

Courbe orthoptique d'une conique II

Des dessins imaginaires pour voir la courbe orthoptique réelle

Romain Bondil*et Charles Boubel†

16 octobre 2009

Résumé

Cet article fait suite à l'article paru dans REF. On va maintenant comprendre, toujours dans le cadre de la géométrie projective complexe, les différentes formes de la courbe orthoptique réelle des hyperboles, et plus brièvement des autres coniques. Cette compréhension revêtant un aspect graphique, l'article illustre chaque cas par une figure. L'ensemble est rassemblé dans une figure dynamique unique [Bo].

Cet article est l'occasion d'une mise au point sur l'interaction entre un certain nombre de notions de géométrie euclidienne et la géométrie projective complexe.

Mots-clefs — *Courbe orthoptique, conique, points cycliques, birapport, polarité, formule de Laguerre.*

0 Introduction

Les points cycliques, pour ne citer qu'eux, n'ont pas été introduits au terme de spéculations abstraites mais se sont imposés d'eux-mêmes lorsque l'on a cherché à caractériser les équations cartésiennes des cercles parmi celles des coniques. Ainsi portés sur les fonts baptismaux, ces points s'étaient déjà garanti au moins un succès d'estime, mais c'est PLÜCKER qui leur apporta la gloire en les « reliant » aux foyers d'une conique euclidienne.

J.D. Eiden, in [Ei] p. xvii

Le théorème principal 8.2 de [O] dit que la courbe orthoptique \mathcal{O} d'une conique C est ou bien un cercle réel, ou bien un point ou bien vide. Si, dans le cas où C est une ellipse, on a quatre points évidents sur la courbe orthoptique, ce qui suffit pour montrer que \mathcal{O} est bien un vrai cercle, et même expliciter ce cercle, le cas des hyperboles est moins clair.

On connaît la conclusion par le calcul (cf. [O] § 0) :

*Lycée Joffre, Montpellier, en remerciant l'Université Montpellier II pour son soutien, romain.bondil@math.univ-montp2.fr

†Université de Strasbourg, charles.boubel@unistra.fr

Proposition 0.1 *Si C est l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, la courbe orthoptique de C , notée \mathcal{O} , est un vrai cercle si $a > b$, réduite à un point si $a = b$ et est vide si $a < b$.*

Le but essentiel de cet article est de retrouver ce résultat sans calculs, via la géométrie projective complexe.

Terminologie – Dans cette article, on parlera d'*hyperbole à angle aigu* pour désigner le cas $a < b$, et d'*hyperbole à angle obtus* pour le cas $a > b$.

De même, si on a vu au § 8 de [O], que, pour une parabole, la courbe orthoptique est une droite, on peut aussi comprendre, dans ce même cadre projectif complexe, pourquoi cette droite est la directrice (comme trouvé par le calcul au § 0 de [O]). Ceci peut bien sûr se faire par des considérations de géométrie élémentaire (cf. [Ca]), mais nous voulons montrer que la description projective complexe rend compte aussi de tous les invariants euclidiens comme les foyers et les directrices.

Cet article est centré autour des figures du § 2 (et de leurs analogues au § 8) : il s'agit essentiellement ici de *voir* la courbe orthoptique complexe $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, définie au § 8 de [O] via des *coupes réelles* bien choisies, faisant apparaître aussi la conique C , ses foyers et directrices.

Le coeur de l'argumentation sur la courbe orthoptique de l'hyperbole est donné aux § 4 et § 6. Les § 3 et 5 sont des mises au point nécessaires et d'intérêt plus général : on y explique ce qu'il faut entendre par sous-espace réel d'un espace projectif complexe (ce qui par exemple explique, en dimension un, le rôle crucial des cercles dans la sphère de Riemann) et comment les notions de birapport et d'orientation sont reliées. Ce dernier point est un cas particulier de la formule de Laguerre, dont nous donnons une preuve dans l'appendice A.

Les § 7 et § 8 reviennent sur le cas des paraboles et des ellipses. Le lecteur curieux verra qu'en incluant le cas des ellipses imaginaires, la vision de la courbe orthoptique de l'ellipse est très analogue à celle menée pour l'hyperbole (voir la synthèse du 8.5).

Enfin, l'appendice B est un peu à part dans le texte et n'est pas utilisé ailleurs. Il s'attache à donner une formulation purement projective du résultat 1.3 sur le centre de la courbe orthoptique.

Le niveau général de cet article est certainement un peu plus difficile que celui de [O], notamment parce qu'on y change de cartes affines. Tout est cependant démontré à l'exception du résultat reliant foyers et directrices aux points cycliques évoqué au début de cette introduction, et donné au § 1, et de quelques résultats généraux des § 3 et 5.

1 Points remarquables sur toutes les figures

Dans ce qui suit C désignera toujours une conique non dégénérée et $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ sa courbe orthoptique complexe.

Convention 1.1 (Pour toutes les figures) On note respectivement $\{I_1, I_2\}$ et $\{J_1, J_2\}$ les lieux du contact avec C des tangentes à C issues respectivement de I et J . La conique \mathcal{O}_C passe par les six points I, J, I_1, I_2, J_1 et J_2 , ce qui la détermine et permet son tracé dans chaque figure (sauf si C est un cercle).

Les foyers apparaissent alors via la propriété suivante :

Proposition 1.2 (Foyers) Avec les notations du 1.1, on peut noter que la conjugaison complexe induit une bijection de $\{I_1, I_2\}$ sur $\{J_1, J_2\}$; les indices sont pris tels que $\overline{I_k} = J_k$ pour $k = 1, 2$. Ainsi, les points formés par $(II_k) \cap (JJ_k)$ sont chacun stable par conjugaison i.e. sont des points réels.

On démontre que ce sont les foyers F_k de la conique C et que les polaires \widehat{F}_k des foyers d'une conique sont les directrices associées.

Pour une démonstration géométrique de cette propriété on renvoie à [Au] VII.5.12 ou [Be] 17.4, et pour une démonstration algébrique à [Sa] p. 146.

Enfin, la remarque suivante est évidente, de manière purement euclidienne.

Remarque 1.3 Si C est une conique à centre, de centre o , alors o est aussi le centre de son cercle orthoptique \mathcal{O} .

Preuve – On considère la symétrie σ_o de centre o . Comme σ_o est une isométrie euclidienne, alors la courbe orthoptique de $\sigma_o(C)$ est $\sigma_o(\mathcal{O})$. Comme $\sigma_o(C) = C$ alors $\sigma_o(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$. \square

Le lecteur intéressé trouvera une généralisation de ce résultat dans l'appendice B.

2 Dessins des trois cas pour les hyperboles

Soit C l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le plan affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, qu'on complète dans le plan projectif complexe $P_{\mathbb{C}}$, avec les mêmes conventions que dans [O] : notamment, on note $[X : Y : Z]$ les coordonnées homogènes; D_{∞} est alors la droite d'équation $Z = 0$.

On choisit de se placer dans le \mathbb{R} -plan projectif $\Pi = \{[X : Y : Z] / X \in \mathbb{R}, Y \in i\mathbb{R} \text{ et } Z \in \mathbb{R}\}$. Dans ce plan, notre hyperbole C ne rencontre pas la droite $D_{\infty} : Z = 0$ (puisque les deux points d'intersection sont dans le plan réel $\{[X : Y : Z] / X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R} \text{ et } Z \in \mathbb{R}\}$ et hors de $\{Y = 0\}$). On va donc dessiner C comme une ellipse dans Π : précisément, on choisit de dessiner une carte affine de Π où apparaissent l'axe focal Δ d'équation $Y = 0$ et la droite $D_{\infty} : Z = 0$. (Voir aussi la remarque 3.4).

Les trois cas, suivant que C soit à angle aigu, équilatère, ou à angle obtus donnent alors les trois figures (1, 2 et 3). L'étude détaillée de ces figures fait l'objet des paragraphes 4 et 6

Notation – Pour la conique \mathcal{O}_C qui passe par I et J , on note \tilde{I} et \tilde{J} les tangentes à \mathcal{O}_C en ces points. Cela signifie qu'on note la polarité par rapport à \mathcal{O}_C avec un tilde au lieu d'un chapeau, réservé lui à la polarité par rapport à C .

Sur toutes les figures, \mathcal{O}_C est en trait épais gris.

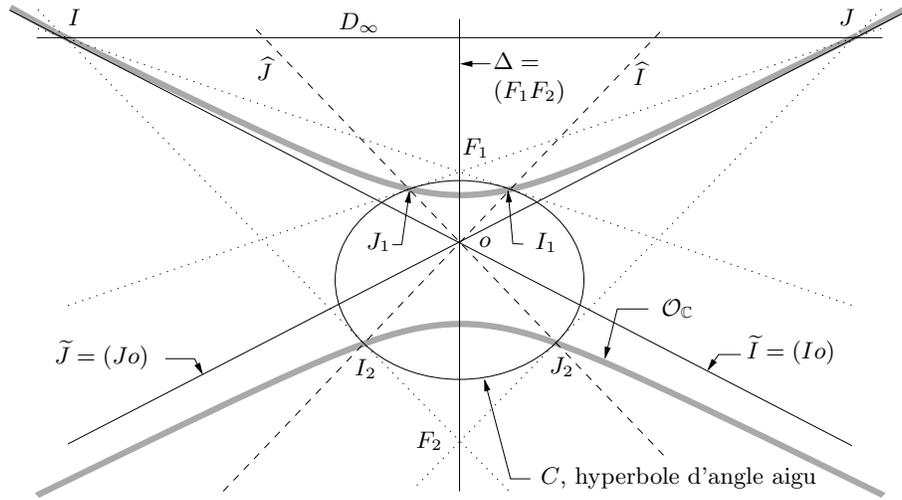


FIG. 1 – Cas où C est une hyperbole à angle aigu.

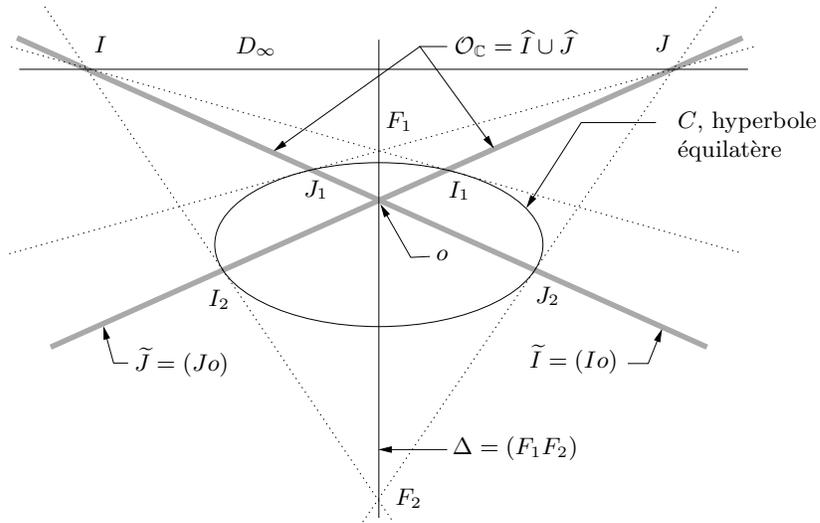


FIG. 2 – Lorsque C est une hyperbole équilatère, *i.e.* lorsque $J \in \hat{I}$ (et $I \in \hat{J}$), on voit sur la figure que la conique \mathcal{O}_C dégénère en l'union de droites imaginaires conjuguées $\hat{I} \cup \hat{J}$. Noter que les droites \tilde{I} et \tilde{J} du § 2 ne sont pas définies, car \mathcal{O}_C est une conique dégénérée, donc n'induit pas de polarité.

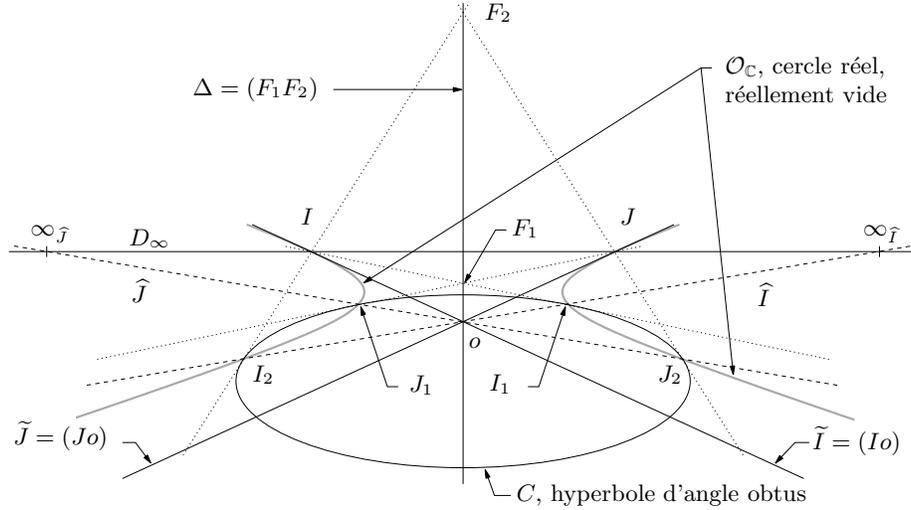


FIG. 3 – Cas où C est une hyperbole à angle obtus.

3 Précisions sur les sous-espaces réels d'un espace projectif complexe

Dans la section précédente, on a introduit le plan Π qui est essentiel dans cet article. On l'a appelé \mathbb{R} -plan projectif. Précisément :

Définition 3.1 Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n+1$ et $\mathbb{P}(E)$ l'espace projectif complexe de dimension n associé, avec π la projection canonique de $E \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{P}(E)$. On définit les \mathbb{R} -espaces projectifs de $\mathbb{P}(E)$, de dimension n , comme les $\pi(F \setminus \{0\})$, où F est un sous-espace vectoriel réel de $E \cong \mathbb{R}^{2(n+1)}$ engendré par $n+1$ vecteurs \mathbb{C} -libres.

Outre les \mathbb{R} -plans d'un plan projectif complexe, on utilisera plus loin les \mathbb{R} -droites d'une droite projective complexe (cf. § 5).

La propriété suivante découle facilement de la définition d'un repère projectif (exercice) :

Proposition 3.2 Par $n+2$ points distincts de $\mathbb{P}(E)$ formant un repère projectif passe exactement un \mathbb{R} -espace projectif de dimension n .

Cette proposition nous permet de caractériser plus géométriquement le plan Π défini au § 2. On voit aussi pourquoi Π est le \mathbb{R} -plan adéquat pour les figures.

Remarque 3.3 Le plan Π du § 2 est l'unique \mathbb{R} -plan contenant I, J et les foyers F_1, F_2 de l'hyperbole C .

Les propriétés du plan Π qu'on utilisera sont regroupées dans la dernière :

Remarque 3.4 En général, si C est une conique de $P_{\mathbb{C}}$, l'intersection de la conique C avec un \mathbb{R} -plan de $P_{\mathbb{C}}$ est un ensemble fini (vide, singleton, paire). Le \mathbb{R} -plan Π choisi ici est exceptionnel : il est tel que la trace de C , et de la plupart des droites en jeu, y soit respectivement une conique et des droites réelles.

Ainsi, dans $\Pi = \{[X : Y : Z] / X, Z \in \mathbb{R} \text{ et } Y \in i\mathbb{R}\}$, l'hyperbole $C : X^2/a^2 - Y^2/b^2 = Z^2$ devient, en posant $Y = iT$, définie par $X^2/a^2 + T^2/b^2 = Z^2$. En considérant encore $\{Z = 0\}$ comme droite à l'infini, $C \cap \Pi$ est une ellipse.

En outre $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \cap \Pi$ est aussi une conique réelle : en effet, on a vu au 1.3 que \mathcal{O} et C ont même centre o , et donc, dans les mêmes coordonnées que ci-dessus, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ a une équation de la forme $aX^2 + bY^2 + cZ^2 = 0$.

Enfin, une tangence réelle dans Π traduit bien l'existence d'un vecteur tangent commun, donc une tangence dans $P_{\mathbb{C}}$ des objets complexes correspondants. En effet, ces derniers sont tous des courbes complexes, objets de dimension un.

4 Début de la discussion pour les hyperboles

Le but de ce paragraphe est de montrer que le fait que la courbe orthoptique réelle \mathcal{O} de l'hyperbole C est vide ou non se voit dans le plan Π .

Par définition les droites \tilde{I} et \tilde{J} sont les tangentes à $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ aux points I et J . La place de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \cap \Pi$ par rapport à ces deux droites est essentielle pour la suite.

Remarque 4.1 La conique réelle $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \cap \Pi$ est incluse dans un demi-plan affine délimité par $\tilde{I} \cup \tilde{J}$.

La remarque précédente se déduit de la remarque 4.2 suivante. Rappelons d'abord qu'une conique projective réelle propre est toujours projectivement équivalente à une ellipse, en particulier homéomorphe à un cercle.

Remarque 4.2 Soit d_1 et d_2 deux droites distinctes dans un plan projectif réel P . Alors $P \setminus d_1$ est un plan affine, et donc $P \setminus (d_1 \cup d_2)$ est la réunion disjointe de deux demi-plans affines ouverts. Si C est une conique tangente aux deux droites d_i , alors comme C est connexe, elle est incluse dans un de ces demi-plans (fermés).

La non vacuité de la courbe orthoptique réelle \mathcal{O} , autrement dit l'existence de points réels sur la courbe $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, se voit alors dans le plan Π grâce à la :

Proposition 4.3 La courbe orthoptique réelle \mathcal{O} est non vide si, et seulement si, les droites $\hat{I} = (I_1 I_2)$ et $\hat{J} = (J_1 J_2)$ et l'axe focal Δ sont toutes les trois dans le même demi-plan de $\Pi \setminus (\tilde{I} \cup \tilde{J})$.

Preuve – Rappelons que la courbe orthoptique réelle \mathcal{O} , si elle est non vide, est un cercle centré en o , qui donc coupe l'axe réel $\{Y = 0\}$, qui est l'axe focal Δ de l'hyperbole C . On voit donc que :

$$\mathcal{O} \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \cap \Delta \neq \emptyset. \quad (*)$$

Or cette droite réelle Δ est incluse dans Π , encore comme la droite d'équation $Y = 0$, et donc $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \cap \Delta \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \cap \Pi$.

Mais $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \cap \Pi$ est une conique réelle (cf. fin de la remarque 3.4) incluse dans un des deux demi-plans de $\Pi \setminus (\tilde{I} \cup \tilde{J})$.

On distingue ce demi-plan par le fait qu'il contient les droites $\hat{I} = (I_1 I_2)$ et $\hat{J} = (J_1 J_2)$, puisque ces quatre points I_1, I_2, J_1, J_2 sont sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. Or :

Affirmation – *Pour une droite projective réelle δ , l'intersection de δ avec la conique $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \cap \Pi$ de Π est non vide si, et seulement si, δ est dans le même demi-plan que la conique $\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \cap \Pi$.*

L'équivalence (*) vue plus haut et l'affirmation donnent la proposition. \square

Preuve de l'affirmation – Une façon de voir ceci est d'utiliser le fait qu'une telle droite δ disconnecte le demi-plan considéré et que $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ a des points de part et d'autre de δ . Une autre est d'utiliser des coordonnées où $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ a pour équation $xy = 1$. \square

Les figures 1 et 3 montrent les deux cas possibles pour les trois droites de la propriété 4.3. Le fait que cette différence de configuration est bien liée à l'angle entre les asymptotes va être démontré au § 6. Auparavant, il est nécessaire de s'intéresser à certains problèmes d'orientation.

5 Interlude sur les cercles et les orientations

Orientation

On renvoie à [O] § 2.2 pour la définition de la paire cyclique $\{I, J\}$ induite par la structure euclidienne q_0 et égale à $\{[1 : i : 0], [1 : -i : 0]\}$ dans tout système de coordonnées q_0 -orthonormées.

Remarque 5.1 *Tout déplacement f (resp. tout antidéplacement) de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ se prolonge en une homographie de $P_{\mathbb{C}}$ laissant fixe chacun des deux points $[1 : i : 0]$ et $[1 : -i : 0]$ (resp. les permutant).*

Preuve – Avec l'orientation des coordonnées choisies, pour n'importe quel vecteur v non nul dans le plan vectoriel $\vec{\mathbb{A}}_{\mathbb{R}}$ sous-jacent à la droite $D_{\infty}^{\mathbb{R}}$ de $P_{\mathbb{R}}$, si on note v^{\perp} le vecteur de même norme directement orthogonal à v , alors $v + iv^{\perp}$ est un représentant du point $[1 : i : 0]$ de D_{∞} . (Voir p.ex. [Ei] p. 489 et seq. sur cette notion de complexification). Or l'ensemble des vecteurs de cette forme est stable par l'action d'un déplacement f . Un antidéplacement enverra $v + iv^{\perp}$ sur un vecteur de la forme $w - iw^{\perp}$. \square

En conséquence :

Notation 5.2 *Une fois l'orientation de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ choisie, la remarque 5.1 montre qu'il est alors canonique de distinguer chacun des deux points de la paire $\{I, J\}$. On note I le point $[1 : i : 0]$ et J le point $[1 : -i : 0]$.*

Remarque 5.3 *Dans [Be] 8.8.6.2., le choix de notation est opposé : on y prend $I = [1 : -i : 0]$. Ceci change la formule de Laguerre (Appendice A).*

A propos des cercles d'une droite projective complexe

Dans le § 6, on utilise des *cercles* de la droite projective complexe $D_\infty^{\mathbb{C}}$. En voyant cette dernière comme une sphère de Riemann S^2 , on peut les voir comme les cercles de cette sphère. Plus algébriquement, nous définissons ces cercles comme les \mathbb{R} -espaces projectifs de dim. 1 de $D_\infty^{\mathbb{C}}$ (cf. la définition 3.1).

Nous utiliserons essentiellement la conséquence immédiate de la proposition 3.2 :

Remarque 5.4 *Par trois points distincts d'une droite projective complexe D passe un et un seul cercle.*

Le lecteur peut se contenter de cette « évidence » et passer le point 5.5 suivant. Le lecteur plus scrupuleux prendra garde au fait que cette notion de cercle, vue dans $D_\infty^{\mathbb{C}} \subset P_{\mathbb{C}}$, est bien différente de celle de cercle du plan affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}} \subset P_{\mathbb{C}}$. Notamment, ces cercles, définis modulo l'action des homographies de $D_\infty^{\mathbb{C}}$, n'ont ni centre ni diamètre, comme nous l'expliquons maintenant :

Propriété-définition 5.5 (Cercles)

Soit D une droite projective complexe. Soit $\Gamma \subset D$. Se valent :

1. Γ est une \mathbb{R} -droite projective de D au sens de 3.1,
2. En choisissant un système de coordonnées sur D qui identifie D à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, Γ est l'image de la droite $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ canonique de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ par une homographie.
3. $\Gamma = \{z \in D, [a, b, c, z] \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$, où a, b, c sont trois points distincts de D ,
4. dans n'importe quel système de coordonnées $[z_1 : z_2]$, Γ a pour équation :
$$\alpha z_1 \bar{z}_1 + \beta \bar{z}_1 z_2 + \bar{\beta} z_1 \bar{z}_2 + \gamma z_2 \bar{z}_2 = 0 \quad \text{où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R} \text{ et } \alpha\gamma - \beta\bar{\beta} < 0.$$
5. Γ s'écrit dans une carte bien choisie de D comme l'ensemble des $z = x + iy$ (avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) tels que $ax + by = c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.
6. Γ s'écrit dans toute autre carte de D que celles du point précédent comme l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - a|^2 = r^2$ où $(a, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^*$ sont fixés.

Par définition, Γ est alors dit un cercle de la droite projective complexe D .

On laisse la preuve en exercice, en faisant remarquer notamment que $1 \Leftrightarrow 2$ est immédiate et $1 \Leftrightarrow 3$ quasi immédiate. Un calcul montre $2 \Leftrightarrow 4$. Le point 4 assure la transition avec la suite¹ : $4 \Leftrightarrow 5 \Leftrightarrow 6$ sont des changements de carte. Notons deux

¹Le lecteur savant remarquera sans doute que, loin d'être purement calculatoire, le point 4 est au contraire géométriquement profond. Il identifie en effet l'espace des cercles de la sphère de Riemann avec l'espace $\mathbb{P}(\text{Herm}_2^-)$ des matrices hermitiennes $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma \end{pmatrix}$, de déterminant strictement négatif, à proportionnalité réelle près. Or le déterminant est une forme quadratique, de signature $(1, 3)$, sur l'espace des matrices hermitiennes $\text{Herm}_2 \simeq \mathbb{R}^4$. Dans $\mathbb{P}(\text{Herm}_2) \simeq \mathbb{RP}^3$, son lieu d'annulation est donc une quadrique, et plus précisément une sphère : la sphère de Riemann. L'espace des cercles (matrices de $\det. < 0$) est alors l'« extérieur » de cette sphère, dit « espace de Sitter de dimension 3 ». Par chacun de ses points (une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \gamma \end{pmatrix}$, à prop. près), on mène un cône tangent (le long d'un cercle) à la sphère de Riemann. C'est l'interprétation géométrique de la correspondance entre un cercle et son équation, donnée au point 4.

faits : les propriétés fondamentales ici de ces objets sont 1-2-3 ; il se trouve que le point 6 justifie leur nom mais on n'en fait nul usage.

Comment lire l'orientation d'un angle ?

Avertissement pour le lecteur « aguerri » – *Le lecteur connaissant la formule de Laguerre sera surpris par la fin de ce § 5, puisque tout ce suit est un cas particulier de cette formule. Notre motivation est double. D'un côté, on ne développe ici que ce qui est strictement nécessaire (et purement lié à la notion d'orientation) pour la fin de notre étude de la courbe orthoptique des hyperboles. De l'autre, cette étude précise des notions d'orientation est un point clef, souvent négligé, de la démonstration de la formule de Laguerre (cf. appendice A).*

On a vu, dans [O] § 2.3., que la donnée de la paire cyclique $\{I, J\}$ définit la structure euclidienne sur $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, et au lemme 6.1. de [O] qu'on peut donc lire sur la droite complexe $D_{\infty}^{\mathbb{C}}$ l'orthogonalité de deux droites affines D_1 et D_2 via la relation $[I, J, \infty_{D_1}, \infty_{D_2}] = -1$. A son tour, cette propriété se traduit de manière géométrique en 5.7 ci-dessous, entraînant une lecture à l'infini de l'orientation des angles. Dans la suite, on note $(\widehat{D_1, D_2})$ l'angle orienté de deux droites D_1 et D_2 , défini modulo π .

Rappel 5.6 *Notons qu'une orientation de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ est le choix d'une orientation du plan vectoriel associé $\overrightarrow{\mathbb{A}_{\mathbb{R}}}$, ce qui revient au même qu'une orientation de $\overrightarrow{\mathbb{P}(\mathbb{A}_{\mathbb{R}})} = D_{\infty}^{\mathbb{R}}$ la droite à l'infini de $P_{\mathbb{R}}$.*

Lemme 5.7 (i) *Deux droites D_1 et D_2 du plan affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ sont orthogonales si, et seulement si, dans $D_{\infty}^{\mathbb{C}}$ les quatre points I, J, ∞_{D_1} et ∞_{D_2} sont sur le même cercle, au sens de 5.5.*

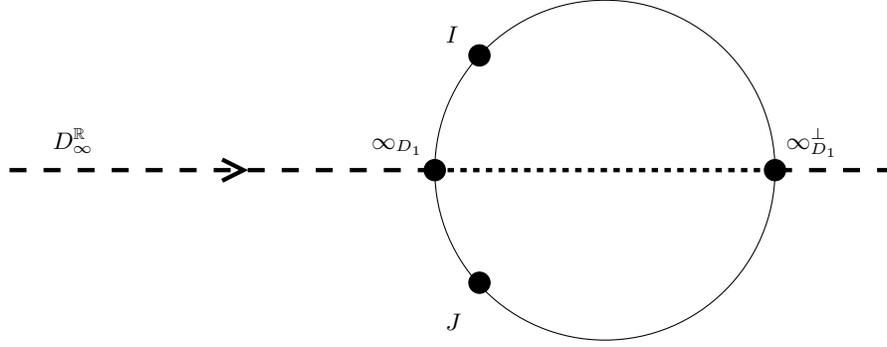
(ii) *Le cercle (I, J, ∞_{D_1}) partage $D_{\infty}^{\mathbb{R}}$ en deux composantes connexes : ∞_{D_2} appartient à la première si et seulement si $(\widehat{D_1, D_2}) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et à la deuxième si, et seulement si $(\widehat{D_1, D_2}) \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$. Précisément : au point ∞_{D_1} , la droite orientée $D_{\infty}^{\mathbb{R}}$ est entrante dans la première zone (cf. figure 4).*

Preuve du lemme – (i) Sens \Rightarrow : la propriété $[I, J, \infty_{D_1}, \infty_{D_2}] = -1 \in \mathbb{R}$ donne, par 5.5 3., que les quatre points sont cocycliques.

Sens \Leftarrow : la direction $\infty_{D_1}^{\perp}$ orthogonale à D_1 est le point de $D_{\infty}^{\mathbb{R}}$ vérifiant $[I, J, \infty_{D_1}, z] = -1 \in \mathbb{R}$, donc est sur le cercle (I, J, ∞_{D_1}) , donc est l'unique point où ce cercle recoupe $D_{\infty}^{\mathbb{R}}$. Donc si ∞_{D_2} est sur ce cercle, $\infty_{D_2} = \infty_{D_1}^{\perp}$.

(ii) Par définition, ∞_{D_2} balaye $D_{\infty}^{\mathbb{R}}$ dans le sens positif si et seulement si $(\widehat{D_1, D_2}) \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ va croissant. Lorsque D_2 prend la valeur D_1 (angle nul), $(\widehat{D_1, D_2})$ quitte donc la zone $] -\frac{\pi}{2}, 0[$ et pénètre dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, modulo π . \square

La remarque suivante s'insère alors naturellement. Elle interprète l'orientation en termes de birapport mais ne sera utile qu'à l'appendice A pour la formule de Laguerre ; elle peut donc être passée.



L'angle $(\widehat{D_1, D_2})$ est $\begin{cases} \text{dans }]0, \frac{\pi}{2}[\text{ si } \infty_{D_2} \text{ est dans la zone } \text{-----} \\ \text{dans }]-\frac{\pi}{2}, 0[\text{ si } \infty_{D_2} \text{ est dans la zone } \text{- - - - -} \\ \text{droit si } \infty_{D_2} \text{ est au point } \infty_{D_1}^{\perp}. \end{cases}$

FIG. 4 – Dans D_{∞} , on a représenté $D_{\infty}^{\mathbb{R}}$ orientée, la paire cyclique $\{I, J\}$, le point à l'infini ∞_{D_1} d'une droite D_1 et le cercle (I, J, ∞_{D_1}) , recoupant $D_{\infty}^{\mathbb{R}}$ en la direction $\infty_{D_1}^{\perp}$ orthogonale à D_1 .

Remarque 5.8 Soit deux droites D_1 et D_2 de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ orienté. Alors : $(\widehat{D_1, D_2}) \in]0, \pi/2[\text{ mod. } \pi \Leftrightarrow \text{Im}[I, J, \infty_{D_1}, \infty_{D_2}] < 0$.

Preuve de la remarque – Comme le cercle I, J, ∞_{D_1} est l'ensemble des $z \in D_{\infty}^{\mathbb{C}}$ tels que $\text{Im}[I, J, \infty_{D_1}, z] = 0$, les deux composantes connexes de l'énoncé sont caractérisées par les inégalités $\text{Im}[I, J, \infty_{D_1}, z] > 0$ (resp. < 0). Reste à les identifier :

Par connexité, il suffit d'évaluer $\text{Im}[I, J, \infty_{D_1}, \infty_{D_2}]$ pour un couple (D_1, D_2) bien choisi.

Or pour $\infty_{D_1} = 0$ et $\infty_{D_2} = 1$ (droite de pente 1), on a $[I, J, 0, 1] = -i$ et donc $\text{Im}[I, J, \infty_{D_1}, \infty_{D_2}] < 0$ pour $(\widehat{D_1, D_2}) = \pi/4$. \square

6 Fin de la discussion pour les hyperboles

On reprend la discussion avec les mêmes notations qu'au § 4. La situation dans le plan Π défini au § 4 est la suivante : C ne coupe pas D_{∞} , les deux tangentes (II_1) et (II_2) à C issues de I apparaissent comme des droites réelles, et de même (JJ_1) et (JJ_2) . Les foyers F_1 et F_2 sont sur $\{Y = 0\}$, qui est donc l'axe focal Δ . (Tout ceci est dessiné aux figures 1, 2, 3.)

Notation 6.1 Dans ce qui suit, on désignera par H et H' les asymptotes de C et $h = H \cap D_{\infty}$ et $h' = H' \cap D_{\infty}$ leurs points à l'infini. Précisément, on ordonne le couple d'asymptotes (H, H') par le fait que le secteur balayé positivement de H vers H' est celui contenant l'hyperbole C .

De la sorte l'hyperbole C est dite d'« angle aigu », (resp. « obtus ») si l'angle orienté de droite $\theta = \widehat{(H, H')}$ est dans $]0, \pi/2[$ (resp. $]\pi/2, \pi[$), modulo π .

On se place désormais sur la droite projective complexe D_∞ (droite $\{Z = 0\}$ de $P_{\mathbb{C}}$). On se restreint à la carte $\{X = 1\}$ de D_∞ . Via la coordonnée Y , cette carte s'identifie à \mathbb{C} et la droite $D_\infty^{\mathbb{R}}$ s'identifie à \mathbb{R} . Par symétrie, les points h et h' y sont deux réels opposés et le point $\infty_\Delta = \Delta \cap D_\infty$ y est l'origine 0. Comme C coupe son axe focal Δ , les trois droites H, Δ, H' s'énumèrent dans cet ordre dans le sens direct, ce qui se lit aussi sur la droite $D_\infty^{\mathbb{R}}$. On a donc montré le :

Lemme 6.2 *Notons V la carte $\{X = 1\}$ de la droite projective complexe D_∞ . Cette carte V s'identifie à \mathbb{C} via la coordonnée Y . Dans V , les deux points à l'infini h et h' des asymptotes sont deux nombres réels opposés, qui vérifient, avec la convention du 6.1 : $h < 0 < h' = -h$, où 0 est le point à l'infini de l'axe focal.*

Le lemme suivant montre comment l'angle entre les asymptotes se traduit par une configuration dans le plan complexe $V \cong \mathbb{C}$:

Lemme 6.3 *L'angle $\theta = \widehat{(H, H')}$ entre les deux asymptotes de C est aigu si, et seulement si, dans D_∞ , la paire $\{I, J\}$ d'une part, et le point ∞_Δ d'autre part, sont de part et d'autre du cercle Γ passant par h et h' orthogonal à l'axe réel. Ceci est illustré figure 5, dans la carte V définie au 6.2, où ∞_Δ est l'origine 0.*

Remarque 6.4 *Dans $D_\infty^{\mathbb{C}}$ muni de la \mathbb{R} -droite $D_\infty^{\mathbb{R}}$, on a une notion naturelle d'orthogonalité. Exiger que le cercle Γ soit orthogonal à l'axe réel signifie que les deux tangentes à Γ aux points h et h' sont orthogonales à l'axe réel, ou encore que Γ est stable par conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$ dans D_∞ . Ce cercle existe et est unique : dans une carte plaçant h' à l'infini, Γ est la droite issue de h orthogonale à $D_\infty^{\mathbb{R}}$. (C'est bien cette propriété qui définit correctement Γ dans la droite projective complexe $D_\infty^{\mathbb{C}}$, où les cercles n'ont ni centre ni diamètre, cf. 5.5)*

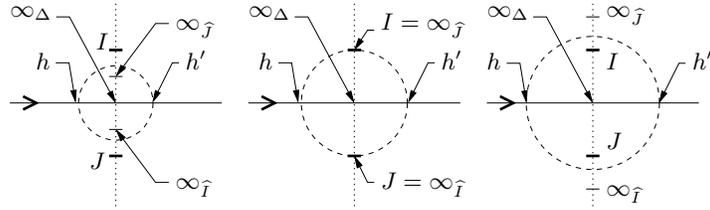
Preuve du lemme 6.3 – Soit Γ' le cercle (h, I, J) . D'après le lemme 5.7, dans la carte V , une droite D vérifie $\widehat{(H, D)} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ si, et seulement si, ∞_D est à l'intérieur du disque de bord Γ' .

Or comme Γ' est aussi invariant par conjugaison, les cercles Γ et Γ' sont tangents en h (cf. la remarque ci-dessus). Le cas où Γ est intérieur à Γ' , correspondant au cas $\widehat{(H, H')} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ par ce qui précède, se produit donc si, et seulement si, la paire $\{I, J\}$ et le point ∞_Δ sont de part et d'autre de Γ . \square

Pour conclure, reste à relier les deux conditions obtenues au 4.3 et au 6.3.

Or l'application σ envoyant chaque point $p \in D_\infty$ sur son polaire $\widehat{p} \cap D_\infty = \infty_{\widehat{p}}$ par rapport à C , est, par le lemme clef 5.1. et la remarque 4.8. de [O], le prolongement à D_∞ de la symétrie affine par rapport à H parallèlement à H' . (Noter qu'on peut aussi ici échanger les rôles de H et H' , cela ne change rien.).

Dans notre carte V de D_∞ , cette application est l'homographie qui fixe h et $h' = -h$, et qui permute 0 et ∞ . Autrement dit :



C hyperbole d'angle aigu. C hyperbole équilatère. C hyperbole d'angle obtus.
 \mathcal{O} cercle non vide dans $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$. \mathcal{O} cercle dégénéré, \mathcal{O} cercle vide dans $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$.
réduit à un point dans $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$.

FIG. 5 – La trace des différents cas possibles, dans la droite complexe à l'infini D_{∞} , quand C est une hyperbole. La droite horizontale est $D_{\infty}^{\mathbb{R}}$, on indique son orientation induite par celle de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, ainsi que le cercle Γ passant par $\{h, h'\}$ et orthogonal à $D_{\infty}^{\mathbb{R}}$. En pointillés fins, le cercle (I, J, ∞_{Δ}) , apparaissant comme une droite, contient les points $\infty_{\hat{\Gamma}}$ et $\infty_{\hat{J}}$. Il est également la trace à l'infini $\Pi \cap D_{\infty}$ de Π .

$$\sigma : z \mapsto \frac{h^2}{z}. \quad (*)$$

Cette application envoie les points extérieurs au cercle Γ sur les points intérieurs à ce cercle.

Or, par 4.3, si C n'est pas équilatère, la courbe orthoptique réelle de C est non vide si, et seulement si, les droites Δ , \hat{I} et \hat{J} sont dans le même demi-plan affine de Π délimité par $\tilde{I} \cup \tilde{J}$. Cette condition vue sur la droite D_{∞} équivaut à dire que ∞_{Δ} , $\infty_{\hat{I}}$ et $\infty_{\hat{J}}$ sont, sur le cercle (I, J, ∞_{Δ}) , d'un même côté de la paire $\{I, J\}$.

Mais on a vu que $\infty_{\hat{I}} \stackrel{def}{=} \sigma(I) = \frac{h^2}{i}$ et de même $\infty_{\hat{J}} = -\frac{h^2}{i}$ par (*).

On obtient donc que $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ est non vide si, et seulement si, $\{\frac{h^2}{i}, -\frac{h^2}{i}\}$ est inclus dans le segment $[-i, i]$ du plan complexe, dans la carte V .

Ceci est vrai si, et seulement si, $h^2 < 1$, et donc, par 6.3 si, et seulement si, C est une hyperbole à l'angle aigu.

Cela achève enfin notre démonstration de la propriété 0.1. \square

7 Cas de la parabole

Avec les mêmes conventions, le résultat de [O] 8.2. dit que $\mathcal{O} = (I_1 J_1)$ et par la propriété 1.2, on sait aussi que $(I_1 J_1)$ est la *directrice* de la parabole. Dans le même plan que précédemment, on obtient la figure 6.

8 Retour sur le cas de l'ellipse

Si C est une ellipse, quitte à faire agir un déplacement, on la considère d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \varepsilon = \pm 1$ avec $a > b$. Si $\varepsilon = 1$, C est non vide dans $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ et \mathcal{O}

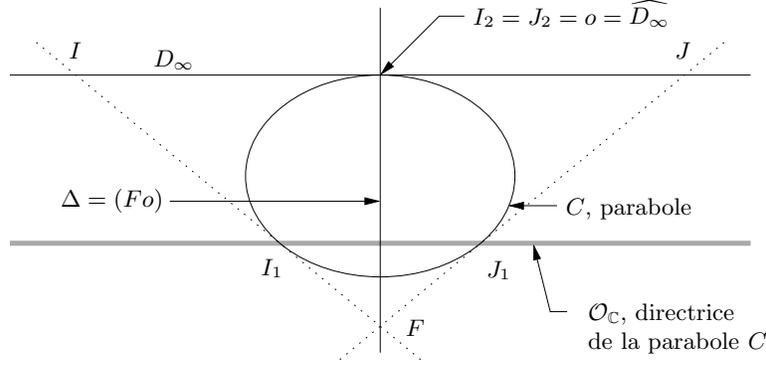


FIG. 6 – Comme dans le cas de l’hyperbole équilatère figure 2, \mathcal{O}_C n’est pas une conique propre, donc n’induit pas de polarité, et \tilde{I} et \tilde{J} ne sont pas définis.

est un cercle non vide car contenant les sommets du rectangle circonscrit à C , et de côtés parallèles à ses axes. Si C est vide *i.e.* $\varepsilon = -1$, \mathcal{O}_C est toujours un cercle, comme montré dans [O], dont la trace réelle \mathcal{O} est un cercle vide, encore pour des raisons immédiates.

Nous exposons ici les considérations projectives complexes sous-jacentes à cette discussion sur la nature de \mathcal{O} . *La première motivation est graphique* : voir se dessiner, comme plus haut, la situation géométrique dans le \mathbb{R} -plan contenant $\{I, J\}$ et les foyers de C . Le lecteur peut donc se contenter de visiter l’achèvement de la galerie graphique. Il peut aussi aller plus loin avec les légendes et les autres commentaires fournis. Notamment, on observe un parallèle avec la discussion, semblable, du cas où C est une hyperbole. Encore une fois, la nature réelle des coniques en jeu se lit sur la droite à l’infini complexifiée. Pour abrégé, nous laissons certains points en exercice.

Les figures sont encore données dans le \mathbb{R} -plan projectif $\Pi = \{[X : Y : Z] / X \in \mathbb{R}, Y \in i\mathbb{R} \text{ et } Z \in \mathbb{R}\}$; elles en présentent une carte affine où D_∞ apparaît. L’unique droite réelle y est encore $\{Y = 0\}$; à présent, elle peut ne pas rencontrer C : exactement quand C est vide dans $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$.

8.1 Cas particulier où C est un cercle

Même si ce cas est évident, il est plaisant d’obtenir la figure 7 suivante.

Dans ce cas, \mathcal{O}_C est un cercle concentrique à C *i.e.* tangent à C en I et J . En outre, ici C est supposé non vide dans $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, donc coupe l’axe « vertical » non tracé $\{Y = 0\}$. Il est donc inclus dans le demi-plan affine délimité par ses asymptotes (imaginaires conjuguées) \widehat{I} et \widehat{J} contenant $\{Y = 0\}$; quitte à choisir une carte affine le contenant, il apparaît comme une ellipse. Dans cet unique cas, il manque un paramètre à l’information apparente sur le dessin — passage de \mathcal{O}_C par I et J , avec les tangences — pour déterminer le tracé de \mathcal{O}_C . Ce paramètre peut être par exemple obtenu par le fait que $[D_\infty \cap \{Y = 0\}, o, p, q] = \sqrt{2}$, avec $p \in \{Y = 0\} \cap C$ et $q \in \{Y = 0\} \cap \mathcal{O}_C$

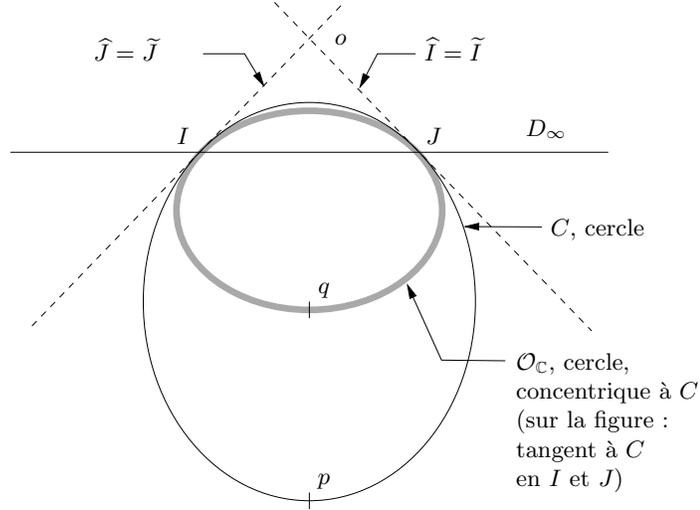


FIG. 7 – Cas où C passe par I et J , c'est-à-dire est un cercle.

dans un même segment $[D_\infty \cap \{Y = 0\}, o]$. La figure ne respecte pas cette contrainte. Enfin, si un point m est hors de la concavité de C dans Π , et si d_1 et d_2 sont les deux tangentes à C issues de m , alors $[(mI), (mJ), d_1, d_2] > 0$ (exercice). Donc sur la figure, \mathcal{O}_C apparaît *dans* la concavité de C . Attention, l'apparence de symétrie par rapport à un axe vertical est un artefact de la figure. Les coniques sont des cercles, aucun axe issu du centre o n'est privilégié.

8.2 Cas où C est une ellipse non circulaire non vide dans $\mathbb{A}_\mathbb{R}$.

Si C n'est pas un cercle, notons toujours H et H' les asymptotes (imaginaires conjuguées) : $y = i\frac{b}{a}x$ et $y = -i\frac{b}{a}x$ de C , et $h^{(l)} = D_\infty \cap H^{(l)}$, ainsi $C \cap D_\infty = \{h, h'\} = \{[1 : \pm ib/a : 0]\}$. On a supposé $a > b$, donc $\{I, h, \{Y = 0\}, h', J\}$ sont cocycliques *dans cet ordre* dans D_∞ . Si $C \neq \emptyset$ dans $\mathbb{A}_\mathbb{R}$, alors C coupe $\{Y = 0\}$ dans Π et alors, pour les mêmes raisons que pour C hyperbole, $\{F_1, F_2\} \subset \{Y = 0\} \cap \Pi$ et donc $\{Y = 0\}$ est l'axe focal Δ de C . Par construction, $\infty_{\hat{I}}$ et $\infty_{\hat{J}}$ sont dans le même demi-plan affine délimité par $\tilde{I} \cup \tilde{J}$ que Δ , donc \mathcal{O}_C est dans ce demi-plan et coupe donc Δ , donc a des points réels, ainsi $\mathcal{O} \neq \emptyset$. La figure 8 illustre cette situation.

8.3 Cas où C est un cercle vide dans $\mathbb{A}_\mathbb{R}$.

Ce cas, illustré sur la figure 9 est semblable à celui de la figure 7, sauf que cette fois, les traces de C et \mathcal{O}_C sont dans le demi-plan affine délimité par $\hat{I} \cup \hat{J}$ ne contenant pas $\{Y = 0\}$. Toutes les autres considérations sont inchangées. La transition entre les cas des figures 7 et 9 est le cas où C est un cercle-point *i.e.* le cercle dégénéré « en

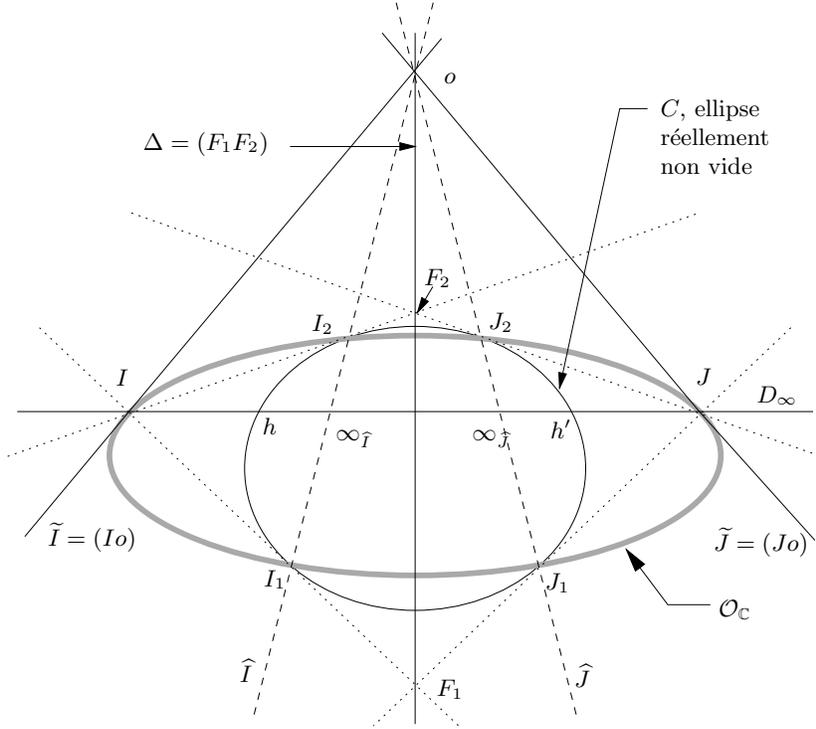


FIG. 8 – Le cas où C est une ellipse réellement non vide.

ses asymptotes » $(oI) \cup (oJ)$. Il n'y a pas lieu à figure car \mathcal{O}_C n'y est pas définie, mais ce cas dégénéré apparaît bien comme limite entre les deux cas.

8.4 Cas où C est une ellipse non circulaire vide dans $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$

Si C n'est pas un cercle, pour des mêmes valeurs de $a > b$ que dans le cas $C \neq \emptyset$, les points h et h' sont inchangés. Comme $C = \emptyset$ dans $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, la trace de C dans Π est cette fois dans le demi-plan affine délimité par ses asymptotes $H \cup H'$, ne contenant pas la droite $\{Y = 0\}$. Les points I_1, I_2, J_1, J_2 n'appartiennent donc pas à Π , donc \mathcal{O}_C ne rencontre pas C dans Π et donc ne peut rencontrer $\{Y = 0\}$. Ainsi, \mathcal{O}_C n'a pas de point réel, et $\mathcal{O} = \emptyset$.

Cependant, la principale remarque à faire est la suivante. On a annoncé au § 3, cf. notamment la remarque 3.3, vouloir présenter les figures dans le \mathbb{R} -plan passant par la paire cyclique $\{I, J\}$ et les foyers $\{F_1, F_2\}$ de C . Or ici, ce plan n'est pas Π mais $\Pi' = \{[X : Y : Z] / Y, Z \in \mathbb{R} \text{ et } X \in i\mathbb{R}\}$. Exercice : le montrer, en exhibant I_1, I_2, J_1, J_2 dans Π' et déduisant que l'axe de C est $\Delta = \{X = 0\}$ (rappel : on suppose $a > b$ dans l'équation de C) ; faire le dessin dans Π' . Noter que Δ, F_1 et F_2 demeurent une droite et des points réels.

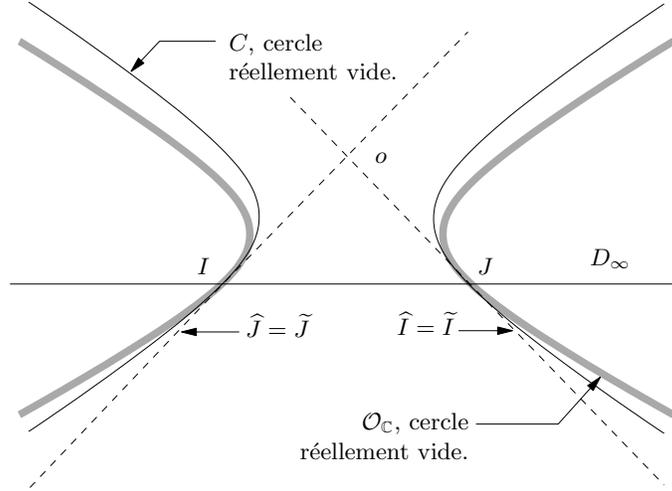


FIG. 9 – Le cas où C est un cercle réellement vide.

La figure dans Π permet cependant une comparaison avec la figure 8. On la laisse aussi en exercice. *Indications* : si les valeurs de a et b sont inchangées dans l'équation de C , la trace de C sur D_∞ l'est aussi. Comme cette fois C n'a pas de point réel, elle apparaît comme une hyperbole dans la carte de la figure 8. En particulier on retrouve que $\{Y = 0\}$ n'est pas l'axe Δ de C .

8.5 Synthèse

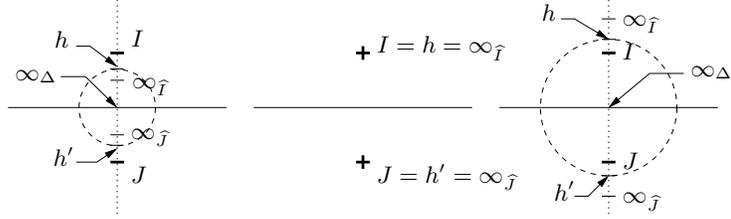
Il suit que, sauf dans le cas où C est un cercle, la nature réelle de C et de \mathcal{O} se lit sur la droite $D_\infty^{\mathbb{C}}$. Plus précisément, il résulte de la discussion ci-dessus l'énoncé 8.5 ci-dessous, commun aux ellipses et hyperboles.

Conclusion – Soit C une conique propre qui n'est ni une parabole ni un cercle, on note Δ son axe, $\{h, h'\}$ son intersection avec D_∞ et Γ le cercle de D_∞ passant par $\{h, h'\}$ et orthogonal au cercle (h, h', ∞_Δ) . Alors la courbe orthoptique réelle \mathcal{O} de C est un vrai cercle non vide si et seulement si la paire cyclique $\{I, J\}$, d'une part, et la direction ∞_Δ de Δ , d'autre part, sont de part et autre de Γ . Elle est un cercle-point si et seulement si $\{I, J\} \subset \Gamma$. Elle est un cercle vide si et seulement si $\{I, J\}$ et ∞_Δ sont du même côté de Γ .

Le premier cas se réalise pour C hyperbole à angle aigu ou ellipse non vide, le deuxième pour C hyperbole équilatère et jamais pour C ellipse, le troisième pour C hyperbole à angle obtus ou ellipse vide. Si C est une hyperbole, remarquons que le cercle (h, h', ∞_Δ) est simplement $D_\infty^{\mathbb{R}}$.

Si C est un cercle, Δ et donc Γ ne sont pas définis et on ne peut pas lire à l'infini si C , et \mathcal{O} avec lui, est un cercle réellement vide ou non.

En particulier, pour C ellipse, on obtient la figure 10, assez semblable à la figure 5.



C ellipse, \mathcal{O} cercle, tous deux non vides dans $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$. C et \mathcal{O} cercles, concentriques. \mathcal{O} non vide dans $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$ ssi C l'est. C ellipse, \mathcal{O} cercle, tous deux vides dans $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$.

FIG. 10 – La trace des différents cas possibles, dans la droite complexe à l’infini D_{∞} , quand C est une ellipse. La droite horizontale est $D_{\infty}^{\mathbb{R}}$.

Sur la figure 10, on indique en trait discontinu le cercle Γ passant par $\{h, h'\}$ et orthogonal au cercle (h, h', ∞_{Δ}) , en pointillé et apparaissant comme une droite. La carte choisie pour les dessins est indifférente, mais en l’espèce, celui de gauche est effectué dans la carte V définie au 6.2, celui de droite dans l’« inverse » $z \mapsto \frac{1}{z}$ de cette carte. Ni l’orientation de $D_{\infty}^{\mathbb{R}}$, ni le choix des appellations h et h' dans la paire $\{h, h'\}$ n’ont ici d’importance. La trace à l’infini $\Pi \cap D_{\infty} = \Pi' \cap D_{\infty}$, identique, des deux \mathbb{R} -plans Π et Π' , est toujours le cercle pointillé (h, h', ∞_{Δ}) .

Une unique figure dynamique pour l’ensemble des cas. La figure dynamique [Bo] permet d’observer ensemble les différents cas et les transitions entre eux. Elle présente la trace dans le \mathbb{R} -plan Π d’une conique variable et de sa courbe orthoptique.

A Appendice : Formule de Laguerre

La formule suivante permet de lire les angles orientés de droites comme un birapport sur la droite à l’infini :

Théorème A.1 Soit D_1 et D_2 deux droites dans le plan affine euclidien orienté $A_{\mathbb{R}}$. On note $\theta = (\widehat{D_1, D_2})$ angle orienté de droites défini modulo π . Alors :

$$[I, J, \infty_{D_1}, \infty_{D_2}] = e^{-2i\theta}.$$

On trouve une démonstration complète assez simple de ce théorème dans [Be] 8.8.7.2. Nous en proposons une autre ici, en insistant sur l’importance des questions d’orientations, souvent négligée dans la littérature sur le sujet (à cet égard voir l’esquisse de preuve de [Sa] p. 82).

Remarque A.2 Le résultat de [O] § 6, comme celui de la remarque 5.8 du présent article sont des cas particuliers de cette formule.

Avant la preuve du théorème, isolons la :

Remarque A.3 Soit ρ une rotation de $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}$, qui se prolonge naturellement en une homographie de $P_{\mathbb{C}}$. On a $[I, J, \infty_{\rho(D_1)}, \infty_{\rho(D_2)}] = [I, J, \infty_{D_1}, \infty_{D_2}]$.

Preuve de la remarque – Comme ρ est une homographie, elle conserve le bi-rapport i.e. $[\rho(I), \rho(J), \infty_{\rho(D_1)}, \infty_{\rho(D_2)}] = [I, J, \infty_{D_1}, \infty_{D_2}]$ et comme ρ est un déplacement $\rho(I) = I$ et $\rho(J) = J$ (cf. la remarque 5.1). \square

Preuve du théorème A.1 – Notons ∞_{α} le point à l’infini des droites D d’angle $((Ox), D) = \alpha$.

Affirmation – l’application $f : \alpha \mapsto [I, J, \infty_{(Ox)}, \infty_{\alpha}]$ est un morphisme de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ dans \mathbb{C}^* .

En effet, soit $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ une paire d’angles orientés de droites et D_i une droite dirigée par α_i .

Alors en se plaçant dans n’importe quelle carte affine où aucun des points considérés n’est à l’infini, les points s’identifient à des nombres complexes et en notant ρ la rotation d’angle α_1 , qui envoie (Ox) sur D_1 :

$$\begin{aligned} & [I, J, \infty_{(Ox)}, \infty_{\alpha_1}] \cdot [I, J, \infty_{(Ox)}, \infty_{\alpha_2}] \\ &= [I, J, \infty_{(Ox)}, \infty_{D_1}] \cdot [I, J, \infty_{D_1}, \infty_{\rho(D_2)}] \quad \text{par A.3 appliquée à } \rho \\ &= \left(\frac{\infty_{\alpha_1} + i}{\infty_{\alpha_1} - i} / \frac{0 + i}{0 - i} \right) \cdot \left(\frac{\infty_{\alpha_1 + \alpha_2} + i}{\infty_{\alpha_1 + \alpha_2} - i} / \frac{\infty_{\alpha_1} + i}{\infty_{\alpha_1} - i} \right) \\ &= \frac{\infty_{\alpha_1 + \alpha_2} + i}{\infty_{\alpha_1 + \alpha_2} - i} / \frac{0 + i}{0 - i} \\ &= [I, J, \infty_{(Ox)}, \infty_{\alpha_1 + \alpha_2}], \end{aligned}$$

d’où le morphisme annoncé. Comme f est également continue, $f \circ p$, avec p la projection $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, est de la forme $\alpha \mapsto e^{K\alpha}$ pour un certain $K \in \mathbb{C}^*$. Mais $\ker(f \circ p)$ est exactement $\pi\mathbb{Z}$, donc $K = \pm 2i$.

Or le calcul du 5.8 montre que $K = -2i$.

Soit enfin deux droites D_i comme dans l’énoncé. Appliquons la rotation d’angle $-\alpha_1$: $[I, J, \infty_{D_1}, \infty_{D_2}] = [I, J, \infty_{(Ox)}, \infty_{\alpha_2 - \alpha_1}] = e^{-2i\theta}$, avec $\theta = \alpha_2 - \alpha_1 = (\widehat{D_1}, \widehat{D_2})$. C’est la formule de Laguerre. \square

B Appendice : Excursion harmonique

Ce paragraphe est consacré à une généralisation de la remarque 1.3 pour le cas plus général des coniques à point de vue harmoniques, définies au § 8.8. de [O]. L’idée de base est que la notion de centre est en fait *affine* et a été comprise projectivement au 5.3. de [O].

Proposition B.1 Si C est une conique de $P_{\mathbb{C}}$ et p et q sont deux points de $P_{\mathbb{C}}$ tels que la droite (pq) n’est pas tangente à C , si on note \mathcal{H} la courbe à point de vue harmonique sur C vis-à-vis de p et q définie dans [O] 8.8, et si enfin, on note (\widehat{pq}) (resp. (\widetilde{pq})) le pôle de la droite (pq) par rapport à C (resp. par rapport à \mathcal{H}) alors on a l’égalité :

$$\widehat{(pq)} = \widetilde{(pq)}.$$

Remarque B.2 Si on prend $p = I$ et $q = J$ les points cycliques, avec les notations de la propriété ci-dessus, alors \mathcal{H} est la courbe orthoptique complexe $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, et $\widehat{(pq)} = \widetilde{D_{\infty}} = o$ le centre de C (cf. [O] 5.3) et de même $\widetilde{(pq)}$ est le centre de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. La proposition B.1 redonne alors la remarque 1.3, dont elle est la vraie formulation projective.

La preuve de la proposition B.1 repose sur le :

Lemme B.3 Avec les hypothèses de la prop. B.1, si σ est une homographie de $P_{\mathbb{C}}$ différente de l'identité qui vérifie $\sigma|_{(pq)} = \text{Id}_{(pq)}$, et qui laisse stable C i.e. telle que $\sigma(C) = C$, alors σ admet le pôle $\widehat{(pq)}$ comme unique point fixe hors de la droite (pq) .

Preuve du lemme – (i) Montrons d'abord que $\widehat{(pq)}$ est point fixe de σ :

D'une manière générale, si τ est une homographie, τ conjugue polarités par rapport à C et par rapport à $\tau(C)$, c'est-à-dire que pour toute droite δ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \delta & \xrightarrow{\tau} & \tau(\delta) \\ \text{polarité p.r. à } C & \downarrow & \downarrow & \text{polarité p.r. à } \tau(C) \\ \widehat{\delta} & \xrightarrow{\tau} & \tau(\widehat{\delta}) \end{array}$$

Donc ici $\sigma(\widehat{(pq)}) = \widehat{\sigma(pq)}$, et comme $\sigma(pq) = (pq)$, on en déduit bien que $\sigma(\widehat{(pq)}) = \widehat{(pq)}$.

Note – On peut comprendre la commutativité du diagramme précédent avec la construction projective des polaires, ou bien, en terme de formes quadratiques : si on note Q une forme quadratique sur \mathbb{C}^3 définissant C (unique à proportionnalité près), la conique $\tau(C)$ est définie par $\tau^*(Q) : v \mapsto Q(\tau(v))$.

(ii) *Unicité* – Soit Δ une droite quelconque passant par le point $\widehat{(pq)}$.

Le point $\widehat{(pq)}$ et le point défini par $(pq) \cap \Delta$ sont deux points fixes de $\sigma|_{\Delta}$ et ces deux points sont distincts car l'hypothèse que (pq) n'est pas tangente à C se traduit par : $\widehat{(pq)} \notin (pq)$.

Ainsi $\sigma|_{\Delta}$ étant une homographie de la droite Δ , si *par l'absurde* elle a un troisième point fixe sur Δ , alors σ est l'identité sur Δ .

Dans ce cas σ est l'identité en restriction à deux droites distinctes (pq) et Δ de $P_{\mathbb{C}}$, on en déduit (cf. Note), que $\sigma = \text{Id}_{P_{\mathbb{C}}}$, ce qui est une *contradiction*.

Note – En effet, σ est le passage au quotient d'une application $f \in GL(\mathbb{C}^3)$. Si on note P_1 et P_2 les deux plans de \mathbb{C}^3 au-dessus des deux droites projectives Δ et (pq) , $f|_{P_1}$ et $f|_{P_2}$ sont des homothéties. Comme ces deux plans sont distincts, cela force f à être une homothétie de \mathbb{C}^3 et donc σ à être l'identité. \square

Preuve de la proposition B.1 – (i) Soit, dans \mathbb{C}^3 , P le plan vectoriel au-dessus de la droite (pq) et D la droite vectorielle au-dessus du point (\widehat{pq}) . Soit $f \in GL(\mathbb{C}^3)$ défini, dans une base \mathcal{B} adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^3 = P \oplus D$, par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit σ l'homographie définie par f . Par définition $\sigma|_{(pq)} = \text{Id}_{(pq)}$ et $\sigma(\widehat{pq}) = \widehat{(pq)}$.

(ii) *Vérifions que $\sigma(C) = C$:*

Par définition de (\widehat{pq}) , si Q est une forme quadratique sur \mathbb{C}^3 définissant C , le plan P et la droite D sont Q -orthogonaux. Donc, si (X, Y, Z) sont les coordonnées dans une base \mathcal{B} comme ci-dessus, on peut écrire : $Q(X, Y, Z) = q(X, Y) + \lambda Z^2$. Il est alors évident que $(f^*Q)(X, Y, Z) = q(X, Y) + \lambda(-Z)^2 = Q(X, Y, Z)$.

(iii) *On en déduit que $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. En effet :*

$$\begin{aligned} m \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow [(ma), (mb), (mp), (mq)] = -1 \quad \text{par définition de } \mathcal{H}, \\ &\Leftrightarrow [(\sigma(m)\sigma(a)), (\sigma(m)\sigma(b)), (\sigma(m)\sigma(p)), (\sigma(m)\sigma(q))] = -1 \quad (1) \\ &\Leftrightarrow [(\sigma(m)\sigma(a)), (\sigma(m)\sigma(b)), (\sigma(m)p), (\sigma(m)q)] = -1 \\ &\Leftrightarrow \sigma(m) \in \mathcal{H} \quad (2) \end{aligned}$$

L'équivalence (1) vient de la conservation du birapport par l'homographie σ .

L'équivalence (2) vient de ce que $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$ sont les deux points de contact des tangentes à C issues de $\sigma(m)$.

(iv) L'homographie σ vérifiant $\sigma(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ et $\sigma|_{(pq)} = \text{Id}_{(pq)}$, on applique le lemme B.3 à la conique \mathcal{H} et on obtient que σ admet le point (\widehat{pq}) comme unique point fixe en dehors de (pq) . Comme par déf. (cf. (i)), σ admet déjà (\widehat{pq}) comme point fixe, on conclut bien que $(\widehat{pq}) = \widehat{(pq)}$. \square

Références

- [Au] M. Audin, Géométrie, EDP Sciences, 2006.
- [Be] M. Berger, Géométrie, t. 1. et 2, Nathan, 1990.
- [Bo] C. Boubel, www-irma.u-strasbg.fr/~boubel/orthoptique.html. Figure réalisée grâce au logiciel libre *Geogebra*.
- [Ca] <http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/Coniques/ParType/Parabole/ParaBase/PBOrthoptik.html>
- [Ei] J.D. Eiden, Géométrie analytique classique, Calvage et Mounet, 2009.
- [O] R. Bondil, C. Boubel, Courbe orthoptique d'une conique, R.M.S. REF.
- [Sa] P. Samuel, Géométrie projective, P.U.F., 1986.
- [Si] J.C. Sidler, Géométrie projective, Dunod, 2000.