Candidature MDC 2003
Charles Boubel
UMPA, ENS Lyon
69364 LYON CEDEX 07

Résumé de ma thèse,
«Sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes.»

Le groupe d'holonomie d'une variété (pseudo-)riemannienne, introduit par Elie Cartan, est défini comme suit : la connexion de Levi-Civita D permet de définir le transport parallèle d'un vecteur $V \in \mathrm{T}_p\mathcal{M}$ le long d'une courbe (régulière) γ de $\mathcal{M}$ basée en p ; il s'agit de l'unique champ $\widetilde{V}$ le long de γ tel que $\widetilde{V}(p) = V$ et $D_{\gamma'}\widetilde{V} = 0$. Si q est l'autre extrémité de γ, ce transport parallèle induit un isomorphisme τ_γ de $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$ dans $\mathrm{T}_q\mathcal{M}$.

Par définition, le groupe d'holonomie restreint de $(\mathcal{M}, g)$ au point p est :

$$H_p = \{\tau_\gamma \ / \ \gamma \textit{ lacet} \text{ homotope à } 0\text{, basé en } p\} \subset \mathrm{O}(\mathrm{T}_p\mathcal{M}, g_p).$$

C'est un sous-groupe de Lie (immergé) de $\mathrm{O}(\mathrm{T}_p\mathcal{M}, g_p)$, bien défini, à conjugaison près, indépendamment de p. Il traduit le défaut global de $(\mathcal{M}, g)$ à être plate :

- $(\mathcal{M}, g)$ est plate si et seulement si $H^0 = \{\mathrm{Id}\}$,
- à l'opposé, pour une variété «générique», $H^0 \simeq \mathrm{SO}^0_{r,s}(\mathbb{R})$.

Entre les deux... se situe le travail, autrement dit l'étude des structures invariantes par transport parallèle.

C'est à cette étude que sont consacrés les trois chapitres, par ailleurs relativement indépendants, de ma thèse. Plus précisément, ils étudient des variétés pseudo-riemanniennes dont l'holonomie restreinte stabilise des sous-espaces totalement isotropes, phénomène profondément différent de tout ce qui peut se passer dans le cas riemannien.

Une variété riemanienne de courbure de Ricci parallèle est localement (globalement si elle est complète et simplement connexe) un produit de variétés d'Einstein. Cela résulte de la positivité de la métrique et n'est plus vrai dans le cas pseudo-riemannien. Cependant, en utilisant les propriétés classiques de l'holonomie ainsi qu'un travail de Klingenberg de 1954 sur les paires de formes bilinéaires symétriques le chapitre 1 montre un résultat proche : décomposition en produit de variétés d'Einstein et de deux autres types, «Einstein complexe» et «Ricci nilpotent d'indice 2» (voir th. 1 p. 19).

Le chapitre 2 reformule et généralise le travail de Klingenberg utilisé par le premier. Le problème est le suivant : si $\mathbb{K}$ est un corps de caractérisique différente de 2, si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, si a et b sont sur E deux formes bilinéaires, chacune symétrique ou antisymétrique (a étant non dégénérée), comment agit sur E le sous-groupe de $GL(E)$ qui stabilise a et b ? Quels sont, à conjugaison près par $GL(E)$, les types possibles de paires de formes $\{a, b\}$? Le résultat le plus utile en pratique sont les tables de formes «normales» pour les paires de formes réflexives, voir pp.96-100 de la thèse.

Le troisième chapitre, le plus significatif, construit, sur une certaine classe de variétés pseudo-riemanniennes *réductibles, indécomposables* sous l'action de leur holonomie restreinte, des coordonnées privilégiées, «canoniques» en un sens qu'il précise (th. 1 p. 167). Ces coordonnées sont un outil pour une première compréhension de la géométrie locale, très complexe, de ces variétés. Elles permettent en particulier de classifier localement, sur la base d'un précédent théorème algébrique d'A. Ikemakhen et L. Bérard Bergery, les variétés lorentziennes à holonomie réductible-indécomposable (voir pp. 204–205 et 211).