Théorie des nombres / *Number Theory*

SUR L'ÉQUATION DIOPHANTIENNE $\dfrac{x^n-1}{x-1}=y^q$, *II*

Yann Bugeaud & Maurice Mignotte

Résumé – Nous annonçons de nouveaux théorèmes concernant l'équation diophantienne $(x^n-1)/(x-1) = y^q$, qui incluent le fait que tout nombre entier supérieur à un et ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 en base dix n'est pas une puissance parfaite. Puis nous utilisons ces résultats afin de résoudre cette équation pour tout entier x de la forme $x = z^t$ avec $2 \leq z \leq 10000$ et $t \geq 1$.

On the Diophantine equation $\dfrac{x^n-1}{x-1}=y^q$, *II*

Abstract – We announce several new theorems on the Diophantine equation $(x^n-1)/(x-1) = y^q$, which include the fact that any integer greater than 2 and with all digits equal to 1 in base ten cannot be a pure power. We then apply these results to solve this equation for any integer x of the form $x = z^t$ with $2 \leq z \leq 10000$ and $t \geq 1$.

1. Introduction

L'équation diophantienne

$$\frac{x^n-1}{x-1}=y^q, \quad \text{en entiers } x>1, y>1, n>2, q\geq 2 \tag{1}$$

possède les trois solutions

$$\frac{3^5-1}{3-1}=11^2, \quad \frac{7^4-1}{7-1}=20^2 \ \text{ et } \ \frac{18^3-1}{18-1}=7^3;$$

on ne sait cependant pas démontrer que ce sont les seules, ni même si les solutions de (1) sont en nombre fini. Les premiers résultats relatifs à (1) sont l'œuvre de Ljunggren [11] et de Nagell [13, 14], qui l'ont résolue complètement si $q = 2$ ou n est un multiple de 3 ou de 4, les seules solutions étant alors celles mentionnées ci-dessus. Il s'agit là des seuls énoncés de résolution complète de (1) antérieurs à 1998 (à l'exception du Théorème 2 ci-après). On sait cependant, grâce aux travaux d'Alan Baker sur les formes linéaires de logarithmes, que, sous certaines conditions, (1) n'admet qu'un nombre fini de solutions : pour de plus amples renseignements, le lecteur peut consulter l'article et l'ouvrage de Shorey & Tijdeman [17, 18].

L'objet de cette *Note* est d'annoncer de nouveaux théorèmes relatifs à (1), puis de démontrer que si (z^t, y, n, q) est une éventuelle quatrième solution de (1), où t est un entier strictement positif, alors z est supérieur à 10000. Nous insistons sur le fait que tous ces nouveaux résultats constituent des exemples de résolution complète de (1) sous certaines hypothèses additionnelles.

Avertissement : Les démonstrations de Le [10] et Yu & Le [19] sont incorrectes, car elles reposent sur le Lemme 3 de [10], qui est faux (*cf.* le commentaire de Yuan Ping-Zhi [20]).

2. Résultats récents et nouveaux

Dans cette partie, nous faisons un rapide survol des résultats récents concernant (1) et non publiés à ce jour. Ils s'avèrent essentiels à la démonstration de notre nouveau théorème.

Complétant un travail antérieur de Saradha & Shorey [16], Bugeaud *et al.* [7], et, indépendamment et par une autre méthode, Bennett [1], ont résolu (1) dans le cas où x est un carré.

Théorème 1. *L'équation (1) n'admet aucune solution (x, y, n, q) où x est un carré.*

La démonstration du Théorème 1 donnée par Bennett repose sur le beau résultat suivant, qui lui est dû [1].

Théorème B. *Soient a, b et n des entiers vérifiant $a > b \geq 1$ et $n \geq 3$. Alors l'équation*

$$|ax^n - by^n| = 1$$

admet au plus une solution en entiers positifs (x, y).

Le Théorème 2, démontré par Le [9] et évoqué dans l'introduction, et le Théorème 3, obtenu par Mignotte [12] indépendamment de Bennett, découlent maintenant très simplement du Théorème B. Comme ils nous seront très utiles par la suite, nous présentons leurs (courtes) démonstrations.

Théorème 2. *L'équation (1) ne possède aucune solution (x, y, n, q) où x est une puissance q-ième.*

Remarque : Dans le cas $q = 3$, le Théorème 2 est dû à Inkeri ([8], Lemma 4).

Démonstration : Supposons qu'il existe des entiers $z > 1$, $y > 1$, $q > 2$ et $n \geq 3$ tels que $z^{qn}-1 = (z^q-1)\,y^q$. Il suffit alors d'appliquer le Théorème B à l'équation $z^q\,Z^q - (z^q-1)\,Y^q = 1$ pour conclure. □

Théorème 3. *La seule solution (x, y, n, q) de l'équation (1) avec $n \equiv 1 \pmod q$ est $(3, 11, 5, 2)$.*

Démonstration : Au vu des résultats de Nagell [13, 14] et Ljunggren [11], qui ont résolu le cas $q = 2$, supposons qu'il existe des entiers $x \geq 2$, $y \geq 2$, $\nu \geq 1$ et $q \geq 3$ tels que $x^{\nu q+1} - 1 = (x-1)y^q$. On applique alors le Théorème B à l'équation $x\,X^q - (x-1)\,Y^q = 1$ pour conclure que c'est impossible. □

Combinant des méthodes utilisées dans les travaux précédents avec des minorations fines de formes linéaires en deux logarithmes p-adiques [2], et au prix de longs calculs sur ordinateur, Bugeaud, Mignotte & Roy [6] sont parvenu à résoudre complètement (1) pour certaines valeurs de x, en particulier pour tous les entiers x dont tous les facteurs premiers impairs sont de la forme $2^k + 1$, avec $k \geq 1$ entier.

Théorème 4. *Si l'équation (1) a une solution (x, y, n, q) avec $n \geq 5$, alors il existe un nombre premier p tel que p divise x et q divise $p-1$. En particulier, on a $x \geq 2q+1$.*

Le Théorème 4 complète les résultats de Bugeaud & Mignotte [5] où figure entre autres l'énoncé suivant, qui répond à une conjecture datant d'une cinquantaine d'années.

Théorème 5. *Un nombre entier supérieur à un et ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 en base dix n'est pas une puissance parfaite.*

Idée de la démonstration : Supposons qu'il existe des entiers $n \geq 2$, $q \geq 3$ et $y \geq 2$ vérifiant $10^n-1 = 9\,y^q$. En majorant la valuation 5–adique de $9y^q+1$ grâce aux estimations de Bugeaud & Laurent [4], nous obtenons $q \leq 2063$. Pour chacune des valeurs restantes de q, nous regardons l'équation $10^n - 1 = 9\,y^q$ modulo des nombres premiers congrus à 1 modulo q, afin d'obtenir des conditions sur n. Il suffit alors d'environ cinq ou six essais pour en déduire que n est congru à 1 modulo q. Or cela est exclu par le Théorème 3.

3. Une borne inférieure pour x

Il découle du Théorème 4 et de résultats obtenus par Inkeri ([8, Theorem 1], *voir* aussi Saradha & Shorey [16, Lemma 14]) que l'équation (1) avec $x = z^t$, $t \geq 1$, $2 \leq z \leq 20$ et $(z, q) \neq (11, 5)$ n'admet pas d'autres solutions que les trois déjà connues. Par contre, on ne disposait jusqu'à présent d'aucune information sur l'équation

$$\frac{11^{tn} - 1}{11^t - 1} = y^5 \tag{2}$$

en entiers $t \geq 1$, $y \geq 2$ et $n \geq 3$, comme l'ont souligné Saradha & Shorey [16].

Dans cette *Note*, nous résolvons (2) ainsi que d'autres équations du même type. Plus précisément, pour traiter (1) avec $x = z^t$, $t \geq 1$ et $2 \leq z \leq 10000$, il suffit, grâce au Théorème 4, de résoudre les équations

$$\frac{z^{tn} - 1}{z^t - 1} = y^q,$$

pour lesquelles $q \geq 3$ est tel que l'un des diviseurs premiers de z est congru à 1 modulo q. Pour y parvenir, nous utilisons les résultats récapitulés dans la partie précédente et employons des techniques de congruence.

Théorème 6. *Si l'équation (1) a une quatrième solution (z^t, y, n, q) avec $t \geq 1$, alors $z > 10000$.*

Remarque : La borne 10000 est bien sûr arbitraire et peut être améliorée. Pour l'atteindre, il a suffi d'environ trois heures de calcul sur un ordinateur cadencé à 400 MHz. Grâce à des programmes informatiques mieux adaptés nous espérons atteindre 10^6.

Démonstration : Inkeri a prouvé que si $(x, y, n, 3)$ est une solution de (1) avec $n \geq 5$, alors x n'est pas un cube ([8], Lemma 4) et x est congru à $0, \pm 1$ modulo 7 et modulo 9 ([8], Theorem 1). Par conséquent, si $(z^t, y, n, 3)$ est solution de (1) avec $n \geq 5$ et $t \geq 1$, il n'y a que 15 classes de congruence possibles pour z modulo 63. En outre, si l'on se restreint à l'intervalle $\{2, \ldots, 100\}$, il découle du Théorème 4 que $z \in \{21, 28, 35, 42, 57, 62, 63, 84, 91, 98\}$. Pour éliminer ces valeurs de z et pour traiter les exposants $q \geq 5$, nous procédons comme suit.

Nous fixons des entiers z et $q \geq 3$ tels que l'un des facteurs premiers de z soit congru à 1 modulo q et nous considérons l'équation

$$\frac{z^{tn} - 1}{z^t - 1} = y^q, \tag{3}$$

en inconnues $y \geq 2$, $n \geq 5$ et $t \geq 1$.

On se donne un entier M composé de petits facteurs premiers. On fixe un entier positif $t_0 \leq q$ et l'on suppose que (3) admet une solution (y, n, t) avec $t \equiv t_0 \pmod{Mq}$. On utilise alors des congruences modulo des nombres premiers p bien choisis, congrus à 1 modulo q. Par ailleurs, on doit s'assurer qu'il existe un entier a tel que q divise a, a divise Mq et $z^a \equiv 1 \pmod{p}$. En effet, comme on a supposé

$$z^{t_0 n} - 1 = (z^{t_0} - 1)\, y^q,$$

il est clair que l'hypothèse précédente permet de traiter tous les entiers congrus à t_0 modulo a, donc en particulier ceux congrus à t_0 modulo Mq.

Travaillant alors modulo p, on obtient que n vérifie certaines congruences modulo $p - 1$. On sait en outre par le résultat de Ljunggren que n n'est pas multiple de 3. De plus, n est impair, car sinon il existerait un entier y_1 tel que $z^{nt/2} + 1 = y_1^q$, ce qui, comme $z \leq 10^{11}$, est exclu par un résultat de Hyyrö (*cf.* l'ouvrage de Ribenboim [15], page 261) sur l'équation de Catalan. Procédant ainsi pour plusieurs valeurs de p on s'aperçoit que n est nécessairement congru à 1 modulo q. Or cela est exclu par le Théorème 3. Par conséquent, (3) n'admet pas de solution (y, n, t) avec $t \equiv t_0 \pmod{Mq}$. On opère de cette manière pour toutes les valeurs de t_0 qui ne sont pas exclues par les Théorèmes 1 et 2, donc pour tous les t_0 impairs et non multiples de q.

En pratique, nous avons utilisé l'entier $M = 24$. Signalons en outre qu'il suffit de travailler modulo le nombre premier 13421 afin de résoudre l'équation (2). En effet, l'ordre de 11 modulo 13421 étant égal à 10,

on obtient la contrainte $n \equiv 0, 1$ ou $2 \pmod{10}$. Or toutes ces valeurs sont exclues car n est impair et n'est pas congru à 1 modulo 5, par le Théorème 3.

Remarque : En collaboration avec Guillaume Hanrot, nous avons démontré [3] que l'unique solution (x, y, n, q) de (1) telle que 5 divise n est $(3, 11, 5, 2)$. En outre, nous avons résolu (1) pour certaines petites valeurs du couple (n, q).

Références bibliographiques

[1] M. Bennett. Rational approximation to algebraic number of small height : The diophantine equation $| ax^n - by^n | = 1$. Preprint.

[2] Y. Bugeaud. Linear forms in p-adic logarithms and the Diophantine equation $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* À paraître.

[3] Y. Bugeaud, G. Hanrot et M. Mignotte. Sur l'équation diophantienne $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$, *III*. En préparation.

[4] Y. Bugeaud et M. Laurent. Minoration effective de la distance p-adique entre puissances de nombres algébriques, *J. Number Th.* 61 (1996), 311–342.

[5] Y. Bugeaud et M. Mignotte. On integers with identical digits. Soumis.

[6] Y. Bugeaud, M. Mignotte et Y. Roy. On the diophantine equation $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$, *Pacific J. Math.* À paraître.

[7] Y. Bugeaud, M. Mignotte, Y. Roy et T. N. Shorey. The diophantine equation $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$ has no solution with x square, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* À paraître.

[8] K. Inkeri. On the diophantine equation $a(x^n - 1)/(x - 1) = y^m$, *Acta Arith.* 21 (1972), 299–311.

[9] Maohua Le. A note on the diophantine equation $(x^m - 1)/(x - 1) = y^n + 1$, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* 116 (1994), 385–389.

[10] Maohua Le. A note on perfect powers of the form $x^{m-1} + \ldots + x + 1$, *Acta Arith.* 69 (1995), 91–98.

[11] W. Ljunggren. Noen Setninger om ubestemte likninger av formen $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$, *Norsk. Mat. Tidsskr.* 25 (1943), 17–20.

[12] M. Mignotte. On the diophantine equation $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$. Soumis aux Proceedings de la Conférence de Théorie des Nombres de Graz.

[13] T. Nagell. Des équations indéterminées $x^2 + x + 1 = y^n$ et $x^2 + x + 1 = 3y^n$, *Nordsk. Mat. Forenings Skr. (1)* 2 (1920), 14 pages.

[14] T. Nagell. Note sur l'équation indéterminée $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$, *Norsk. Mat. Tidsskr.* 2 (1920), 75–78.

[15] P. Ribenboim. Catalan's Conjecture. Academic Press, Boston (1994).

[16] N. Saradha et T. N. Shorey. The equation $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$ with x square, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 125 (1999), 1–19.

[17] T. N. Shorey et R. Tijdeman. New applications of Diophantine approximations to Diophantine equations, *Math. Scand.* 39 (1976), 5–18.

[18] T. N. Shorey et R. Tijdeman. Exponential Diophantine equations, Cambridge Tracts in Mathematics 87 (1986), Cambridge University Press, Cambridge.

[19] Li Yu et Maohua Le. On the diophantine equation $(x^m - 1)/(x - 1) = y^n$, *Acta Arith.* 73 (1995), 363–366.

[20] Ping-Zhi Yuan. Comment : "A note on perfect powers of the form $x^{m-1} + \ldots + x + 1$", Acta Arith. 69 (1995), 91–98, by Maohua Le and "On the diophantine equation $(x^m - 1)/(x - 1) = y^n$", Acta Arith. 73 (1995), 363–366, by Li Yu & Maohua Le. *Acta Arith.* 83 (1998), 199.

Yann Bugeaud & Maurice Mignotte
Université Louis Pasteur et CNRS
U. F. R. de mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG

Adresses électroniques	: bugeaud@math.u-strasbg.fr	mignotte@math.u-strasbg.fr
Téléphone	: 03 88 41 66 38	03 88 41 63 48
Fax	: 03 88 61 90 69	

Auteur correspondant : Y. B.