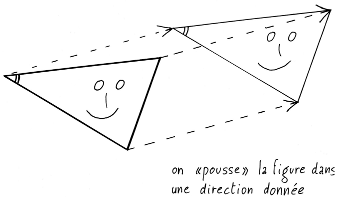
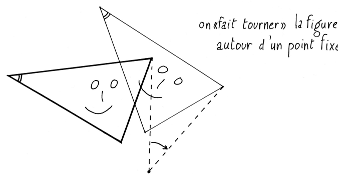
LES INVERSIONS

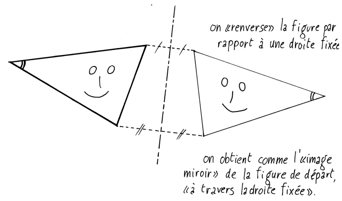
CE STAND VOUS PROPOSE UN PEU DE GÉOMÉTRIE DU PLAN ... INHABITUELLE. PARMI LES TRANSFORMATIONS DU PLAN, VOUS CONNAISSEZ PROBABLEMENT :



TRANSLATION



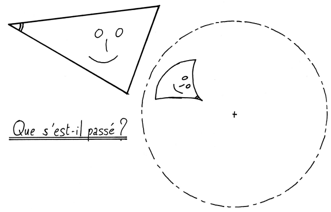
ROTATION



SYMÉTRIE

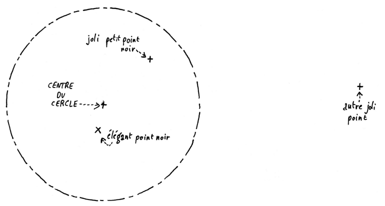
EN VOICI UNE AUTRE. QU'EN DITES-VOUS ?

IL S'AGIT D'UNE **INVERSION** PAR RAPPORT À UN CERCLE, UNE TRANSFORMATION MOINS CONNUE QUE LES PRÉCÉDENTES MAIS PLUS SURPRENANTE ET MATHÉMATIQUEMENT TRÈS RICHE. VOYONS EN COULISSE CE QUI SE PASSE.

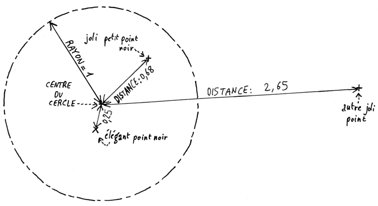


Comment fonctionne une inversion ?

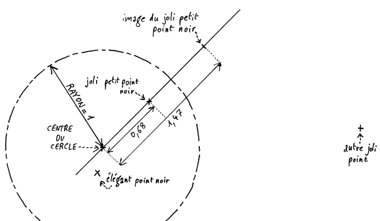
Voici un cercle et trois points.
Construisons l'inversé de chaque point par rapport au cercle;



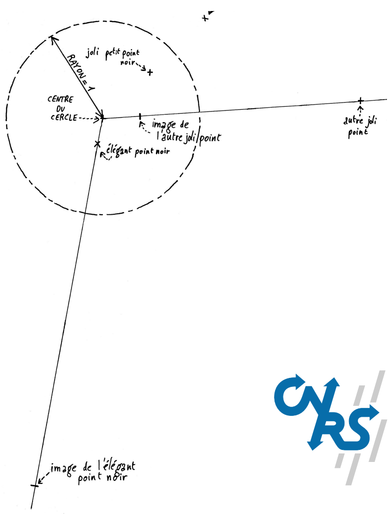
Pour le faire, il faut une unité de mesure; le plus simple est de prendre le rayon du cercle : on décrète que le cercle est de rayon "1" et on mesure tout le reste par rapport à lui.
Par exemple, le "joli petit point noir" est à la distance 0,68 du centre du cercle.
L'"autre joli point" est à 2,65 du centre et l'"élégant point noir" à seulement 0,25 du centre.



Construisons l'image du "joli petit point noir" par l'inversion par rapport au cerle.
Par définition, son image est sur la droite qui le relie au centre (et du même côté du centre), à une distance du centre telle que le produit (distance du joli point au centre) x (distance de son image au centre) = 1.
Ici, l'image sera à 1,47 du centre parce que : 0,68 x 1,47 = 1 (à peu près).



Construisons enfin l'image des deux autres points.
L'image de l'"autre joli point" est à 0.38 du centre car 2,65x0,38=1.
L'image de l' "élégant point noir" est à 4 du centre car 0,25x4=1.



ÇA S'APPELLE UNE INVERSION PARCE QUE LA DISTANCE DE L'IMAGE D'UN POINT AU CENTRE EST L'INVERSE DE LA DISTANCE DE CE POINT AU CENTRE : POUR L'"ÉLÉGANT POINT NOIR", 4=1/0,25.

Drôle d'idée ... l'inversion peut sembler une idée bizarre. Il se trouve qu'elle est une transformation pleine de propriétés étonnantes, que vous pourrez vérifier, si vous le voulez, avec les inverseurs disponibles sur la table.

Une première propriété (vous pouvez trouver pourquoi, c'est facile):

SI UN POINT EST SUR LE CERCLE D'INVERSION, SON IMAGE EST LUI-MÊME.

Ensuite (vous pouvez aussi trouver pourquoi) :

PAR UNE INVERSION, CE QUI EST À L'INTÉRIEUR DU CERCLE D'INVERSION PASSE À L'EXTÉRIEUR, ET VICE-VERSA.

En cela, une inversion ressemble à une symétrie par rapport à une droite. En fait, une inversion est comme une "**symétrie par rapport à un cercle**". Enfin, deux propriétés "magiques".

ELLE TRANSFORME LES CERCLES OU LES DROITES EN CERCLES OU EN DROITES.

C'est-à-dire que l'image de n'importe quel cercle, par une inversion, sera un cercle, ou une droite (le plus souvent un cercle, mais pas de même rayon!) ; l'image d'une droite sera un cercle ou une droite (encore le plus souvent un cercle). Étonnant[1]!

ELLE NE CONSERVE PAS LES DISTANCES (ON LE VOIT BIEN SUR LE 1ER DESSIN, L'INVERSÉ D'UN TRIANGLE), MAIS ELLE CONSERVE LES ANGLES[2] .

Remarque : *pour tracer l'image du visage-triangle, plus haut, je n'ai pas utilisé d'inverseur. J'ai simplement utilisé les deux propriétés ci-dessus. Jeu pour les petits rusés : trouvez comment !*

Seul inconvénient des inversions : elles sont difficiles à manipuler. Sauf avec les petits appareils mis aujourd'hui à votre disposition : des inverseurs. Avec eux, l'inversion se fait toute seule. A vous donc de manipuler, vérifier les propriétés plus haut, inverser des dessins de votre choix ...

1. Pour ceux que ça intéresse, ce sont en un sens les seules transformations qui ont cette propriété, c'est-à-dire que toute transformation ayant cette étonnante propriété est une composée d'inversions. En particulier, toutes les transformations usuelles rappelées au début : translations, rotations, symétries, on pourrait ajouter les homothéties, sont des composées d'inversions. Encore plus étonnant non ?

2. Cette propriété se vérifie immédiatement en observant la différentielle d'une inversion. Mais je ne comprends pas sa raison profonde. Si quelqu'un a une idée là-dessus, je suis preneur...

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

LES INVERSEURS

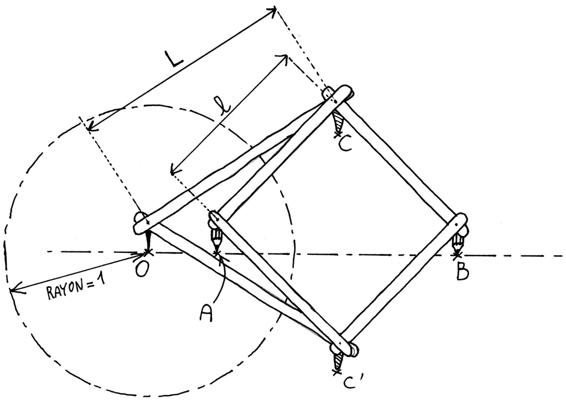
Les appareils à votre disposition sont des inverseurs Peaucelier, du nom de leur inventeur, un ... colonel de l'armée Française, qui a résolu par là, au 19ème siècle, un problème mathématico-mécanique de son temps (voir plus bas).

Ils sont munis : d'une pointe de compas et de deux crayons.

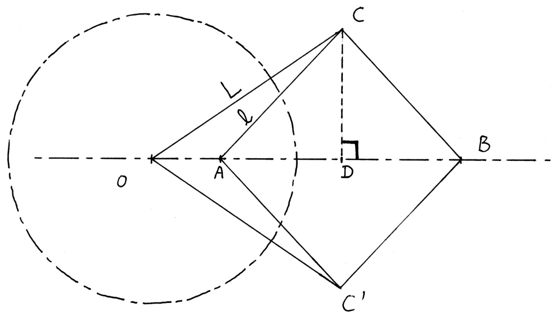
Lorsque vous plantez la pointe en un point P et que vous dessinez quelque chose avec un des crayons, l'autre trace l'inversé de votre dessin par rapport au cercle de centre P et de rayon 8,72 cm (parce que c'est comme ça).

COMMENT ÇA MARCHE ?

C'est simple en fait : ça fonctionne grâce au théorème de Pythagore.
Voici le schéma d'un inverseur.
O est la pointe de compas, A et B les pointes des crayons et C et C' les deux points qui glissent seulement sur le papier.
J'ai appelé L la longueur des grandes tiges et l la longueur des petites.
Comme d'habitude, la longueur de référence est le rayon du cercle, décrété égal à 1.
Pour que l'appareil inverse par rapport à ce cercle, il faut prendre $L^2 - l^2 = 1$.



Maintenant voici le dessin mathématique correspondant.
Comme les crayons sont en A et B, il faut montrer que
OA x OB = 1. *(Pourquoi ? Voir le panneau LES INVERSIONS)*.
Allons-y:
OA x OB = (OD-AD) x (OD+DB) = (OD-AD) x (OD+AD)
car AD = DB parce que les quatre petites tiges sont de même longueur.
Donc : OA x OB = $OD^2 - AD^2$.
Appliquez alors Pythagore dans ODC. A quoi est égal OD^2 ?
Appliquez aussi Pythagore dans ADC. A quoi est égal AD^2 ?
On trouve donc : OA x OB = $L^2 - l^2$. C'est-à-dire OA x OB = 1, comme on a choisi $L^2 - l^2 = 1$.



DEVINETTE.

Pour voir si vous avez bien compris : les inverseurs peuvent-ils tracer leur cercle d'inversion, de rayon 8,72cm ? Pourquoi ?

POURQUOI CETTE INVENTION ?

L'inverseur a été inventé du temps des machines à vapeur. Elles fournissent un mouvement en ligne : un piston qui se tend et se détend. Mais on cherche souvent à obtenir un mouvement circulaire, pour faire avancer une locomotive par exemple. L'idée de Peaucelier a été de se servir des inversions : elles transforment justement les droites (sauf celles qui passent par le centre d'inversion) en cercles ! Quand un crayon décrit une droite, l'autre décrit donc un cercle. On pensait un moment qu'un tel appareil articulé était impossible. Peaucelier a donc montré que non. Cependant, pour des raisons pratiques, notamment d'encombrement, son appareil n'a jamais été utilisé. On s'est débrouillé autrement. Nous le ressuscitons aujourd'hui pour jouer avec les inversions.

Bonnes manipulations !

Contact : Charles Boubel Charles.Boubel@ens-lyon.fr
Unité de mathématiques pures et appliquées (UMPA/ENSL)
École Normale Supérieure de Lyon

Réalisation des inverseurs :
Denis le Tourneau, ateliers de l'ENSL

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE