

Chapitre 2

Réduction simultanée de deux formes bilinéaires, symétriques ou antisymétriques, dont l'une est non dégénérée

Introduction

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie d , et a et b deux formes bilinéaires symétriques sur E , a étant définie positive. Il existe des bases β a -orthonormées, diagonalisant la forme b , *i.e.* telles que : $\text{Mat}_\beta(a) = I_d$, $\text{Mat}_\beta(b)$ est diagonale. On en déduit la structure de $\Omega = O(a) \cap O(b) \subset GL(E)$. Soit en effet B l'endomorphisme a -autoadjoint tel que : $b(\cdot, \cdot) = a(\cdot, B \cdot)$ et $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{L}}$ ses sous-espaces propres, alors :

$$\begin{cases} E = \oplus_\lambda E_\lambda \text{ et les } E_\lambda \text{ sont mutuellement } a\text{- et } b\text{-orthogonaux} \\ \Omega = \prod_\lambda O(a|_{E_\lambda}) \simeq \prod_\lambda O_{\dim E_\lambda}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

En particulier, les $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{L}}$ et leurs sommes sont les seuls sous-espaces stables par Ω , ce sont donc les seuls sous-espaces intrinsèquement associés à $\{a, b\}$. D'autre part, Ω agit simplement transitivement sur l'ensemble des bases du type de β .

Qu'en est-il sur un corps plus général et avec a et b symétriques ou antisymétriques quelconques? Y a-t-il des bases privilégiées, et lesquelles? Quelles sont la structure de Ω et les objets intrinsèquement associés à $\{a, b\}$? Une motivation géométrique est ici à l'origine de cette question : le problème traité par le premier chapitre, qui étudie des variétés connectées admettant deux formes bilinéaires parallèles — en l'occurrence une métrique pseudo-riemannienne ou une forme symplectique, et la courbure de Ricci.

Un article de Wilhelm Klingenberg de 1954 [Kli54] résoud partiellement ce problème algébrique, notamment exhibe des bases privilégiées. Il ne semble pas cependant exister d'exposé systématique de référence sur le sujet, dans l'esprit des questions énumérées plus haut. Aussi, dépassant la motivation de départ, essayons-nous ici d'en proposer un, en reprenant et prolongeant, avec un autre point de vue, les idées de Klingenberg. L'exposé se restreint cependant au cas où a ou b est non dégénérée, *i.e.* où il existe une forme non dégénérée dans le faisceau engendré par $\{a, b\}$.

Voilà pourquoi ce chapitre, sur cette question d'algèbre linéaire élémentaire. L'exposé est long, parfois fastidieux. Deux raisons à cela : la situation, touffue, se décompose en un grand nombre de cas et par ailleurs nous avons voulu un exposé systématique, consultable et le plus pédagogique possible. On y trouvera aussi quelques invariants inattendus, comme certaines familles de signatures secondaires. Enfin, nous tenterons surtout tout au long de ce travail de dégager les invariants géométriques des situations envisagées, la signification géométrique des objets introduits.

* * *

Soient donc E un espace vectoriel de dimension finie d sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2, et a et b deux formes réflexives, c'est-à-dire bilinéaires symétriques, bilinéaires antisymétriques ou sesquilineaires. L'objet du chapitre est en effet les couples de formes (anti)-symétriques, mais on aura besoin pour cela de l'étude des paires de formes sesquilineaires. Les formes réflexives sont exactement les 2-formes pour lesquelles la notion d'orthogonal est bien définie, par coïncidence des notions d'orthogonal à droite et à gauche. Une forme sesquilineaire est une forme a telle qu'il existe un automorphisme de corps involutif $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ de $\mathbb{K}$ tel que :

$$* \quad \forall x, y \in E, a(x, y) = \overline{a(y, x)} \text{ et :}$$

* a est linéaire en x , semilinéaire en y : $\forall x, y, y' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, a(x, \lambda y + y') = \overline{\lambda} a(x, y) + a(x, y')$.

On supposera toujours une des deux formes non dégénérée. Parfois a sera notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit B l'endomorphisme a -(anti)autoadjoint associé à b , *i.e.* tel que : $b(\cdot, \cdot) = a(\cdot, B \cdot)$.
Matriciellement :

$$\text{Mat}(B) = \text{Mat}(a)^{-1} \text{Mat}(b).$$

Si a et b sont de même nature, B est a -autoadjoint :

$${}^t(\text{Mat}(B))\text{Mat}(a) = \text{Mat}(a)\text{Mat}(B), \quad {}^t(\text{Mat}(B)) = \text{Mat}(a)\text{Mat}(B)\text{Mat}(a)^{-1}.$$

Si a et b sont, l'une symétrique, l'autre antisymétrique, B est a antiautoadjoint :

$${}^t(\text{Mat}(B))\text{Mat}(a) = -\text{Mat}(a)\text{Mat}(B), \quad {}^t(\text{Mat}(B)) = -\text{Mat}(a)\text{Mat}(B)\text{Mat}(a)^{-1}.$$

On note $\mu = \prod_{i=1}^k P_i^{n_i}$ le polynôme minimal de B (P_i irréductibles, premiers entre eux deux à deux).

On note enfin $\Omega = \text{Stab}(a) \cap \text{Stab}(b)$ l'intersection des sous-groupes de Lie de $GL(E)$ préservant respectivement a et b , c'est-à-dire des groupes orthogonaux, symplectiques ou unitaires selon le cas, associés à a et b . On note ω son algèbre de Lie.

* * *

La partie I pose les bases de l'étude. Tout d'abord, dans le cas où a et b sont toutes deux symétriques ou toutes deux antisymétriques, Wilhelm Klingenberg propose un ensemble de bases :

- où $\text{Mat}(a)$ et $\text{Mat}(b)$ ont une forme canonique,
- sur lequel Ω agit simplement transitivement.

Nous le présentons brièvement dans une première section. Les deux suivantes ouvrent notre travail proprement dit : elles introduisent les principaux objets attachés à une forme réflexive et à un sous-espace, ou à une paire de formes réflexives ; ces objets sont à la base de toute la suite.

La partie II, comme Klingenberg, traite le cas où a et b sont de même nature et la partie III celui, assez différent, où l'une est symétrique, l'autre antisymétrique.

I Préliminaires

I.1 Reprise d'un travail de Klingenberg

— Attention, ici a et b sont de même nature —

Ici sont présentés, sans démonstration — sauf pour le premier lemme, qu'on utilisera par la suite —, les résultats de Klingenberg. Sont ajoutées également des remarques sur le cas réel.

I.1.1 Un lemme préliminaire

On rappelle que $\mu = \prod_{i=1}^k P_i^{n_i}$ désigne le polynôme minimal de B (P_i irréductibles, premiers entre eux deux à deux). Un premier lemme scinde E en une somme directe canonique :

Proposition 1 *Les sous-espaces caractéristiques E_i de B sont a - et b -orthogonaux*

Démonstration : Il suffit de le vérifier. Prenons x dans $\ker P_i^{n_i}(B)$, y dans $\ker P_j^{n_j}(B)$ ($i \neq j$), U et V dans $\mathbb{K}[X]$ t.q. : $UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j} = 1$. a et b sont de même nature, donc B est a -autoadjoint. Alors :

$$\begin{aligned} a(x, y) &= a((UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j})(B).x, y) \\ &= a(UP_i^{n_i}(B).x, y) + a(x, VP_j^{n_j}(B).y) \\ &= a(0, y) + a(x, 0) \\ &= 0 \quad \text{et :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(x, y) &= b((UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j})(B).Bx, y) \\ &= b(B(UP_i^{n_i}(B).x), y) + a(x, B(VP_j^{n_j}(B).y)) \\ &= a(0, y) + a(x, 0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \square$$

Comme de plus ces E_i sont stables par Ω , on déduit facilement que Ω est isomorphe au produit direct des $\text{Stab}(a|_{E_i}) \cap \text{Stab}(b|_{E_i})$. De la même façon, une «bonne base» sera la somme de «bonnes bases» de chacun de ces E_i .

Désormais, on se restreint donc à un tel sous-espace canonique, noté simplement E ; on a alors $\mu = P_1^{n_1} = P^n$. Posons $T = P(B)$, endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence n .

I.1.2 Cas où a et b sont symétriques

L'ensemble des «bonnes bases» de E au sens de Klingenberg est l'ensemble, non vide (et assez naturel), des bases :

- de Jordan pour T
- dont les «blocs de Jordan» sont a -orthogonaux,

- et telles que sur chaque bloc, A est de la forme λK_p , où $\lambda \neq 0$, où :

$$K_p = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{K}),$$

et où λ peut être choisi à multiplication près par un carré. Dans $\mathbb{R}$, on peut se ramener à $\lambda = \pm 1$, dans un corps algébriquement clos comme $\mathbb{C}$, à $\lambda = 1$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dans une telle base :

$$\text{Mat}(a) = \begin{pmatrix} \pm K_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \pm K_{p_k} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{Mat}(T) = \begin{pmatrix} N_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & N_{p_k} \end{pmatrix}$$

où k est un certain entier et où les p_i sont des entiers décroissants avec $p_1 = n$, indice de nilpotence de T . Les N_{p_i} sont les blocs de Jordan de T , matrice nilpotente, c'est-à-dire :

$$N_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_j(\mathbb{R}).$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la situation est la même, avec des K_{p_i} au lieu des $\pm K_{p_i}$.

Remarque : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si a est définie, tous les entiers p_i sont nécessairement égaux à 1 (il n'y a pas de vecteur isotrope). De plus P est nécessairement de degré 1 ($P = X - \alpha$), sinon apparaissent des vecteurs isotropes. Les «bonnes bases» obtenues sont donc les bases codiagonalisantes habituelles, avec une seule valeur propre à cause de la décomposition préalablement effectuée par la proposition 1 : $\text{Mat}(a) = I_d$, $T = 0$, $B = \alpha \text{Id}_E$ i.e. $b = \alpha a$. $\Omega = O_d(\mathbb{R})$ agit simplement transitivement sur elles.

Un cas particulier : Si P est de degré 1 ($P = X - \alpha$), la base de Jordan pour T l'est aussi pour B , et b est alors de la forme :

$$\text{Mat}(b) = \begin{pmatrix} \pm B'_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \pm B'_{p_k} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad B'_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R}),$$

les B'_{p_i} étant affectées du même signe que K_{p_i} .

Le cas réel : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, P est de degré un ou deux. Le premier cas est traité par la remarque ci-dessus ; si P est de degré deux, P se scinde sur $\mathbb{C}$. La remarque et quelques manipulations fournissent une base de Jordan réelle de B , où $\text{Mat}(a)$ se décompose en blocs «type $K_p(I_2)$ » : des blocs I_2 remplacent les scalaires λ du bloc λK_p .

Lien avec la suite. Obtenues et ordonnées différemment, ces mêmes bases et les matrices de a et B dans ces bases, sont présentées dans le cas réel, pages 64 ($\deg P = 1$) et 65 ($\deg P = 2$). Ces matrices se trouvent aussi dans la table récapitulative, en annexe page 96, cas « a et b symétriques, $\deg P = 1$ ». La structure de Ω est donnée par le théorème 2 page 62.

I.1.3 Cas où a et b sont antisymétriques

L'ensemble des «bonnes bases» de E au sens de Klingenberg est cette fois l'ensemble non vide des bases :

- de Jordan pour T
- dont les «blocs de Jordan» sont a -totalement isotropes et s'apparient par paires $F \oplus F'$, paires mutuellement a -orthogonales,
- et telles que sur chaque paire $F \oplus F'$, A est de la forme :

$$K'_p = \begin{pmatrix} 0 & K_p \\ -K_p & 0 \end{pmatrix} \in M_{2p}(\mathbb{K}).$$

Autrement dit, dans une telle base :

$$\text{Mat}(a) = \begin{pmatrix} K'_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & K'_{p_k} \end{pmatrix} \quad \text{et :} \quad \text{Mat}(T) = \begin{pmatrix} \tilde{N}_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N}_{p_k} \end{pmatrix}, \quad \text{où } \tilde{N}_p = \begin{pmatrix} N_p & 0 \\ 0 & N_p \end{pmatrix},$$

où k est un certain entier et où les p_i sont des entiers décroissants avec $p_1 = n$, indice de nilpotence de T . Les N_{p_i} sont les blocs de Jordan de T comme définis au paragraphe précédent.

Un cas particulier : Encore une fois, si P est de degré 1 ($P = X - \alpha$), la base de Jordan pour T l'est aussi pour B , et b est alors de la forme :

$$\text{Mat}(b) = \begin{pmatrix} B''_{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B''_{p_k} \end{pmatrix} \quad \text{où } B''_p = \begin{pmatrix} 0 & B'_p \\ -B'_p & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{avec } B'_i \text{ définie} \\ \text{au paragraphe précédent.} \end{array}$$

Le cas réel : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ que P est de degré deux, P se scinde sur $\mathbb{C}$; la remarque précédente et quelques manipulations fournissent alors encore une base de Jordan réelle de B , dans laquelle a a la forme annoncée en début de paragraphe, des blocs I_2 remplaçant les scalaires 1.

Lien avec la suite. Obtenues et ordonnées différemment, ces mêmes bases et les matrices de a et B dans ces bases, sont présentées pages 66 et suivantes (corps quelconque et $\deg P = 1$, puis $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Ces matrices se trouvent aussi dans la table récapitulative, en annexe page 96, cas « a et b antisymétriques, $\deg P = 1$ ». La structure de Ω est donnée par le théorème 3 page 66.

I.2 Préliminaire : objets associés à une forme réflexive et à un endomorphisme nilpotent autoadjoint ou antiautoadjoint

Dans la suite, on ramènera toujours l'étude de l'espace E muni d'un couple (a, b) de formes réflexives :

- soit au cas où B , l'endomorphisme a -autoadjoint ou a -antiautoadjoint tel que $b(\cdot, \cdot) = a(\cdot, B\cdot)$, est nilpotent — on le note alors T —,
- soit à l'étude d'un espace E seulement muni d'un endomorphisme T nilpotent.

L'énoncé des théorèmes nécessitera alors l'introduction de quelques objets canoniquement associés à un tel couple (a, T) ou à un tel endomorphisme T . C'est l'objet de cette section.

On considère donc ici, soit un endomorphisme nilpotent T , soit une forme réflexive non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et un endomorphisme nilpotent T , autoadjoint ou antiautoadjoint par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$, *i.e.* tel que : $\langle T\cdot, \cdot \rangle = \pm \langle \cdot, T\cdot \rangle$. Sous ces hypothèses, la notion d'orthogonalité pour les formes du type $\langle T^k \cdot, \cdot \rangle$ ou $\langle \cdot, T^k \cdot \rangle$, $k \in \mathbb{N}$, est bien définie car les orthogonalités à droite et à gauche coïncident.

On introduit alors quelques objets associés à T ou $(\langle \cdot, \cdot \rangle, T)$ et notamment, dans le deuxième cas, une famille de sous-espaces de E stables par tout endomorphisme de E commutant avec T et laissant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariante, c'est-à-dire stables par tout endomorphisme de $\Omega = \text{Stab}(\langle \cdot, \cdot \rangle) \cap \text{Stab}(\langle \cdot, T\cdot \rangle)$. Cette famille est en fait remarquable : elle engendre, par somme, tous les sous-espaces stables par Ω ; cela apparaîtra comme corollaire des théorèmes principaux de ce chapitre.

Introduisons les objets annoncés.

I.2.1 Une famille de drapeaux

Les $\text{Im } T^{n-p} \cap \ker T^q$ sont une famille canonique de sous-espaces associés à T , on les notera $E_{p,q}$. Ils vérifient entre eux plusieurs relations :

- $q \geq p \Rightarrow E_{p,q} = E_{p,p}$
- bien sûr, $\forall k, E_{n,k} = \ker T^k$ et : $\forall k, E_{k,k} = \text{Im } T^{n-k}$
- $p \leq p'$ et $q \leq q' \Rightarrow E_{p,q} \subset E_{p',q'}$
- $T(E_{p,q}) = E_{p-1,q-1}$

Les $E_{p,q}$ s'ordonnent donc par inclusion dans le tableau :

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_{1,1} & = & \text{Im } T^{n-1} & & & & \\
 \cap & & & & & & \\
 E_{2,1} & \subset & E_{2,2} & = & \text{Im } T^{n-2} & & \\
 \cap & & \cap & & & & \\
 E_{3,1} & \subset & E_{3,2} & \subset & E_{3,3} & = & \text{Im } T^{n-3} \\
 \cap & & \cap & & & & \\
 \vdots & & \vdots & & & & \ddots \\
 \cap & & \cap & & & & \\
 E_{n,1} & \subset & E_{n,2} & \subset & \cdots & \subset & E_{n,n} = \text{Im } T^0 = E \\
 \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\
 \ker T & & \ker T^2 & & & & \ker T^n
 \end{array}$$

De plus, dans le cas où T est $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -autoadjoint ou antiautoadjoint :

$$\forall p, q, E_{p,q}^\perp = \text{Im } T^q + \ker T^{n-p} = E_{n-q, n-q} + E_{n, n-p}.$$

En effet, si $v = T^q w \in \text{Im } T^q$ et $u \in \ker T^q$, alors : $\langle v, u \rangle = \langle T^q w, u \rangle = \pm \langle w, T^q u \rangle = 0$ donc $\text{Im } T^q \subset (\ker T^q)^\perp$. Par égalité des dimensions : $\text{Im } T^q = (\ker T^q)^\perp$ et donc : $E_{p,q}^\perp = (\ker T^q \cap \text{Im } T^{n-p})^\perp = (\ker T^q)^\perp + (\text{Im } T^{n-p})^\perp = \text{Im } T^q + \ker T^{n-p}$ comme annoncé.

Les sous-espaces du type : $+_{p,q \in \mathcal{E}} E_{p,q}$ où : $\mathcal{E} \subset \{(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / p \geq q\}$ forment donc une famille stable par T et par passage à l'orthogonal. Comme annoncé, ce sont les seuls espaces «intrinsèques» de la situation, au sens suivant :

Proposition 2 *Soit F un sous-espace de E . Sont équivalents :*

1. F est intrinsèquement associé à $(T, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ i.e. est stable par tout endomorphisme de $\text{Stab}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ commutant avec T ,
2. F est intrinsèquement associé à T i.e. est stable par le centralisateur de T ,
3. F est de la forme : $F = +_{p,q \in \mathcal{E}} E_{p,q}$ où : $\mathcal{E} \subset \{(p, q) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / p \geq q\}$.

Cette proposition est un corollaire des théorèmes principaux, 1 et 5 pages 56 et 80. Sa démonstration vient en fin de section II.2.

I.2.2 Des formes bilinéaires sur E et sur certains quotients

Dans la situation $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, T)$, on définit :

- Les formes $b_k = \langle \cdot, \cdot \rangle_k = \langle \cdot, T^k \cdot \rangle$. Par définition, $b_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle = a$ est non dégénérée ; toutes les autres sont dégénérées. Il faut noter que, loin de se ressembler, ces formes sont linéairement indépendantes.

- La forme non dégénérée b^k , sur chaque $E/\ker T^k$: b^k est définie par passage au quotient de b_k . Comme $\ker T^k = \ker b_k$, chaque forme b^k est bien définie, non dégénérée.

- les $(\check{E}_k, \check{b}^k)_{k=0}^{n-1}$, famille de quotients, munis chacun d'une forme non dégénérée. Les $\check{E}_k$ sont les $E_{n,k+1}/(E_{n,k} + E_{n-1,k+1})$ et $\check{b}^k$ provient de b^k : b^k est définie sur $E/\ker T^k$ donc en particulier sur $E_{n,k+1}/\ker T^k$. De plus : $\ker \left(b^k_{|E_{n,k+1}/\ker T^k} \right) = E_{n-1,k+1}/(\ker T^k \cap E_{n-1,k+1})$. En conséquence, $b^k_{|E_{n,k+1}/\ker T^k}$ passe au quotient en une forme non dégénérée sur :

$$\left[E_{n,k+1}/\ker T^k \right] / \left[E_{n-1,k+1}/(\ker T^k \cap E_{n-1,k+1}) \right] \simeq E_{n,k+1}/(E_{n,k} + E_{n-1,k+1}) \quad \text{noté } \check{E}_k.$$

La situation est récapitulée dans le diagramme 1 page suivante.

I.2.3 Les décompositions de E «adaptées» à T ou à $(\langle \cdot, \cdot \rangle, T)$

Introduisons un type particulier de décompositions de E :

Définition 1 *Soit (E, T) un espace muni d'un endomorphisme nilpotent T ou $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, T)$ un espace muni d'une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et d'un endomorphisme T , comme décrits en début de section. Une décomposition D de E de la forme : $E = \bigoplus_{p=1}^n \left(\bigoplus_{q=1}^p D_{p,q} \right)$ est*

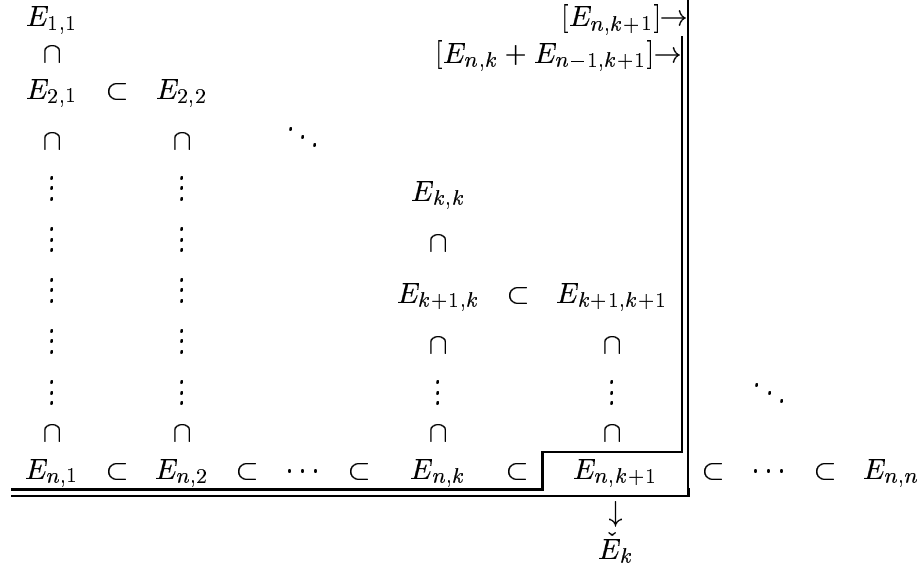


DIAGRAMME 1 – les quotients $\check{E}_k$

dite **adaptée** à T si elle vérifie les deux premières des propriétés suivantes et **adaptée** à $(\langle \cdot, \cdot \rangle, T)$ si elle vérifie les trois (on utilise les notations déjà introduites) :

- elle respecte les inclusions des $E_{p,q}$, i.e. chaque $D_{p,q}$ est un relevé de $E_{p,q}/(E_{p-1,q} + E_{p,q-1})$ dans $E_{p,q}$,
- $\forall p \leq n, \forall q \leq p, D_{p,q} = T^{n-p}(D_{n,q+(n-p)})$,

$$\bullet E = \left(\bigoplus_{p+q \leq n} \left(\underbrace{D_{p,q}}_{\text{tot. isotrope}} \oplus \underbrace{D_{n+1-q, n+1-p}}_{\text{tot. isotrope}} \right) \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{p < 1+n/2} \underbrace{D_{p, n+1-p}}_{\text{non dégénéré}} \right).$$

On notera $\mathcal{D}$ l'ensemble des décompositions adaptées de E .

Dans le cas $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle, T)$, on a le diagramme 2 suivant :

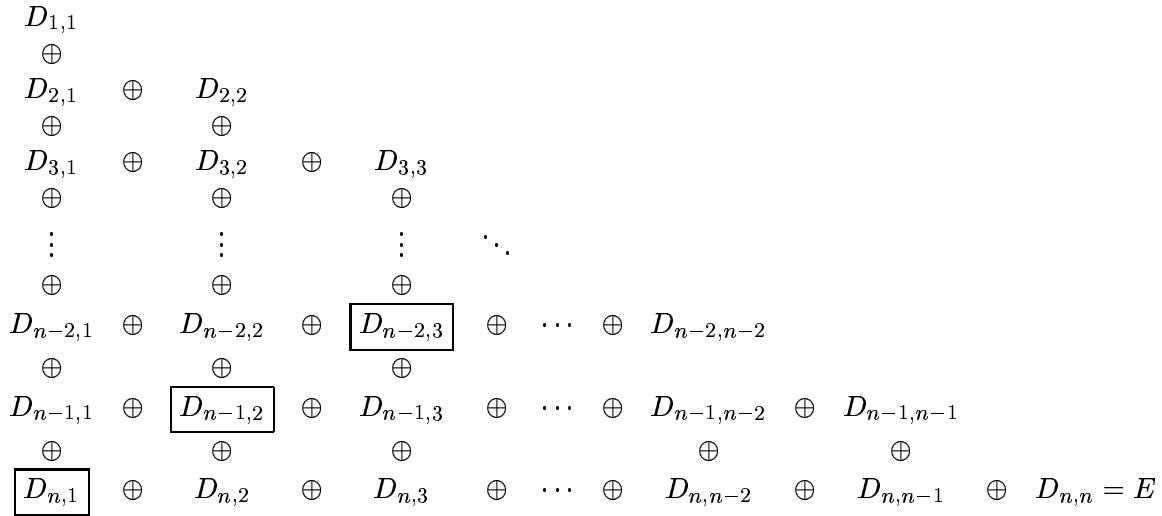


DIAGRAMME 2 – une «décomposition adaptée» $(D_{p,q})_{1 \leq q \leq p \leq n}$

ou, écrit autrement :

$$\begin{array}{ccccccc}
T^{n-1}(D_{n,n}) & & & & & & \\
\oplus & & & & & & \\
T^{n-2}(D_{n,n-1}) \oplus T^{n-2}(D_{n,n}) & & & & & & \\
\oplus & & \oplus & & & & \\
T^{n-3}(D_{n,n-2}) \oplus T^{n-3}(D_{n,n-1}) \oplus T^{n-3}(D_{n,n}) & & & & & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
T^2(D_{n,3}) \oplus T^2(D_{n,4}) \oplus \boxed{T^2(D_{n,5})} \oplus \cdots \oplus T^2(D_{n,n}) & & & & & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
T(D_{n,2}) \oplus \boxed{T(D_{n,3})} \oplus T(D_{n,4}) \oplus \cdots \oplus T(D_{n,n-1}) \oplus T(D_{n,n}) & & & & & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \oplus & \oplus \\
\boxed{D_{n,1}} \oplus D_{n,2} \oplus D_{n,3} \oplus \cdots \oplus D_{n,n-2} \oplus D_{n,n-1} \oplus D_{n,n} = E
\end{array}$$

DIAGRAMME 3 – une «décomposition adaptée» $(D_{p,q})_{1 \leq q \leq p \leq n}$, autre présentation

où :

- chaque terme de la grande diagonale — les termes encadrés — est non-dégénéré, orthogonal à tout autre terme,
- tous les autres termes sont totalement isotropes,
- chaque somme de deux termes en position symétrique par rapport à la grande diagonale — par exemple $D_{3,2} \oplus D_{n-1,n-2} = T^{n-3}(D_{n,n-1}) \oplus T(D_{n,n-1})$ — est non dégénérée, orthogonale à tout autre terme.

Le troisième point de la définition peut également être formulé ainsi : pour tout $(q_1, q_2) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et tout $(k, l) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$, $T^k(D_{n,q_1})$ et $T^l(D_{n,q_2})$ sont de somme non dégénérée si $q_1 = q_2 = l + k + 1$, et orthogonaux sinon. L'existence de telles décompositions découle de la proposition 3 donnée page 57 en section II.2. .

Remarque Les décompositions de E adaptées à T nilpotent existent : c'est le théorème de Jordan. Les décompositions adaptés à (a, T) existent également, on le montre dans la proposition 3 page 57.

On peut à présent énoncer le théorème 1.

II Cas a et b de même nature

II.1 Structure et action de Ω quand a et b sont de même nature

Ici a et b sont deux formes réflexives de même nature et a est non dégénérée. On pose B l'endomorphisme a -autoadjoint tel que $b(\cdot, \cdot) = a(\cdot, B\cdot)$. D'après la proposition 1 page 49, on peut supposer B de polynôme minimal P^n , P irréductible. On note S la partie semi-simple de B et T sa partie nilpotente : $B = T + S$, $TS = ST$. On note n l'indice de nilpotence de T . Comme polynômes en B , S et T sont également a -autoadjoints.

Attention, il ne s'agit pas ici tout à fait de l'endomorphisme nilpotent $T = P(B)$ introduit par Klingenberg et présenté dans la section I.1, bien que ce qui suit soit également vérifié avec $T = P(B)$.

Remarque : une telle décomposition $B = T + S$ n'existe que si P a toutes ses racines séparables. C'est le cas pour tout endomorphisme de E ssi $\mathbb{K}$ est parfait (en particulier donc si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle).

En pratique cependant, le problème ne se pose pas : la suite ne considère que le cas où P est de degré un — c'est-à-dire notamment le cas où $\mathbb{K}$ est algébriquement clos —, sauf si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où tous les cas sont traités. Cela suffit en un sens : si $\deg P > 1$ et $\mathbb{K}$ quelconque, on considère B comme endomorphisme de $E \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{K}}$ avec $\overline{\mathbb{K}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{K}$; le théorème explicite alors l'action de Ω sur l'espace $E \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{K}}$.

Dans le cas des corps parfaits, un théorème explicitant l'action de Ω sur E lui-même, quel que soit le degré de P , serait donc possible sur le même modèle.

II.1.1 Le théorème

Théorème 1 *Si $\deg P = 1$, Ω agit simplement transitivement sur $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}_k)$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a, T) . Plus précisément, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, où :*

- $N = \{\gamma \in \Omega \mid \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k \text{ est triviale}\}$. *C'est un sous-groupe distingué de Ω , nilpotent d'indice $\leq 2n - 1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,*
- $R = \Omega/N$ *agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}_k)$ — en particulier $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}_k)$. R est réductif.*

Ce théorème est décliné dans les trois cas possibles — symétrique, antisymétrique, sesquilinéaire — au cours des sections II.3 page 62, II.4 page 66 et II.5 page 68.

II.1.2 Une construction de Ω par récurrence

On peut dans une certaine mesure dégager, par récurrence et à titre de corollaire, la structure de Ω . Cela nécessite cependant l'introduction d'objets supplémentaires à ceux définis en section I.2 et nettement moins essentiels. On les introduit ici, par une notation et une définition.

Notation : on note $E^k = E / \ker T^k$. En particulier, $E^0 = E$, $E^n = \{0\}$. Pour tous $p, q \leq n$, on note $E_{p,q}^k$ l'image de $E_{p,q}$ par la projection canonique $\pi^k : E \rightarrow E^k$. On rappelle

que chaque E^k est muni de la forme réflexive non dégénérée b^k et d'un endomorphisme b^k -(anti)autoadjoint obtenu par l'action quotient de T , et qu'on note encore T . Les $E_{p,q}^k$ s'ordonnent par inclusion comme les $E_{p,q}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
E_{k+1,k+1}^k & = & \pi^k(\text{Im } T^{n-(k+1)}) & & & & \\
\cap & & & & & & \\
E_{k+2,k+1}^k & \subset & E_{k+2,k+2}^k & = & \pi^k(\text{Im } T^{n-(k+2)}) & & \\
\cap & & \cap & & & & \\
E_{k+3,k+1}^k & \subset & E_{k+3,k+2}^k & \subset & E_{k+3,k+3}^k & & \\
\cap & & \cap & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \\
E_{n,k+1}^k & \subset & E_{n,k+2}^k & \subset & \dots & \subset & E_{n,n}^k = E^k \\
\parallel & & \parallel & & & & \\
\pi^k(\ker T^{k+1}) & & \pi^k(\ker T^{k+2}) & & & &
\end{array}$$

Définition 2 Pour tout $k < n$, $\ker T^k$ est stable sous l'action de Ω ; Ω agit donc sur les quotients E^k . Soit $\Omega^k \subset GL(E^k)$ le sous-groupe de $GL(E^k)$ correspondant à cette action :

$$\Omega^k = \{ \gamma^k \in GL(E^k) \mid \exists \gamma \in \Omega : \forall x \in E, \gamma^k(\pi^k(x)) = \pi^k(\gamma(x)) \}.$$

En particulier, $\Omega^0 = \Omega$ et $\Omega^n = GL(E^n) = GL(\{0\}) = \{\text{Id}\}$. Rappelons que b^k est définie sur E^k , donc que $\text{Stab}(b^k) \subset GL(E^k)$. On peut alors énoncer le résultat suivant :

Corollaire 1 (du théorème 1 et de la proposition 3, énoncée en section suivante) Les groupes Ω^k vérifient :

$$\begin{aligned}
\forall k < n, \Omega^k &= \text{Stab}(b^k) \cap \text{Stab}(b^k(\cdot, T \cdot)) \\
&= \{ \gamma \in \text{Stab}(b^k) \mid \gamma(E_{n,k+1}^k) \subset E_{n,k+1}^k \\
&\quad \text{et l'action de } \gamma \text{ sur } E^{k+1} \simeq E^k / E_{n,k+1}^k \text{ est dans } \Omega^{k+1} \}.
\end{aligned}$$

Ce corollaire construit chaque Ω^k à partir de Ω^{k+1} . Par récurrence, il permet donc de dégager la structure de $\Omega = \Omega^0$. Dans le cas a et b symétriques, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\deg P = 1$, on exploite en ce sens ce corollaire en section II.7 page 72.

II.2 Démonstrations

Pour alléger les notations, on note :

- dans chaque E^k , $F^k = E_{n,k+1}^k = \pi^k(\ker T^{k+1})$.
- $\bar{\pi}^k$ la projection canonique : $E^{k+1} \rightarrow E^k$.

II.2.1 Les décompositions adaptées

Montrons l'existence des décompositions adaptées à $(E, < \cdot, \cdot >, T)$ au sens de la définition 1 page 53. Il est même intéressant de montrer un peu plus, en effet :

Remarque : Si $D = (D_{p,q})_{k+1 \leq q \leq p \leq n}$ est une décomposition adaptée de (E^k, b^k, T) , on vérifie alors que $D' = (\bar{\pi}^{k+1}(D_{p,q}))_{k+2 \leq q \leq p \leq n}$, «projeté de D sur E^{k+1} par $\bar{\pi}^{k+1}$ », est une décomposition adaptée de (E^{k+1}, b^{k+1}, T) . Réciproquement :

Proposition 3 Si $D^k = (D_{p,q}^k)_{k+1 \leq q \leq p \leq n}$ est une décomposition adaptée de (E^k, b^k, T) , alors il existe une décomposition adaptée $D^{k-1} = (D_{p,q}^{k-1})_{k \leq q \leq p \leq n}$ de (E^{k-1}, b^{k-1}, T) , qui « se projette par $\bar{\pi}^k$ sur D^k » : $\forall (p,q), k+1 \leq q \leq p \leq n \Rightarrow D_{p,q}^k = \bar{\pi}^k(D_{p,q}^{k-1})$.

Corollaire 2 $\mathcal{D} \neq \emptyset$.

$(\{0\})$ est une décomposition adaptée de $E^n \simeq \{0\}$. D'après la proposition 3 page 57, et par récurrence descendante sur k , il existe alors une décomposition adaptée de chaque (E^k, b^k, T) et en particulier de $(E, < \cdot, \cdot >, T)$, i.e. $\mathcal{D} \neq \emptyset$. $\square$

Démonstration de la proposition :

• Construction d'une famille de sous-espaces de E^{k-1} , se projetant sur D^k .

Notons $A^k = \oplus_{k+1 \leq q \leq n} D_{n,q}^k \subset E^k$ et $A^{k-1} = (\bar{\pi}^k)^{-1}(A^k) \subset E^{k-1}$. Vérifions que A^{k-1} est b^{k-1} -non dégénéré. On choisit un supplémentaire b^{k-1} -totalement isotrope H de $F^{k-1} + (F^{k-1})^\perp$ dans E^{k-1} (cf. remarque informative après cette démonstration). Alors $H^\perp \cap F^{k-1}$ noté G et $H^\perp \cap (F^{k-1})^\perp$ noté G' sont chacun non-dégénérés et :

$$E^{k-1} = [(F^{k-1} \cap (F^{k-1})^\perp) \oplus H] \overset{\perp}{\oplus} G \overset{\perp}{\oplus} G'.$$

Dans un diagramme calqué sur celui des $E_{p,q}^{k-1}$ (voir page 56) :

$$E_{n-1,n-1}^{k-1} = (F^{k-1})^\perp \left\{ \begin{array}{c} \boxed{(*)} \\ \oplus \\ \boxed{G} \end{array} \right\} \oplus \left\{ \begin{array}{c} \boxed{G'} \\ \oplus \\ \boxed{H} \end{array} \right\} = E^{k-1}$$

$E_{n,k}^{k-1} = F^{k-1}$

où $(*) = F^{k-1} \cap (F^{k-1})^\perp$. Or : $A^{k-1} \oplus G' = E^{k-1}$, en effet : supposons $x \in A^{k-1} \cap G'$, alors : $\bar{\pi}^k(x) \in A^k$ et $\bar{\pi}^k(x) \in \bar{\pi}^k((F^{k-1})^\perp) = \bar{\pi}^k(E_{n-1,n-1}^{k-1}) = E_{n-1,n-1}^k$ donc $\bar{\pi}^k(x) = 0$ i.e. $x \in F^{k-1}$. Mais $F^{k-1} \cap G' = \{0\}$ donc $x = 0$ et : $A^{k-1} \cap G' = E^{k-1} = \{0\}$. D'autre part $\bar{\pi}^k(A^{k-1} + G') = A^k + E_{n-1,n-1}^k = E^k$ et $F^{k-1} \subset A^{k-1}$ donc : $A^{k-1} \oplus G' = E^{k-1}$. Comme G' est b^{k-1} -non dégénéré, A^{k-1} l'est aussi.

Dans A^{k-1} , on choisit alors un supplémentaire totalement isotrope B^{k-1} de $(F^{k-1} + (F^{k-1})^\perp) \cap A^{k-1} = F^{k-1} = E_{n,k}^{k-1}$ (cf. à nouveau la remarque en fin de démonstration). Alors, par définition, $\bar{\pi}^k$ induit l'isomorphisme :

$$B^{k-1} \xrightarrow[\simeq]{\bar{\pi}^k} A^k.$$

Notons alors $D_{n,q}^{k-1} = (\bar{\pi}_{B^{k-1}}^k)^{-1}(D_{n,q}^k)$ pour tout $q \in \llbracket k+1, n \rrbracket$. On pose enfin, dans A^{k-1} : $D_{n,k}^{k-1} = (B^{k-1})^\perp$; comme A^{k-1} est non dégénéré et F^{k-1} totalement isotrope, $D_{n,k}^{k-1} \cap F^{k-1} = \{0\}$ et $D_{n,k}^{k-1}$ est donc un supplémentaire de $(F^{k-1})^\perp = E_{n-1,k}^{k-1}$ dans $F^{k-1} = E_{n,k}^{k-1}$. Soit D^{k-1} la famille définie par : $D^{k-1} = (D_{p,q}^{k-1})_{k \leq q \leq p \leq n} = (T^{n-p}(D_{n,q+n-p}^{k-1}))_{k \leq q \leq p \leq n}$. Alors, D^k est « l'image par $\bar{\pi}^k$ » de D^{k-1} : par définition : $\forall q \in \llbracket k+1, n \rrbracket, \bar{\pi}^k(D_{n,q}^{k-1}) = D_{n,q}^k$. Comme l'action de T commute avec $\bar{\pi}^k$: $\forall p \in \llbracket k+1, n \rrbracket, \forall q \in \llbracket k+1, p \rrbracket, \bar{\pi}^k(D_{p,q}^{k-1}) = \bar{\pi}^k(T^{n-p}(D_{n,q+n-p}^{k-1})) = T^{n-p}(\bar{\pi}^k(D_{n,q+n-p}^{k-1})) = T^{n-p}(D_{n,q+n-p}^k) = D_{p,q}^k$.

- Vérification : il s'agit d'une décomposition adaptée de E^{k-1} .

Il faut vérifier que D^{k-1} satisfait le premier et le troisième point de la définition 1 page 53.

– Chaque $D_{n,q}^{k-1}$ est un relevé de $E_{n,q}^{k-1}/(E_{n,q-1}^{k-1} + E_{n-1,q}^{k-1})$ dans $E_{n,q}^{k-1}$: si $q = k$, on l'a déjà remarqué plus haut et si $q \geq k+1$, $D_{n,q}^{k-1} = (\pi_{|B^{k-1}}^k)^{-1}(D_{n,q}^k)$ et $D_{n,q}^k$ vérifie la même propriété. Par transport par les puissances de T : chaque $D_{p,q}^{k-1}$ est un relevé de $E_{p,q}^{k-1}/(E_{p,q-1}^{k-1} + E_{p-1,q}^{k-1})$ dans $E_{p,q}^{k-1}$.

– D^k est une décomposition adaptée à (E^k, b^k, T) , donc : $T^l(D_{n,q_1}^k)$ et $T^m(D_{n,q_2}^k)$ sont de somme non dégénérée si $q_1 = q_2 = l + m + k + 1$, et sont orthogonaux sinon.

Soient $v \in D_{n,q_1}^{k-1}$ et $w \in D_{n,q_2}^{k-1}$. Soient l et m dans $\llbracket 0, n-k \rrbracket$ t.q. $l + m \geq 1$ — on suppose par exemple que $m \geq 1$ et on choisit $w' \in T^{-1}(w)$ —, alors : $b^{k-1}(T^l v, T^m w) = \pm b^{k-1}(v, T^{l+m} w) = \pm b^k(\pi^k v, T^{l+m-1}(\pi^k w'))$. Par conséquent, b^{k-1} sur $T^l(D_{n,q_1}^{k-1}) + T^m(D_{n,q_2}^{k-1})$ est comme b^k sur $T^l(D_{n,q_1}^{k-1}) + T^{m-1}(D_{n,q_2}^{k-1})$. Ainsi, $T^l(D_{n,q_1}^{k-1})$ et $T^m(D_{n,q_2}^{k-1})$ sont de somme non dégénérée si $q_1 = q_2 = l + (m-1) + k + 1 = l + m + k$, et sont orthogonaux sinon. D^{k-1} vérifie le troisième point de la définition 1 page 53 et est donc adaptée à (E^{k-1}, b^{k-1}, T) . $\square$

Remarque : Les choix arbitraires effectués dans cette démonstration sont ceux de supplémentaires totalement isotropes quelconques de certains sous-espaces dans certains quotients. La construction effectuée repose donc, par récurrence, sur de tels choix successifs. On pourra, à titre informatif, consulter la section II.6 page 69 qui détaille cette situation élémentaire et notamment les groupes mis alors en jeu.

II.2.2 Démonstration du théorème

Le vrai travail réside dans la proposition démontrée ci-dessus. Le théorème en est la suite facile et un peu fastidieuse à vérifier. On suppose P de degré un, on le note $X - \lambda$. En particulier, $S = \lambda \text{Id}$.

- Ω agit sur $\mathcal{D}$ et sur $\prod_k \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k)$

Cela est facile à voir. Soit γ un élément de Ω et $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ une décomposition adaptée de E . Alors $(\gamma(D_{p,q}))_{q \leq p \leq n}$ est aussi une décomposition adaptée de E . En effet :

- * γ préserve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\langle \cdot, T \cdot \rangle$, donc : $\langle \gamma \cdot, T(\gamma \cdot) \rangle = \langle \cdot, T \cdot \rangle = \langle \gamma \cdot, \gamma(T \cdot) \rangle$, et donc γ commute avec T . En conséquence : γ préserve les $E_{p,q}$ et donc la décomposition $(\gamma(D_{p,q}))_{q \leq p \leq n}$ respecte les inclusions des $E_{p,q}$, premier point de la définition 1 page 53. $\gamma(D_{p,q}) = \gamma(T^{n-p}(D_{n,q+(n-p)})) = T^{n-p}(\gamma(D_{n,q+(n-p)}))$; les $\gamma(D_{p,q})$ satisfont donc la deuxième condition de la définition 1.
- * d'autre part, la propriété :

$$E = \left(\bigoplus_{p+q \leq n} \left(\underbrace{D_{p,q}}_{\text{tot. isotrope}} \oplus \underbrace{D_{n+1-q, n+1-p}}_{\text{tot. isotrope}} \right) \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{p < 1+n/2} \underbrace{D_{p, n+1-p}}_{\text{non dégénéré}} \right)$$

vérifiée par les $D_{p,q}$ l'est aussi par les $\gamma(D_{p,q})$ parce que γ est $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -orthogonal.

D'autre part, γ laisse stables tous les $E_{p,q}$, donc l'action de γ passe au quotient sur les $\bar{E}_k$. γ préserve aussi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et commute avec T , donc préserve toutes les formes $\check{b}^k$ et γ agit donc sur $\prod_k \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k)$.

- N et R agissent simplement transitivement, respectivement sur $\mathcal{D}$ et sur $\prod_{k=0}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}_k)$.

Pour tout $k < n$, soit β_k une base quelconque de $\check{E}_k$. Soient $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ et $\Delta = (\Delta_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ deux décompositions adaptées de E . Pour tout $k \leq n$, $D_{n,k} \simeq \Delta_{n,k} \simeq \check{E}_{k-1}$ de façon canonique. Ces isomorphismes fournissent donc, pour tout k , une base β_{k-1}^D de $D_{n,k}$ et une base β_{k-1}^Δ de $\Delta_{n,k}$. T^{n-p} étant bijectif de $D_{n,q+(n-p)}$ sur $D_{p,q}$ et de $\Delta_{n,q+(n-p)}$ sur $\Delta_{p,q}$, $T^{n-p}(\beta_{q+n-p-1}^D)$ et $T^{n-p}(\beta_{q+n-p-1}^\Delta)$ sont des bases, respectivement de $D_{p,q}$ et de $\Delta_{p,q}$. On les notera $\beta_{p,q}^D$ et $\beta_{p,q}^\Delta$.

On définit alors γ linéaire par : $\forall q \leq p \leq n, \gamma : \beta_{p,q}^D \mapsto \beta_{p,q}^\Delta$. On vérifie alors sur les vecteurs des bases β^D et β^Δ que γ préserve $\langle \cdot, \cdot \rangle = a$ et $\langle \cdot, T \cdot \rangle = \langle \cdot, (B - S) \cdot \rangle = b - \lambda a$, donc préserve a et b et est dans Ω . Par construction, γ agit trivialement sur les $\check{E}_k$, donc de plus : $\gamma \in N$. Enfin, si $\gamma' \in N$ et $\gamma'(D) = \Delta$, alors nécessairement, $\forall p, q, \gamma'(\beta_{p,q}^D) = \beta_{p,q}^\Delta$ et donc $\gamma' = \gamma$. N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$.

Soit de plus $(h_k)_{k=0}^{n-1} \in \prod_k \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k)$ une famille de transformations orthogonales, symplectiques ou unitaires des $\check{E}_k$. On pose : $\beta_k^h = h_k(\beta_k)$. Les isomorphismes canoniques $D_{n,k} \simeq \check{E}_{k-1}$ permettent à nouveau de définir, à partir des β_k et des β_k^h , des bases $\beta_{p,q}^D$ et $\beta_{p,q}^{h,D}$ de chaque $D_{p,q}$.

On définit alors γ linéaire par : $\forall q \leq p \leq n, \gamma : \beta_{p,q}^D \mapsto \beta_{p,q}^{h,D}$. On vérifie encore sur les vecteurs des bases β^D et $\beta^{h,D}$ que γ préserve $\langle \cdot, \cdot \rangle = a$ et $\langle \cdot, T \cdot \rangle = \langle \cdot, (B - S) \cdot \rangle = b - \lambda a$, donc préserve a et b et est dans Ω . Par construction, l'action de γ sur chaque $\check{E}_k$ est celle de h_k . Ainsi, Ω agit transitivement sur $\prod_k \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k)$, par translation à gauche. Soit $\gamma' \in \Omega$ agissant pareillement sur ces quotients ; alors $\gamma^{-1} \circ \gamma'$ agit trivialement sur eux et est donc dans N . $\gamma' \equiv \gamma [N]$ et donc $R = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k)$.

- N est nilpotent d'indice $\leq 2n - 1$.

Soit $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N . N agit trivialement sur les $\check{E}_k = E_{n,k+1}/(E_{n-1,k+1} + E_{n,k})$ et commute avec l'action de T . Les différentes puissances de T envoient les $E_{n,k+1}/(E_{n-1,k+1} + E_{n,k})$ sur tous les $E_{p,q}/(E_{p-1,q} + E_{p,q-1})$, donc N agit encore trivialement sur chacun d'eux. Or, pour tout (p,q) , $N(E_{p,q}) \subset E_{p,q}$, donc : $\forall q \leq p \leq n, \mathfrak{n}(E_{p,q}) \subset E_{p-1,q} + E_{p,q-1}$. Donc, si $\nu \in \mathfrak{n}$, $\text{Im } \nu^{2n-1} \subset E_{0,1} + E_{1,0} = \{0\}$, c'est le résultat voulu.

- $\Omega \simeq N \rtimes R$.

Ω est extension de R par N , on a la suite exacte : $\{0\} \rightarrow N \rightarrow \Omega \rightarrow R \rightarrow \{0\}$. Pour montrer que : $\Omega = N \rtimes R$, il faut et il suffit d'exhiber une section s de la surjection $\Omega \rightarrow R$, dont l'image est un sous-groupe de Ω . Il suffit pour cela, par exemple, de choisir une décomposition adaptée D de E et de choisir dans chaque classe $\bar{\gamma} \in R$ l'élément (unique) $s(\bar{\gamma})$ stabilisant D . On le construit par le procédé de construction de γ au paragraphe précédent. On pose alors, $G_D = \{s(\bar{\gamma}) / \bar{\gamma} \in R\} = \{\gamma \in \Omega / \gamma(D) = D\}$, c'est un sous-groupe de Ω . Il n'y a pas de section dont l'image soit un sous-groupe distingué car le produit n'est pas direct, on le verra dans la section II.7 page 72. $\square$

II.2.3 Démonstration du corollaire 1

La première égalité. Tout γ de Ω laisse invariant chaque b_k , donc en particulier : $\Omega^k \subset \text{Stab}(b^k) \cap \text{Stab}(b^k(\cdot, T \cdot))$. Reste à montrer le sens $\supset$. Faisons-le par récurrence sur k ; supposons :

$$\Omega^k \supset \text{Stab}(b^k) \cap \text{Stab}(b^k(\cdot, T \cdot)).$$

Soit $\gamma^{k+1} \in \Omega^{k+1}$. Par le théorème 1 page 56, Ω^{k+1} agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}^{k+1} \times \prod_{l=k+1}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_l, \check{b}^l)$ où $\mathcal{D}^{k+1}$ est l'ensemble des décompositions adaptées de (E^{k+1}, b^{k+1}, T) . On choisit $D^{k+1} \in \mathcal{D}^{k+1}$; γ^{k+1} est caractérisé par $D'^{k+1} = \gamma^{k+1}(D^{k+1})$ et par $(h_l)_{l=k+1}^{n-1} \in \prod_{l=k+1}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_l, \check{b}^l)$ son action sur $\prod_{l=k+1}^{n-1} \check{E}_l$. Par la proposition 3 page 57, il existe D^k et D'^k dans $\mathcal{D}^k$ se projetant par $\bar{\pi}^{k+1}$ sur D^{k+1} et D'^{k+1} respectivement. Par le théorème 1, il existe un (et un seul) $\gamma^k \in \text{Stab}(b^k) \cap \text{Stab}(b^k(\cdot, T))$ envoyant D^k sur D'^k et dont l'action sur $\prod_{l=k}^{n-1} \check{E}_l$ est : $(\text{Id}_{\check{E}_k}, (h_l)_{l=k+1}^{n-1}) \in \prod_{l=k}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_l, \check{b}^l)$. Alors γ^k laisse stable $E_{n,k+1}^k = \pi^k(\ker T^{k+1})$ et par construction :

- l'action quotient de γ^k sur E^{k+1} envoie D^{k+1} sur D'^{k+1} ,
- son action sur $\prod_{l=k+1}^{n-1} \check{E}_l$ est : $(h_l)_{l=k+1}^{n-1}$,

ce qui caractérise γ^{k+1} , i.e. : $\gamma^{k+1} \circ \bar{\pi}^{k+1} = \bar{\pi}^{k+1} \circ \gamma^k$.

Or par hypothèse de récurrence, $\Omega^k \supset \text{Stab}(b^k) \cap \text{Stab}(b^k(\cdot, T))$ donc $\gamma^k \in \Omega^k$ i.e. il existe un γ de Ω t.q. : $\gamma^k \circ \pi^k = \pi^k \circ \gamma$. Avec ce γ : $\gamma^{k+1} \circ \pi^{k+1} = \gamma^{k+1} \circ \bar{\pi}^{k+1} \circ \pi^k = \bar{\pi}^{k+1} \circ \gamma^k \circ \pi^k = \bar{\pi}^{k+1} \circ \pi^k \circ \gamma = \pi^{k+1} \circ \gamma$ et donc $\gamma^{k+1} \in \Omega^{k+1}$. La récurrence se propage.

Enfin, l'hypothèse de récurrence est vraie par définition de Ω pour $k = 0$: $\Omega^0 = \Omega = \text{Stab}(b^0) \cap \text{Stab}(b^1)$.

La deuxième égalité. Encore une fois, il suffit de vérifier $\boxed{\supset}$. Montrons donc :

$$\begin{aligned} & \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \text{Stab}(b^k) \cap \text{Stab}(b^k(\cdot, T)) \\ & \supset \{ \gamma \in \text{Stab}(b^k) / \gamma(E_{n,k+1}^k) \subset E_{n,k+1}^k \text{ et l'action de } \gamma \text{ sur } E^{k+1} \simeq E^k / E_{n,k+1}^k \text{ est dans } \Omega^{k+1} \}. \end{aligned}$$

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $\gamma^k \in \text{Stab}(b^k)$, stabilisant $E_{n,k+1}^k$ et tel qu'il existe $\gamma^{k+1} \in \Omega^{k+1}$ vérifiant : $\bar{\pi}^{k+1} \circ \gamma^k = \gamma^{k+1} \circ \bar{\pi}^{k+1}$. Montrons que : $\gamma^k \in \text{Stab}(b^k(\cdot, T))$. Soit $(x, y) \in (E^k)^2$.

$$\begin{aligned} b^k(\gamma^k x, T(\gamma^k y)) &= b^{k+1}(\bar{\pi}^{k+1}(\gamma^k x), \bar{\pi}^{k+1}(\gamma^k y)) \\ &= b^{k+1}(\gamma^{k+1}(\bar{\pi}^{k+1}(x)), \gamma^{k+1}(\bar{\pi}^{k+1}(y))) \\ &= b^{k+1}(\bar{\pi}^{k+1}(x), \bar{\pi}^{k+1}(y)) \quad \text{car } \gamma^{k+1} \in \Omega^{k+1} \subset \text{Stab}(b^{k+1}). \end{aligned}$$

Donc : $b^k(\gamma^k x, T(\gamma^k y)) = b^k(x, T(y))$ et $\gamma^k \in \text{Stab}(b^k(\cdot, T))$. □

II.2.4 Démonstration de la proposition 2

2 $\Rightarrow$ **1** est immédiat. Si $u \in \text{End}(E)$ et si u commute avec T , u préserve les $\ker T^p$ et $\text{Im } T^q$, donc tous les $E_{p,q}$ et toutes leurs sommes, d'où **3** $\Rightarrow$ **2**. Montrons **1** $\Rightarrow$ **3**. Soit un sous-espace F ne pouvant s'écrire sous la forme : $+_{p,q \in \mathcal{E}} E_{p,q}$. On trouve alors un couple (p, q) tel que :

- $E_{p,q} \not\subset F$,
- $F \not\subset (E_{p-1,q} + E_{p,q-1})$.

(S'il n'existe aucun tel couple (p, q) , on s'aperçoit que $\text{vect}(\{E_{p,q}/E_{p,q} \subset F\}) = F$ donc F est de la forme $+_{p,q \in \mathcal{E}} E_{p,q}$.) Notons alors π la projection :

$$\pi : E_{p,q} \rightarrow E_{p,q} / (E_{p-1,q} + E_{p,q-1}),$$

$$E'_{p,q} = E_{p,q} / (E_{p-1,q} + E_{p,q-1}) \text{ et } G = F \cap E_{p,q}.$$

Par le deuxième point, $F \cap [E_{p,q} \setminus (E_{p-1,q} + E_{p,q-1})] \neq \emptyset$ donc $\pi(G) \neq \{0\}$. D'autre part $\pi(G) \neq E'_{p,q}$; en effet, si $E_{p,q} \setminus (E_{p-1,q} + E_{p,q-1}) \subset F$, $E_{p,q} = \text{vect}(E_{p,q} \setminus (E_{p-1,q} + E_{p,q-1})) \subset$

F ce qui contredit le premier point. Enfin, T^{n-p} établit une bijection de $\check{E}_{q+n-p-1} = E_{n,q+n-p}/(E_{n,q+n-p-1} + E_{n-1,q+n-p})$ sur $E'_{p,q}$. On notera H l'image réciproque de $\pi(G)$ dans $\check{E}_{q+n-p-1}$ par cette bijection.

Or, le théorème 1 page 56, dans le cas où T est $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -autoadjoint, ou le théorème 5 page 80 dans le cas où T est $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -antiautoadjoint, implique que $\Omega = \text{Stab}(\langle \cdot, \cdot \rangle) \cap \text{Stab}(\langle \cdot, T \cdot \rangle)$ agit transitivement sur chaque $\check{E}_k$, donc notamment sur $\check{E}_{q+n-p-1}$. On trouve donc un u dans Ω , i.e. stabilisant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et commutant avec T , tel que $u(H) \neq H$, car $\{0\} \subsetneq H \subsetneq E_{q+n-p-1}$ (on note ici encore u l'action de $u \in \text{End}(E)$ sur $\check{E}_{q+n-p-1}$). Alors $u(\pi(G)) = u(T^{n-p}H) = T^{n-p}(u(H)) \neq T^{n-p}(H) = \pi(G)$, donc nécessairement, $u(G) \neq G$ et donc : $u(F) \neq F$. F n'est pas intrinsèquement associé à $(\langle \cdot, \cdot \rangle, T)$. $\square$

Note : On peut aussi montrer directement, sans utiliser les théorèmes 1 et 5, l'implication **2** $\Rightarrow$ **3**. On reprend la démonstration précédente jusqu'à la construction de $\pi(G)$. On choisit alors $x \in \pi(G)$ et $y \notin \pi(G)$. On choisit $x' \in T^{-(n-p)}(\pi^{-1}\{x\})$ et $y' \in T^{-(n-p)}(\pi^{-1}\{y\})$, l'espace $A = \text{vect}((T^k x')_{k=0}^{q+n-p-1}, (T^k y')_{k=0}^{q+n-p-1})$ est alors stable par T , par construction. De plus, la famille $((T^k x')_{k=0}^{q+n-p-1}, (T^k y')_{k=0}^{q+n-p-1})$ peut être complétée en une base de Jordan ; on choisit une telle base et on notera B l'espace engendré par les vecteurs ainsi ajoutés. On définit alors $u \in \text{End}(E)$ par :

- $u|_B = \text{Id}_B$,
- $u|_A$ commute avec $T|_A$, $u(x') = y'$ et $u(y') = x'$.

Comme B est stable par T , u commute avec T . Mais par construction, $u(\pi(G)) \neq \pi(G)$ — on note encore u l'action quotient de u sur $E'_{p,q}$ —, donc $u(G) \neq G$ et enfin $u(F) \neq F$.

Une autre version de cette dernière note, pour un endomorphisme quelconque et sur un corps quelconque, non nécessairement parfait, peut être trouvée dans [Q94]. Nous remercions Pierre Marchand de nous l'avoir signalé, ainsi que pour une discussion fructueuse à ce sujet.

II.3 Cas a et b symétriques : l'action de Ω , les bonnes bases

Sur le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , a et b sont ici deux formes bilinéaires symétriques, a est non dégénérée. Toutes les notations sont identiques à celles de la section précédente. Ici, $\Omega = O(a) \cap O(b)$; les b_k , $\check{b}^k$ et $\check{b}_k$ introduites dans la section I.2 sont symétriques. L'indice de nilpotence de T est toujours noté n .

Théorème 2 *Si $\deg P = 1$, alors Ω agit simplement transitivement sur $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}_k, \check{b}_k)$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a, T) . Plus précisément, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, où :*

- $N = \{\gamma \in \Omega \mid \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k \text{ est triviale}\}$. C'est un sous-groupe distingué de Ω , nilpotent d'indice $\leq 2n-1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,
- $R = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}_k, \check{b}_k)$. En particulier, $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}_k, \check{b}_k)$. R est réductif. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et si on note $d_k = \dim \check{E}_k$, $\prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}_k, \check{b}_k) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} O_{d_k}(\mathbb{K})$.

Les invariants de la situation, c'est-à-dire du couple (a, b) , sont donc n l'indice de nilpotence de T , et les $(d_k)_{k=0}^{n-1}$; ce sont les invariants de Jordan de T .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, deux cas sont possibles :

• Si $\deg P = 1$, comme dans l'énoncé général ci-dessus, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$ où N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$ et R sur $\prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}_k, \check{b}^k)$. Cette fois : $O(\check{E}_k, \check{b}^k) \simeq O_{r_k, s_k}(\mathbb{R})$, où (r_k, s_k) est la signature de $\check{b}^k$ définie sur $\check{E}_k$. Les invariants de la situations sont donc n l'indice de nilpotence de T , et les $((r_k, s_k))_{k=0}^{n-1}$, vérifiant $r_k + s_k = d_k$ (les $\check{b}^k$ sont non-dégénérées sur les $\check{E}_k$).

• Si $\deg P = 2$, i.e. $P = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, Ω agit sur l'espace T -stable $E' = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$, où $E^{\mathbb{C}}$ est le complexifié de E et : $\Omega \simeq N \rtimes R$, où N agit simplement transitivement sur l'ensemble $\mathcal{D}'$ des décompositions de E' adaptées à $(a, T^{\mathbb{C}})$ et où R agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}'_k, \check{b}^k)$. En particulier, $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} O_{d_k}(\mathbb{C})$ où $d_k = \dim \check{E}'_k$. Les invariants de la situation sont encore n et les $(d_k)_{k=0}^{n-1}$, invariants de Jordan de T sur E' .

Remarque : Dans ce dernier cas mentionné, on peut aussi construire directement les espaces quotients réels $(\check{E}_k, \check{b}^k)$. En notant $E'' = \ker(S^{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$, on a : $(\check{E}_k, \check{b}^k) \simeq \mathfrak{R}((\check{E}'_k, \check{b}^k)^{\perp} \oplus (\check{E}''_k, \check{b}^k))$, et $\dim \check{E}_k = 2d_k$. La signature de $\check{b}^k$ est alors (d_k, d_k) .

D'autre part on vérifie que, si $D' = (D'_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ est une décomposition adaptée de $(E', a, T^{\mathbb{C}}_{|E'})$, alors $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ où $D_{p,q} = D'_{p,q} \oplus \overline{D'_{p,q}}$ est une décomposition de E , adaptée simultanément à (a, T) et à $(a(\cdot, S \cdot), T)$. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble, par conséquent non vide, de ces décompositions deux fois adaptées. Il permet une description de l'action de Ω sur l'espace réel E ; on vérifie en effet que :

- N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,
- R agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}_k, \check{b}^k) \cap O(\check{E}_k, \check{b}^k(\cdot, S \cdot))$.

Démonstration. Quel que soit le corps de base, si $\deg P = 1$, on applique directement le théorème 1 page 56. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, $\text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k) = O(\check{b}^k) \simeq O_{d_k}(\mathbb{K})$; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k) = O(\check{b}^k) \simeq O_{r_k, s_k}$ où (r_k, s_k) est la signature de $\check{b}^k$. Comme $\check{b}^k$ est non dégénérée, $r_k + s_k = d_k$. Ces signatures apparaissent donc comme des invariants supplémentaires. On vérifie bien qu'elles peuvent être quelconques : à partir du choix arbitraire des d_k , qui détermine le réseau de drapeaux $(E_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ à isomorphisme près, et du choix arbitraire d'entiers (r_k, s_k) vérifiant $r_k + s_k = d_k$, on construit une forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et un endomorphisme nilpotent $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -autoadjoint T , défini par la valeurs des formes $\langle \cdot, T^k \cdot \rangle$ sur les quotients $\check{E}_k$.

Si $\deg P = 2$, i.e. $P = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on considère Ω comme agissant sur $E^{\mathbb{C}}$ le complexifié de E . $E^{\mathbb{C}} = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})^{\perp} \oplus \ker(S^{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) = E' \oplus E''$, et Ω agit simultanément de la même façon sur chacun de ces sous-espaces : $z \in \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \Leftrightarrow \bar{z} \in \ker(S^{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})$ et : $\forall \gamma \in \Omega, \gamma \cdot \bar{z} = \bar{\gamma} \cdot z$. Notamment, chaque facteur est stable par T . La structure et l'action de Ω sont donc entièrement données par son action sur l'un des facteurs, par exemple $\ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) = E'$. On applique alors le théorème 1 à cet espace ; Ω est donc isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}'$, l'ensemble des décompositions de E' , adaptées à $(a, T^{\mathbb{C}}_{|E'})$ et R agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} O(\check{E}'_k, \check{b}^k)$, d'où le résultat. $\square$

En formalisant une construction effectuée dans la démonstration du théorème 2, on définit des bases «adaptées» au couple de formes bilinéaires (a, b) . Introduites autrement, ce sont les bases de Klingenberg.

avec $k + 1$ blocs I_{r_k, s_k} ou λI_{d_k} .

Les matrices de a et de B , cas réel et P de degré deux. Fournissons des bases adaptées à (a, b) dans le cas où P est de degré deux.

Définition 4 Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$, muni de deux formes bilinéaires symétriques non dégénérées a et b telles que $b = a(\cdot, S\cdot)$ où S est un automorphisme semi-simple de valeurs propres complexes non réelles λ et $\bar{\lambda}$, a -autoadjoint. E est alors nécessairement de dimension paire, on notera $k = 2d$. Une base β de E est dite adaptée à (a, S) si :

$$\beta = ((x_j)_{j=1}^d, (y_j)_{j=1}^d) \text{ avec } \forall j, x_j = \frac{1}{2}((1-i)z_j + \overline{(1-i)z_j}) \text{ et } y_j = \frac{1}{2}((1+i)z_j + \overline{(1+i)z_j})$$

où $(z_j)_{j=1}^d$ est une base a -orthonormée complexe de $E' = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$.

Dans une telle base : $\text{Mat}(a) = J_{d,d}^+ = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ I_d & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}(B) = \Lambda_d = \begin{pmatrix} \mu I_d & -\nu I_d \\ \nu I_d & \mu I_d \end{pmatrix} \in \text{M}_{2d}(\mathbb{R})$, où μ et ν sont les parties respectivement réelle et imaginaires de λ ; $\mu \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}^*$.

Définition 5 Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni de deux formes bilinéaires symétriques non dégénérées a et b telles que $b = a(\cdot, B\cdot)$ où B est un automorphisme a -autoadjoint de polynôme minimal $P = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, de partie nilpotente T d'indice n . Soit $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ une décomposition de E adaptée à (a, T) et à $(a(\cdot, S\cdot), T)$ et $(\beta^k)_{k=0}^{n-1}$ un n -uplet de bases des $\tilde{E}_k$, adaptées à $(\check{b}^k, S)$ au sens de la définition 4 page 65.

On leur associe canoniquement une base β de E , obtenue en relevant les β^k en bases des $D_{n,k+1}$ et en les propageant par T en bases de tous les $D_{p,q}$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces bases, dites adaptées au triplet (E, a, B) ou au triplet (E, a, b) .

Remarque : une telle base est aussi une base β telle que :

$$\beta = ((x_j)_{j=1}^d, (y_j)_{j=1}^d) \text{ avec } \forall j, x_j = \frac{1}{2}((1-i)z_j + \overline{(1-i)z_j}) \text{ et } y_j = \frac{1}{2}((1+i)z_j + \overline{(1+i)z_j})$$

où $(z_j)_{j=1}^d$ est une base de $E' = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$, adaptée à $(a, T|_{E'}^{\mathbb{C}})$.

Soit β une base adaptée à (a, B) ; on reprend les notations D_k et β_k introduites dans le cas $\deg P = 1$: $E = \bigoplus_k D_k$, $B(D_k) \subset D_k$ et β_k est une base de D_k . On note cette fois $d_k = \dim \tilde{E}'_k = \frac{1}{2} \dim \tilde{E}_k = \frac{1}{2} \dim D_{n,k+1}$. Dans β^{k+1} :

$$\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(a|_{D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & J_{d_k}^+ \\ & & \cdot \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ J_{d_k}^+ & & \end{pmatrix} \text{ et } \text{Mat}_{\beta_{k+1}}(B|_{D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} \Lambda_{d_k} & I_{2d_k} & & \\ & \Lambda_{d_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{2d_k} \\ & & & \Lambda_{d_k} \end{pmatrix},$$

$$\text{où : } \Lambda_{d_k} = \begin{pmatrix} \mu I_{d_k} & -\nu I_{d_k} \\ \nu I_{d_k} & \mu I_{d_k} \end{pmatrix} \in \text{M}_{2d_k}(\mathbb{R}).$$

On vérifie au passage que $\text{sign}(\check{b}^k) = (d_k, d_k)$.

II.4 Cas a et b antisymétriques : l'action de Ω , les bonnes bases

a et b sont deux formes bilinéaires antisymétriques, avec a non dégénérée ; on reprend les mêmes notations que dans la section II.1. Ici, $\Omega = Sp(a) \cap Sp(b)$; les b_k , b^k et $\check{b}^k$ introduites dans la section I.2 sont antisymétriques. On note toujours n l'indice de nilpotence de T .

Théorème 3 *Si $\deg P = 1$, Ω agit simplement transitivement sur $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} Sp(\check{E}_k, \check{b}_k)$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a, T) . Plus précisément, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, où :*

- $N = \{\gamma \in \Omega \mid \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k \text{ est triviale}\}$. C'est un sous-groupe distingué de Ω , nilpotent d'indice $\leq 2n-1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,
- $R = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} Sp(\check{E}_k, \check{b}_k) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} Sp_{d_k}(\mathbb{K})$ où les $d_k = \dim \check{E}_k$ sont des entiers pairs ; en effet les $\check{b}^k$ sont antisymétriques, non dégénérées sur les $\check{E}_k$. En particulier $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} Sp_{d_k}(\mathbb{K})$. R est semi-simple.

Les invariants de la situation, c'est-à-dire du couple (a, b) , sont donc n l'indice de nilpotence de T , et les $(d_k)_{k=0}^{n-1}$; ce sont en fait les invariants de Jordan de T .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, deux cas sont possibles :

- Si $\deg P = 1$, comme dans le cas général ci-dessus, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$ où N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$ et R sur $\prod_{k=0}^{n-1} Sp(\check{E}_k, \check{b}^k) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} Sp_{d_k}(\mathbb{K})$, les $d_k = \dim(\check{E}_k)$ étant encore pairs. Les invariants de la situation sont encore n l'indice de nilpotence de T , et les $(d_k)_{k=0}^{n-1}$, invariants de Jordan de T .

- Si $\deg P = 2$, i.e. $P = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, Ω agit sur l'espace T -stable $E' = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$, où $E^{\mathbb{C}}$ est le complexifié de E et : $\Omega \simeq N \rtimes R$, où N agit simplement transitivement sur l'ensemble $\mathcal{D}'$ des décompositions de E' adaptées à (a, T) et où R agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} Sp(\check{E}'_k, \check{b}^k)$. En particulier, $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} Sp_{d_k}(\mathbb{C})$ où $d_k = \dim \check{E}'_k$. Les invariants de la situation sont encore n et les $(d_k)_{k=0}^{n-1}$, invariants de Jordan de T sur E' .

Démonstration : on applique le théorème 1 page 56 de la même façon que pour la démonstration du théorème 2 page 62.

Remarque : Dans le dernier cas du théorème, et comme dans le cas symétrique, on vérifie que l'action de Ω sur l'espace réel E est la suivante :

- N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$, l'ensemble non vide des décompositions simultanément adaptées à (a, T) et à $(a(\cdot, S \cdot), T)$,
- R agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} Sp(\check{E}_k, \check{b}^k) \cap Sp(\check{E}_k, \check{b}^k(\cdot, S \cdot))$.

Les matrices de a et de B , cas où $P = X - \lambda$ est de degré un.

C'est notamment toujours le cas si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos.

Définition 6 *Soit E un espace vectoriel muni de deux formes bilinéaires antisymétriques a et b , telles que a est non dégénérée et que $b = a(\cdot, T \cdot)$ avec T nilpotent a -autoadjoint.*

A une décomposition $D = (D_{i,j})_{j \leq i \leq n}$ de E , adaptée à (a, T) , et à un n -uplet $(\beta^k)_{k=0}^{n-1}$ de bases symplectiques des $\check{E}_k$, on associe canoniquement une base β de E , de la même manière que dans le cas symétrique (cf. def.3 page 63). On note encore $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces bases, dites adaptées au triplet (E, a, T) ou au triplet (E, a, b) .

Les mêmes remarques peuvent être faites que dans le cas symétrique. $\mathcal{B}$ est l'ensemble des bases de Klingenbergs associées à (a, b) , Ω agit simplement transitivement sur lui.

En reprenant les mêmes objets D_k et β_k et en notant que $d_k = \dim \check{E}_k = \dim D_{k+1}$ est pair :

$$\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(a|_{D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & J_{d_k/2}^- \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ J_{d_k/2}^- & & \end{pmatrix}, \text{ où } J_d^- = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix} \in M_{2d}(\mathbb{K}) \text{ et}$$

$$\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(B|_{D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} \lambda I_{d_k} & I_{d_k} & & \\ & \lambda I_{d_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{d_k} \\ & & & \lambda I_{d_k} \end{pmatrix}.$$

Les matrices de a et de B , cas réel et $P = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$ de degré deux. On introduit les mêmes notions de bases adaptées qu'en fin de section II.3 page 62.

Définition 7 Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni de deux formes bilinéaires antisymétriques non dégénérées a et b telles que $b = a(\cdot, S \cdot)$ où S est un automorphisme semi-simple de valeurs propres imaginaires pures non nulles λ et $\bar{\lambda}$, a -autoadjoint. E est alors nécessairement de dimension multiple de quatre, on notera $k = 2d$, d pair. Une base β de E est dite adaptée à (a, S) si :

$$\beta = ((x_j)_{j=1}^{d/2}, (y_j)_{j=1}^{d/2}, (x'_j)_{j=1}^{d/2}, (y'_j)_{j=1}^{d/2}) \text{ avec}$$

$$\forall j, x_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_j + \bar{z}_j), y_j = \frac{1}{i\sqrt{2}}(-z_j + \bar{z}_j), x'_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(z'_j + \bar{z}'_j) \text{ et } y'_j = \frac{1}{i\sqrt{2}}(z'_j - \bar{z}'_j).$$

où $((z_j)_{j=1}^{d/2}, (z'_j)_{j=1}^{d/2})$ est une base a -symplectique complexe de $E' = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$.

Dans une telle base : $\text{Mat}(a) = J_{d,d}^- = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix}$ et : $\text{Mat}(B) = \begin{pmatrix} \Lambda_{d/2} & 0 \\ 0 & \bar{\Lambda}_{d/2} \end{pmatrix}$ où, si on note $\lambda = \mu + i\nu$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{R}^*$: $\Lambda_p = \begin{pmatrix} \mu I_p & -\nu I_p \\ \nu I_p & \mu I_p \end{pmatrix} \in M_{2p}(\mathbb{R})$ et $\bar{\Lambda}_p = \begin{pmatrix} \mu I_p & \nu I_p \\ -\nu I_p & \mu I_p \end{pmatrix} \in M_{2p}(\mathbb{R})$.

Définition 8 Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni de deux formes bilinéaires symétriques non dégénérées a et b telles que $b = a(\cdot, B \cdot)$ où B est un automorphisme a -autoadjoint de polynôme minimal $P = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, de partie nilpotente T d'indice n . Soit $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ une décomposition de E adaptée à (a, T) et à $(a(\cdot, S \cdot), T)$ et $(\beta^k)_{k=0}^{n-1}$ un n -uplet de bases des $\check{E}_k$, adaptées à $(\check{b}^k, S)$ au sens de la définition 4 page 65.

On leur associe canoniquement une base β de E , obtenue en relevant les β^k en bases des $D_{n,k+1}$ et en les propageant par T en bases de tous les $D_{p,q}$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces bases, dites adaptées au triplet (E, a, B) ou au triplet (E, a, b) .

Remarque : Une telle base est aussi une base

$$\beta = ((x_j)_{j=1}^N, (y_j)_{j=1}^N, (x'_j)_{j=1}^N, (y'_j)_{j=1}^N) \text{ avec}$$

$$\forall j, x_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_j + \overline{z_j}), y_j = \frac{1}{i\sqrt{2}}(-z_j + \overline{z_j}), x'_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(z'_j + \overline{z'_j}) \text{ et } y'_j = \frac{1}{i\sqrt{2}}(z'_j - \overline{z'_j}).$$

où $((z_j)_{j=1}^N, (z'_j)_{j=1}^N)$ est une base complexe de E' , adaptée à $(a, T|_{E'})$ au sens de la définition 6 page 66.

On considère $D' = (D'_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ une décomposition adaptée de $(E', a, T|_{E'})$, D la décomposition $(\Re(D'_{p,q} \oplus \overline{D'_{p,q}}))_{q \leq p \leq n}$ de E et β une base adaptée à (E, a, B) construite à partir de D . On reprend alors les objets D_k et β_k introduits en fin de section II.3 ; $d_k = \dim \check{E}'_k = \dim D'_{n,k+1}$ est pair. $E = \bigoplus D_k$; $\forall k, B(D_k) = D_k$. Alors, dans β_{k+1} :

$$\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(a|_{D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & J_{d_k}^- \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ J_{d_k}^- & & \end{pmatrix} \text{ et } \text{Mat}_{\beta_{k+1}}(B|_{D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} L_{d_k/2} & I_{2d_k} & & \\ & L_{d_k/2} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{2d_k} \\ & & & L_{d_k/2} \end{pmatrix}$$

avec $L_d = \begin{pmatrix} \Lambda_d & 0 \\ 0 & \overline{\Lambda_d} \end{pmatrix} \in M_{4d}(\mathbb{R})$.

La dimension de E est dans ce cas multiple de quatre.

II.5 Cas a et b sesquilineaires : l'action de Ω , les bonnes bases

a et b sont deux formes sesquilineaires, avec a non dégénérée ; on reprend les mêmes notations que dans la section II.1. Ici, $\Omega = U(a) \cap U(b)$; les b_k , b^k et $\check{b}^k$ introduites dans la section I.2 sont sesquilineaires. On suppose de plus $\mathbb{K}$ algébriquement clos. On note toujours n l'indice de nilpotence de T .

Théorème 4 *Si $\deg P = 1$, alors Ω agit simplement transitivement sur $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} U(\check{E}_k, \check{b}_k)$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a, T) . Plus précisément, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, où :*

- $N = \{\gamma \in \Omega \mid \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k \text{ est triviale}\}$. C'est un sous-groupe distingué de Ω , nilpotent d'indice $\leq 2n-1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,
- $R = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} U(\check{E}_k, \check{b}_k)$. En particulier $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} U(\check{E}_k, \check{b}_k)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors : $\forall k < n, U(\check{E}_k, \check{b}_k) \simeq U_{r_k, s_k}(\mathbb{K})$, où (r_k, s_k) est la signature de $\check{b}^k$ définie sur $\check{E}_k$. $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} U_{r_k, s_k}(\mathbb{K})$ est réductif. Les invariants de la situations sont donc n l'indice de nilpotence de T et les $((r_k, s_k))_{k=0}^{n-1}$, vérifiant $r_k + s_k = d_k$ (les $\check{b}^k$ sont non-dégénérées sur les $\check{E}_k$).

Démonstration : encore par application immédiate du théorème 1 page 56.

Les matrices de a et B quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Les bases adaptées se construisent de la même façon que dans le cas réel symétrique ; les matrices obtenues ont alors la même forme.

II.6 Une situation plus simple : les isomorphismes préservant une forme réflexive et un sous-espace

La lecture de cette partie n'est pas nécessaire à la compréhension du chapitre et ne traite pas directement de son sujet, *i.e.* de la situation créée, sur un espace vectoriel, par une paire de formes réflexives. Cependant celle-ci repose, par récurrence, sur un « empilement » de situations plus simples : des espaces V munis d'un sous-groupe de $GL(V)$ préservant une forme réflexive et un certain sous-espace. Cette partie est consacrée à ce type de groupes. Ceux-ci mettent en jeu, dans un cas plus simple, les mêmes raisonnements.

Seule toutefois la section II.7, constituant une sorte d'annexe de la partie II, utilisera effectivement le résultat des présentes sections II.6.2 et II.6.3.

II.6.1 La décomposition

Soit V un espace vectoriel muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ forme réflexive, non dégénérée, F un sous-espace vectoriel de V et Γ le sous-groupe de $\text{Stab}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ laissant F stable. On a alors la situation suivante :

$$\{0\} \hookrightarrow F \cap F^\perp \left\{ \begin{array}{c} \hookrightarrow F \\ \hookrightarrow F^\perp \end{array} \right\} \hookrightarrow F + F^\perp \hookrightarrow V,$$

qu'on peut aussi écrire :

$$\begin{array}{ccc} (F \cap F^\perp) & \subset & F^\perp \\ \cap & & \cap \\ F & \subset & V. \end{array}$$

Définition 9 On appelle *décomposition de V adaptée à $(\langle \cdot, \cdot \rangle, F)$* une décomposition de V en somme directe de la forme :

$$V = \left(\underbrace{(F \cap F^\perp)}_{\text{totalemt isotrope}} \oplus \underbrace{H}_{\text{totalemt isotrope}} \right) \overset{\perp}{\oplus} G \overset{\perp}{\oplus} G',$$

telle que : $\left\{ \begin{array}{l} G \text{ est un relevé de } F/(F \cap F^\perp) \text{ dans } F, \text{ i.e. : } (F \cap F^\perp) \oplus G = F, \\ G' \text{ est un relevé de } F^\perp/(F \cap F^\perp) \text{ dans } F^\perp, \text{ i.e. : } (F \cap F^\perp) \oplus G' = F^\perp. \end{array} \right.$

Ainsi, sur un diagramme calqué sur celui des inclusions, au-dessus de la définition :

$$\left. \begin{array}{ccc} F \cap F^\perp & \oplus & G' \\ \oplus & & \oplus \\ G & \oplus & H \end{array} \right\} = V.$$

Remarque : Choisir une telle décomposition revient en fait à choisir H : les décompositions adaptées à $(\langle \cdot, \cdot \rangle, F)$ sont en bijection naturelle avec les supplémentaires H totalement isotropes de $F + F^\perp$ dans V . En effet :

- Si $((F \cap F^\perp), H, G, G')$ est $(\langle \cdot, \cdot \rangle, F)$ -adaptée alors nécessairement : $G = H^\perp \cap F$ et $G' = H^\perp \cap F^\perp$,
- Si H est un supplémentaire totalement isotrope de $F + F^\perp$ dans V , on pose $G = H^\perp \cap F$ et $G' = H^\perp \cap F^\perp$; $((F \cap F^\perp), H, G, G')$ est alors une décomposition $(\langle \cdot, \cdot \rangle, F)$ -adaptée.

II.6.2 L'action de Γ

On notera ici $F_1 = F/(F \cap F^\perp)$. Le noyau de $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ est $F \cap F^\perp$, donc cette forme passe au quotient sur F_1 en une forme non dégénérée, notée $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. De la même façon on note $F_2 = F^\perp/(F^\perp \cap F)$; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ passe au quotient sur F_2 en $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, non dégénérée. On note enfin $F_0 = F \cap F^\perp$.

Remarque : A la donnée :

- d'une base quelconque β_0 de F_0 ,
- d'une base β_1 de F_1 adaptée à $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, i.e. pseudo-orthonormée, symplectique ou unitaire, selon la nature de $\langle \cdot, \cdot \rangle$,
- d'une base β_2 de F_2 adaptée à $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$,
- d'une décomposition adaptée (F_0, H, G, G') de V ,

on associe naturellement une base β de V : $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle_G)$ est canoniquement isomorphe à $(F_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$, on y transporte β_1 ; de même avec β_2 sur G' . Par $\langle \cdot, \cdot \rangle$, H s'identifie au dual de F_0 , on le munit de β_0^* . la famille $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_0^*)$ est alors une base de V .

Si par exemple $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, sa matrice dans une base de ce type est :

$$\text{Mat}_\beta(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \begin{pmatrix} \overbrace{0}^{F_0} & \overbrace{0}^G & \overbrace{0}^{G'} & \overbrace{I_d}^H \\ 0 & I_{r_1, s_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_2, s_2} & 0 \\ I_d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $I_{r,s} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}$, où (r_i, s_i) est la signature de $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ et où $d = \dim F_0 = \dim H$.

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est antisymétrique, sa matrice est alors :

$$\text{Mat}_\beta(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \begin{pmatrix} \overbrace{0}^{F_0} & \overbrace{0}^G & \overbrace{0}^{G'} & \overbrace{I_d}^H \\ 0 & J_{d_1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{d_2/2} & 0 \\ -I_d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $J_k = \begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$, où d_i est la dimension, nécessairement paire, de F_i pour $i \in \{1, 2\}$ et où $d = \dim F_0 = \dim H$.

Proposition 4 Si $\Gamma = \text{Stab}(F) \cap \text{Stab}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, alors $\Gamma \simeq N \rtimes R$ où :

- N est le sous groupe de Γ qui agit trivialement sur $F_0 = F \cap F^\perp$, $F_1 = F/(F \cap F^\perp)$ et $F_2 = F^\perp/(F^\perp \cap F)$. N agit simplement transitivement sur les supplémentaires H totalement isotropes de $F \cap F^\perp$, donc sur les décompositions adaptées à $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$; N est nilpotent et distingué dans Γ ,
- $R = \Gamma/N$, R agit simplement transitivement sur $GL(F_0) \times \text{Stab}(F_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \times \text{Stab}(F_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ — donc $R \simeq GL(F_0) \times \text{Stab}(F_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \times \text{Stab}(F_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$. R est réductif.

Démonstration : Par définition de Γ , tout élément de Γ envoie une décomposition adaptée sur une décomposition adaptée, agit sur F_0 et sur les quotients F_1 et F_2 , en préservant $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ sur ces deux derniers. Si on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des décompositions adaptées de V , Γ agit donc sur $\mathcal{D} \times GL(F_0) \times \text{Stab}(F_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \times \text{Stab}(F_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$.

Soient D et D' deux décompositions adaptées de V . On choisit β_0 une base de F_0 , et β_i une base de F_i adaptée à $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ pour $i \in \{1, 2\}$; on note β la base de V associée à $(\beta_i)_{i=1}^3$ et à D et β' la base associée à $(\beta_i)_{i=1}^3$ et à D' , au sens de la remarque de la page 70. Si $\gamma \in GL(V)$ est défini par $\gamma(\beta) = \beta'$, γ préserve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et F donc est dans Γ . De plus, γ agit trivialement sur les F_i , $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, donc : $\gamma \in N$. Si d'autre part un élément γ de N fixe une décomposition adaptée quelconque D'' , il fixe la base β'' associée à $(\beta_i)_{i=1}^3$ et à D'' donc est trivial. N agit donc simplement transitivement sur $\mathcal{D}$. Il découle de la définition de N que celui-ci est distingué.

Examinons l'action de R . On reprend les mêmes bases β_i . Soient $h_0 \in GL(F_0)$ et $h_i \in \text{Stab}(F_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$; on note $\beta'_i = h_i(\beta_i)$ pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. On choisit D une décomposition adaptée de V , on note β et β' les bases de V associées à D et aux β_i ou β'_i respectivement. Si $\gamma \in GL(V)$ est défini par $\gamma(\beta) = \beta'$, il agit sur chaque F_i comme h_i . Soit $\tilde{\gamma} \in \Gamma$: si $\tilde{\gamma}$ agit sur les F_i comme γ , $\tilde{\gamma} \cdot \gamma^{-1}$ agit trivialement sur eux et donc est dans N . Ainsi, Γ/N agit simplement transitivement (par translation à gauche) sur $GL(F_0) \times \text{Stab}(F_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \times \text{Stab}(F_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$.

N est nilpotent: si $\nu \in \mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N , on constate que ses itérés vérifient : $V \xrightarrow{\nu} (F + F^\perp) \xrightarrow{\nu} (F \cap F^\perp) \xrightarrow{\nu} \{0\}$.

Enfin, Γ est produit semi-direct: si D est une décomposition adaptée de V , on constate que $R_D = \{\gamma \in \Gamma / \gamma(D) = D\}$ est un sous-groupe de Γ , isomorphe à R . Alors, comme N est distingué: $\Gamma = N \rtimes R_D \simeq N \rtimes R$. $\square$

II.6.3 L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de Γ — cas où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique

On retrouve les résultats qui précèdent en calculant l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de Γ . A titre d'exemple, on traite ici le cas symétrique. Dans une base β comme construite dans la remarque de la page 70 :

$$\gamma \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \text{Mat}_\beta(\gamma) = \begin{pmatrix} {}^tY & \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 & H \\ 0 & H_1 & 0 & X_1 \\ 0 & 0 & H_2 & X_2 \\ 0 & 0 & 0 & Y \end{pmatrix}$$

où : $- Y, X_1$ et X_2 sont des matrices quelconques,

$- \tilde{X}_1 = {}^tX_1 I_{r_1, s_1}$ et $\tilde{X}_2 = {}^tX_2 I_{r_2, s_2}$,

$- H \in \mathfrak{so}(d)$, $H_1 \in \mathfrak{so}(r_1, s_1)$ et $H_2 \in \mathfrak{so}(r_2, s_2)$.

[**Note annexe :** On aura besoin en partie II.7 de la matrice d'un tel élément de $\mathfrak{g}$, exprimée

dans une base β' légèrement différente, telle que :

$$\text{Mat}_{\beta'}(< \cdot, \cdot >) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I_{r,s} \\ 0 & I_{r_1,s_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r_2,s_2} & 0 \\ I_{r,s} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } r \text{ et } s \text{ des entiers t.q. : } r + s = d.$$

Dans ce cas, la matrice de γ a la même forme, mais avec :

- $H \in \mathfrak{so}(r,s)$,
- tY remplacé par $\tilde{Y} = I_{r,s} {}^tY I_{r,s}$,
- $\tilde{X}_1 = I_{r,s} {}^tX_1 I_{r_1,s_1}$ et $\tilde{X}_2 = I_{r,s} {}^tX_2 I_{r_2,s_2}$.

Reprenons avec la base β : $\gamma \in N \Leftrightarrow Y = 0, H_1 = 0, H_2 = 0$, d'où, si $\mathfrak{n}$ est l'algèbre de Lie de N :

$$\gamma \in \mathfrak{n} \Leftrightarrow \text{Mat}_{\beta}(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 & H \\ 0 & 0 & 0 & X_1 \\ 0 & 0 & 0 & X_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $X_1, X_2, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ et H sont comme plus haut. N est donc un groupe de Lie nilpotent d'indice 2, plus précisément : N est extension centrale de B par A où :

- $A = \{\gamma \in \Gamma / \gamma|_{F+F^\perp} = \text{Id}_{F+F^\perp}\}$, groupe abélien central dans N ,
- $B = N/A$, groupe également abélien.

$$\{0\} \rightarrow A \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow \{0\}.$$

On vérifie également que N est distingué dans Γ .

II.7 Annexe : structure de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(a) \cap \mathfrak{so}(b)$

A titre d'annexe, cette section utilise le corollaire 1 page 57 pour dégager, par récurrence, des éléments de la structure de l'algèbre de Lie ω de Ω . Elle ne traite, à titre d'exemple, que le cas a et b symétriques, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\deg P = 1$: dans ce cas donc, ω s'écrit $\mathfrak{so}(a) \cap \mathfrak{so}(b)$. Les autres cas se traitent sur le même modèle et sont peu différents dans le principe. L'exemple choisi ici comporte en fait une complication supplémentaire, provenant des groupes orthogonaux secondaires $O(r_k, s_k)$, de signature quelconque : ces signatures compliquent l'algèbre de Lie ω . On reprend la définition et les notations de la section II.1 pages 56 et suivante.

II.7.1 Quelques cas particuliers

Pour comprendre la suite récurrente des Ω^k , arrêtons-nous déjà sur les trois rangs les plus simples : $k = n - 1$, $k = n - 2$ et $k = n - 3$ (si $k = n$, $\Omega^n = GL(\{0\} = \{\text{Id}\})$). Cette section n'a qu'un but illustratif. Le résultat général est énoncé dans la section suivante.

Notation : On rappelle que pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$: $d_k = \dim \check{E}_k$ et (r_k, s_k) est la signature de $\check{b}^k$ sur $\check{E}_k$; $r_k + s_k = d_k$.

- $\boxed{\Omega^{n-1}}$. Soit β une base adaptée de $E^{n-1} = E / \ker T^{n-1}$. β est simplement une base $\check{b}^{n-1}$ -pseudo-orthonormée de $\check{E}_{n-1} = E^{n-1}$. Dans β :

$$\text{Mat}_{\beta}(b^{n-1}) = I_{r_{n-1}, s_{n-1}}$$

et d'autre part :

$$\omega^{n-1} = \mathfrak{so}(b^{n-1}) \simeq \mathfrak{so}(r_{n-1}, s_{n-1}).$$

• $\boxed{\Omega^{n-2}}$. Soit β une base adaptée de $E^{n-2} = E / \ker T^{n-2}$. On note $D = (D_{n-1, n-1}, D_{n, n-1}, D_{n, n})$ la décomposition adaptée associée à β . Le calcul montre que :

$$\text{Mat}_{\beta}(b^{n-2}) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{n-1, n-1} \\ 0 & I_{n-2, n-2} & 0 \\ I_{n-1, n-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{E_{n, n-1}^{n-2}} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{D_{n-1, n-1}} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{D_{n, n-1}} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{D_{n, n}} \end{pmatrix},$$

et que :

$$h \in \omega^{n-2} \Leftrightarrow \text{Mat}_{\beta}(h) = \begin{pmatrix} H_{n-1} & \tilde{X} & H' \\ 0 & H_{n-2} & X \\ 0 & 0 & H_{n-1} \end{pmatrix},$$

avec : • H_{n-1} et H' dans $\mathfrak{so}(r_{n-1}, s_{n-1}) \simeq \mathfrak{so}(\check{E}_{n-1}, \check{b}^{n-1})$,
 • H_{n-2} dans $\mathfrak{so}(r_{n-2}, s_{n-2}) \simeq \mathfrak{so}(\check{E}_{n-2}, \check{b}^{n-2})$,
 • X une matrice quelconque de $M_{d_{n-2}, d_{n-1}}(\mathbb{R})$ et $\tilde{X} = I_{r_{n-1}, s_{n-1}} {}^t X I_{r_{n-2}, s_{n-2}}$.

On vérifie alors la deuxième égalité du corollaire 1 page 57 au rang $k = n - 2$. En effet, d'après elle :

$$h \in \omega^{n-2} \text{ ssi : } \begin{cases} \bullet h \in \mathfrak{so}(E^{n-2}, b^{n-2}) \text{ et } h(E_{n, n-1}^{n-2}) \subset E_{n, n-1}^{n-2} \\ \bullet \text{l'action de } h \text{ sur } E^{n-1} \simeq E^{n-2} / E_{n, n-1}^{n-2} \text{ est dans } \omega^{n-1}. \end{cases}$$

$$i.e. \text{ ssi : } \begin{cases} \bullet \text{Mat}_{\beta}(h) = \begin{pmatrix} \tilde{Y} & \tilde{X} & H' \\ 0 & H_{n-2} & X \\ 0 & 0 & Y \end{pmatrix} \text{ avec } H' \in \mathfrak{so}(r_{n-1}, s_{n-1}), \\ H_{n-2} \in \mathfrak{so}(r_{n-2}, s_{n-2}), Y \in M_{d_{n-1}}(\mathbb{R}), X \in M_{d_{n-2}, d_{n-1}}(\mathbb{R}), \\ \tilde{Y} = I_{r_{n-1}, s_{n-1}} {}^t Y I_{r_{n-1}, s_{n-1}} \text{ et } \tilde{X} = I_{r_{n-1}, s_{n-1}} {}^t X I_{r_{n-2}, s_{n-2}}. \\ \text{(voir section II.6.3, la note de la page 71.)} \\ \bullet Y \in \omega^{n-1} \simeq \mathfrak{so}(r_{n-1}, s_{n-1}) \simeq \mathfrak{so}(\check{E}_{n-1}, \check{b}^{n-1}). \end{cases}$$

c'est-à-dire $\text{ssi } \text{Mat}_{\beta}(h)$ est de la forme annoncée.

Enfin, comme annoncé dans le théorème 2 page 62, on vérifie également que ω^{n-2} est isomorphe à un produit semi-direct $\mathfrak{r} \ltimes \mathfrak{n}$ où $\mathfrak{n}$ est l'algèbre de Lie de $N = \{\gamma \in \Omega^{n-2} / \gamma \text{ agit trivialement sur } \check{E}_{n-1} \text{ et } \check{E}_{n-2}\}$ et où $\mathfrak{r} = \omega^{n-2} / \mathfrak{n}$:

$$\gamma \in \mathfrak{n} \Leftrightarrow \text{Mat}_{\beta}(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{X} & H' \\ 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } X, \tilde{X} \text{ et } H' \text{ comme plus haut.}$$

On note enfin que N est extension centrale de B par A , avec $A = \{\gamma \in \Omega^{n-2} / \gamma|_{E_{n, n-1}^{n-2}} =$

$\text{Id}_{E_{n,n-1}^{n-2}} \}$ et $B = N/A$. A et B sont abéliens, N est nilpotent d'ordre 2 si $d_{n-1} \neq 0$, abélien sinon ($N = A$ dans ce cas). On remarque également que R n'est pas facteur direct de Ω^{n-2} .

• $\boxed{\Omega^{n-3}}$. Soit β une base adaptée de $E^{n-3} = E/\ker T^{n-3}$. On note $D = (D_{p,q})_{n-2 \leq q \leq p \leq n}$ la décomposition adaptée associée à β . Rappelons les deux diagrammes :

$$\left. \begin{array}{l} E_{n-2,n-2}^{n-3} \\ \cap \\ E_{n-1,n-2}^{n-3} \subset E_{n-1,n-1}^{n-3} \\ \cap \quad \cap \\ E_{n,n-2}^{n-3} \subset E_{n,n-1}^{n-3} \subset E_{n,n}^{n-3} = E^{n-3}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} D_{n-2,n-2} \\ \oplus \\ D_{n-1,n-2} \oplus D_{n-1,n-1} \\ \oplus \quad \oplus \\ D_{n,n-2} \oplus D_{n,n-1} \oplus D_{n,n} \end{array} \quad \text{«relevé» en : } \left. \right\} = E^{n-3}.$$

Le calcul montre que :

$$\text{Mat}_{\beta}(b^{n-2}) = \left(\begin{array}{cccccc} \overbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array}}^{E_{n,n-2}^{n-3}} & 0 & I_{n-2,n-2} & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-1,n-1} \\ 0 & 0 & I_{n-3,n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-1,n-1} & 0 & 0 \\ I_{n-2,n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underbrace{0}_{D_{n-1,n-2}} & \underbrace{I_{n-1,n-1}}_{D_{n-2,n-2}} & \underbrace{0}_{D_{n,n-2}} & \underbrace{0}_{D_{n-1,n-1}} & \underbrace{0}_{D_{n,n-1}} & \underbrace{0}_{D_{n,n}} \end{array} \right),$$

et que :

$$h \in \omega^{n-3} \Leftrightarrow \text{Mat}_{\beta}(h) = \left(\begin{array}{cccccc} H_{n-2} & 0 & \tilde{X}'' & X & & H'' \\ \tilde{X} & H_{n-1} & \tilde{X}' & H' & & \\ 0 & 0 & H_{n-3} & 0 & X'' & X' \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{H_{n-1} \quad \tilde{X} \quad H'} & & \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0 \quad H_{n-2} \quad X} & & \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0 \quad 0 \quad H_{n-1}} & & \end{array} \right),$$

avec :

- H_{n-1} et H' dans $\mathfrak{so}(r_{n-1}, s_{n-1}) \simeq \mathfrak{so}(\check{E}_{n-1}, \check{b}^{n-1})$,
- H_{n-2} dans $\mathfrak{so}(r_{n-2}, s_{n-2}) \simeq \mathfrak{so}(\check{E}_{n-2}, \check{b}^{n-2})$ et H_{n-3} dans $\mathfrak{so}(r_{n-3}, s_{n-3}) \simeq \mathfrak{so}(\check{E}_{n-3}, \check{b}^{n-3})$,
- X une matrice quelconque de $M_{d_{n-2}, d_{n-1}}(\mathbb{R})$, X' de $M_{d_{n-3}, d_{n-1}}(\mathbb{R})$ et X'' de $M_{d_{n-3}, d_{n-2}}(\mathbb{R})$,
- $\tilde{X} = I_{r_{n-1}, s_{n-1}} {}^t X I_{r_{n-2}, s_{n-2}}$, $\tilde{X}' = I_{r_{n-1}, s_{n-1}} {}^t X I_{r_{n-3}, s_{n-3}}$ et $\tilde{X}'' = I_{r_{n-2}, s_{n-2}} {}^t X I_{r_{n-3}, s_{n-3}}$.
- $H'' \in M_{d_1+d_2}(\mathbb{R})$, vérifiant $H'' = -\tilde{I} {}^t H'' \tilde{I}$ où $\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_{r_{n-2}, s_{n-2}} & 0 \\ 0 & I_{r_{n-1}, s_{n-1}} \end{pmatrix}$ (H'' est « $\tilde{I}$ -antisymétrique»).

On reconnaît dans le bloc encadré la matrice générique d'un élément de ω^{n-2} . C'est en effet la deuxième égalité du corollaire 1 page 57 au rang $k = n - 3$, qui est vérifiée :

$$h \in \omega^{n-3} \text{ ssi : } \left\{ \begin{array}{l} \bullet h \in \mathfrak{so}(E^{n-3}, b^{n-3}) \text{ et } h(E_{n,n-1}^{n-3}) \subset E_{n,n-2}^{n-3} \\ \bullet \text{l'action de } h \text{ sur } E^{n-2} \simeq E^{n-3}/E_{n,n-2}^{n-3} \text{ est dans } \omega^{n-2}. \end{array} \right.$$

$$i.e. \text{ ssi: } \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Mat}_{\beta}(h) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \tilde{Y} & \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 & H'' \\ \hline 0 & H_{n-3} & 0 & X_1 \\ \hline 0 & 0 & H_{n-1} & X_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & Y \end{array} \right) \text{ avec } H_{n-i} \in \mathfrak{so}(r_{n-i}, s_{n-i}), \\ \tilde{X}_1 = \tilde{I}^t X_1 I_{r_{n-3}, s_{n-3}}, \quad \tilde{X}_2 = \tilde{I}^t X_2 I_{r_{n-1}, s_{n-1}}, \quad \tilde{Y} = \tilde{I}^t Y \tilde{I} \\ \text{et } H'' \text{ comme plus haut. (voir section II.6.3, note page 71.)} \\ \bullet \text{ le bloc inférieur droit } \left(\begin{array}{cc} H_{n-1} & X_2 \\ 0 & Y \end{array} \right) \text{ est la matrice d'un élément de } \omega^{n-2} \\ \text{(voir la forme d'une telle matrice au point précédent).} \end{array} \right.$$

i.e. $\text{ssi Mat}_{\beta}(h)$ est de la forme annoncée.

Enfin, on vérifie également que ω^{n-3} est isomorphe à un produit semi-direct $\mathfrak{t} \ltimes \mathfrak{n}$ où $\mathfrak{n}$ est l'algèbre de Lie de $N = \{\gamma \in \Omega^{n-3} / \gamma \text{ agit trivialement sur } \check{E}_{n-1}, \check{E}_{n-2} \text{ et } \check{E}_{n-3}\}$. Le produit n'est pas direct. D'autre part, on le voit à la forme des matrices, le facteur nilpotent de ω^k devient vite compliqué quand k décroît.

II.7.2 Le cas général : une formule de récurrence

Soit D une décomposition adaptée de (E, a, b) et pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $(\check{e}_i^j)_{i=1}^{d_j}$ une base de $\check{E}_j$. On associe canoniquement à ces objets une base adaptée de E : $\beta = (((T^l(e_i^j))_{i=1}^{d_j})_{l=j}^0)_{j=0}^{n-1}$, où chaque $(e_i^j)_{i=1}^{d_j}$ est le relevé naturel de $(\check{e}_i^j)_{i=1}^{d_j}$ en base de $D_{n,j+1}$. Notons $e_i^{p,q} = T^{n-p} e_i^{n+q-p}$ et également $d_{p,q} = d_{n-p+q-1} = \dim \check{E}_{n-p+q-1} = \dim D_{p,q}$. pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on tire de β une base adaptée β^k de E^k :

$$\beta^k = (((\pi^k(e_i^{p,q})_{i=1}^{d_{p,q}})^q)_{p=n-1}^{n-1}, ((e_i^{n,q})_{i=1}^{d_{n,q}})^n_{q=k+1}), \text{ dans cet ordre.}$$

Ainsi, β et β^0 , par exemple, sont des bases adaptées de (E, a, b) composées des mêmes vecteurs, mais ordonnées différemment.

Sur un diagramme des $\pi^k(D_{p,q}) = D_{p,q}^k$ comme posé en section I.2, cela revient à ordonner les $D_{p,q}^k$ de la façon suivante:

$$E_{n-1,n-1}^k \left\{ \begin{array}{c} \boxed{(1a)} \quad \boxed{(1b)} \\ \boxed{(2a)} \quad \boxed{(2b)} \end{array} \right.$$

$E_{n,k+1}^k$

- déjà ceux de $E_{n-1,n-1}^k$, notés **(1)**, de bas en haut et de gauche à droite,
- puis ceux de $\oplus_{q=k+1}^n D_{n,q}^k$, notés **(2)**, de gauche à droite.

Cet ordre ne se projette de β^k sur β^{k+1} . On distingue ici **(1a)** et **(1b)** d'une part, **(2a)** et **(2b)** d'autre part, pour les besoins de la suite. **(1a)** désigne les vecteurs de base de $E_{n-1,k+1}^k$, **(1b)** ceux qui les complètent dans $E_{n-1,n-1}^k$, **(2a)** ceux de $D_{n,k+1}^k$ et **(2b)** ceux

de $\oplus_{q=k+2}^n D_{n,q}^k$. Alors, en gardant ces notations, β^k étant une base adaptée ainsi ordonnée et β^{k+1} étant la base — adaptée — de E^{k+1} obtenue par projection de β^k :

Proposition 5 $h \in \omega^k \Leftrightarrow \text{Mat}_{\beta^k}(h) = \begin{pmatrix} \overbrace{W_k}^{(1)} & \overbrace{Z_k}^{(2)} \\ 0 & Y_k \end{pmatrix}$ où :

$$Y_k = \begin{pmatrix} \overbrace{H_k}^{(2a)} & \overbrace{X_k}^{(2b)} \\ 0 & Y_{k+1} \end{pmatrix}, \quad Z_k = \begin{pmatrix} \overbrace{X_k^*}^{(2a)} & \overbrace{H'_k}^{(2b)} \\ 0 & Z_{k+1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(1a)} \\ \text{(1b)} \end{matrix}, \quad W_k = \begin{pmatrix} \overbrace{Y_{k+1}^*}^{(1a)} & \overbrace{Z_{k+1}^*}^{(1b)} \\ 0 & W_{k+1} \end{pmatrix},$$

avec :

- Y_{k+1} , W_{k+1} et Z_{k+1} matrices telles que : $\begin{pmatrix} W_{k+1} & Z_{k+1} \\ 0 & Y_{k+1} \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\beta^{k+1}}(h^{k+1})$ avec h^{k+1} un élément de ω^{k+1} ,

- H_k une matrice quelconque de $\mathfrak{so}_{r_{n-k}, s_{n-k}}(\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(\check{E}_k, \check{b}_k)$,
- X_k une matrice quelconque de $M_{d_k, \tilde{d}_k}(\mathbb{R})$ et $X_k^* = \tilde{I}_k {}^t X_k I_{r_{n-k}, s_{n-k}}$,
- H'_k une matrice de $M_{\tilde{d}_k, \tilde{d}_k}(\mathbb{R})$ t.q. : $H_k = \tilde{I}_k {}^t H'_k \tilde{I}_k$,
- $Y_{k+1}^* = \tilde{I}_k {}^t Y_{k+1} \tilde{I}_k$,
- $Z_{k+1}^* = \tilde{I}_k {}^t Z_{k+1} \tilde{I}_k$,

où $\tilde{I}_k$ et $\tilde{\tilde{I}}_k$ sont des matrices diagonales par blocs : $\tilde{I}_k = \text{Diag}(I_{r_{k+1}, s_{k+1}}, I_{r_{k+2}, s_{k+2}}, \dots, I_{r_{n-1}, s_{n-1}})$ et $\tilde{\tilde{I}}_k = \text{Diag}(\tilde{I}_{k+1}, \tilde{I}_{k+2}, \dots, \tilde{I}_{n-2})$ et où $\tilde{d}_k = d_{k+1} + d_{k+2} + \dots + d_{n-1}$.

Il est à noter que n'importe quel ordre sur les vecteurs de β^k , respectant l'inclusion des $E_{p,q}^k$ — le vecteur $v \in E_{p',q'}^k$ classé avant $w \in E_{p,q}^k$ si $E_{p',q'}^k \subset E_{p,q}^k$ —, donne à la matrice de $h \in \omega^k$ une forme triangulaire supérieure par blocs correspondant aux $D_{p,q}^k$: les $E_{p,q}^k$ sont en effet stables pas ω^k . L'ordre choisi ici ne respecte *pas* cette inclusion, et la matrice obtenue de $h \in \omega^k$ n'est *pas* triangulaire supérieure par blocs correspondant aux $D_{p,q}^k$. Par exemple, Y_k^* est triangulaire inférieure par blocs. Cependant, c'est seulement avec un tel ordre sur les vecteurs de β^k que la matrice générique de $h \in \omega^k$ devient lisible.

Démonstration : C'est lourd mais pas profond. Montrons la proposition par récurrence descendante sur k . Au rang $k = n$, elle est vide, donc vraie. Supposons le résultat vrai au rang $k + 1$. Soit β^k une base adaptée « bien ordonnée » de $(E^k, b^k, b^k(\cdot, T \cdot))$ et β^{k+1} la base adaptée « bien ordonnée » de $(E^{k+1}, b^{k+1}, b^{k+1}(\cdot, T \cdot))$ déduite de β^k par projection. Alors :

$$h \in \omega^k \Leftrightarrow \begin{cases} h \in \mathfrak{so}(b^k) \text{ et } h(E_{n,k+1}^k) \subset E_{n,k+1}^k \\ \text{si } \check{h} \in \mathfrak{gl}(E^{k+1}) \text{ est l'action de } h \text{ sur } E^{k+1}, \check{h} \in \omega^{k+1} \end{cases} \quad \text{d'après le corollaire 1.}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Mat}_{\beta^k}(h) = \begin{pmatrix} \overbrace{Y^*}^{(1a)} & \overbrace{X^*}^{(1b)} & \overbrace{X'^*}^{(2a)} & \overbrace{G''}^{(2b)} \\ 0 & G & 0 & X \\ 0 & 0 & G' & X' \\ 0 & 0 & 0 & Y \end{pmatrix} \text{ où } G = \tilde{I}_k {}^t G \tilde{I}_k, \quad G' = I_{r_k, s_k} {}^t G I_{r_k, s_k}, \\ G'' = \tilde{I}_k {}^t G'' \tilde{I}_k, \quad Y^* = \tilde{I}_k {}^t Y^* \tilde{I}_k, \quad X^* = \tilde{I}_k {}^t X \tilde{I}_k \quad \text{et} \quad X'^* = \tilde{I}_k {}^t X' I_{r_k, s_k}. \\ \text{(cf. note annexe de la section II.6.3 page 71.)} \\ \bullet \begin{pmatrix} G & X \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\beta^{k+1}}(\check{h}) = \begin{pmatrix} W_{k+1} & Z_{k+1} \\ 0 & Y_{k+1} \end{pmatrix}, \text{ où } W_{k+1}, Z_{k+1} \text{ et } Y_{k+1} \\ \text{vérifient les propriétés de la proposition. (C'est l'hypothèse de récurrence.)} \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow \text{Mat}_{\beta^k}(h)$ est comme annoncé dans la proposition.

Le résultat est vrai au rang k . La récurrence est propagée. $\square$

On peut alors dégager, par récurrence, la structure des ω^k . Introduisons à cette fin, pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, trois groupes de Lie G^k , A^k et B^k :

- $G^k = \{\gamma \in \Omega^k / \gamma \text{ agit trivialement sur } E_{n-1, n-1}^k \text{ et, par action quotient, sur } \check{E}_k\}$, c'est un sous-groupe de Lie distingué de Ω^k ,
- $A^k = \{\gamma \in \Omega^k / \gamma \text{ agit trivialement sur } E_{n-1, n-1}^k + E_{n, k+1}^k\}$, sous-groupe de G^k , distingué dans Ω^k ,
- $B^k = G^k / A^k$;

on notera $\mathfrak{g}^k$, $\mathfrak{a}^k$ et $\mathfrak{b}^k$ leurs algèbres de Lie respectives. Remarque : au rang $n-1$: $G^{n-1} = A^{n-1} = \{0\}$, alors :

Proposition 6 *Les objets introduits vérifient, pour tout k de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$:*

- $\mathfrak{a}^k$ et $\mathfrak{b}^k$ sont des algèbres de Lie abéliennes de dimension respective $\check{d}_k^2$ et $d_k \cdot \check{d}_k$,
- G^k est extension centrale de B^k par A^k :

$$\{0\} \rightarrow A^k \rightarrow G^k \rightarrow B^k \rightarrow \{0\} \quad \text{et} \quad A^k \text{ est central dans } G^k,$$

- Ω^k est extension d'un produit semi-direct $(\Omega^{k+1} \times O(\check{E}_k, \check{\mathfrak{b}}_k)) \ltimes B^k$ par A^k :

$$\{0\} \rightarrow A^k \rightarrow \Omega^k \rightarrow \left[(\Omega^{k+1} \times O(\check{E}_k, \check{\mathfrak{b}}_k)) \ltimes B^k \right] \rightarrow \{0\}.$$

De plus, sous les notations de la proposition 5 page 76 :

$$h \in \mathfrak{g}^k \Leftrightarrow W_k = 0 \Leftrightarrow (Y_{k+1} = 0, W_{k+1} = 0, Z_{k+1} = 0) ; \quad h \in \mathfrak{a}^k \Leftrightarrow (W_k = 0 \text{ et } X_k = 0).$$

Les crochets de Lie décrivant les extensions données plus haut se lisent sur la matrice générique de h de la proposition 5 : en confondant les algèbres de Lie une de leurs sections pour les flèches, les crochets $[\mathfrak{b}^k, \mathfrak{b}^k]$, $[\mathfrak{b}^k, \omega^{k+1} \times \mathfrak{so}(\check{E}_k, \check{\mathfrak{b}}_k)]$ et $[\mathfrak{a}^k, ((\omega^{k+1} \times \mathfrak{so}(\check{E}_k, \check{\mathfrak{b}}_k)) \ltimes \mathfrak{b}^k)]$.

Démonstration : cette proposition se lit sur la matrice générique de la proposition 5. $\square$

On sait enfin que, pour tout k , Ω^k est isomorphe à un produit semi-direct $N^k \rtimes \prod_{i=k}^{n-1} O(r_i, s_i)$. On peut, de la même façon, dégager la structure de N^k seul.

Proposition 7 $h \in \mathfrak{n}^k \Leftrightarrow \text{Mat}_{\beta^k}(h) = \begin{pmatrix} \overbrace{W_k}^{(1)} & \overbrace{Z_k}^{(2)} \\ 0 & Y_k \end{pmatrix}$ où Y_k , W_k et Z_k vérifient les mêmes relations qu'à la proposition 5 page 76, sauf :

$$\begin{aligned} - Y_k &= \begin{pmatrix} \overbrace{0}^{(2a)} & \overbrace{X_k}^{(2b)} \\ 0 & Y_{k+1} \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} W_{k+1} & Z_{k+1} \\ 0 & Y_{k+1} \end{pmatrix} &= \text{Mat}_{\beta^{k+1}}(h^{k+1}) \text{ avec } h^{k+1} \text{ un certain élément de } \mathfrak{n}^{k+1}. \end{aligned}$$

Pour tout k , N^k est extension d'un produit semi-direct $(N^{k+1} \rtimes B^k)$ par A^k :

$$\{0\} \rightarrow A^k \rightarrow N^k \rightarrow [N^{k+1} \rtimes B^k] \rightarrow \{0\}.$$

III Cas a et b symétrique et antisymétrique

Ce dernier cas n'a pas été abordé par W.Klingenberg. Il faut tout d'abord reprendre la proposition 1 page 49, qui doit être modifiée.

III.1 Le lemme préliminaire revisité

Proposition 8 Soient a et b deux formes bilinéaires, l'une symétrique, l'autre antisymétrique, a étant non dégénérée. On rappelle que B est l'endomorphisme cette fois a -antiautoadjoint tel que : $b(\cdot, \cdot) = a(\cdot, B\cdot)$. Soit $\tilde{E} = \overline{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbb{K}} E$ la complétion de E comme espace vectoriel sur $\overline{\mathbb{K}}$, la clôture algébrique de $\mathbb{K}$.

B est a -antiautoadjoint, donc B et $-B$ sont conjugués et le polynôme minimal μ de B peut s'écrire dans $\overline{\mathbb{K}}[X]$: $\mu = X^{n_0} \prod_{i=1}^k P_i^{n_i}$, avec : $P_i = ((X - \lambda_i)(X + \lambda_i))$, et avec : $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \pm \lambda_j$ et : $\forall i \geq 1, \lambda_i \neq 0$. Alors :

- Les sous-espaces caractéristiques $\ker(B - \lambda_i \text{Id})^{n_i}$, $i \geq 1$, associés à des valeurs propres non nulles, sont a - et b -totalement isotropes.
- En notant $E_i = \ker P_i^{n_i}(B) \subset \tilde{E}$ si $i \geq 1$ et $E_0 = \ker B^{n_0} \subset \tilde{E}$, alors :

$$\tilde{E} = \bigoplus_{0 \leq i \leq k} E_i,$$

la somme étant a - et b -orthogonale, et les espaces E_i a -non dégénérés.

Démonstration : S et T , les parties respectivement semi-simple et nilpotente de B , considéré comme endomorphisme de $\tilde{E}$, sont, comme B , a -antiautoadjoints. En effet, $-S$ et $-T$ sont les parties semi-simple et nilpotente de $-B$: $-B = -S - T$, $(-S)(-T) = (-T)(-S)$, $-S$ est semi-simple et $-T$ nilpotent. Or il existe P_T et P_S dans $\overline{\mathbb{K}}[X]$ t.q. $T = P_T(B)$ et $S = P_S(B)$. Comme B et $-B$ sont conjugués, les mêmes polynômes P_T et P_S appliqués à $-B$ donnent ses parties nilpotente et semi-simple, c'est-à-dire : $-T = P_T(-B)$ et $-S = P_S(-B)$. Alors : $\forall x, y, a(x, Sy) = a(x, P_S(B)y) = a(P_S(-B)x, y) = a(-Sx, y)$ et de même avec T , c'est le résultat annoncé.

Prenons alors $i \geq 1$ et x et y dans $\ker(B - \lambda_i \text{Id})^{n_i} = \ker(S - \lambda_i \text{Id})$. Alors :

$$a(x, y) = \frac{1}{\lambda_i} a(x, \lambda_i y) = \frac{1}{\lambda_i} a(x, Sy) = \frac{1}{\lambda_i} a(-Sx, y) = -\frac{1}{\lambda_i} a(\lambda_i x, y) = -a(x, y)$$

donc $a(x, y) = 0$. L'espace $\ker(B - \lambda_i \text{Id})^{n_i}$ est donc a -totalement isotrope. De plus, $b(\cdot, \cdot) = a(\cdot, B\cdot)$ et S et T commutent avec B , donc $\ker(B - \lambda_i \text{Id})^{n_i}$ est également b -totalement isotrope.

D'autre part, posons $P_0 = X \in \overline{\mathbb{K}}[X]$, prenons $0 \leq i \leq k$ et x dans $\ker P_i^{n_i}(B)$, $0 < j \leq k$, $j \neq i$ et y dans $\ker P_j^{n_j}(B)$, U et V dans $\overline{\mathbb{K}}[X]$ t.q. : $UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j} = 1$. B est a -antiautoadjoint ; comme $X^2|P_j, P_j(B)$ est a -autoadjoint et :

$$\begin{aligned} a(x, y) &= a((UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j})(B).x, y) \\ &= a(UP_i^{n_i}(B).x, y) + a(x, VP_j^{n_j}(B).y) \\ &= a(0, y) + a(x, 0) = 0 \quad \text{ainsi que :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(x,y) &= b((UP_i^{n_i} + VP_j^{n_j})(B).Bx,y) \\
&= b(B(UP_i^{n_i}(B).x),y) + a(x,B(VP_j^{n_j}(B).y)) \\
&= a(0,y) + a(x,0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'où le deuxième point. $\square$

Remarque : D'autre part, si a et b sont de nature différente, T est a -antiautoadjoint ; par conséquent, les formes $b_k = \langle \cdot, T^k \cdot \rangle$, b^k et $\check{b}^k$ introduites dans la section I.2 page 52 sont de nature variable suivant la parité de k . En effet, Si a est symétrique et b antisymétrique, les b_k , b^k et $\check{b}^k$ sont :

- symétriques si k est pair,
- antisymétriques sinon ;

la situation est inversée si les natures de a et b sont permutées.

III.2 Quand $\mathbb{K}$ est algébriquement clos

On se restreint dans cette section à un sous espace canonique E_i noté simplement E , on a alors $\mu = P_i^{n_i} = P^n$, avec $P = X$ ou $P = (X - \lambda)(X + \lambda)$. S et T sont les parties semi-simple et nilpotente de B , n l'indice de nilpotence de T .

III.2.1 Structure et action de Ω

Le théorème ne traite que le cas où l'une au moins des deux formes n'est pas dégénérée.

Théorème 5 *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, trois cas apparaissent :*

- La forme symétrique est non dégénérée, l'autre est dégénérée.

On note alors a la forme symétrique, b l'antisymétrique, b est dégénérée, donc B a la valeur propre zéro et on est dans le cas $P = X$, $B = T$. Alors : Ω agit simplement transitivement sur $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}_k)$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a, T) . Plus précisément, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, où :

- $N = \{\gamma \in \Omega \mid \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k \text{ est triviale}\}$. C'est un sous-groupe distingué de Ω , nilpotent d'indice $\leq 2n - 1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,
- $R = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}_k) \simeq \left(\prod_{\substack{0 \leq k < n \\ k \text{ pair}}} O_{d_k}(\mathbb{K}) \right) \times \left(\prod_{0 \leq k < n, k \text{ impair}} Sp_{d_k}(\mathbb{K}) \right)$ où $d_k = \dim \check{E}_k$. Les d_k avec k impair sont des entiers pairs ; en effet les $\check{b}^k$ sont antisymétriques, non dégénérées sur les $\check{E}_k$. En particulier $R \simeq \left(\prod_{0 \leq k < n, k \text{ pair}} O_{d_k}(\mathbb{K}) \right) \times \left(\prod_{0 \leq k < n, k \text{ impair}} Sp_{d_k}(\mathbb{K}) \right)$. R est réductif.

Les invariants de la situation, c'est-à-dire du couple (a, b) , sont donc n l'indice de nilpotence de T , et les $(d_k)_{k=0}^{n-1}$; ce sont les invariants de Jordan de T .

- La forme antisymétrique est non dégénérée, l'autre est dégénérée.

On note alors a la forme antisymétrique, b la symétrique, b est dégénérée, donc à nouveau $P = X$, $B = T$ et le même résultat est vérifié : Ω agit simplement transitivement sur

$\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}_k)$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a, T) . Plus précisément, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, où :

- $N = \{\gamma \in \Omega \mid \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k \text{ est triviale}\}$. C'est un sous-groupe distingué de Ω , nilpotent d'indice $\leq 2n-1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,
- $R = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}_k) \simeq \left(\prod_{\substack{0 \leq k < n \\ k \text{ pair}}} Sp_{d_k}(\mathbb{K}) \right) \times \left(\prod_{0 \leq k < n, k \text{ impair}} O_{d_k}(\mathbb{K}) \right)$ où $d_k = \dim \check{E}_k$. Les d_k avec k pair sont des entiers pairs ; en effet les $\check{b}^k$ sont antisymétriques, non dégénérées sur les $\check{E}_k$. En particulier $R \simeq \left(\prod_{0 \leq k < n, k \text{ pair}} Sp_{d_k}(\mathbb{K}) \right) \times \left(\prod_{0 \leq k < n, k \text{ impair}} O_{d_k}(\mathbb{K}) \right)$. R est réductif.

• Les deux formes sont non dégénérées.

On choisit ici de prendre pour a la forme symétrique, pour b l'antisymétrique. b est non dégénérée, donc P est du type $(X - \lambda)(X + \lambda)$, $\lambda \neq 0$. Ω agit sur $E^+ = \ker(B - \lambda \text{Id})^n$, cette restriction ρ l'envoie sur $\Omega^+ = \rho(\Omega) \subset GL(E^+)$. Alors : ρ est un isomorphisme de Ω sur Ω^+ et Ω^+ est $Z(T|_{E^+})$ le commutant de T , i.e. : $\Omega^+ = \{\gamma \in GL(E^+) \mid \gamma T = T\gamma\}$. Donc : $\Omega \simeq Z(T|_{E^+})$.

Remarque : Sur le même principe que dans les deux premiers cas, on peut, dans ce dernier cas, décomposer l'action de Ω . Soit $\mathcal{D}^+$ l'ensemble des décompositions de E^+ adaptées à $T|_{E^+}$, i.e. des décompositions de E^+ en somme directe $E^+ = \oplus_{q \leq p \leq n} D_{p,q}^+$, relevant le réseau de drapeaux $(E_{p,q}^+)_{q \leq p \leq n}$ associé à $T|_{E^+}$ (voir définition 1 page 53). Alors, et c'est encore le théorème de Jordan : $\Omega^+ = Z(T|_{E^+})$ est isomorphe à un produit semi-direct $N^+ \rtimes G^+$ où :

- $N^+ = \{\gamma \in \Omega^+ \mid \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k^+ \text{ est triviale}\}$. N^+ est un sous-groupe distingué de Ω^+ , nilpotent d'indice $\leq 2n-1$, et agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}^+$,
- $G^+ = \Omega^+/N^+$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} GL(\check{E}_k^+)$. Donc $G^+ \simeq \prod_{k=0}^{n-1} GL(\check{E}_k^+) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} GL_{d_k}(\mathbb{K})$ où $d_k = \dim \check{E}_k^+$

Cette remarque décompose l'action de Ω sur un sous espace de E . On peut en déduire la façon dont Ω agit sur E .

Corollaire 3 L'ensemble $\mathcal{D}$ des décompositions de E adaptées simultanément à (a, T) et à $(a(\cdot, S \cdot), T)$ n'est pas vide. Il est canoniquement en bijection avec $\mathcal{D}^+$. De plus, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes G$, où :

- $N = \{\gamma \in \Omega \mid \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k \text{ est triviale}\}$. La restriction ρ est bijective de N sur N^+ . N est un sous-groupe distingué de Ω , nilpotent d'indice $\leq 2n-1$, et agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$.
 - $G = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} (\text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k) \cap \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k(\cdot, S \cdot))) = \prod_{k=0}^{n-1} (\text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k) \cap Z(S)) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} GL(\check{E}_k^+)$. Ici, l'action de S passant au quotient sur les $\check{E}_k$, on note encore S les automorphismes des $\check{E}_k$ obtenus. Donc $G \simeq G^+ \simeq \prod_{k=0}^{n-1} GL_{d_k}(\mathbb{K})$.
- Les invariants de la situation sont donc les d_k , invariants de Jordan de $T|_{E^+}$.

III.2.2 Démonstrations

Démonstration du théorème

• Les deux premiers cas

Dans les deux premiers cas, $E = \ker B^n$ est le sous-espace caractéristique de B associé à la valeur propre zéro ; par la proposition 8 page 79, il est a -non dégénéré . Sur E , a est donc réflexive non dégénérée, $B = T$ est un endomorphisme de E , a -antiautoadjoint. On peut effectuer la même démonstration que pour le théorème 1 page 56.

• Le troisième cas

La restriction ρ à E^+ , de l'action de Ω , est un isomorphisme de Ω sur $Z(T|_{E^+}) \subset GL(E^+)$. Il suffit de montrer que ρ est bijective de Ω sur $Z(T|_{E^+})$. Soit $\gamma \in \Omega \subset GL(E)$ et $\gamma^+ = \rho(\gamma) = \gamma|_{E^+} \in GL(E^+)$ sa restriction à E^+ . γ est $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - et $\langle \cdot, T \cdot \rangle$ -orthogonal, donc commute avec T , donc, $\gamma^+ T = T \gamma^+$ et $\rho(\Omega) \subset Z(T|_{E^+})$.

Soit $\gamma^+ \in Z(T|_{E^+}) \subset GL(E^+)$; γ^+ admet alors un unique prolongement $\tilde{\gamma} \in \Omega \subset GL(E)$. En effet, a est non dégénérée sur E , donc fournit un isomorphisme de E sur E^* :

$$E \xrightleftharpoons[\sharp]{b} E^*. \text{ Notamment, } E^+ \text{ et } E^- \text{ étant totalement isotropes: } E^- \xrightleftharpoons[\sharp]{b} E^{+*}.$$

A tout $\gamma^+ \in GL(E^+)$ est canoniquement associé un élément γ^- de $GL(E^-)$ donné par :

$$\gamma^- = \sharp \circ {}^t(\gamma^+)^{-1} \circ b.$$

On note $\tilde{\gamma} = (\gamma^+, \gamma^-) \in GL(E^+) \times GL(E^-) \subset GL(E)$. C'est l'unique prolongement recherché, en effet :

• $\tilde{\gamma}$ commute avec B . Comme $\tilde{\gamma}$ stabilise $E^\pm = \ker(S \mp \lambda \text{Id})$, il suffit de vérifier qu'il commute avec T , donc que : $[\gamma^-, T|_{E^-}] = 0$. T est antiautoadjoint, donc : $\forall z \in E, {}^t T(z^b) = -(T(z))^b$. Soit alors $y \in E^-$:

$$\begin{aligned} [\gamma^-(T(y))]^b &= {}^t(\gamma^+)^{-1}(T(y)^b) = -{}^t(\gamma^+)^{-1}({}^t T(y^b)) = -{}^t(T \cdot (\gamma^+)^{-1})(y^b) \\ &= -{}^t((\gamma^+)^{-1} \cdot T)(y^b) = -{}^t T \cdot {}^t(\gamma^+)^{-1}(y^b) = -{}^t T((\gamma^-(y))^b) = (T(\gamma^-(y)))^b, \end{aligned}$$

donc $\gamma^- \cdot T = T \cdot \gamma^-$ et le résultat.

• $\tilde{\gamma}$ est $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -orthogonal. Comme E^+ et E^- sont chacun totalement isotrope, il suffit de le vérifier avec x et y dans E^+ et E^- respectivement.

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\gamma} y, \tilde{\gamma} x \rangle &= \langle ({}^t(\gamma^+)^{-1}(y^b))^\sharp, \gamma^+(x) \rangle \\ &= [{}^t(\gamma^+)^{-1}(y^b)](\gamma^+(x)) \\ &= \langle y, (\gamma^+)^{-1}(\gamma^+(x)) \rangle \\ &= \langle y, x \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{\gamma} \in \Omega$ et $\rho(\tilde{\gamma}) = \gamma^+$.

• $\tilde{\gamma}$ est le seul antécédent de γ^+ . Si $\bar{\gamma} = (\gamma^+, \delta) \in GL(E^+) \times GL(E^-)$ est dans Ω , alors : $\forall y \in E^-, (\delta(y))^b \in (E^+)^*$ et :

$$(\delta(y))^b = (\bar{\gamma}(y))^b = \langle \bar{\gamma}(y), \cdot \rangle = \langle y, \bar{\gamma}^{-1} \cdot \rangle = \langle y, \gamma^+ \cdot \rangle = {}^t(\gamma^+)^{-1}(y^b)$$

donc nécessairement, $\delta = \gamma^-$. □

Remarque : Les bases adaptées de l'espace E^+ sont ici les bases de Jordan de $T|_{E^+}$, obtenues à partir d'une décomposition D^+ adaptée à T quelconque et de bases quelconques des $\check{E}_k^+$, relevées en bases des $D_{n,k+1}^+$ et propagées par les T^i en bases de tous les $D_{p,q}^+$. Ω^+ , donc Ω , agit simplement transitivement sur ces bases.

Reste à démontrer le corollaire. Commençons par démontrer que $\mathcal{D}$ est non-vide.

Proposition 9 $\mathcal{D}$ n'est pas vide ; plus précisément, si $D^+ = (D_{p,q}^+)_{q \leq p \leq n} \in \mathcal{D}^+ \neq \emptyset$ est une décomposition adaptée à $T|_{E^+}$, alors :

- $(D^+)^* = ((D^+)^*_{p,q})_{q \leq p \leq n}$, la décomposition duale, est une décomposition de E^{+*} ,
- $(D^+)^{\#} = ((D^+)^{\#}_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ est une décomposition de $E^- \simeq (E^{+*})^{\#}$,
- $D^- = (D_{p,q}^-)_{q \leq p \leq n} = ((D^+)^{\#}_{n+1-q, n+1-p})_{q \leq p \leq n}$ est une décomposition adaptée à $(E^-, a, T|_{E^-})$,
- $\tilde{D} = (\tilde{D}_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ définie par $\forall p, q, \tilde{D}_{p,q} = D_{p,q}^+ \oplus D_{p,q}^-$ est une décomposition de E adaptée à (a, T) et à $(a(\cdot, S \cdot), T)$, i.e. un élément de $\mathcal{D}$.

Démonstration : Montrons déjà que D^- est une décomposition de E^- adaptée à T .

- Les $(D_{p,q}^-)_{q \leq p \leq n}$ sont des relevés des drapeaux $E_{p,q}^-$ relatifs à T sur E^- , en effet :
 - * $\forall q \leq p \leq n, D_{p,q}^- \subset E_{p,q}^-$. Soit y dans $D_{p,q}^-$, alors $y^b \in (D^+)^*_{n+1-q, n+1-p}$, i.e. $y^b|_{D_{i,j}^+}$ est nulle si $(i, j) \neq (n+1-q, n+1-p)$. En particulier, y^b est nulle sur $\ker T^{(n+1-p)-1} = \ker T^{n-p}$, i.e. $y \in (\ker T^{n-p})^\perp = \text{Im } T^{n-p}$. Donc $D_{p,q}^- \subset \text{Im } T^{n-p}$. D'autre part, y^b est nulle sur $\text{Im } T^{n-(n+1-q)+1} = \text{Im } T^q$, i.e. $y \in (\text{Im } T^q)^\perp = \ker T^q$. Donc $D_{p,q}^- \subset \ker T^q$ et $D_{p,q}^- \subset E_{p,q}^- \cap E^- = E_{p,q}^-$.
 - * $\forall q \leq p \leq n, D_{p,q}^- \cap \ker T^{q-1} = D_{p,q}^- \cap \text{Im } T^{n-p+1} = \{0\}$. Soit $y \in D_{p,q}^- \cap \ker T^{n-p-1}$. $y \in \ker T^{q-1}$, donc $0 = (T^{q-1}(y))^b = \pm^t T^{q-1}(y^b)$, donc y^b est nulle sur $\text{Im } T^{q-1} = E_{n-q+1, n-q+1}^+ = \bigoplus_{j \leq i \leq n-q+1} D_{i,j}^+$. D'autre part, $y \in D_{p,q}^-$, donc y^b est nulle sur les $D_{i,j}^+$ avec $i > n - q + 1$ et donc $y^b = 0$ et la première égalité est vérifiée. Soit $y \in D_{p,q}^- \cap \text{Im } T^{n-p+1}$. $y = T^{n-p+1}(z)$ pour un certain z de E^- et : $y^b = T^{n-p+1}(z)^b = \pm^t T^{n-p+1}(z^b)$ donc y^b est nulle sur $\ker T^{n-p+1} = E_{n, n-p+1}^+ = \bigoplus_{j \leq \min\{i, n-p+1\}} D_{i,j}^+$. Comme $y \in D_{p,q}^-$, y^b est nulle sur les $D_{i,j}^+$ avec $j > n + 1 - p$, donc y^b est nulle sur les $D_{i,j}^+$ avec $j \leq i \leq n$, i.e. sur E^+ et la deuxième égalité est vérifiée.

Par ces deux points, $D_{p,q}^- \subset E_{p,q}^-$ et $D_{p,q}^- \cap (E_{p-1,q}^- + E_{p,q-1}^-) = \{0\}$. Pour tous i et j , $D_{i,j}^+$ et $(D^+)^{\#}_{i,j}$ sont de même dimension car isomorphes, $\dim D_{i,j}^+ = \dim D_{n+1-j, n+1-i}^+$ car ils sont envoyés bijectivement l'un sur l'autre par $T^{|n+1-(i+j)|}$, donc :

$$\begin{aligned}
 \dim D_{p,q}^- &= \dim D_{n+1-q, n+1-p}^+ \\
 &= \dim D_{p,q}^+ \\
 &= \dim [E_{p,q}^+ / (E_{p-1,q}^+ + E_{p,q-1}^+)] \\
 &= \dim E_{p,q}^- / [(E_{p-1,q}^- + E_{p,q-1}^-)]
 \end{aligned}$$

et $D_{p,q}^-$ est un relevé de $E_{p,q}^- / (E_{p-1,q}^- + E_{p,q-1}^-)$ dans $E_{p,q}^-$.

- Les $D_{p,q}^-$ vérifient : $\forall q \leq p \leq n, T(D_{p,q}^-) = D_{p-1,q-1}^-$. Si $y \in E^-$:

$$y \in D_{p,q}^- \Leftrightarrow (\forall (i,j) \neq (n+1-q, n+1-p), y|_{D_{i,j}^+}^\flat = 0).$$

Soit $y \in D_{p,q}^-$ et $(i,j) \neq (n+2-q, n+2-p)$. $T(y)^\flat = -{}^tT(y^\flat)$, donc $T(y)|_{D_{i,j}^+}^\flat = 0 \Leftrightarrow y|_{T(D_{i,j}^+)}^\flat = 0 \Leftrightarrow y|_{D_{i-1,j-1}^+}^\flat = 0$. Or $(i-1, j-1) \neq (n+1-q, n+1-p)$, donc $y|_{D_{i-1,j-1}^+}^\flat = 0$. Par conséquent, $T(y) \in D_{p-1,q-1}^-$ et D^- est adaptée à T .

La décomposition $\tilde{D}$ relève donc les drapeaux $(E_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ et vérifie : $\forall p, q, T(\tilde{D}_{p,q}) = \tilde{D}_{p-1,q-1}$. Elle est (E, a, T) -adaptée : il reste à vérifier le troisième point de la définition 1 page 53 : pour tout $(q_1, q_2) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et tout $(k, l) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$, $T^k(\tilde{D}_{n,q_1})$ et $T^l(\tilde{D}_{n,q_2})$ sont de somme non dégénérée si $q_1 = q_2 = l + k + 1$, et orthogonaux sinon. Cela découle du système :

$$\begin{cases} T^k(\tilde{D}_{n,q_1}) = D_{n-k,q_1-k}^+ \oplus D_{n-k,q_1-k}^- = D_{n-k,q_1-k}^+ \oplus D_{n-q_1+k+1,k+1}^{+*\sharp} \\ T^l(\tilde{D}_{n,q_2}) = D_{n-l,q_2-l}^+ \oplus D_{n-l,q_2-l}^- = D_{n-l,q_2-l}^+ \oplus D_{n-q_2+l+1,l+1}^{+*\sharp} \\ D_{p,q}^+ \oplus D_{p',q'}^{+*\sharp} \text{ est non dégénéré } \text{ssi } (p,q) = (p',q'), \text{ tot. isotrope sinon.} \end{cases}$$

$\tilde{D}$ est donc adaptée à (E, a, T) . Par construction, les $\tilde{D}_{p,q}$ sont stables par S , $\tilde{D}$ est donc également adaptée à $(E, a(\cdot, S \cdot), T)$ i.e. $\tilde{D} \in \mathcal{D}$. $\square$

Remarque : On vérifie en outre que :

- L'application $D^+ \mapsto \tilde{D}$ de $\mathcal{D}^+$ dans $\mathcal{D}$ construite plus haut est bijective et commute avec l'action de N de $\mathcal{D}^+$ dans $\mathcal{D}$,
- Toutes les décompositions de $\mathcal{D}$ sont stables par S , d'où la partie directe de l'équivalence : « (E, a, T) - et $(E, a(\cdot, S \cdot), T)$ -adaptée $\Leftrightarrow (E, a, T)$ -adaptée et S -stable».

Démonstration du corollaire. Par définition, Ω agit sur les décompositions adaptées à (a, T) et sur celles adaptées à $(a(\cdot, S \cdot), T)$, donc, agit sur $\mathcal{D} \neq \emptyset$ les décompositions adaptées aux deux triplets. Sur les $\check{E}_k$, Ω préserve $\check{b}^k$ et $\check{b}^k(\cdot, S \cdot)$. D'où, Ω agit sur $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} (\text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k) \cap \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k(\cdot, S \cdot)))$.

On note $N = \{\gamma \in \Omega / \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k \text{ est triviale}\}$. Le raisonnement est alors le même que dans la démonstration du théorème 1 page 56. En choisissant deux décompositions D et Δ de $\mathcal{D}$, des bases β_k des $\check{E}_k$, en relevant ces bases sur D et Δ pour obtenir des bases de E , on montre que les actions de N sur $\mathcal{D}$ et de $G = \Omega/N$ sur $\prod_{k=0}^{n-1} (\text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k) \cap \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k(\cdot, S \cdot)))$ sont simples et transitives.

Enfin, $\rho^{-1}(N^+) = N$ et ρ est bijective de N sur N^+ . Soit $\gamma \in \Omega$. Si γ agit trivialement sur $\check{E}_k$, $\gamma^+ = \gamma|_{E^+}$ agit aussi trivialement sur $\check{E}_k^+$ donc $\rho(N) \subset N^+$. Si γ^+ agit trivialement sur $\check{E}_k^+$, ${}^t(\gamma^+)^{-1}$ agit de même sur $(\check{E}_k^+)^*$, canoniquement isomorphe à $\check{E}_k^-$, donc γ^- agit trivialement sur $\check{E}_k^-$ et $\tilde{\gamma} \in N$. Ainsi, ρ étant injective, $N \xrightarrow[\rho]{} N^+$. $\square$

III.2.3 Les bonnes bases

Enfin, exhibons les «bases adaptées», sur lesquelles Ω agit simplement transitivement.

Les matrices de a et B , cas où la forme symétrique est non dégénérée et pas

Définition 10 Soit E un espace vectoriel muni de deux formes bilinéaires a et b , telles que a est symétrique non dégénérée et que $b = a(\cdot, T \cdot)$ avec T nilpotent a -antiautoadjoint.

- $\check{b}^k$ -symplectiques pour les k impairs,
- $\check{b}^k$ -orthonormées pour les k pairs,

On considère $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ une décomposition adaptée de (E, a, T) et β une base adaptée à (E, a, T) construite à partir de D . On reprend alors les objets D_k et β_k introduits page 64 en fin de section II.3 ; $d_k = \dim \check{E}_k = \dim D_{n,k+1}$, si k est pair, $\check{b}^k$ est antisymétrique et d_k est pair. $E = \bigoplus D_k$, $\forall k, B(D_k) = D_k$. Alors, dans β_{k+1} , la matrice $\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(a|_{D_{k+1}})$ est une matrice-blocs de taille $k+1$. Si k est pair :

Dans tous les cas, $B = T$ et :

On vérifie dans les deux cas que la matrice de a est symétrique, celle de $a(\cdot, B \cdot)$ antisymétrique.

85

antisymétrique, celle de $a(\cdot, B\cdot)$ symétrique.

Les matrices de a et B , cas où les deux formes sont non dégénérées.

Définition 11 Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire non dégénérée, symétrique ou antisymétrique et d'un automorphisme semi-simple S de valeurs propres non nulles λ et $-\lambda$, a -antiautoadjoint. Par la proposition 8 page 79, $k = 2d$, $\ker(S - \lambda \text{Id})$ et $\ker(S + \lambda \text{Id})$ sont totalement isotropes de dimension l ; on appelle alors base adaptée à (E, a, S) une base quelconque de $\ker(S - \lambda \text{Id})$, complétée par une base de $\ker(S + \lambda \text{Id})$ qui lui est :

- duale si a est symétrique,
- antiduale si a est antisymétrique.

Dans une telle base :

$$\text{Mat}(a) = J_d^\pm \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ \pm I_d & 0 \end{pmatrix}, \text{Mat}(S) = \begin{pmatrix} \lambda I_d & 0 \\ 0 & -\lambda I_d \end{pmatrix},$$

avec J_d affecté d'un signe $+$ si a est symétrique, $-$ sinon. Par projection, ces bases sont en bijection avec les bases quelconques de $\ker S - \lambda \text{Id}$.

Définition 12 Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni de deux formes bilinéaires non dégénérées a et b telles que a est symétrique et $b = a(\cdot, B\cdot)$ où B est un automorphisme a -antiautoadjoint de polynôme minimal $P = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, de partie nilpotente T d'indice n . Soit $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ une décomposition de E adaptée à (a, T) et à $(a(\cdot, B\cdot), T)$ et $(\beta^k)_{k=0}^{n-1}$ un n -uplet de bases des $\check{E}_k$, adaptées à $(\check{b}^k, S)$ au sens de la définition 11 page 86.

On leur associe canoniquement une base β de E , obtenue en relevant les β^k en bases des $D_{n,k+1}$ et en les propageant par T en bases de tous les $D_{p,q}$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces bases, dites adaptées au triplet (E, a, B) ou au triplet (E, a, b) .

Remarque : une telle base est aussi, à l'ordre près des vecteurs, une base $\beta = (\beta^+, \beta^-)$, où :

- β^+ est une base de Jordan de $T|_{E^+}$, où $E^+ = \ker(B - \lambda \text{Id})$,
- β^- est une base de $E^- = \ker(B + \lambda \text{Id})$, duale de β^+ si a est symétrique, antiduale si a est antisymétrique.

Enfin, et comme dans le cas où a et b sont de même nature, si $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ est une décomposition adaptée à (a, T) et à $(a(\cdot, S\cdot), T)$ et β une base adaptée construite à partir de cette décomposition, on pose $D_k = \bigoplus_{i=0}^{k-1} T^i(D_{n,k})$. On note $\beta_{n,k}$ la sous-famille de β qui est une base de $D_{n,k}$; les $T^i(\beta_{n,k})$ sont bases des $T^i(D_{n,k})$ et on note $\beta_k = (T^{k-1}(\beta_{n,k}), \dots, T(\beta_{n,k}), \beta_{n,k})$. Alors :

- chaque $\beta_k = (T^{k-1}(\beta_{n,k}), \dots, T(\beta_{n,k}), \beta_{n,k})$ est une base de D_k ,
- $E = \bigoplus_{1 \leq k \leq n} D_k$ et les D_k sont stables par B .

Il suffit donc de donner les matrices de a et B dans les β_k . Rappelons que $d_k = \dim \check{E}_k^+ =$

$$\dim D_{n,k+1}^+ = \frac{1}{2} \dim D_{n,k+1}. \text{ Dans } \beta_{k+1} :$$

$$\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(a|D_{k+1}) = \begin{pmatrix} & & & & \pm J_{d_k}^{\pm} \\ & & & . & \\ & & . & & \\ & & . & & \\ +J_{d_k}^{\pm} & & & & \\ -J_{d_k}^{\pm} & & & & \\ & +J_{d_k}^{\pm} & & & \\ & & & & \end{pmatrix}, \text{ où } J_d^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ \pm I_d & 0 \end{pmatrix} \in M_{2d}(\mathbb{K}),$$

avec des J^+ si k est pair, des J^- sinon. Les blocs $J_{d_k}^\pm$ sont affectés de signes alternativement $+$ et $-$; en effet, le bloc inférieur gauche est la matrice des $a(x, y)$ avec $x \in D_{n, k+1}$ et $y \in D_{n-k, 1}$, donc des $a(x, T^k(z))$ pour $x, z \in D_{n, k+1}$. Ce bloc est donc la matrice $\text{Mat}_{\beta^k}(\tilde{b}^k) = J_{d_k}^\pm$. Le bloc suivant est la matrice des $a(x, y)$ avec $x \in D_{n-1, k}$ et $y \in D_{n-k+1, 2}$, donc des $a(T(x), T^{k-1}(z)) = -a(x, T^k(z))$ pour $x, z \in D_{n, k+1}$. Il apparaît donc un bloc $-J_{d_k}^\pm$. De cette façon, le signe des blocs est alterné. On vérifie en outre que a est symétrique :

• Si k est pair, on a affaire à des blocs $\pm J_{d_k}^+$. La matrice de a comporte par ailleurs un nombre impair de ces blocs (un seul si $k = 0$) donc, deux blocs $\pm J_{d_k}^+$ échangés par transposition dans cette matrice sont affectés du même signe. Il faut donc vérifier : ${}^t J_{d_k}^+ = J_{d_k}^+$. C'est le cas, $J_{d_k}^+$ est la matrices de $\check{b}_k$, symétrique.

• Inversement, si k est impair, on a affaire à des blocs $\pm J_{d_k}^-$; la matrice de a comporte un nombre pair de ces blocs donc deux blocs $\pm J_{d_k}^+$ échangés par transposition sont affectés d'un signe opposé. Il faut donc vérifier : ${}^t J_{d_k}^+ = -J_{d_k}^+$. C'est le cas car $\check{b}_k$ est antisymétrique.

Pour finir:

$$\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(B|_{D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} \lambda I_{d_k, d_k} & I_{2d_k} & & \\ & \lambda I_{d_k, d_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{2d_k} \\ & & & \lambda I_{d_k, d_k} \end{pmatrix}.$$

III.3 Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

III.3.1 Préliminaire

Sur quel espace effectuer l'étude? E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, soit $E^{\mathbb{C}}$ son complexifié. D'après la proposition 8 page 79 :

$$E^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{0 \leq i \leq k}^{\perp} E_i^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\{\lambda, -\lambda\} \subset \mathcal{S}}^{\perp} E^{\mathbb{C}}(\{\lambda, -\lambda\})$$

où la première expression reprend les notations de la proposition 1 page 49, où $\mathcal{S}$ est le spectre de B , où $E^{\mathbb{C}}(\{\lambda, -\lambda\}) = E_i^{\mathbb{C}} = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda_i \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})(S^{\mathbb{C}} + \lambda_i \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})$ si $\lambda \neq 0$ et $\{\lambda, -\lambda\} = \{\lambda_i, -\lambda_i\}$ et où $E^{\mathbb{C}}(\{0\}) = E_0^{\mathbb{C}} = \ker S^{\mathbb{C}}$. La somme est a - et b -orthogonale. Cette décomposition est la plus fine possible avec cette propriété. La décomposition la plus

fine de E espace réel est donc :

$$E = E(\{0\}) \oplus \left(\bigoplus_{\{\lambda, -\lambda\} \subset \mathcal{S} \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}^*} E(\{\lambda, -\lambda\}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{\{\lambda, \bar{\lambda}\} \subset \mathcal{S} \text{ et } \lambda \in i\mathbb{R}^*} E(\{\lambda, \bar{\lambda}\}) \right) \\ \oplus \left(\bigoplus_{\{\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}\} \subset \mathcal{S} \text{ et } \lambda \notin \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}} E(\{\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}\}) \right)$$

où :

- si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $E(\{\lambda, -\lambda\}) = \ker(S - \lambda \text{Id})(S + \lambda \text{Id})$,
- si $\lambda \in i\mathbb{R}^*$, $E(\{\lambda, \bar{\lambda}\}) = \Re[\ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})(S^{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})]$,
- si $\lambda \notin \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$, $E(\{\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}\}) = \Re[\ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})(S^{\mathbb{C}} + \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})(S^{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})(S^{\mathbb{C}} + \bar{\lambda} \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})]$.

On se restreint donc dans la suite à l'un de ces sous-espaces $E(\mathcal{E})$, où $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$; il sera noté E . μ le polynôme minimal de B est donc du type X , $(X - \lambda)(X + \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$ ou $(X - \lambda)(X + \lambda)(X - \bar{\lambda})(X + \bar{\lambda})$ avec $\lambda \notin \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$.

III.3.2 Structure et action de Ω

Théorème 6 Cinq cas apparaissent :

- La forme symétrique est non dégénérée, l'autre est dégénérée

On note alors a la forme symétrique, b l'antisymétrique, b est dégénérée, donc B a la valeur propre zéro et on est dans le cas $P = X$, $B = T$. Alors : Ω agit simplement transitivement sur $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}_k)$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a, T) . Plus précisément, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, où :

- $N = \{\gamma \in \Omega \mid \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k \text{ est triviale}\}$. C'est un sous-groupe distingué de Ω , nilpotent d'indice $\leq 2n - 1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,
- $R = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}_k) \simeq \left(\prod_{\substack{0 \leq k < n \\ k \text{ pair}}} O_{r_k, s_k}(\mathbb{K}) \right) \times \left(\prod_{0 \leq k < n, k \text{ impair}} Sp_{d_k}(\mathbb{K}) \right)$ où $d_k = \dim \check{E}_k$ et où (r_k, s_k) , avec k pair, est la signature de $\check{b}^k$ bilinéaire symétrique sur $\check{E}_k$. Les d_k avec k impair sont des entiers pairs. En particulier $R \simeq \left(\prod_{\substack{0 \leq k < n \\ k \text{ pair}}} O_{r_k, s_k}(\mathbb{K}) \right) \times \left(\prod_{\substack{0 \leq k < n \\ k \text{ impair}}} Sp_{d_k}(\mathbb{K}) \right)$. R est réductif.

Les invariants de la situation, c'est-à-dire du couple (a, b) , sont donc n l'indice de nilpotence de T , les $(r_k, s_k)_{k=0, \substack{k \text{ pair}}}^{n-1}$ et les $(d_k)_{k=0, \substack{k \text{ impair}}}^{n-1}$.

- La forme antisymétrique est non dégénérée, l'autre est dégénérée

On note alors a la forme antisymétrique, b la symétrique, b est dégénérée, donc à nouveau $P = X$, $B = T$ et le même résultat est vérifié : Ω agit simplement transitivement sur $\mathcal{D} \times \prod_{k=0}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}_k)$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a, T) . Plus précisément, Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes R$, où :

- $N = \{\gamma \in \Omega \mid \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k \text{ est triviale}\}$. C'est un sous-groupe distingué de Ω , nilpotent d'indice $\leq 2n - 1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,
- $R = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}_k) \simeq \left(\prod_{\substack{0 \leq k < n \\ k \text{ pair}}} Sp_{d_k}(\mathbb{K}) \right) \times$

$\left(\prod_{\substack{0 \leq k < n \\ k \text{ impair}}} O_{r_k, s_k}(\mathbb{K}) \right)$ où $d_k = \dim \check{E}_k$ et où (r_k, s_k) , avec k pair, est la signature de $\check{b}^k$ bilinéaire symétrique sur $\check{E}_k$. Les d_k avec k impair sont des entiers pairs. En particulier $R \simeq \left(\prod_{\substack{0 \leq k < n \\ k \text{ pair}}} Sp_{d_k}(\mathbb{K}) \right) \times \left(\prod_{\substack{0 \leq k < n \\ k \text{ impair}}} O_{r_k, s_k}(\mathbb{K}) \right)$. R est réductif.

Les invariants de la situation, c'est-à-dire du couple (a, b) , sont donc n l'indice de nilpotence de T , les $(r_k, s_k)_{k=0, k \text{ impair}}^{n-1}$ et les $(d_k)_{k=0, k \text{ pair}}^{n-1}$.

• Les deux formes sont non dégénérées

On choisit alors de prendre pour a la forme symétrique, pour b l'antisymétrique. b est non dégénérée, donc E peut être de trois types.

a) $E = E(\{\lambda, -\lambda\})$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

P est du type $(X - \lambda)(X + \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. La situation est exactement la même que dans le cas algébriquement clos, $\mathbb{R}$ remplaçant $\mathbb{K}$. Ω agit fidèlement sur $E^+ = \ker(B - \lambda \text{Id})^n$, cette restriction ρ est donc un isomorphisme de Ω sur $\Omega^+ = \rho(\Omega) \subset GL(E^+)$. $\Omega^+ = Z(T|_{E^+})$ est le commutant de T , i.e. : $\Omega^+ = \{\gamma \in GL(E^+) / \gamma T = T\gamma\}$. Donc, Ω est isomorphe au commutant d'un endomorphisme nilpotent de E^+ .

b) $E = E(\{\lambda, \bar{\lambda}\})$, $\lambda \in i\mathbb{R}^*$

Ω agit sur $E' = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})$, espace $T^{\mathbb{C}}$ -stable muni de la forme sesquilinéaire non dégénérée $\underline{a} : z_1, z_2 \mapsto a(z_1, \bar{z}_2)$. En notant $\mathcal{D}'$ l'ensemble des décompositions de E' adaptées à $(\underline{a}, T)$, Ω agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}' \times \prod_{k=0}^{n-1} U(\check{E}'_k, \check{\underline{b}}_k)$ où $\check{\underline{b}}_k$ est une forme sesquilinéaire non dégénérée sur $\check{E}'_k$, canoniquement associée à $\check{b}_k$, bilinéaire non dégénérée sur $\check{E}_k$. Plus précisément, $\Omega \simeq N \rtimes R$, où :

- $N = \{\gamma \in \Omega / \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}'_k \text{ est triviale}\}$. C'est un sous-groupe distingué de Ω , nilpotent d'indice $\leq 2n - 1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}'$,
- $R = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} U(\check{E}'_k, \check{\underline{b}}_k) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} U_{r_k, s_k}$ où (r_k, s_k) est la signature de $\check{\underline{b}}_k$ sur $\check{E}'_k$; $r_k + s_k = d_k = \dim \check{E}'_k$. En particulier $R \simeq \prod_{k=0}^{n-1} U_{r_k, s_k}$. R est réductif.

c) $E = E(\{\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}\})$, $\lambda \notin \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$

P est du type $(X - \lambda)(X + \lambda)(X - \bar{\lambda})(X + \bar{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. La situation est similaire à celle du cas algébriquement clos. Comme en **a)**, Ω agit fidèlement sur $E^+ = \ker(B^{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})^n$, cette restriction ρ est un isomorphisme de Ω sur $\Omega^+ = \rho(\Omega) \subset GL(E^+)$. Or, $\Omega^+ = Z(T|_{E^+})$ est le commutant de T , i.e. : $\Omega^+ = \{\gamma \in GL(E^+) / \gamma T = T\gamma\}$. Donc Ω est isomorphe au commutant d'un endomorphisme nilpotent de E^+ .

Remarque : Dans les cas **a)** et **c)**, on peut détailler l'action de $\Omega \simeq Z(T|_{E^+})$ sur E^+ . Notons $\mathcal{D}^+$ l'ensemble des décompositions adaptées de $(E^+, T|_{E^+})$. Alors Ω est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes G$, où :

- $N = \{\gamma \in \Omega / \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k^+ \text{ est triviale}\}$. C'est un sous-groupe distingué de Ω , nilpotent d'indice $\leq 2n - 1$, qui agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}^+$,
- $G = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} GL(\check{E}_k^+)$. En notant $d_k = \dim \check{E}_k^+$:
 - dans le cas **a)**, G agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} GL_{d_k}(\mathbb{R})$,
 - dans le cas **c)**, G agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} GL_{d_k}(\mathbb{C})$.

Les invariants de la situation sont donc dans les deux cas les d_k , invariants de Jordan de T sur E^+ .

Démonstration :

- Les trois premiers cas, où la ou les valeurs propres de B sont réelles

La situation est la même que dans le cas algébriquement clos, et la démonstration identique à celle du théorème 5 page 80. Seuls les deux premiers cas diffèrent légèrement : les groupes orthogonaux qui apparaissent sont désormais affectés d'une signature (r_k, s_k) . Quand la forme dégénérée est la forme antisymétrique, c'est le cas pour les $O(\check{E}_k, \check{b}_k)$, k pair, et quand la forme dégénérée est la forme symétrique, pour les $O(\check{E}_k, \check{b}_k)$, k impair.

- Le cas où les valeurs propres sont imaginaires pures $\neq 0$: E du type $E(\{\lambda, \bar{\lambda}\})$, $\lambda \in i\mathbb{R}^*$

Ici, $\overline{E'} = \ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) = \ker(S^{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) = \ker(S^{\mathbb{C}} + \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})$ donc, par la proposition 8 page 79 : E est a -non dégénéré et : $E^{\mathbb{C}} = E' \oplus \overline{E'}$, chaque facteur de la somme étant a -totalement isotrope. La forme sesquilinéaire $\underline{a} : z_1, z_2 \mapsto a(z_1, \overline{z_2})$ est donc non dégénérée sur E' . Ω stabilise E' et son action y commute avec $T^{\mathbb{C}}$; elle commute aussi avec la conjugaison complexe, donc preserve $\underline{a}$. Réciproquement, si $\gamma \in U(E', \underline{a})$ commute avec $T^{\mathbb{C}}$ et avec la conjugaison complexe — c'est-à-dire stabilise $\Re E'$ —, il agit alors sur $E = E' \oplus \overline{E'}$, commute avec $T^{\mathbb{C}}$ et préserve a , donc est dans Ω (Ω a une action diagonale sur $E' \oplus \overline{E'}$). La représentation de Ω dans $U(E', \underline{a})$ est donc fidèle et $\Omega \simeq U(E', \underline{a}) \cap U(E', \underline{a}(\cdot, T_{|E'}^{\mathbb{C}} \cdot))$. On obtient alors le résultat par application du théorème 4 page 68 à $(E', \underline{a}, T_{|E'}^{\mathbb{C}})$.

- Le cas où les valeurs propres sont ailleurs : E du type $E(\{\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}\})$, $\lambda \notin \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$

Notons $E^{\pm} = \ker(S^{\mathbb{C}} \mp \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})$; alors $\overline{E^{\pm}} = \ker(S^{\mathbb{C}} \mp \bar{\lambda} \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}})$ et $E = E^+ \oplus E^- \oplus \overline{E^+} \oplus \overline{E^-}$ car $\lambda \notin \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$. Par la proposition 8 page 79, a est non dégénérée sur $E^+ \oplus E^-$ et Ω agit sur cet espace. Comme l'action de Ω commute avec la conjugaison complexe, sa restriction à $E^+ \oplus E^-$ est fidèle. Notons $\sharp$ et $\flat$ les deux isomorphismes réciproques induits par a entre $(E^+)^*$ et E^- . On montre alors, comme on l'a fait pour le théorème 5 page 80, que : $\gamma \in \Omega$ ssi $\gamma = (\gamma^+, \gamma^-)$ où :

- $\gamma^+ \in GL(E^+)$ commute avec $T_{|E^+}^{\mathbb{C}}$,
- $\gamma^- = \sharp \circ {}^t(\gamma^+)^{-1} \circ \flat \in GL(E^-)$.

De nouveau donc, la restriction de l'action de Ω à E^+ est fidèle et Ω agit comme le centralisateur de $T_{|E^+}$ $\square$

Dans les trois derniers cas, on a décomposé l'action de Ω sur un sous espace de E ou de $E^{\mathbb{C}}$. On peut en déduire la façon dont Ω agit sur E .

Corollaire 4

Si E est du type $E(\{\lambda, -\lambda\})$, $\lambda \in \mathbb{R}^$, la situation est la même que dans le cas algébriquement clos. L'ensemble $\mathcal{D}$ des décompositions de E adaptées simultanément à (a, T) et à $(a(\cdot, S\cdot), T)$ est aussi l'ensemble des décompositions adaptées à (a, T) et stables par S . Il est canoniquement en bijection avec $\mathcal{D}^+$: si $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n} \in \mathcal{D}$, $D^+ = (D_{p,q} \cap E^+)_{q \leq p \leq n} \in \mathcal{D}^+$. L'application réciproque est : $D^+ \mapsto \tilde{D}$, où $\tilde{D} = (\tilde{D}_{p,q})_{q \leq p \leq n} = (D_{p,q}^+ \oplus D_{p,q}^-)_{q \leq p \leq n}$ avec $(D_{p,q}^-)_{q \leq p \leq n} = ((D^+)^{\sharp}_{n+1-q, n+1-p})_{q \leq p \leq n}$. De plus :*

- L'action de N sur $\mathcal{D}^+$ commute avec cette bijection. Donc : $N = \{\gamma \in \Omega / \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k \text{ est triviale}\}$ et N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$.

• $G = \Omega/N$ agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} (\text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k) \cap \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k(\cdot, S \cdot))) = \prod_{k=0}^{n-1} (\text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k) \cap Z(S)) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} GL_{d_k}(\mathbb{R})$.

Si E est du type $E(\{\lambda, \bar{\lambda}\})$, $\lambda \in i\mathbb{R}^*$, l'ensemble $\mathcal{D}$ des décompositions de l'espace réel E adaptées simultanément à (a, T) et à $(a(\cdot, S \cdot), T)$ est aussi l'ensemble des décompositions de E adaptées à (a, T) et stables par S . $\mathcal{D}$ est canoniquement en bijection avec $\mathcal{D}'$: Si $D \in \mathcal{D}$, si $D^{\mathbb{C}}$ est sa complexifiée, $D' = (E' \cap D^{\mathbb{C}})_{p,q} \underset{q \leq p \leq n}{\text{est une décomposition de } E' \text{ adaptée à } (a, T)}$. L'application réciproque est : $D' \mapsto \tilde{D} = (\tilde{D}_{p,q})_{q \leq p \leq n} = (\Re(D'_{p,q} \oplus \overline{D'_{p,q}}))_{q \leq p \leq n}$. Alors :

• L'action de N sur $\mathcal{D}^+$ commute avec cette bijection. Donc : $N = \{\gamma \in \Omega \mid \text{l'action induite par } \gamma \text{ sur chaque } \check{E}_k \text{ est triviale}\}$ et N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$.

• R agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} (\text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k) \cap \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k(\cdot, S \cdot))) = \prod_{k=0}^{n-1} (\text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k) \cap Z(S)) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} U(\check{E}_k, \check{b}_k) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} U_{r_k, s_k}(\mathbb{C})$.

Si E est du type $E(\{\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}\})$, $\lambda \notin \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$, l'ensemble $\mathcal{D}$ des décompositions de l'espace réel E adaptées simultanément à (a, T) et à $(a(\cdot, S \cdot), T)$ est aussi l'ensemble des décompositions adaptées à (a, T) et stables par S . Il est canoniquement en bijection avec $\mathcal{D}^+$: si $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n} \in \mathcal{D}$, $D^+ = (D_{p,q}^{\mathbb{C}} \cap E^+)_{q \leq p \leq n} \in \mathcal{D}^+$. L'application réciproque est : $D^+ \mapsto \tilde{D}$, où $\tilde{D} = (\tilde{D}_{p,q})_{q \leq p \leq n} = (\Re(D_{p,q}^+ \oplus D_{p,q}^- \oplus \overline{D_{p,q}^+} \oplus \overline{D_{p,q}^-}))_{q \leq p \leq n}$ avec $(D_{p,q}^-)_{q \leq p \leq n} = ((D^+)_{n+1-q, n+1-p}^{\#})_{q \leq p \leq n}$. De plus :

• N agit simplement transitivement sur $\mathcal{D}$,

• G agit simplement transitivement sur $\prod_{k=0}^{n-1} (\text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k) \cap \text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k(\cdot, S \cdot))) = \prod_{k=0}^{n-1} (\text{Stab}(\check{E}_k, \check{b}^k) \cap Z(S)) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} GL(\check{E}_k^+) \simeq \prod_{k=0}^{n-1} GL_{d_k}(\mathbb{C})$.

Dans le premier et le dernier cas, les invariants de la situation sont les d_k , invariants de Jordan de $T|_{E^+}$. Le deuxième cas est plus complexe, les invariants sont les (r_k, s_k) , signatures des $\hat{b}^k$ sur les $\hat{E}_k$.

Démonstration : Le premier cas est identique au cas algébriquement clos, les deux autres très similaires : on reproduit dans tous les cas le raisonnement du corollaire 3 page 81.

III.3.3 Les bonnes bases

On peut à présent définir les bases adaptées à chaque situation, bases sur lesquelles, par construction, Ω agit simplement transitivement.

Les matrices de a et B , cas où la forme symétrique est non dégénérée et pas l'autre.

Définition 13 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni de deux formes bilinéaires a et b , telles que a est symétrique non dégénérée et que $b = a(\cdot, T \cdot)$ avec T nilpotent a -antiautoadjoint. On définit les bases adaptées à (E, a, T) , ou (E, a, b) de la même façon que dans le cas complexe (cf. def. 10 page 85). Cette fois cependant, les bases β^k des $\check{E}_k$, k impair, sont $\check{b}^k$ -pseudo-orthonormées, de signature (r_k, s_k) .

On reprend les objets et notations de la section III.1. $E = \bigoplus D_k$, $T(D_k) \subset D_k$. La

matrice de $a|_{D_{k+1}}$ dans β_{k+1} est une matrices-blocs de taille $k+1$. Si k est pair :

$$\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(a|_{D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & & +I_{r_k, s_k} \\ & & & & \cdot \\ & & & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & +I_{r_k, s_k} & & \\ -I_{r_k, s_k} & & & & \\ +I_{r_k, s_k} & & & & \end{pmatrix},$$

$$\text{si } k \text{ est impair, } d_k \text{ est pair et : } \text{Mat}_{\beta_{k+1}}(a|_{D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & & -J_{d_k/2}^- \\ & & & & \cdot \\ & & & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & +J_{d_k/2}^- & & \\ -J_{d_k/2}^- & & & & \\ +J_{d_k/2}^- & & & & \end{pmatrix},$$

et on vérifie encore que la matrice de a est symétrique. Dans tous les cas, $B = T$ et :

$$\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(B|_{D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} 0 & I_{d_k} & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & I_{d_k} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices de a et B , cas où la forme antisymétrique est non dégénérée et pas l'autre. Les bases adaptées se construisent de la même façon. La matrice de a est la même, à ceci près que les blocs $\pm I_{r_k, s_k}$ apparaissent quand k est impair et les blocs $\pm J_{d_k/2}^-$ quand k est pair. Cette fois, la matrice de a est donc antisymétrique. La matrices de $B = T$ est inchangée.

Les matrices de a et B , cas où E est du type $E(\{\lambda, -\lambda\})$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Les bases adaptées se définissent comme dans le cas algébriquement clos et les matrices sont les mêmes.

Les matrices de a et B , cas où E est du type $E(\{\lambda, \bar{\lambda}\})$, $\lambda \in i\mathbb{R}^*$.

Définition 14 Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni d'une forme bilinéaire non dégénérée a , symétrique ou antisymétrique et d'un automorphisme semi-simple S de valeurs propres imaginaires pures non nulles λ et $\bar{\lambda}$, a -antiautoadjoint. Par la proposition 8page 79, k est pair, on notera $k = 2d$. Une base β de E sera dite adaptée à (a, S) si :

$$\beta = ((x_j)_{j=1}^d, (y_j)_{j=1}^d), \forall j, x_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_j + \bar{z}_j), y_j = \frac{1}{i\sqrt{2}}(-z_j + \bar{z}_j),$$

où $(z_j)_{j=1}^d$ est une base complexe de $\ker(S^{\mathbb{C}} - \lambda \text{Id}_{E^{\mathbb{C}}}) \subset E^{\mathbb{C}}$, pseudo-orthonormée pour la forme sesquilinéaire non dégénérée $\underline{a}$, définie par : $\underline{a} = a(\cdot, \bar{\cdot})$ si a est symétrique et par : $\underline{a} = -ia(\cdot, \bar{\cdot})$ sinon. On note (r, s) la signature de $\underline{a}$; $r + s = d$.

Dans la base $((z_j)_{j=1}^d, (\overline{z_j})_{j=1}^d)$ de $E^{\mathbb{C}}$:

- si a est symétrique : $\text{Mat}(\underline{a}) = \begin{pmatrix} I_{r,s} & 0 \\ 0 & I_{r,s} \end{pmatrix}$, $\text{Mat}(a) = \begin{pmatrix} 0 & I_{r,s} \\ I_{r,s} & 0 \end{pmatrix}$,
- si a est antisymétrique : $\text{Mat}(\underline{a}) = \begin{pmatrix} I_{r,s} & 0 \\ 0 & -I_{r,s} \end{pmatrix}$, $\text{Mat}(a) = \begin{pmatrix} 0 & iI_{r,s} \\ -iI_{r,s} & 0 \end{pmatrix}$,
- dans tous les cas : $\text{Mat}(S) = \begin{pmatrix} \lambda I_d & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} I_d \end{pmatrix}$.

Dans une base adaptée β de E :

$$\text{Mat}(a) = \begin{pmatrix} I_{r,s} & 0 \\ 0 & I_{r,s} \end{pmatrix} \text{ si } a \text{ est symétrique, } \text{Mat}(a) = \begin{pmatrix} 0 & I_{r,s} \\ -I_{r,s} & 0 \end{pmatrix} \text{ sinon et :}$$

$$\text{Mat}(S) = \Lambda_d = \begin{pmatrix} 0 & -\nu I_d \\ \nu I_d & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } \lambda = i\nu, \nu \in \mathbb{R}^*.$$

Définition 15 Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni de deux formes bilinéaires non dégénérées a et b telles que a est symétrique et $b = a(\cdot, B\cdot)$ où B est un automorphisme a -antiautoadjoint de polynôme minimal $P = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$, $\lambda \in i\mathbb{R}$, de partie nilpotente T d'indice n . Soit $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ une décomposition de E adaptée à (a, T) et à $(a(\cdot, B\cdot), T)$ et $(\beta^k)_{k=0}^{n-1}$ un n -uplet de bases des $\check{E}_k$, adaptées à $(\check{b}^k, S)$ au sens de la définition 14 page 92.

On leur associe canoniquement une base β de E , obtenue en relevant les β^k en bases des $D_{n,k+1}$ et en les propageant par T en bases de tous les $D_{p,q}$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces bases, dites adaptées au triplet (E,a,B) ou au triplet (E,a,b) .

Soit $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ une décomposition de E adaptée à (a, T) et à $(a(\cdot, B \cdot), T)$; on considère alors la décomposition habituelle de E : $E = \bigoplus_k D_k$. Les D_k sont stables par B . On choisit β une base adaptée à (E, a, b) , elle fournit par restriction une base β_k de chaque D_k . Rappel: ici $d_k = \dim \tilde{E}_k^+ = \frac{1}{2} \dim D_{k+1}$. Dans β_{k+1} , la matrice de a est une matrice-blocs de taille $k+1$. Si k est pair:

$$\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} & & & & +I_{r_k, s_k, r_k, s_k} \\ & & & & \vdots \\ & & & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & +I_{r_k, s_k, r_k, s_k} & & \\ & -I_{r_k, s_k, r_k, s_k} & & & \\ +I_{r_k, s_k, r_k, s_k} & & & & \end{pmatrix}, \text{ où } I_{r, s, r, s} = \begin{pmatrix} I_{r, s} & 0 \\ 0 & I_{r, s} \end{pmatrix} \in \text{M}_{2(r+s)}(\mathbb{K}).$$

Si k est impair :

$$\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(a|D_{k+1}) = \begin{pmatrix} & & & -J_{r_k,s_k}^- \\ & & & \vdots \\ & & & \cdot \\ & & +J_{r_k,s_k}^- & \\ & & -J_{r_k,s_k}^- & \\ +J_{r_k,s_k}^- & & & \end{pmatrix}, \text{ où } J_{r,s}^- = \begin{pmatrix} 0 & I_{r,s} \\ -I_{r,s} & 0 \end{pmatrix} \in M_{2(r+s)}(\mathbb{K}),$$

Les blocs $J_{d_k}^\pm$ sont affectés de signes alternativement $+$ et $-$; voir le raisonnement effectué page 87 en fin de section III.2. On vérifie de même que a est dans les deux cas symétrique. Enfin, quelle que soit la parité de k :

$$\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(B_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} \Lambda_{d_k} & I_{2d_k} & & \\ & \Lambda_{d_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{2d_k} \\ & & & \Lambda_{d_k} \end{pmatrix} \text{ où } \Lambda_{d_k} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu I_{d_k} \\ \nu I_{d_k} & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda = i\nu \in i\mathbb{R}^*.$$

Les matrices de a et B , cas où E est du type $E(\{\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}\})$, $\lambda \notin \mathbb{R}^* \cup i\mathbb{R}^*$.

Définition 16 Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni d'une forme bilinéaire non dégénérée a , symétrique ou antisymétrique et d'un isomorphisme semi-simple S de valeurs propres ni réelles ni imaginaires pures $\pm\lambda$ et $\pm\bar{\lambda}$, a -antiautoadjoint. Nécessairement, k est multiple de 4, on notera $k = 4d$. Une base β de E sera dite adaptée à (a, S) si :

$$\beta = ((x_i^+)_{i=1}^d, (y_i^+)_{i=1}^d, (x_i^-)_{i=1}^d, (y_i^-)_{i=1}^d), \forall i, x_i^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_i^\pm + \bar{z}_i^\pm), y_i^\pm = \frac{1}{i\sqrt{2}}(-z_i^\pm + \bar{z}_i^\pm),$$

où $(z_i^+)_{i=1}^d$ est une base de $\ker(S^\mathbb{C} - \lambda \text{Id}_{E^\mathbb{C}}) \subset E^\mathbb{C}$ et où $(z_i^-)_{i=1}^d = ((z^+)_i^*)_{i=1}^d$. $(z_i^-)_{i=1}^d$ est une base de $\ker(S^\mathbb{C} + \lambda \text{Id}_{E^\mathbb{C}})$.

Dans la base $((z_i^+)_{i=1}^d, (\bar{z}_i^+)_{i=1}^d, (z_i^-)_{i=1}^d, (\bar{z}_i^-)_{i=1}^d)$ de $E^\mathbb{C}$: $\text{Mat}(a) = J_{2d}^+$ si a est symétrique, $\text{Mat}(a) = J_{2d}^-$ si a est antisymétrique et :

$$\text{Mat}(S) = \begin{pmatrix} \lambda I_d & & & \\ & \bar{\lambda} I_d & & \\ & & -\lambda I_d & \\ & & & -\bar{\lambda} I_d \end{pmatrix}$$

Dans une base adaptée β de E :

$$\text{Mat}(a) = J_{d,d}^+ = \begin{pmatrix} 0 & I_{d,d} \\ I_{d,d} & 0 \end{pmatrix} \text{ si } a \text{ est symétrique, } \text{Mat}(a) = J_{d,d}^- = \begin{pmatrix} 0 & I_{d,d} \\ -I_{d,d} & 0 \end{pmatrix} \text{ sinon et :}$$

$$\text{Mat}(S) = \begin{pmatrix} \Lambda_d & 0 \\ 0 & -\Lambda_d \end{pmatrix}.$$

Définition 17 Soit E un espace vectoriel de dimension k sur $\mathbb{R}$ muni de deux formes bilinéaires non dégénérées a et b telles que a est symétrique et $b = a(\cdot, B\cdot)$ où B est un automorphisme a -antiautoadjoint de polynôme minimal $P = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})(X + \lambda)(X + \bar{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$, de partie nilpotente T d'indice n . Soit $D = (D_{p,q})_{q \leq p \leq n}$ une décomposition de E adaptée à (a, T) et à $(a(\cdot, B\cdot), T)$ et $(\beta^k)_{k=0}^{n-1}$ un n -uplet de bases des $\tilde{E}_k$, adaptées à $(\tilde{b}^k, S)$ au sens de la définition 16 page 94.

On leur associe canoniquement une base β de E , obtenue en relevant les β^k en bases des $D_{n,k+1}$ et en les propageant par T en bases de tous les $D_{p,q}$. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces bases, dites adaptées au triplet (E, a, B) ou au triplet (E, a, b) .

Dans une telle base, et encore avec les mêmes notations, $\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}})$ est une matrice-

blocs de taille $k + 1$. Dans β_{k+1} :

$$\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(a_{|D_{k+1}|}) = \begin{pmatrix} & & & & \pm J_{d_k, d_k}^{\pm} \\ & & & & . \\ & & & & . \\ & & & & . \\ & & & +J_{d_k, d_k}^{\pm} & . \\ & -J_{d_k, d_k}^{\pm} & & & . \\ +J_{d_k, d_k}^{\pm} & & & & \end{pmatrix},$$

avec des J_{d_k, d_k}^+ si k est pair, J_{d_k, d_k}^- sinon. Quelle que soit la parité de k :

$$\text{Mat}_{\beta_{k+1}}(B_{|D_{k+1}}) = \begin{pmatrix} L'_{d_k} & I_{4d_k} & & \\ & L'_{d_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{4d_k} \\ & & & L'_{d_k} \end{pmatrix}, \text{ où } L'_d = \begin{pmatrix} \Lambda_d & 0 \\ 0 & -\Lambda_d \end{pmatrix} \in \text{M}_{4d}(\mathbb{R}).$$

La dimension de E est dans ce cas multiple de quatre.

Annexe : table des notations, table récapitulative des résultats

On récapitule ici la forme des matrices de a et de B dans les bases adaptées de chaque cas. On a placé ici aussi le rappel des notations utilisées pour certaines matrices apparaissant fréquemment. Commençons par une remarque.

Corollaire 5 (de la proposition 2 page 53 et des propositions 1 et 8 pages 49 et 79) *Soit V un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni de deux formes réflexives a et b , a étant non-dégénérée. On note B l'endomorphisme tel que : $b = a(\cdot, B \cdot)$ et on suppose que B admet une unique décomposition $B = S + N$ avec S semi-simple, N nilpotent, $SN = NS$. On note $\mu = \prod_i P_i^{n_i}$ le polynôme minimal de B , les P_i étant irréductibles, premiers entre eux deux à deux, et $\Omega = O(a) \cap O(b)$. Alors, les seuls sous-espaces non dégénérés de E , stables et non décomposables en somme directe a -orthogonale stable, sous l'action de Ω , sont :*

- (i) *Si a et b sont de même nature : les sous-espaces caractéristiques $\ker P_i^{n_i}(B)$ de B .*
- (ii) *Si a et b sont de nature opposée : les sous-espaces $\ker(P_i^{n_i}(B).P_i^{n_i}(-B))$. On rappelle que dans ce cas, $P(X)|_\mu \Rightarrow P(-X)|_\mu$.*

La somme directe, a - et b -orthogonale, de ces sous-espaces, est égale à V .

Remarque : Pour que tout endomorphisme B de $\text{End}(E)$ admette une décomposition $B = S + N$ comme requis dans le lemme, il suffit que $\mathbb{K}$ soit parfait ; voir la remarque de la page 56. Si ce n'est pas le cas, le présent résultat s'applique à $\overline{\mathbb{K}}$ et $E \otimes_{\mathbb{K}} \overline{\mathbb{K}}$, où $\overline{\mathbb{K}}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{K}$.

Démonstration : par les propositions 1 et 8, pour chacun des deux cas successivement énoncés, les espaces $\ker P_i^{n_i}(B)$ ou $\ker(P_i^{n_i}(B).P_i^{n_i}(-B))$ sont non dégénérés, stables. Par la proposition 2, leurs sous-espaces Ω -stables sont les $E_{p,q} = \text{Im } T^{n_i-p} \cap \ker T^q$, qui sont dégénérés s'ils sont sous-espaces stricts, d'où le résultat. $\square$

Remarque : Dans le cas (ii), où a et b sont de nature opposée, et pour les indices i tels que $P_i(X) \neq P_i(-X)$ (i.e. les racines de P ne sont pas dans $i\mathbb{R}$; ce sont les dernier et avant-avant-dernier cas de la table 2), alors $\ker(P_i^{n_i}(B).P_i^{n_i}(-B))$ est décomposable (d'une unique façon) sous l'action de Ω :

$$\ker(P_i^{n_i}(B).P_i^{n_i}(-B)) = [\ker P_i^{n_i}(B)] \oplus [\ker P_i^{n_i}(-B)].$$

Cette somme n'est cependant pas a -orthogonale ; au contraire, chacun des deux sous-espaces stables est a -totalement isotrope.

Soit donc $\{a, b\}$ une paire de formes réflexives sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel V , avec a non dégénérée, et $E \subset V$ un sous-espace non dégénéré, stable et indécomposable sous l'action de $\Omega = O(a) \cap O(b)$. Le polynôme minimal de B est noté P^n , avec P premier (cas (i) du corollaire et cas (ii) quand $P_i(X) = P_i(-X)$), ou $P = Q(X)Q(-X)$ et Q premier (cas (ii) du corollaire quand $P_i(X) \neq P_i(-X)$: on note $Q = P_i$). Enfin, on considère β une base de E adaptée à $\{a, b\}$.

Alors, dans β :

- $\text{Mat}(a)$ et $\text{Mat}(B)$ sont diagonales par blocs, respectivement $(A_k)_{k=0}^{n-1}$ et $(B_k)_{k=0}^{n-1}$, blocs correspondant aux mêmes vecteurs de base de β .

- Les matrices A_k et B_k sont elles-mêmes des matrices carrées de taille $(k+1)\delta_k$, où les δ_k sont des entiers, dans certains cas nécessairement pairs ou multiples de 4, et éventuellement nuls sauf si $k = n-1$. Plus précisément, les A_k et B_k sont des matrices formées de $(k+1) \times (k+1)$ blocs de taille δ_k . La forme de ces A_k et B_k est récapitulée, en utilisant cette décomposition en sous-blocs, et selon les différents cas possibles sur la paire $\{a, b\}$, dans la table 2.

Remarque : Les $(\delta_k)_{k=0}^{n-1}$ sont les dimensions des quotients $(\check{E}_k)_{k=0}^{n-1}$ définis page 53. Des dimensions d_k ont été introduites dans l'exposé ; selon les cas, $d_k = \dim \check{E}_k = \delta_k$, $d_k = \dim \check{E}'_k = \frac{1}{2} \dim \check{E}_k = \frac{1}{2} \delta_k$, $d_k = \dim \check{E}_k^+ = \dim \check{E}_k^- = \frac{1}{2} \dim \check{E}_k = \frac{1}{2} \delta_k$ ou enfin $d_k = \dim \check{E}_k^+ = \dim \check{E}_k^- = \dim \check{\bar{E}}_k^+ = \dim \check{\bar{E}}_k^- = \frac{1}{4} \dim \check{E}_k = \frac{1}{4} \delta_k$.

Enfin, la table 1 rappelle les notations employées pour les matrices usuelles du chapitre.

• $I_p \in M_p(\mathbb{K})$ est la matrice identité de taille p, • $I_{r,s} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix} \in M_{r+s}(\mathbb{K})$, • $I_{r,s,t,u} = \begin{pmatrix} I_{r,s} & 0 \\ 0 & I_{t,u} \end{pmatrix} \in M_{r+s+t+u}(\mathbb{K})$, • $J_d^\pm = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ \pm I_d & 0 \end{pmatrix} \in M_{2d}(\mathbb{K})$, • $J_{r,s}^\pm = \begin{pmatrix} 0 & I_{r,s} \\ \pm I_{r,s} & 0 \end{pmatrix} \in M_{2(r+s)}(\mathbb{K})$, • si $\lambda = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$, $(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$, on note $\Lambda_p = \begin{pmatrix} \mu I_p & -\nu I_p \\ \nu I_p & \mu I_p \end{pmatrix} \in M_{2p}(\mathbb{R})$. $\bar{\Lambda}_p$ est de même la matrice associée à $\bar{\lambda} = \mu - i\nu$. • si Λ_p est comme ci-dessus : * $L_p = \begin{pmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & \bar{\Lambda}_p \end{pmatrix} \in M_{4p}(\mathbb{R})$ * $L'_p = \begin{pmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & -\Lambda_p \end{pmatrix} \in M_{4p}(\mathbb{R})$.

TABLE 1 – Notation des matrices usuelles

a et b symétriques, $\deg P = 1$	$A_k = \begin{pmatrix} & & & I_{r_k, s_k} \\ & & & \cdot \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ I_{r_k, s_k} & & & \end{pmatrix} \quad B_k = \begin{pmatrix} \lambda I_{\delta_k} & I_{\delta_k} & & \\ & \lambda I_{\delta_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{\delta_k} \\ & & & \lambda I_{\delta_k} \end{pmatrix}$
avec $r_k + s_k = \delta_k$ et avec $\lambda \in \mathbb{R}$ la racine de P .	
a et b symétriques, $\deg P = 2$	$A_k = \begin{pmatrix} & & & J_{\delta_k/2}^+ \\ & & & \cdot \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ J_{\delta_k/2}^+ & & & \end{pmatrix} \quad B_k = \begin{pmatrix} \Lambda_{\delta_k/2} & I_{\delta_k} & & \\ & \Lambda_{\delta_k/2} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{\delta_k} \\ & & & \Lambda_{\delta_k/2} \end{pmatrix}$
avec pour tout k , δ_k pair et $\Lambda_{\delta_k/2}$ une matrice correspondant à $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une des racines de P (voir table 1).	
a et b antisymétriques, $\deg P = 1$	$A_k = \begin{pmatrix} & & & J_{\delta_k/2}^- \\ & & & \cdot \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ J_{\delta_k/2}^- & & & \end{pmatrix} \quad B_k = \begin{pmatrix} \lambda I_{\delta_k} & I_{\delta_k} & & \\ & \lambda I_{\delta_k} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{\delta_k} \\ & & & \lambda I_{\delta_k} \end{pmatrix}$
avec pour tout k , δ_k pair et avec $\lambda \in \mathbb{R}$ la racine de P .	
a et b antisymétriques, $\deg P = 2$	$A_k = \begin{pmatrix} & & & J_{\delta_k/2}^- \\ & & & \cdot \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ J_{\delta_k/2}^- & & & \end{pmatrix} \quad B_k = \begin{pmatrix} L_{\delta_k/4} & I_{\delta_k} & & \\ & L_{\delta_k/4} & \ddots & \\ & & \ddots & I_{\delta_k} \\ & & & L_{\delta_k/4} \end{pmatrix}$
avec pour tout k , $\delta_k \equiv 0 \pmod{4}$ et $L_{\delta_k/4}$ une matrice correspondant à $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une des racines de P (voir table 1).	
a symétrique non dégénérée, b antisymétrique dégénérée (i.e. $P = X$)	$\text{Pour } k \text{ pair: } A_k = \begin{pmatrix} & & & +I_{r_k, s_k} \\ & & & \cdot \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ +I_{r_k, s_k} & & & \\ & & & -I_{r_k, s_k} \\ & & & +I_{r_k, s_k} \end{pmatrix}, \text{ pour } k \text{ impair:}$
(Se poursuit page suivante)	

TABLE 2 – Forme des matrices de a et B dans les bases adaptées, cas réel — récapitulatif.

$$A_k = \begin{pmatrix} & & & -J_{\delta_k/2}^- \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & +J_{\delta_k/2}^- & \\ & -J_{\delta_k/2}^- & & \\ +J_{\delta_k/2}^- & & & \end{pmatrix} \quad \text{et pour tout } k: B_k = \begin{pmatrix} 0 & I_{\delta_k} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{\delta_k} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec pour tout k impair, δ_k pair et pour tout k pair, $r_k + s_k = \delta_k$.

a antisymétrique
non dégénérée,
 b symétrique
dégénérée
(*i.e.* $P = X$)

Mêmes matrices A_k et B_k que dans le cas précédent,
les formes pour k pair et k impair étant interverties, et donc avec :
pour tout k pair, δ_k pair et pour tout k impair, $r_k + s_k = \delta_k$.

$$A_k = \begin{pmatrix} & & & & \pm J_{\delta_k/2}^{\pm} \\ & & & & \vdots \\ & & & \cdot & \\ & & +J_{\delta_k/2}^{\pm} & & \\ -J_{\delta_k/2}^{\pm} & & & & \\ +J_{\delta_k/2}^{\pm} & & & & \end{pmatrix} \quad B_k = \begin{pmatrix} \lambda I_{\delta_k/2, \delta_k/2} & I_{\delta_k} & & & \\ & \lambda I_{\delta_k/2, \delta_k/2} & \ddots & & \\ & & \ddots & I_{\delta_k} & \\ & & & \lambda I_{\delta_k/2, \delta_k/2} \end{pmatrix}$$

avec pour tout k , δ_k pair et avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ la racine de Q .

a	symétrique
b	antisymétrique
P	premier,
	donc ici type
$P = (X + \lambda)(X - \lambda)$,	
$\lambda \in i\mathbb{R}^*$	

Pour k pair : $A_k =$

$$\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & +I_{r_k, s_k, r_k, s_k} \\ & & & . \\ & & . \\ & . \\ +I_{r_k, s_k, r_k, s_k} \\ -I_{r_k, s_k, r_k, s_k} \\ +I_{r_k, s_k, r_k, s_k} \end{pmatrix}, \text{ pour } k \text{ impair :$$

$$A_k = \begin{pmatrix} & & & & -J_{r_k, s_k}^- \\ & & & . \\ & & . \\ & . \\ +J_{r_k, s_k}^- \\ -J_{r_k, s_k}^- \\ +J_{r_k, s_k}^- \end{pmatrix}$$

et pour tout k : $B_k =$

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{\delta_k/2} & I_{\delta_k} & & & \\ & \Lambda_{\delta_k/2} & \ddots & & \\ & & \ddots & I_{\delta_k} & \\ & & & \Lambda_{\delta_k/2} \end{pmatrix}$$

avec pour tout k , δ_k pair, pour k pair, $r_k + s_k = \delta_k/2$
 et avec $\Lambda_{\delta_k/2}$ une matrice correspondant à $\lambda \in i\mathbb{R}^*$ une des racines de P (voir table 1)
 (ici, si P est premier, ses racines sont nécessairement imaginaires pures).

(Se poursuit page suivante)

TABLE 2 – *Forme des matrices de a et B dans les bases adaptées, cas réel — récapitulatif.*

a symétrique b antisymétrique $P = Q(X)Q(-X)$ Q premier, $\deg Q = 2$	$A_k = \begin{pmatrix} & & & & \pm J_{\delta_k/2, \delta_k/2}^{\pm} \\ & & & & \cdot \\ & & & \cdot & \\ & & + J_{\delta_k/2, \delta_k/2}^{\pm} & & \\ & - J_{\delta_k/2, \delta_k/2}^{\pm} & & & \\ + J_{\delta_k/2, \delta_k/2}^{\pm} & & & & \end{pmatrix}$ $B_k = \begin{pmatrix} L'_{\delta_k/4} & I_{\delta_k} & & & \\ & L'_{\delta_k/4} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & I_{\delta_k} & \\ & & & & L'_{\delta_k/4} \end{pmatrix}$
--	--

avec, dans le bloc A_k , des $J_{\delta_k/2, \delta_k/2}^+$ pour k pair et des $J_{\delta_k/2, \delta_k/2}^-$ pour k impair,
avec pour tout k , $\delta_k \equiv 0 \pmod{4}$ et
 $L'_{\delta_k/4}$ une matrice correspondant à $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$ une des racines de Q (voir table 1)
(ici, nécessairement, $Q = (X - \lambda)(X + \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R} \cup i\mathbb{R})$).

TABLE 2 – *Forme des matrices de a et B dans les bases adaptées, cas réel — récapitulatif.*