id})$ and $\mathcal{Q} = \ker(\sigma + \operatorname{Id})$. The associated symmetric space M is a submanifold of the simply connected Lie group G associated to $\mathcal{G}$. Its tangent space at the point 0 is $T_0 M = \mathcal{Q}$ and its holonomy algebra is $\mathcal{H}$, acting by Ad on $\mathcal{Q}$.

The announced examples are provided by a family of pseudo-Riemannian symmetric triples characterized as follows: $\dim \mathcal{G} = 2n+2$, $\dim \mathcal{H} = n$ and $\dim \mathcal{Q} = n+2 =$ dimension of the obtained symmetric space M. There is a basis $(U_i)_{i=1}^n$ of H, and a basis $(Y^*,(X_i)_{i=1}^n,Y)$ of $\mathcal{Q}$ such that, if the basis $(Y^*,(U_i)_{i=1}^n,(X_i)_{i=1}^n,Y)$ is denoted by β:

– Y^* is central,

– $$\mathrm{Mat}_\beta(\mathrm{Ad}\, Y) = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & & \lambda_1 & & & 0 \\ \vdots & & 0 & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & & & \lambda_n & 0 \\ \hline 0 & -\lambda_1 & & & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & 0 & & \vdots \\ 0 & & & -\lambda_n & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right), \quad (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{*n}$$

(remark: turning some X_i into $-X_i$, one may then require: $(\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}_+^{*n}$),

– $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}, [U_i,X_j] =< [Y,U_i],X > Y^*$,

– $\mathrm{vect}\{U_i\}$ and $\mathrm{vect}\{X_j\}$ are abelian subalgebras,

– $\mathcal{H} \perp \mathcal{Q}$ for $< \, , \, >$,

– $< Y,Y^* >= 1$, $< Y,Y >=< Y^*,Y^* >= 0$,

– $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}$, $< U_i,U_j >=< X_i,X_j >= \delta_{i,j}$ and $< X_i,Y >=< X_i,Y^* >= 0$.

It is easy to check that:

– $\forall V,W \in \mathcal{G}, \sigma([V,W]) = [\sigma(V),\sigma(W)]$

– σ is $< \, , \, >$-orthogonal and: $\forall V \in \mathcal{G}$, $\mathrm{Ad}\, V$ is $< \, , \, >$-skew symmetric,

– $[\mathcal{Q},\mathcal{Q}] = \mathcal{H}$.

Therefore, $(\mathcal{G},\sigma, < \, , \, >)$ is a pseudo-Riemannian (here Lorentzian) symmetric triple. Let $(M, <,>)$ be its associated pseudo-Riemannian symmetric space. $\mathcal{H}$ is the holonomy algebra of M, acting on $\mathcal{Q} \simeq T_0 M$ by Ad. Therefore, by this representation, H is identified with the (abelian) subalgebra of $\mathfrak{so}(\mathcal{Q}, < \, , \, >)$ consisting of the matrices of the form:

$$\begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & -{}^tX \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{where } X = (x_1,\dots,x_n) \text{ is some element of } \mathbb{R}^n,$$

in the basis $(Y^*,(X_i)_{i=1}^n,Y)$. Here M is indecomposable, non-irreducible, the only eigenvalue of Ric is 0, and Ric is nilpotent of order 2. More precisely, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, we have $\mathrm{Ric}(X_i) = \mathrm{Ric}(Y^*) = 0$ and $\mathrm{Ric}(Y) = (\sum \lambda_i^2)Y^*$.

Now, $(\mathrm{Ad}\, Y)^2$ is diagonalizable in a $< \, , \, >$-pseudo-orthonormal basis, with the eigenvalues $\{0,-\lambda_1^2,\dots,-\lambda_n^2\}$. Each eigenspace E_λ associated to one of the λ_i^2 is of even dimension $2d_\lambda$ where: $d_\lambda = \sharp\{i/\lambda_i = \lambda\}$). $E_\lambda = (E_\lambda \cap \mathcal{H}) \oplus (E_\lambda \cap \mathcal{Q})$, each term being of dimension d_λ. Then, on each E_λ, $< \, , \, >$ may be replaced by every scalar product $< \, , \, >'$:

– preserving the relation $\mathcal{H} \perp \mathcal{Q}$,

– such that $\mathrm{Ad}\, Y$ remains skew-symmetric, *i.e.* such that: $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $< U_i,U_j >'=< X_i,X_j >'$;

and $(\mathcal{G},\sigma, < \, , \, >')$ remains a pseudo-Riemannian symmetric triple, with the <u>same</u> brackets. Actually, one reaches here all the scalar products satisfying this property. In the basis of

E_λ built with the U_i and the X_i, the matrix of $< \ , \ >'$ is:

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad \text{where } S \text{ is some symmetric matric of } M_{d_\lambda}(\mathbb{R}).$$

So, each E_λ may be equipped of $\frac{d_\lambda(d_\lambda+1)}{2}$ linearly independant metrics, letting the brakets unchanged, and thus the covariant derivative of the associated manifold M.

Notes: 1) These examples may be adapted to provide similar pseudo-Riemannian manifolds of every signature $(p+1,q+1)$. One take $n = p+q$, $< X_i,X_j >= \delta_{i,j}$ if $i \leq p$, else $< X_i,X_j >= -\delta_{i,j}$; $[Y,U_i] = -\lambda_i X_i$ if $i \leq p$, else $[Y,U_i] = \lambda_i X_i$. The other data are the same. $(\mathrm{Ad}\,Y)^2$ is diagonalizable, with the eigenvalues $\{0, -\lambda_1^2, \ldots, -\lambda_p^2, \lambda_{p+1}^2, \ldots, \lambda_n^2\}$. On the $E_\lambda^+ = \ker[(\mathrm{Ad}\,Y)^2 + \lambda^2\,\mathrm{Id}]$ (for one of the λ_i, $i \leq p$), the phenomenon is the same; whereas on the $E_\lambda^- = \ker[(\mathrm{Ad}\,Y)^2 - \lambda^2\,\mathrm{Id}]$ (for one of the other λ_i), the matrix of the other possible $< \ , \ >'$ are:

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & -S \end{pmatrix}, \quad \text{where } S \text{ is some symmetric matric of } M_{d_\lambda}(\mathbb{R}).$$

2) This provides a family of symmetric spaces such that $\mathrm{Ric} \neq 0$ and $\mathrm{Ric}^2 = 0$. Another such family is constructed in [CP70], pp.40 *sq.* See [CP80] too.

Institut Elie Cartan, Unité Mixte de Recherche 7502 U.H.P., C.N.R.S., I.N.R.I.A.
Université Henri Poincaré – Nancy I
B.P.239, 54506 VANDŒUVRE-LES-NANCY CEDEX, FRANCE.

Bibliographie

[BBB] Lionel BÉRARD-BERGERY et Charles BOUBEL. Réduction simultanée de deux formes bilinéaires, symétriques ou antisymétriques. preprint.

[BBI93] Lionel BÉRARD-BERGERY and Aziz IKEMAKHEN. On the Holonomy of Lorentzian Manifolds. *Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, 54,Part 2:27–39, 1993. (MR 94d:53106).

[BBI97] Lionel BÉRARD-BERGERY et Aziz IKEMAKHEN. Sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes de signature (n,n). *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 125 n°1, 93–114, 1997. (MR 98m:53087).

[Ber57] Marcel BERGER. Les espaces symétriques non compacts. *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 74:85–177, 1957. (MR 21♯3516).

[Bes87] Arthur L. BESSE. *Einstein Manifolds.* Springer Verlag — *Berlin, Heidelberg*, 1987.

[Bes96] Arthur L. BESSE, éditeur. *Actes de la Table Ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger.* Collection *Séminaires et congrès* n°1, S.M.F., 1996.

[Bour] Nicolas BOURBAKI. *Elements de mathématique.* Groupes et Algèbres de Lie, chapitre 1 : Algèbres de Lie. Hermann, Paris, 1960.

[CP70] Michel CAHEN et Monique PARKER. Sur des classes d'espaces pseudo-riemanniens symétriques. *Bulletin de la Société Mathématique de Belgique*, XXII:339–354, 1970. (MR 44♯3247).

[CP80] Michel CAHEN and Monique PARKER. *Pseudo-riemannian symmetric spaces.* Memoirs of the American Mathematical Society, 24(229), 1980. (MR 81b:53036).

[CW70] M. CAHEN and N. WALLACH. Lorentzian symmetric spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 76:585–591, 1970. (MR 42♯2402).

[E68] David G. EBIN. The manifold of Riemannian metrics. *1970 Global Analysis, Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, 15:11-40, 1968. (MR 42♯2506).

[I96] Aziz IKEMAKHEN. Examples of indecomposable non-irreducible Lorentzian manifolds. *Ann. Sci. Math. Québec* 20, n°1, pp.53–66, 1996. (MR 97e:53122).

[Kli54] Wilhelm P.A. KLINGENBERG. Paare symmetrischer und alternierender Formen zweiten Grades. *Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg*, 19:78–93, 1954. (MR 16,327g).

[NN57] NEWLANDER and NIRENBERG. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Annals of math.*, 65:391–404, 1957. (MR 19,557).

[Q94] M. QUERCIA, article paru dans la rubrique *Questions et réponses* de la *Revue de mathématiques spéciales*, n°5, pp.381–388, janvier 1994.

[T67] Jacques TITS. *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen.* Lecture Notes in Mathematics n°40, Springer-Verlag — *Berlin, Heidelberg, New York*, 1967.

[W49] A. G. WALKER. On parallel fields of partially null vector spaces. *Quart. Journ. of Mathematics (Oxford)*, 20:135–145, sept. 1949.

[W50a] A. G. WALKER. Canonical form for a riemannian space with a parallel field of null planes. *Quart. Journ. of Mathematics (Oxford)(2)*, 1:69–79, 1950.

[W50b] A. G. WALKER. Canonical forms (II) : parallel partially null planes. *Quart. Journ. of Mathematics (Oxford)(2)*, 1:147–152, 1950.

[Wu67] H. WU. Holonomy groups of indefinite metrics. *Pacific Journal of Mathematics*, 20:351–392, 1967. (MR 35♯3606).