Sur la séparation des racines des polynômes et une question de Sprindžuk

Masaaki Amou (Kiryu) & Yann Bugeaud (Strasbourg)

À Jean-Louis Nicolas, pour ses soixante ans

Résumé – Nous établissons une nouvelle minoration de la distance entre deux racines d'un polynôme à coefficients entiers, que nous appliquons à une question de théorie métrique des nombres posée par Sprindžuk.

Abstract – We establish a new lower bound for the distance between two roots of an integer polynomial. We apply it to a question in metric number theory posed by Sprindžuk.

1. Minoration de la distance entre deux racines d'un polynôme

Les estimations précises de la distance entre deux zéros de polynômes ou entre un nombre complexe donné et l'ensemble des zéros d'un polynôme ont de nombreuses applications en théorie des nombres transcendants. Un article de Güting [6] traite de manière systématique les différentes questions rencontrées, dont le cas des polynômes à racines multiples, qui se révèle légèrement plus délicat. Ses résultats, qu'il déduit d'estimations valables pour les polynômes séparables, présentent l'inconvénient de faire apparaître une dépendance quadratique en le degré n du polynôme, là où l'on espère avoir simplement un terme en $n \log n$, comme dans le cas des polynômes séparables.

Grâce à la notion de semi-discriminant, Chudnovsky ([3], Lemma 1.12) a amélioré le Theorem 4' de [6] en faisant disparaître le terme quadratique en n. Par la suite, Diaz & Mignotte [5] raffinèrent légèrement son résultat et simplifièrent la démonstration en remplaçant l'estimation du semi-discriminant par celle, plus simple, d'un résultant. Notant $\mathrm{H}(P)$ la hauteur du polynôme $P(X)$, c'est-à-dire le maximum des valeurs absolues de ses coefficients, un corollaire de leur résultat principal s'énonce comme suit.

Théorème DM. *Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients entiers de degré $n \geq 2$. Soient ξ un nombre complexe et α une racine de $P(X)$ à distance minimale de ξ. Si s désigne la multiplicité de α, alors on a*

$$|\xi - \alpha|^s \leq n^{n+3n/(2s)}\, 2^{n-s}\, \mathrm{H}(P)^{-2+2n/s}\, |P(\xi)|. \tag{1}$$

2000 *Mathematics Subject Classification :* 11C08. Key-words: Roots of a polynomial, Separating the roots.

Prenant le logarithme, on observe que le Théorème DM présente une dépendance en $n \log n$, au contraire du Theorem 4' de [6], qui fait intervenir n^2.

Dans la première partie de cette note, nous nous proposons d'améliorer de manière semblable le Theorem 6' de [6]. Un pas dans ce sens a été franchi par Amou [1, Lemma 2], qui a obtenu la dépendance souhaitée en fonction du degré du polynôme, au prix cependant d'une dépendance moins bonne en les multiplicités des racines. Il a utilisé ce résultat pour résoudre un problème de théorie métrique des nombres posé par Sprindžuk. Dans la seconde partie de cette note, nous montrons comment le Théorème 1 ci-dessous permet de raffiner les énoncés d'Amou [1, 2].

Rappelons que si $P(X)$ désigne le polynôme $a(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n)$, sa mesure de Mahler, notée $M(P)$, est la quantité

$$M(P) = |a| \cdot \prod_{1 \le i \le n} \max\{1, |\alpha_i|\}.$$

Nous avons alors (cf. par exemple [11, Lemma 3.11]) l'inégalité

$$M(P) \le \sqrt{n+1}\,\mathrm{H}(P). \tag{2}$$

La mesure de Mahler d'un nombre algébrique α, notée $M(\alpha)$, est par définition la mesure de Mahler de son polynôme minimal sur $\mathbf{Z}$.

Théorème 1. *Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients entiers de degré $n \ge 2$. Soit α une racine de $P(X)$ de degré n_1 et de multiplicité s_1. Si β est une racine de $P(X)$, distincte de α et de multiplicité s_2, alors on a*

$$|\alpha-\beta| \ge 2^{1+(s_1-n)/s_2} \left(\binom{n+1}{s_1+1} \mathrm{H}(P) \right)^{(1-n_1)/s_2} M(\alpha)^{(s_1-n)/s_2}\, M(P)^{-1/s_2}$$

si $s_2 > s_1$, tandis que

$$|\alpha-\beta|^{2s} \ge 2^{-2n+4s}\, M(P)^{-1-n/s} \left(\binom{n+1}{s+1} \mathrm{H}(P) \right)^{2-n/s} \max\{1,|\alpha|\}^{3s} \max\{1,|\beta|\}^{3s}$$

si $s_1 = s_2 = s$. En particulier, on a

$$|\alpha-\beta| \ge 2^{-n/s_2}\, n^{-n(2s_1+3)/(2s_1s_2)}\, \mathrm{H}(P)^{-2n/(s_1s_2)} \tag{3}$$

si $s_2 \ge s_1$, tandis que

$$|\alpha-\beta| \ge 2^{-n/s}\, n^{-n(2s+3)/(4s^2)}\, \mathrm{H}(P)^{-n/s^2+1/(2s)} \max\{1,|\alpha|\}^{3/2} \max\{1,|\beta|\}^{3/2} \tag{4}$$

si $s_1 = s_2 = s$.

Remarque 1 : Lorsque α et β sont racines de multiplicités s_1 et s_2 de deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de degré n, on se trouve dans le cas (i) du Lemma 2 de Amou [1] si $P(\beta)$ ou $Q(\alpha)$ est non nul, et on a alors la minoration

$$|\alpha-\beta| \ge n^{-1}\,(n+1)^{-2n/(s_1s_2)}\, \mathrm{H}(P)^{-n/(s_1s_2)}\, \mathrm{H}(Q)^{-n/(s_1s_2)}. \tag{5}$$

Si, par contre, on a $P(X)=Q(X)$, l'inégalité (ii) du Lemma 2 de [1] entraîne

$$|\alpha-\beta| \geq n^{-1-n/s}\left((n+1)\mathrm{H}(P)\right)^{-2(n-1)/s}, \tag{6}$$

où l'on a posé $s=\max\{s_1,s_2\}$. Notre Théorème améliore considérablement (6) et conduit à une estimation comparable à (5).

Remarque 2 : Les termes $\mathrm{H}(P)^{-2+2n/s}$ et $\mathrm{H}(P)^{-2n/(s_1s_2)}$ apparaissant dans (1) et (3) ne peuvent pas être beaucoup améliorés, comme le montre l'exemple suivant, issu de [5]. Soient $a\geq 2$ et $d\geq 2$ deux entiers et notons $Q(X)$ le polynôme X^d+aX-1. Comme $Q(1/a)$ et $Q(1/a-1/a^{d+1})$ sont de signes contraires, $Q(X)$ possède une racine β vérifiant $|1/a-\beta|<a^{-d-1}$. Soient $s_1\geq 1$ et $s_2\geq 1$ deux entiers et posons $P_{s_1,s_2}(X)=(aX-1)^{s_1}\,Q^{s_2}(X)$. Le degré du polynôme $P_{s_1,s_2}(X)$ est $n:=s_1+ds_2$ et sa hauteur vérifie $\mathrm{H}(P)\leq 2a^{s_1+s_2}$, lorsque a est suffisamment grand. Par conséquent, les racines $1/a$ et β de $P_{s_1,s_2}(X)$ vérifient

$$|1/a-\beta| < \left(\mathrm{H}(P)/2\right)^{-(d+1)/(s_1+s_2)} = \left(\mathrm{H}(P)/2\right)^{-(n-s_1+s_2)/(s_1s_2+s_2^2)},$$

ce qui montre que, du point de vue de la dépendance en la hauteur du polynôme, (3) est proche de l'optimalité.

La même conclusion vaut pour (4) en considérant les polynômes $P_{s,s}(X)$, où $s\geq 1$ est un entier.

Remarque 3 : Lorsque $P(X)$ est un polynôme séparable, l'exposant de la hauteur de $P(X)$ dans les inégalités (1) et (3) peut être divisé par deux, sans affecter la dépendance en le degré de $P(X)$. Les estimations les plus précises sont dues, respectivement, à Diaz [4] et à Mignotte [8]. Lorsque $s_1=s_2=s=1$, la minoration (4) est à peine plus faible que le résultat de [8], alors que sa démonstration est nettement plus simple.

Démonstration du Théorème 1 : Soit $Q(X)=a_1(X-\alpha_1)\ldots(X-\alpha_{n_1})$ un polynôme à coefficients entiers, sans racine multiple et tel que $\alpha=\alpha_1$. On suppose que $Q(X)$ divise $P(X)$ dans $\mathbf{Z}[X]$ et que les polynômes $Q(X)$ et $P(X)/Q^{s_1}(X)$ sont premiers entre eux. Le résultant des polynômes $Q(X)$ et $P^{(s_1)}(X)/s_1!$ est donc un entier non nul, ce qui entraîne

$$1 \leq |a_1|^{n-s_1} \prod_{1\leq i\leq n_1} \frac{|P^{(s_1)}(\alpha_i)|}{s_1!}. \tag{7}$$

Si i est un entier compris entre 2 et n_1, la majoration triviale donne

$$\frac{|P^{(s_1)}(\alpha_i)|}{s_1!} \leq \sum_{k=s_1}^{n} \binom{k}{s_1} \mathrm{H}(P)\, \max\{1,|\alpha_i|\}^{n-s_1} = \binom{n+1}{s_1+1} \mathrm{H}(P)\, \max\{1,|\alpha_i|\}^{n-s_1}. \tag{8}$$

Notant a le coefficient dominant de $P(X)$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{|P^{(s_1)}(\alpha)|}{s_1!} &= |a| \prod_{\substack{\gamma\neq\alpha \\ P(\gamma)=0}} |\alpha-\gamma| \\ &\leq 2^{n-s_1-s_2}\,|a|\cdot|\alpha-\beta|^{s_2}\cdot\max\{1,|\alpha|\}^{n-s_1-s_2}\cdot \prod_{\substack{\gamma\neq\alpha,\gamma\neq\beta \\ P(\gamma)=0}} \max\{1,|\gamma|\}. \end{aligned} \tag{9}$$

En combinant (7), (8) et (9), nous obtenons alors

$$|\alpha-\beta|^{s_2} \geq 2^{-n+s_1+s_2}\, M(P)^{-1}\, M(\alpha)^{s_1-n} \left(\binom{n+1}{s_1+1} H(P)\right)^{1-n_1} \times \max\{1,|\alpha|\}^{s_2} \max\{1,|\beta|\}^{s_2},$$

comme affirmé. L'inégalité (3) découle de (2) et des minorations $n_1 \leq n/s_1$ et $M(\alpha) \leq M(P)^{1/s_1}$.

Si $s_1 = s_2 = s$, on peut choisir $Q(X)$ de telle sorte que $\alpha_2 = \beta$. On dispose alors de l'analogue de (9) pour $|P^{(s)}(\beta)|/s!$, à savoir la majoration

$$\frac{|P^{(s)}(\beta)|}{s!} \leq 2^{n-2s}\, |a| \cdot |\alpha-\beta|^s \cdot \max\{1,|\beta|\}^{n-2s} \cdot \prod_{\substack{\gamma\neq\alpha,\gamma\neq\beta \\ P(\gamma)=0}} \max\{1,|\gamma|\}. \qquad (10)$$

Combinant (7), (9), (10) et (8) pour i tel que $3 \leq i \leq d$, on obtient

$$|\alpha-\beta|^{2s} \geq 2^{-2n+4s}\, M(P)^{-1-n/s} \left(\binom{n+1}{s+1} \mathrm{H}(P)\right)^{2-n/s} \max\{1,|\alpha|\}^{3s} \max\{1,|\beta|\}^{3s},$$

qui implique facilement la dernière assertion du théorème. □

2. Une question en théorie métrique des nombres

Pour un nombre complexe transcendant ξ et des entiers $n \geq 1$ et $H \geq 1$, on note $w_n(H,\xi)$ le minimum des nombres réels $|P(\xi)|$ lorsque $P(X)$ décrit l'ensemble (fini) des polynômes à coefficients entiers de degré inférieur ou égal à n et de hauteur inférieure ou égale à H. On pose alors

$$\tilde{w}(H,\xi) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\log(1/w_n(H,\xi))}{\log n}$$

et

$$\tilde{w}(\xi) = \sup_{H\geq 1} \tilde{w}(H,\xi).$$

En 1962, Sprindžuk [9] introduisit une nouvelle classification des nombres complexes transcendants reposant sur la fonction $\tilde{w}$. Il conjectura que presque tout (au sens de la mesure de Lebesgue) nombre complexe (*resp.* réel) ξ vérifie $\tilde{w}(\xi) = 1$. Chudnovsky [2, page 120] résolut ce problème par l'affirmative en énonçant un résultat légèrement plus fort.

Affirmation C. *Pour presque tout nombre complexe (resp. réel) ξ, il existe une constante $c_0(\xi)$ telle que tout polynôme $P(X)$ à coefficients entiers, de degré n et de hauteur H vérifie*

$$|P(\xi)| > \exp\{-6n\log(nH)\}$$

dès que $nH > c_0(\xi)$.

Malheureusement, Chudnovsky se contenta d'une esquisse de preuve et la première démonstration complète de la conjecture de Sprindžuk figure dans [1], comme conséquence d'un résultat cependant moins précis que l'Affirmation C. Par la suite, Amou [2] établit un énoncé comparable à celui de Chudnovsky, que nous raffinons considérablement au niveau des constantes numériques ; le Théorème 2 ci-dessous implique l'Affirmation C.

Théorème 2. *Soit ε un nombre réel positif. Pour presque tout nombre réel (resp. complexe) ξ, il existe une constante $c_1(\xi,\varepsilon)$ telle que tout polynôme $P(X)$ à coefficients entiers, de degré n et de hauteur H vérifie*

$$|P(\xi)| > \exp\{-(3+\varepsilon)n\log H - (4+\varepsilon)n\log n\} \tag{11}$$

dès que $\max\{n, H\} > c_1(\xi,\varepsilon)$.

Remarque 4 : Le Théorème 2 améliore le Theorem de [2], dans lequel figurent les constantes 5.5 et 8 au lieu de 3 et 4 ici, grâce, d'une part, au Théorème 1 et, d'autre part, à la distinction de plusieurs cas suivant la multiplicité de la racine du polynôme $P(X)$ la plus proche de ξ.

Remarque 5 : Les constantes numériques apparaissant dans le Théorème 2 peuvent être légèrement améliorées dans le cas complexe, en utilisant des versions adéquates des lemmes sur les polynômes (voir par exemple [6] pour de telles estimations).

Remarque 6 : Il paraît raisonnable de penser que le Théorème 2 reste vrai si l'on remplace (11) par

$$|P(\xi)| > \exp\{-(1+\varepsilon)n\log H - C(n)\}$$

dans le cas réel et par

$$|P(\xi)| > \exp\{-(0.5+\varepsilon)n\log H - C(n)\}$$

dans le cas complexe, où $C(n)$ est une certaine fonction de n. Un tel résultat semble toutefois très difficile à établir.

Démonstration du Théorème 2 : Nous nous restreignons au cas réel, sachant que le cas complexe ne présente aucune difficulté nouvelle. Soit I un intervalle réel de longueur 1. Soit n_0 un entier que l'on fixera plus tard. D'après un théorème de Sprindžuk (voir [10]), pour presque tout nombre réel ξ dans I, il n'existe qu'un nombre fini de polynômes $P(X)$ à coefficients entiers, de degré $n < n_0$ et de hauteur H tels que

$$|P(\xi)| < \exp\big\{-(1+\varepsilon)n\log H\big\}.$$

Par conséquent, il suffit de démontrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ formé des nombres réels ξ appartenant à I pour lesquels il existe une infinité de polynômes $P(X)$ à coefficients entiers, de degré $n \geq n_0$ et de hauteur H tels que

$$|P(\xi)| < \exp\big\{-(3+\varepsilon)n\log H - (4+\varepsilon)n\log n\big\}$$

est un ensemble négligeable. À cet effet, pour tous les entiers n, s et H tels que $1 \leq s \leq n$ et $n \geq n_0$, nous considérons l'ensemble $\mathcal{A}(n,H,s)$ formé des nombres complexes α qui sont racines, avec multiplicité égale à s, d'un certain polynôme $P(X)$ à coefficients entiers, de degré n et de hauteur H. Pour tout entier s vérifiant $1 \leq s \leq n$, on note $\mathcal{E}(n,H,s)$ l'ensemble des nombres réels ξ pour lesquels il existe un nombre algébrique α appartenant à $\mathcal{A}(n,H,s)$ tel que

$$|\xi-\alpha| < \exp\left\{\left(\frac{2}{s^2} - \frac{3+\varepsilon}{s}\right)n\log H + \left(\frac{3}{2s^2} - \frac{3+\varepsilon}{s}\right)n\log n + \frac{n}{s}\,\log 2\right\}, \tag{12}$$

et on pose $\mathcal{E}(n,H) := \mathcal{E}(n,H,1)\cup\ldots\cup\mathcal{E}(n,H,n)$. Le Théorème DM assure que tout nombre réel ξ élément de $\mathcal{E}$ appartient à une infinité d'ensembles $\mathcal{E}(n,H,s)$.

Lemme 1. *Soient n, H et s des entiers tels que $1 \leq s \leq n$. Le nombre d'éléments de $\mathcal{A}(n,H,s)$ est majoré par*

$$\operatorname{Card} \mathcal{A}(n,H,s) \leq \min\{2^{3n}H^n, 2^{10n^2/s^2}H^{2n/s^2}\}.$$

Démonstration : Ce nombre est trivialement majoré par n fois le nombre de polynômes à coefficients entiers, de degré inférieur ou égal à n et de hauteur H. On obtient alors

$$\operatorname{Card} \mathcal{A}(n,H,1) \leq n\big((2H+1)^{n+1} - (2(H-1)+1)^{n+1}\big) \leq 2n(n+1)(2H+1)^n \leq 2^{3n}H^n.$$

En ce qui concerne la deuxième majoration, on observe que pour tout élément α de $\mathcal{A}(n,H,s)$, la puissance s-ième du polynôme minimal $\Phi_\alpha(X)$ de α divise un certain polynôme à coefficients entiers de degré n et de hauteur H. Le lemme de Gelfond (voir, par exemple, la démonstration du Lemma 1 de [7]) entraîne alors que

$$\mathrm{H}(\Phi_\alpha)^s \leq 2^n \mathrm{H}(\Phi_\alpha^s) \leq 2^{2n}H,$$

d'où $\mathrm{H}(\Phi_\alpha) \leq 2^{2n/s}H^{1/s}$. L'inégalité souhaitée découle alors de

$$\operatorname{Card} \mathcal{A}(n,H,s) \leq \frac{n}{s}\big(2^{1+2n/s}H^{1/s}+1\big)^{1+n/s}.$$

□

Soit $\mathcal{D}(n,H,s)$ l'ensemble des nombres complexes dont la distance à l'intervalle I est inférieure au membre de droite de (12).

Lemme 2. *Il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ et tout entier s vérifiant $3 \leq s \leq n$, on a*

$$\operatorname{Card}\left(\mathcal{A}(n,H,s) \cap \mathcal{D}(n,H,s)\right) \leq 2^{3n/s}n^{5n/(2s)}H^{2n/s}.$$

Démonstration : Soient $n \geq 4$ et s des entiers avec $3 \leq s \leq n$. Il découle de (3) et (5) que

$$|\alpha - \beta| \geq 2^{-n/s}n^{-5n/(2s)}H^{-2n/s} \tag{13}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathcal{A}(n,H,s)$ avec $\alpha \neq \beta$. Notons que l'on ne peut pas appliquer (4) car, si α et β appartiennent à $\mathcal{E}(n,H,s)$, il est possible que α soit racine d'un polynôme $P(X)$ avec multiplicité s, lequel vérifie $P(\beta)=0$ avec multiplicité 1. Si δ et ρ désignent les quantités figurant, respectivement, dans les membres de droite de (13) et (12), on observe que $\delta \geq 4\rho$ pour tout entier n suffisamment grand. L'ensemble $\mathcal{D}(n,H,s)$ est alors recouvert par au maximum $[2\delta^{-1}]+2$ disques ouverts de rayon δ, d'où l'estimation souhaitée. □

Afin de majorer la mesure de Lebesgue de $\mathcal{E}(n,H,s)$, on distingue trois cas suivant la valeur de s :

$$s = 1, 2;\ 3 \leq s < n\sqrt{10/\log n};\ n\sqrt{10/\log n} \leq s \leq n.$$

Pour $s = 1, 2$, la première majoration du Lemme 1 et (12) donnent

$$\mathrm{Leb}(\mathcal{E}(n, H, s)) \leq 2\,\exp\Big(-\frac{n}{s}\left(\varepsilon \log H + (3/2 + \varepsilon)\log n - 4\log 2\right)\Big).$$

Pour $3 \leq s < n\sqrt{10/\log n}$, le Lemme 2 entraîne

$$\mathrm{Leb}(\mathcal{E}(n, H, s)) \leq 2\,\exp\Big(-\frac{n}{s}\left((1/3 + \varepsilon)\log H + \varepsilon \log n - 4\log 2\right)\Big).$$

Enfin, pour $n\sqrt{10/\log n} \leq s \leq n$, la deuxième majoration du Lemme 1 implique

$$\begin{aligned}\mathrm{Leb}(\mathcal{E}(n, H, s)) \leq 2\,\exp\Big(-\frac{n}{s}\Big(&(3 + \varepsilon - 4/s)\log H \\ &+ \big(3 + \varepsilon - 3/(2s) - (s/n)\log 2\big)\log n - \log 2\Big)\Big).\end{aligned}$$

Dans tous les cas, en choisissant n_0 suffisamment grand, on a

$$\mathrm{Leb}(\mathcal{E}(n, H, s)) \leq (nH)^{-(2+\epsilon)}$$

dès que $n \geq n_0$. Ceci montre que

$$\mathrm{Leb}(\mathcal{E}(n, H)) \leq (nH)^{-(1+\epsilon)},$$

et donc que la série double

$$\sum_{n \geq n_0} \sum_{H \geq 1} \mathrm{Leb}(\mathcal{E}(n, H))$$

converge. Le théorème de Borel–Cantelli montre alors que la mesure de Lebesgue de $\mathcal{E}$ est égale à zéro. □

Références bibliographiques

[1] M. Amou, *On Sprindžuk's classification of transcendental numbers*, J. Reine Angew. Math. 470 (1996), 27–50.

[2] M. Amou, *Transcendence measures for almost all numbers.* In: Analytic number theory (Japanese) (Kyoto, 1995), Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku, 961 (1996), 112–116.

[3] G. V. Chudnovsky, Contributions to the theory of transcendental numbers, A. M. S. Surveys and Monographs 19, Providence USA, 1984.

[4] G. Diaz, *Une nouvelle propriété d'approximation diophantienne*, C. R. Acad. Sci. Paris 324 (1997), 969–972.

[5] G. Diaz et M. Mignotte, *Passage d'une mesure d'approximation à une mesure de transcendance*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 13 (1991), 131–134.
[6] R. Güting, *Polynomials with multiple zeros*, Mathematika 14 (1967), 149–159.
[7] M. Laurent and D. Roy, *Criteria of algebraic independence with multiplicities and interpolation determinants*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 1845–1870.
[8] M. Mignotte, *On the distance between the roots of a polynomial*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. 6 (1995), 327–332.
[9] V. G. Sprindžuk, *On a classification of transcendental numbers*, Litovsk. Mat. Sb. 2 (1962), 215–219 (in Russian).
[10] V. G. Sprindžuk, Mahler's problem in metric number theory, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969, vii+192.
[11] M. Waldschmidt, Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups, Grundlehren der mathematischen Wissenschaft 326, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.

Masaaki Amou
Department of Mathematics
Gunma University
Tenjin-cho 1-5-1, Kiryu 376-8515
JAPAN

e-mail : amou@sv1.math.sci.gunma-u.ac.jp

Yann Bugeaud
Université Louis Pasteur
U. F. R. de mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cedex
FRANCE

e-mail : bugeaud@math.u-strasbg.fr