Variations autour d'un théorème métrique de Khintchine

Yann Bugeaud (Strasbourg) & *Carlos Gustavo Moreira* (Rio de Janeiro)

À Michel Waldschmidt, à l'occasion de ses 70 ans

Résumé. *Nous montrons qu'il n'existe pas de nombre réel typique du point de vue de l'approximation diophantienne, dans un sens précisé ci-après. Soit Ψ une application de l'ensemble des entiers strictement positifs dans l'ensemble des nombres réels positifs. Khintchine a démontré que, si la fonction $q \mapsto q^2\Psi(q)$ décroît et si la série de terme général $q\Psi(q)$ diverge, alors l'ensemble $\mathcal{K}(\Psi)$ des nombres réels ξ pour lesquels l'inégalité $|\xi - p/q| < \Psi(q)$ possède une infinité de solutions rationnelles p/q est de mesure de Lebesgue totale (Beresnevich, Dickinson et Velani ont démontré plus tard le même résultat en supposant seulement que Ψ est décroissante). Nous montrons que, pour presque tout nombre réel α, il existe une fonction Ψ qui satisfait de bonnes conditions de « régularité » (concernant la décroissance de Ψ), telle que la série de terme général $q\Psi(q)$ diverge alors que l'inégalité $|\alpha - p/q| < \Psi(q)$ ne possède aucune solution rationnelle p/q.*
Khintchine a montré également que, si la série de terme général $q\Psi(q)$ converge, alors l'ensemble $\mathcal{K}(\Psi)$ est de mesure de Lebesgue nulle. Nous montrons que, pour presque tout nombre réel α, il existe une fonction Ψ qui satisfait de bonnes conditions de « régularité », telle que la série de terme général $q\Psi(q)$ converge alors que l'inégalité $|\alpha - p/q| < \Psi(q)$ possède une infinité de solutions rationnelles p/q.
Enfin, nous calculons les dimensions de Hausdorff d'ensembles d'exceptions à nos résultats (définis en fonction des conditions de régularité sur Ψ).

2000 *Mathematics Subject Classification :* 11J04, 11J83.
Mots-clefs : Approximation diophantienne, théorème de Khintchine, théorie métrique des nombres.
Keywords: Diophantine approximation, Khintchine's theorem, metrical number theory.

Abstract. *We prove that there are no typical real numbers from the point of view of Diophantine approximations, in a sense that we describe below. Let Ψ be an application from the set of positive integers into the set of nonnegative real numbers. Khintchine established that, if the function $q \mapsto q^2\Psi(q)$ is non-increasing and the series $\sum_{q\geq 1} q\Psi(q)$ diverges, then the set $\mathcal{K}(\Psi)$ of real numbers ξ for which the inequality $|\xi - p/q| < \Psi(q)$ has infinitely many rational solutions p/q has full Lebesgue measure (Beresnevich, Dickinson and Velani proved later the same result assuming that Ψ is just non-increasing). We show that, for almost every real number α, there is a function Ψ which satisfies good "regularity" conditions (on the speed of decreasing of Ψ), such that the series $\sum_{q\geq 1} q\Psi(q)$ diverges but the inequality $|\alpha - p/q| < \Psi(q)$ has no rational solution p/q.*
Khintchine also showed that if the series $\sum_{q\geq 1} q\Psi(q)$ converges, then the set $\mathcal{K}(\Psi)$ has zero Lebesgue measure. We show that, for almost every real number α, there is a function Ψ which satisfies good "regularity" conditions, such that the series $\sum_{q\geq 1} q\Psi(q)$ converges but the inequality $|\alpha - p/q| < \Psi(q)$ has infinitely many rational solutions p/q.
We also compute Hausdorff dimensions of sets of exceptions to our results (in terms of the regularity conditions on Ψ).

1. Introduction et résultats

Tout au long du présent article, par fonction d'approximation (ou bien, tout simplement, fonction), nous entendons une application de l'ensemble des entiers strictement positifs dans l'ensemble des nombres réels positifs.

Commençons par rappeler un énoncé légèrement plus fort que le théorème de Khintchine [13].

Théorème K. *Soit Ψ une fonction d'approximation. Alors l'ensemble*

$$\mathcal{K}(\Psi) := \left\{ \xi \in \mathbf{R} : \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \Psi(q) \ \textit{pour une infinité de rationnels } \frac{p}{q} \right\}$$

est de mesure de Lebesgue nulle si la série $\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q)$ converge. En outre, si on suppose que Ψ est décroissante et si la série $\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q)$ diverge, alors $\mathcal{K}(\Psi)$ est de mesure totale.

Le lemme de Borel–Cantelli entraîne facilement la première assertion du Théorème K, la deuxième étant plus délicate à démontrer.

Une démonstration du Théorème K figure, par exemple, dans le mémoire de Beresnevich, Dickinson et Velani [2]. Khintchine [13] (voir aussi [4]) avait démontré la deuxième assertion du Théorème K sous une hypothèse légèrement plus restrictive, à savoir la décroissance de la fonction $q \mapsto q^2\Psi(q)$. Observons que, quelle que soit la fonction $\Psi : \mathbf{Z}_{\geq 1} \to \mathbf{R}^+$, si a et b sont des nombres réels vérifiant $a < b$, alors la fonction $q \mapsto q^a\Psi(q)$ est décroissante si $q \mapsto q^b\Psi(q)$ est décroissante.

Duffin et Schaeffer [6] ont montré que la conclusion de la deuxième assertion du Théorème K reste vraie si, au lieu de supposer que Ψ décroît, on se contente de supposer l'existence d'un nombre réel λ tel que la fonction $q \mapsto q^\lambda\Psi(q)$ est décroissante. Une hypothèse sur Ψ est toutefois nécessaire, voir le Chapter 2 de la monographie de Harman [10]. Dans ce domaine, le problème ouvert le plus célèbre est la conjecture de Duffin et Schaeffer, formulée ci-dessous. Rappelons que $\varphi(n)$ compte le nombre d'entiers strictement positifs, inférieurs ou égaux à l'entier n et premiers à n. Dans le présent texte, « presque tout » fait toujours référence à la mesure de Lebesgue.

Conjecture DS. *Soit Ψ une fonction d'approximation vérifiant*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q)\,\varphi(q) = +\infty.$$

Alors, pour presque tout nombre réel ξ, l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q), \quad \gcd(p,q) = 1, \quad q \geq 1,$$

possède une infinité de solutions.

Notons qu'en considérant des recouvrements bien choisis il est facile de montrer que, si Ψ est une fonction d'approximation vérifiant

$$\sum_{q=1}^{\infty} \Psi(q)\,\varphi(q) < +\infty,$$

alors, pour presque tout nombre réel ξ, l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q), \quad \gcd(p,q) = 1, \quad q \geq 1,$$

ne possède qu'un nombre fini de solutions. Des progrès récents en direction de la Conjecture DS ont été effectués dans [1, 3, 11, 16]. Nous nous intéressons à des questions voisines, motivées par le passage suivant de la recension [20] de la monographie [4] :

La remarque suivante aurait mérité de figurer dans le livre : aucun nombre réel ne se comporte, du point de vue de l'approximation rationnelle, comme presque tous les nombres réels. Plus précisément, si $\mathcal{F}$ est l'ensemble des fonctions croissantes f définies sur les entiers positifs à valeurs réelles positives possédant la propriété que pour presque tout x réel, l'inégalité

$$|x - p/q| < 1/f(q)$$

n'a qu'un nombre fini de solutions, alors pour tout x réel il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que l'inégalité

$$|x - p/q| < 1/f(q)$$

ait un nombre infini de solutions. Cela semble (à première vue seulement) un peu paradoxal, mais cela impose d'être prudent si on veut conjecturer, par exemple, que les nombres algébriques se comportent comme presque tous les nombres réels de ce point de vue.

Cette observation et le Théorème K appellent les questions suivantes.

Question 1. *Soit ξ un nombre réel irrationnel. Existe-t-il une fonction d'approximation décroissante Ψ telle que la série $\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q)$ converge et ξ appartient à $\mathcal{K}(\Psi)$?*

Question 2. *Soit ξ un nombre réel irrationnel. Existe-t-il une fonction d'approximation décroissante Ψ telle que la série $\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q)$ diverge et ξ n'appartient pas à $\mathcal{K}(\Psi)$?*

Lang [14] a répondu positivement à la Question 1 lorsque ξ n'est pas à quotients partiels bornés.

Théorème L. *Soit ξ un nombre réel à quotients partiels non bornés. Il existe une fonction décroissante Ψ vérifiant*

$$\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q) < +\infty$$

et telle que l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q)$$

possède une infinité de solutions rationnelles. Cette conclusion est toujours fausse si ξ est à quotients partiels bornés.

Dans un premier temps, nous complétons le Théorème L par un énoncé qui répond, sans hypothèse supplémentaire, à la Question 1. Nous imposons sur la fonction Ψ une condition plus forte que sa décroissance.

Théorème 1. *Si ξ est un nombre réel irrationnel à quotients partiels non bornés et si $\lambda < 2$ est un nombre réel, alors il existe une fonction Ψ telle que $q \mapsto q^{\lambda}\Psi(q)$ est décroissante et*

$$\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q) < +\infty, \tag{1.1}$$

et telle que l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q) \tag{1.2}$$

possède une infinité de solutions rationnelles.
Si ξ est un nombre réel à quotients partiels bornés et si Ψ est une fonction telle que, pour un certain nombre réel λ, la fonction $q \mapsto q^{\lambda}\Psi(q)$ est décroissante et (1.2) possède une infinité de solutions rationnelles, alors

$$\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q) = +\infty.$$

Le Théorème 1 affirme en particulier que l'intersection non dénombrable d'ensembles de mesure de Lebesgue totale

$$\bigcap_{\Psi : q \mapsto q\Psi(q) \text{ est décroissante et } \sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q) < \infty} (\mathbf{R} \setminus \mathcal{K}(\Psi))$$

est égale à l'ensemble des nombres réels à quotients partiels bornés. Il n'est pas pleinement satisfaisant dans la mesure où il ne justifie pas l'affirmation de [20] citée ci-dessus. Une propriété dans le même esprit que cette affirmation découle du Théorème 2, qui répond pleinement à la Question 2.

Théorème 2. *Pour tout nombre réel irrationnel ξ, il existe une fonction Ψ telle que $q \mapsto q\Psi(q)$ est décroissante et*

$$\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q) = +\infty, \tag{1.3}$$

et telle que l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q)$$

ne possède aucune solution rationnelle.

Le Théorème 2 affirme que l'intersection non dénombrable d'ensembles de mesure de Lebesgue totale

$$\bigcap_{\Psi : q\mapsto q\Psi(q) \text{ est décroissante et } \sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q)=+\infty} \mathcal{K}(\Psi)$$

est vide. En d'autres termes, cela signifie qu'aucun nombre réel se comporte « comme presque tous les nombres réels » du point de vue de l'approximation rationnelle, lorsque l'on se restreint aux fonctions Ψ telles que $q \mapsto q\Psi(q)$ est décroissante et la série $\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q)$ diverge.

Dans la suite (Théorèmes 5, 7 et 8), nous déterminons la dimension de Hausdorff de semblables intersections, où, une fonction croissante f étant donnée, on se restreint aux fonctions Ψ telles que $q \mapsto f(q)\Psi(q)$ décroît et la série $\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q)$ diverge.

Nous examinons maintenant la nécessité des hypothèses portant sur la fonction Ψ dans les Théorèmes 1 et 2.

La première assertion du Théorème 1 n'est plus valable pour $\lambda = 2$: au lieu d'exclure l'ensemble des réels à quotients partiels bornés, il convient d'exclure un ensemble plus gros.

Théorème 3. *Pour presque tout nombre réel ξ, il existe une fonction Ψ telle que $q \mapsto q^2\Psi(q)$ est décroissante et*

$$\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q) < +\infty,$$

et telle que l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q)$$

possède une infinité de solutions rationnelles. L'ensemble des nombres réels pour lesquels la conclusion est fausse est un ensemble de dimension de Hausdorff un, qui ne peut pas s'écrire comme réunion dénombrable d'ensembles de dimension de Hausdorff < 1.

Observons que l'ensemble des nombres réels à quotients partiels bornés est la réunion dénombrable, portant sur les entiers $M \geq 2$, des ensembles des nombres réels à quotients partiels bornés par M, lesquels sont tous de dimension de Hausdorff < 1.

Pour $\lambda > 2$, notons $\mathcal{E}_\lambda$ l'ensemble des fonctions Ψ telles que la fonction $q \mapsto q^\lambda \Psi(q)$ est décroissante. Notons $\mathcal{E}$ la réunion des ensembles $\mathcal{E}_\lambda$ pour $\lambda > 2$. Observons que si Ψ appartient à $\mathcal{E}$, alors il existe $\lambda > 2$ tel que $\Psi(q) \leq \Psi(1)/q^\lambda$, pour tout $q \geq 1$, et il existe par conséquent un entier strictement positif m tel que $\Psi(q) \leq m/q^{2+1/m}$ pour tout $q \geq 1$. Cela montre que la série $\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q)$ converge. Le Théorème K implique alors l'existence d'un ensemble Z de mesure de Lebesgue totale tel que pour tout ξ appartenant à Z et pour toute fonction Ψ appartenant à $\mathcal{E}$, l'inégalité $|\xi - \frac{p}{q}| < \Psi(q)$ possède seulement un nombre fini de solutions rationnelles.

On peut démontrer une version un peu plus génerale de la première partie du Théorème 3.

Théorème 4. *Soit f une fonction strictement positive définie sur les entiers positifs telle que $q \mapsto f(q)/q^2$ est croissante et $\sum_{q=1}^{\infty} q/f(q) = +\infty$. Alors, pour presque tout nombre réel ξ, il existe une fonction Ψ telle que $q \mapsto f(q)\Psi(q)$ est décroissante et*

$$\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q) < +\infty,$$

et telle que l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q)$$

possède une infinité de solutions rationnelles.

Observons que, si la série $\sum_{q=1}^{\infty} q/f(q)$ converge, alors la décroissance de la fonction $q \mapsto f(q)\Psi(q)$ entraîne la convergence de la série $\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q)$.

Le Théorème K implique que, si $\sum_{q=1}^{\infty} q/f(q)$ converge, alors, pour presque tout nombre réel ξ et pour toute fonction Ψ telle que $q \mapsto f(q)\Psi(q)$ est décroissante, l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q)$$

ne possède qu'un nombre fini de solutions rationnelles.

De la même façon, on peut, dans le Théorème 2, renforcer l'hypothèse portant sur Ψ, à condition d'exclure un ensemble de nombre réels de mesure nulle.

Théorème 5. *Pour presque tout nombre réel ξ, il existe une fonction Ψ telle que $q \mapsto q^2\Psi(q)$ est décroissante et*

$$\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q) = +\infty,$$

et telle que l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q)$$

ne possède aucune solution rationnelle. L'ensemble des nombres réels pour lesquels la conclusion est fausse est un ensemble de dimension de Hausdorff un, qui ne peut pas s'écrire comme réunion dénombrable d'ensembles de dimension de Hausdorff < 1.

On peut également démontrer une version un peu plus générale de la première partie du Théorème 5.

Théorème 6. *Soit f une fonction strictement positive définie sur les entiers positifs telle que $q \mapsto f(q)/q^2$ est croissante et $\sum_{q=1}^{\infty} q/f(q) = +\infty$. Alors, pour presque tout nombre réel ξ, il existe une fonction Ψ telle que $q \mapsto f(q)\Psi(q)$ est décroissante et*

$$\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q) = +\infty,$$

et telle que l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q)$$

ne possède aucune solution rationnelle.

Soit λ un nombre réel appartenant à l'intervalle $[1, 2]$. Notons X_λ l'ensemble des nombres réels irrationnels ξ tels que, pour toute fonction Ψ telle que $q \mapsto q^\lambda \Psi(q)$ est décroissante et vérifiant

$$\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q) = +\infty,$$

l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q)$$

possède une infinité de solutions rationnelles. Les Théorèmes 2 et 5 affirment respectivement que X_1 est vide et que la dimension de Hausdorff de X_2 est égale à un. Il apparaît alors naturel d'étudier la taille des ensembles intermédiaires X_λ, où $1 < \lambda < 2$.

Théorème 7. *Soit λ un nombre réel appartenant à l'intervalle $(1, 2]$. Alors la dimension de Hausdorff de l'ensemble X_λ est égale à $\lambda/2$.*

Le Théorème 2 montre que l'égalité $\dim(X_\lambda) = \lambda/2$ n'est pas valable pour $\lambda = 1$, puisque X_1 est l'ensemble vide. Pour λ appartenant à $[1, 2]$, l'ensemble X_λ est ou bien vide, ou bien de dimension de Hausdorff supérieure à $1/2$. Michel Waldschmidt nous a demandé s'il est possible de remplacer les fonctions $q \mapsto q^\lambda$ par une autre famille de fonctions de telle façon que les ensembles correspondant aux X_λ aient une dimension comprise entre 0 et $1/2$. Le théorème suivant apporte une réponse positive à cette question.

Théorème 8. *Soit b un nombre réel strictement positif. Soit Y_b l'ensemble des nombres réels irrationnels ξ tels que, pour toute fonction Ψ telle que $q \mapsto q(\log\log q)^{b \log\log q}\Psi(q)$ est décroissante et vérifiant*

$$\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q) = +\infty,$$

l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q)$$

possède une infinité de solutions rationnelles. Alors la dimension de Hausdorff de Y_b est égale à $\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/b}}$.

Les dimensions de Hausdorff des ensembles X_λ et Y_b parcourent tout l'intervalle $[0,1]$, à l'exception des valeurs 0 et 1/2 (on convient usuellement que la dimension de Hausdorff de l'ensemble vide est $-\infty$). Cependant, si Y (resp., Y') désigne l'ensemble des nombres réels irrationnels ξ tels que, pour toute fonction Ψ telle que $q \mapsto q(\log q)^{\log\log q}\Psi(q)$ (resp., $q \mapsto q(\log q)\Psi(q)$) est décroissante et vérifiant

$$\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q) = +\infty,$$

l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q)$$

possède une infinité de solutions rationnelles, alors la dimension de Hausdorff de Y (resp., Y') est égale à 1/2 (resp., 0). Ces résultats se démontrent en modifiant légèrement la preuve du Théorème 8 (et peuvent aussi être obtenus comme conséquences des Théorèmes 7 et 8); nous laissons les détails au lecteur.

Tous nos théorèmes restent valables si, au lieu de supposer que les fonctions intervenant dans les énoncés sont décroissantes, nous les supposons décroissantes à partir d'un certain rang.

De manière peu surprenante, les démonstrations de nos théorèmes font appel à la théorie des fractions continues. Les Théorèmes 7 et 8 sont les plus délicats à établir.

La longueur d'un intervalle réel I est notée $|I|$. La dimension de Hausdorff, parfois simplement appelée dimension, est notée dim.

2. Rappels sur les fractions continues

Nous supposons que le lecteur est familier avec la théorie des fractions continues. Nous nous contentons de rappeler quelques résultats, dont les démonstrations se trouvent par exemple dans [18] et [4].

Soit $\xi = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ un nombre réel, et notons $(p_n/q_n)_{n\ge1}$ la suite de ses réduites. On a

$$q_n \ge (\sqrt{2})^n, \quad \text{pour } n \ge 2.$$

et

$$\frac{1}{3a_{n+1}q_n^2} \le \frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}, \quad \text{pour } n \ge 1. \tag{2.1}$$

Pour des entiers strictement positifs $a_1, \ldots, a_m$, le continuant $K(a_1, \ldots, a_m)$ désigne le dénominateur du nombre rationnel $[a_0; a_1, \ldots, a_m]$.

Lemme 2.1. *Pour des entiers strictement positifs $a_1, \ldots, a_m$ et un entier k vérifiant $1 \leq k \leq m-1$, on a*

$$K(a_1, \ldots, a_m) = K(a_m, \ldots, a_1)$$

et

$$\begin{aligned} K(a_1, \ldots, a_k) \cdot K(a_{k+1}, \ldots, a_m) &\leq K(a_1, \ldots, a_m) \\ &\leq 2\, K(a_1, \ldots, a_k) \cdot K(a_{k+1}, \ldots, a_m). \end{aligned}$$

Le lemme suivant est très utile en théorie métrique des fractions continues.

Lemme 2.2. *Pour n'importe quels entiers positifs k, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ et r, la probabilité pour qu'un nombre réel dont la fraction continue commence par $[0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ vérifie $a_{k+1} \geq r$ appartient à l'intervalle $[1/r, 2/(r+1)]$.*

Démonstration. Comme les extrémités de l'intervalle $\{[0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, x] : x \geq 1\}$ sont les points

$$\frac{p_k}{q_k} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k] \quad \text{et} \quad \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, 1],$$

sa longueur est égale à $1/(q_k(q_k + q_{k-1}))$.

De même, les extrémités de l'intervalle $\{[0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, x], x \geq r+1\}$ étant les points

$$\frac{p_k}{q_k} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k] \quad \text{et} \quad \frac{rp_k + p_{k-1}}{rq_k + q_{k-1}} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, r],$$

sa longueur est égale à $1/(q_k(rq_k + q_{k-1}))$. La probabilité désirée vaut donc

$$(1/q_k(rq_k + q_{k-1}))/(1/q_k(q_k + q_{k-1})) = (q_k + q_{k-1})/(rq_k + q_{k-1}) = (1+\beta)/(r+\beta),$$

où $\beta = q_{k-1}/q_k \in [0, 1]$. On note alors que $(1+\beta)/(r+\beta)$ appartient à l'intervalle $[1/r, 2/(r+1)]$. □

On conclut cette partie par un corollaire facile du Lemme 2.2.

Corollaire 2.3. *Pour tout nombre réel $c \geq 1$ et tout entier $k \geq 1$, la probabilité pour que le k-ième quotient partiel a_k d'un nombre réel ξ vérifie $a_k < c$ est plus grande que $1 - 2/c$, indépendamment des quotients partiels $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$.*

3. Démonstrations

Démonstration du Théorème 1.

Écrivons $\xi = [0; a_1, a_2, \ldots]$. Supposons que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ n'est pas bornée. Il existe alors une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ est croissante, $a_{n_k+1} \geq 2^k$ et $n_{k+1} \geq n_k + 4$ pour tout $k \geq 1$.

Notons $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ la suite des réduites de ξ. Pour $k \geq 1$, posons

$$\Psi(q_{n_k}) = \frac{1}{a_{n_k+1} q_{n_k}^2}$$

et

$$\Psi(q) = (q_{n_k}/q)^\lambda \Psi(q_{n_k}) \qquad \text{pour } q_{n_{k-1}} < q \leq q_{n_k}.$$

Avec ce choix, il découle de (2.1) que (1.2) possède une infinité de solutions.

Observons maintenant que

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{q_{n_k}} q\Psi(q) &\leq \sum_{h=1}^{k} \Psi(q_{n_{h+1}}) \sum_{q=q_{n_h}+1}^{q_{n_{h+1}}} q_{n_{h+1}}^\lambda / q^{\lambda-1} \\ &= O\Big(\sum_{h=1}^{k} a_{n_{h+1}+1}^{-1} q_{n_{h+1}}^{\lambda-2} (q_{n_{h+1}}^{2-\lambda} - q_{n_h}^{2-\lambda})\Big) = O\Big(\sum_{h=1}^{k} a_{n_{h+1}+1}^{-1}\Big) = O(1).\end{aligned}$$

Nous avons la convergence souhaitée. Il reste à s'assurer que la fonction $q \mapsto q^\lambda \Psi(q)$ est bien décroissante. À cet effet, il est suffisant de noter que

$$q^\lambda \Psi(q) = q_{n_k}^\lambda \Psi(q_{n_k}) = \frac{1}{a_{n_k+1} q_{n_k}^{2-\lambda}}$$

pour $q_{n_{k-1}} < q \leq q_{n_k}$.

Établissons maintenant la seconde assertion du théorème. Supposons que $q \mapsto q^\lambda \Psi(q)$ est décroissante et, sans perte de généralité, que l'on a $\lambda < 0$. Soit ξ un nombre réel à quotients partiels bornés. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que $|\xi - p/q| > c/q^2$ pour tous les entiers p, q avec $q > 0$. Pour que (1.2) possède une infinité de solutions, il doit donc exister une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 1}$, avec $n_{k+1} > 2n_k$ pour tout $k \geq 1$, telle que $\Psi(n_k) > c n_k^{-2}$ pour $k \geq 1$. Comme $q \mapsto q^\lambda \Psi(q)$ est décroissante, on a

$$\Psi(q) \geq c q^{-\lambda} q_k^{\lambda-2}, \qquad (1 \leq q \leq q_k).$$

Pour tout entier $k \geq 1$, on obtient

$$\sum_{q=n_k/2}^{n_k} q\Psi(q) \geq \sum_{q=n_k/2}^{n_k} c\, q^{1-\lambda} q_k^{\lambda-2} \geq c\, \frac{n_k^{2-\lambda} - (n_k/2)^{2-\lambda}}{(2-\lambda) n_k^{2-\lambda}} = \frac{1 - (1/2)^{2-\lambda}}{2-\lambda} > \frac{1}{2(2-\lambda)}.$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{q=n_k+1}^{n_{k+1}} q\Psi(q) \geq \frac{1}{2(2-\lambda)}, \qquad \text{pour } k \geq 1.$$

La série $\sum_{q\geq 1} q\Psi(q)$ est donc nécessairement divergente, et (1.1) n'est pas vérifiée. □

Remarque. En modifiant légèrement la démonstration ci-dessus, il est possible d'établir la variante suivante du Théorème 1 :

Si ξ est un nombre réel irrationnel à quotients partiels non bornés alors il existe une fonction Ψ telle que, pour tout nombre réel $\lambda < 2$, il existe $q_0 = q_0(\lambda)$ tel que $q \mapsto q^\lambda \Psi(q)$ est décroissante pour $q \geq q_0$,

$$\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q) < +\infty,$$

et telle que l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \Psi(q)$$

possède une infinité de solutions rationnelles.

Pour prouver ce résultat, on peut choisir $(n_k)_{k\geq 1}$ et $\Psi(q_{n_k})$ comme dans la démonstration précédente, et poser

$$\Psi(q) = (q_{n_k}/q)^{2-1/k}\Psi(q_{n_k}) \qquad \text{pour } q_{n_{k-1}} < q \leq q_{n_k}.$$

Il n'est pas difficile de montrer que si $\lambda \leq 2 - 1/k$ est un nombre réel, alors $q \mapsto q^\lambda \Psi(q)$ est décroissante pour $q > q_{n_{k-1}}$.

On note également que

$$\begin{aligned}
\sum_{q=1}^{q_{n_k}} q\Psi(q) &\leq \sum_{h=1}^{k} \Psi(q_{n_{h+1}}) \sum_{q=q_{n_h}+1}^{q_{n_{h+1}}} q_{n_{h+1}}^{2-1/(h+1)}/q^{1-1/(h+1)} \\
&= O\Big(\sum_{h=1}^{k} a_{n_{h+1}+1}^{-1} q_{n_{h+1}}^{-1/(h+1)}\,(h+1)\,(q_{n_{h+1}}^{1/(h+1)} - q_{n_h}^{1/(h+1)})\Big) \\
&= O\Big(\sum_{h=1}^{k} (h+1)\, a_{n_{h+1}+1}^{-1}\Big) = O\Big(\sum_{h=1}^{k} \frac{h+1}{2^{h+1}}\Big) = O(1),
\end{aligned}$$

d'où la convergence de la série de terme général $q\Psi(q)$.

Démonstration du Théorème 2.

On conserve les notations utilisées ci-dessus et on note $||\cdot||$ la distance à l'entier le plus proche. Rappelons que les réduites sont également définies par la propriété de meilleure approximation. Cela signifie que, pour $0 < q < q_n$, on a $||q\xi|| > ||q_{n-1}\xi||$, c'est-à-dire

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{q_{n-1}}{q}\left|\xi - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|, \quad \text{pour tout entier } p. \tag{3.1}$$

Posons

$$\Psi(q_n) = \frac{1}{3a_{n+1}q_n^2}$$

et

$$\Psi(q) = \frac{q_{n-1}}{q}\,\frac{1}{3a_n q_{n-1}^2} = \frac{1}{3a_n q q_{n-1}}, \qquad (q_{n-1} \le q < q_n).$$

Observons que

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| > \Psi(q_n), \qquad (n \ge 1). \tag{3.2}$$

En outre, comme

$$\frac{1}{3a_n q_{n-1}} \ge \frac{1}{3q_n} \ge \frac{1}{3a_{n+1} q_n}, \quad (n \ge 1),$$

la fonction $q \mapsto q\Psi(q)$ est décroissante.

Il découle de (3.2) que (1.2) n'est pas vérifiée par le rationnel p/q si $q = q_n$. Soit $q \ge 1$ un entier n'appartenant pas à la suite $(q_n)_{n\ge 1}$. Choisissons l'entier n tel que $q_{n-1} < q < q_n$. Si (1.2) est vérifiée par le rationnel p/q, alors (3.1) entraîne

$$q_{n-1}\left|\xi - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < q\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < q\Psi(q) < \frac{1}{3a_n q_{n-1}},$$

en contradiction avec (3.2). Par conséquent, (1.2) n'a pas de solution.

Il reste maintenant à établir (1.3). À cet effet, notons que

$$S_n := \sum_{q=q_{n-1}}^{q_n - 1} q\Psi(q) = \frac{q_n - q_{n-1}}{3a_n q_{n-1}}.$$

Si $a_n \ge 2$, alors $q_n \ge 2q_{n-1}$ et donc $q_n - q_{n-1} \ge q_n/2$, d'où

$$S_n \ge \frac{q_n}{6a_n q_{n-1}} \ge \frac{1}{6},$$

puisque $q_n \ge a_n q_{n-1}$.

La fonction Ψ répond donc à la question si ξ possède une infinité de quotients partiels ≥ 2, c'est-à-dire si ξ n'est pas équivalent au nombre d'or.

Supposons maintenant que tous les quotients partiels de ξ sont majorés par M. Posons $\Psi(q) = (M+3)^{-1} q^{-2}$ pour $q \ge 1$ et observons qu'alors (1.3) est vérifiée et que l'inégalité (1.2) ne possède aucune solution. Cela achève la démonstration du Théorème 2. □

Démonstration du Théorème 3.

Écrivons $\xi = [0; a_1, a_2, \ldots]$ et notons $(p_n/q_n)_{n\ge 1}$ la suite de ses réduites. D'après un théorème de Khintchine [13], pour presque tout ξ, la suite $((\log q_n)/n)_{n\ge 1}$ est bornée et il existe une infinité d'entiers n tels que

$$a_n > n \log n.$$

Notons que le fait que cette dernière propriété est valable pour presque tout ξ est aussi une conséquence du Lemme 2.2. Soit ξ un nombre réel possédant ces deux propriétés. Il existe alors une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que $(a_{n_k})_{k\geq 1}$ est croissante, $a_{n_k+1} \geq 2^k n_k$ et $n_{k+1} \geq n_k + 4$ pour tout $k \geq 1$.

Pour $k \geq 1$, posons

$$\Psi(q_{n_k}) = \frac{1}{a_{n_k+1} q_{n_k}^2}$$

et

$$\Psi(q) = (q_{n_k}/q)^2 \Psi(q_{n_k}) \qquad \text{pour } q_{n_{k-1}} < q \leq q_{n_k}.$$

Avec ce choix, il découle de (2.1) que (1.2) possède une infinité de solutions.

Observons maintenant que

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{q_{n_k}} q\Psi(q) &\leq O(1) + \sum_{h=1}^{k} \Psi(q_{n_{h+1}}) \sum_{q=q_{n_h}+1}^{q_{n_{h+1}}} q_{n_{h+1}}^2/q \\ &= O(\sum_{h=1}^{k} a_{n_{h+1}+1}^{-1} (\log q_{n_{h+1}} - \log q_{n_h})) \\ &= O(\sum_{h=1}^{k} a_{n_{h+1}+1}^{-1} n_{h+1}) = O(1). \end{aligned}$$

Nous avons la convergence souhaitée. Il reste à s'assurer que la fonction $q \mapsto q^2\Psi(q)$ est bien décroissante. À cet effet, il est suffisant de noter que

$$q^2\Psi(q) = q_{n_k}^2 \Psi(q_{n_k}) = \frac{1}{a_{n_k+1}}$$

pour $q_{n_{k-1}} < q \leq q_{n_k}$.

Établissons maintenant la seconde assertion du théorème. Supposons que $q \mapsto q^2\Psi(q)$ est décroissante. Soit $\xi = [0; a_1, a_2, \ldots]$ un nombre réel tel que $a_n \leq n$ pour tout $n \geq 1$. Notons que l'ensemble de ces nombres n'est pas une union dénombrable d'ensembles de dimension de Hausdorff < 1. Si (1.2) possède une infinité de solutions, alors il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que $\Psi(q_{n_k}) > (n_k+2)^{-1} q_{n_k}^{-2}$ pour $k \geq 1$. Comme la fonction $q \mapsto q^2\Psi(q)$ est décroissante, on a

$$\Psi(q) \geq (n_k + 2)^{-1} q^{-2}, \qquad (1 \leq q \leq q_{n_k}).$$

Pour tout entier $k \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{q=q_{n_{k-1}}}^{q_{n_k}} q\Psi(q) &\geq \sum_{q=q_{n_{k-1}}}^{q_{n_k}} (n_k+2)^{-1} q^{-1} \\ &\geq \frac{\log q_{n_k} - \log q_{n_{k-1}}}{n_k + 2} > \frac{n_k - n_{k-1}}{2(n_k+2)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la série $\sum_{q\geq 1} q\Psi(q)$ est divergente, et (1.1) n'est pas vérifiée. $\square$

Démonstration du Théorème 4.

Nous commençons par des considérations générales sur la fonction f qui nous seront également utiles dans la démonstration du Théorème 6.

Soit F la fonction définie par $F(n) = \sum_{q=1}^{n} q/f(q)$ pour $n \geq 1$. On a $\lim_{n\to\infty} F(n) = +\infty$. Pour $n \geq 1$, posons $G(n) = 4^{2n}/(f(4^n)F(4^n))$. Comme $q \mapsto f(q)/q^2$ est croissante, on obtient $f(q) \geq f(1)q^2$ pour tout $q \geq 1$ et donc $G(n) \leq 1/(f(1)F(4^n))$ pour $n \geq 1$. On en déduit que $\lim_{n\to\infty} G(n) = 0$. En outre, comme $n \mapsto f(4^n)/4^n$ et F sont croissantes, la fonction G est décroissante.

Établissons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} G(n)$ diverge. Pour ce faire on va montrer qu'elle n'est pas de Cauchy. Notons que

$$F(4^{n+1}) - F(4^n) = \sum_{4^n < q \leq 4^{n+1}} q/f(q) \leq 3 \cdot 4^n \cdot 4^n/f(4^n) = 3 \cdot 4^{2n}/f(4^n),$$

où l'on a utilisé la décroissance de $q \mapsto q/f(q) = (1/f(q)) \cdot q^2/f(q)$. Alors, pour $m > k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{m} G(n) = \sum_{n=k}^{m} \frac{4^{2n}}{f(4^n)F(4^n)} &\geq \frac{1}{3}\sum_{n=k}^{m} \frac{F(4^{n+1}) - F(4^n)}{F(4^n)} \\ &\geq \frac{1}{3F(4^n)}\sum_{n=k}^{m}(F(4^{n+1}) - F(4^n)) = \frac{F(4^{m+1}) - F(4^k)}{3F(4^m)}.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} F(n) = +\infty$, pour tout entier $k \geq 1$, il existe $m > k$ tel que $F(4^{m+1}) > 2F(4^k)$, d'où

$$\sum_{n=k}^{m} G(n) \geq \frac{F(4^{m+1}) - F(4^k)}{3F(4^m)} > \frac{F(4^{m+1})}{6F(4^m)} > \frac{1}{6},$$

et la série $\sum_{n\geq 1} G(n)$ diverge.

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} G(n) = +\infty$, si $\tilde{G}(n) = G(n)/\sum_{k=1}^{n} G(k)$, la fonction $\tilde{G}$ est décroissante, $\lim_{n\to\infty} \tilde{G}(n)/G(n) = 0$ et $\sum_{q=1}^{\infty} \tilde{G}(n) = +\infty$. D'après un théorème de Khintchine [13], pour presque tout $\xi = [0; a_1, a_2, \ldots]$, il existe une infinité d'entiers n tels que $a_n > 1/\tilde{G}(n)$ (notons que cela se déduit aussi du Lemme 2.2). D'autre part, le théorème de Lévy [15] affirme que, pour presque tout nombre réel ξ, on a $\lim_{n\to\infty} {q_n}^{1/n} = \mathrm{e}^{\pi^2/12\log 2}$, où $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ désigne la suite des réduites de ξ. En particulier, on note que $q_n < 4^n$ pour tout n assez grand. Soit ξ un nombre réel possédant les deux propriétés ci-dessus. Il existe alors une suite d'entiers strictement croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que $a_{n_k+1} \geq 2^k/G(n_k)$ et $n_{k+1} \geq n_k + 4$ pour tout $k \geq 1$. Comme $q \mapsto f(q)/q^2$ et F sont décroissantes et, pour k suffisamment grand, $q_{n_k} < 4^{n_k}$, on a

$$\frac{f(q_{n_k})F(q_{n_k})}{q_{n_k}^2} \leq \frac{f(4^{n_k})F(4^{n_k})}{4^{2n_k}} = \frac{1}{G(n_k)}.$$

Par conséquent, on obtient

$$a_{n_k+1} \geq \frac{2^k}{G(n_k)} \geq \frac{2^k f(q_{n_k})F(q_{n_k})}{q_{n_k}^2},$$

donc

$$\frac{a_{n_k+1}q_{n_k}^2}{f(q_{n_k})} \geq 2^k F(q_{n_k}).$$

Comme $\lim_{k\to\infty} 2^k F(q_{n_k}) = +\infty$, on peut supposer, au besoin en passant à une sous-suite, que la suite $(a_{n_k+1}q_{n_k}^2/f(q_{n_k}))_{k\geq 1}$ est croissante.

Pour $k \geq 1$, posons

$$\Psi(q_{n_k}) = \frac{1}{a_{n_k+1}q_{n_k}^2}$$

et

$$\Psi(q) = \frac{f(q_{n_k})}{f(q)} \cdot \Psi(q_{n_k}) \qquad \text{pour } q_{n_{k-1}} < q \leq q_{n_k}.$$

Avec ce choix, il découle de (2.1) que (1.2) possède une infinité de solutions.

Observons maintenant que

$$\begin{aligned}
\sum_{q=1}^{q_{n_k}} q\Psi(q) &\leq O(1) + \sum_{h=1}^{k} f(q_{n_{h+1}})\Psi(q_{n_{h+1}}) \sum_{q=q_{n_h}+1}^{q_{n_{h+1}}} \frac{q}{f(q)} \\
&= O(1) + \sum_{h=1}^{k} f(q_{n_{h+1}})\Psi(q_{n_{h+1}})(F(q_{n_{h+1}}) - F(q_{n_h})) \\
&= O(1) + \sum_{h=1}^{k} a_{n_{h+1}+1}^{-1} \frac{f(q_{n_{h+1}})}{q_{n_{h+1}}^2}(F(q_{n_{h+1}}) - F(q_{n_h})) \\
&\leq O(1) + \sum_{h=1}^{k} \frac{f(q_{n_{h+1}})F(q_{n_{h+1}})G(n_{h+1})}{2^{h+1}q_{n_{h+1}}^2}.
\end{aligned}$$

Comme $f(q_{n_{h+1}})F(q_{n_{h+1}})/q_{n_{h+1}}^2 \leq 1/G(n_{h+1})$, pour tout h suffisamment grand, on obtient

$$\sum_{q=1}^{q_{n_k}} q\Psi(q) = O\Big(\sum_{h=1}^{k} \frac{1}{2^{h+1}}\Big) = O(1),$$

et nous avons la convergence souhaitée.

Il reste à s'assurer que la fonction $q \mapsto f(q)\Psi(q)$ est bien décroissante. À cet effet, il est suffisant de noter que

$$f(q)\Psi(q) = f(q_{n_k})\Psi(q_{n_k}) = \frac{f(q_{n_k})}{a_{n_k+1}q_{n_k}^2}$$

pour $q_{n_{k-1}} < q \le q_{n_k}$. Comme la suite $(a_{n_k+1}q_{n_k}^2/f(q_{n_k}))_{k\ge1}$ est croissante, cela conclut la démonstration. □

Démonstration du Théorème 5.

Écrivons $\xi = [0; a_1, a_2, \ldots]$. Le résultat principal de [19] implique que, pour presque tout ξ, il existe une infinité d'entiers n tels que

$$\max\{a_k : 1 \le k \le n\} \le n.$$

On suppose que ξ vérifie cette propriété et que la suite $(a_n)_{n\ge1}$ n'est pas bornée.

Soit $(n_j)_{j\ge1}$ la suite croissante définie par $n_1 = 1$ et, pour $j \ge 1$, par

$$n_{j+1} = \min\{n > n_j : a_n \ge a_{n_j}\}.$$

Posons

$$\Psi(q_{n_j-1}) = \frac{1}{3a_{n_j}q_{n_j-1}^2}$$

et

$$\Psi(q) = \left(\frac{q_{n_j-1}}{q}\right)^2 \frac{1}{3a_{n_j}q_{n_j-1}^2} = \frac{1}{3a_n q^2}, \qquad (q_{n_j-1} \le q < q_{n_{j+1}-1}).$$

Observons que

$$\left|\xi - \frac{p_{n_j}}{q_{n_j}}\right| > \Psi(q_{n_j}), \qquad (j \ge 1).$$

Comme $q^2\Psi(q) = \frac{1}{3a_{n_j}}$ pour $q_{n_j-1} \le q < q_{n_{j+1}-1}$, par le choix de la suite $(n_j)_{j\ge1}$, la fonction $q \mapsto q^2\Psi(q)$ est décroissante.

Comme précédemment, (1.2) n'a pas de solution.

Il reste maintenant à établir (1.3). À cet effet, notons que

$$S_j := \sum_{q=q_{n_j-1}}^{q_{n_{j+1}-1}-1} q\Psi(q) \ge \frac{\log q_{n_{j+1}} - \log q_{n_j}}{3a_{n_j}} \ge \frac{n_{j+1} - n_j}{6a_{n_j}}.$$

On a aussi, pour $n_j \le n < n_{j+1}$,

$$\sum_{q=q_{n_j-1}}^{q_n} q\Psi(q) \ge \frac{\log q_n - \log q_{n_j}}{3a_{n_j}} \ge \frac{n - n_j}{6a_{n_j}}. \tag{3.3}$$

Si l'on choisit n tel que $\max\{a_k : 1 \le k \le n\} \le n$ et on somme les inégalités (3.3) à partir de $n_{j_0} \le n/2$, on obtient la minoration $\frac{n-n_{j_0}}{6a_{n_j}} \ge \frac{1}{12}$. Cela montre que la série $\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q)$ diverge.

D'autre part, on peut considérer l'ensemble de Cantor

$$\mathcal{C} = \{[0; a_1, a_2, \dots] \in [0,1] : a_k \leq k^2 \text{ pour tout } k \geq 1\},$$

de mesure de Lebesgue positive, et la fonction $h : \mathcal{C} \to \mathbf{R}$ donnée par

$$h([0; a_1, a_2, \dots]) = [0; a_1, 1, a_2, 4, a_3, a_4, 16, \dots, a_{2^n}, 2^{2n}, a_{2^n+1}, a_{2^n+2}, \dots, a_{2^{n+1}}, 2^{2n+2}, \dots].$$

On peut montrer comme dans [5] que, pour tout $\alpha < 1$, la fonction

$$h^{-1} : h(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

est continue et Hölderienne d'exposant α. On en déduit que $h(\mathcal{C})$ est de dimension de Hausdorff totale, et n'est pas une union dénombrable d'ensembles de dimension < 1. De plus, si Ψ est une fonction telle que $q \mapsto q^2\Psi(q)$ est décroissante et si l'inégalité $|h(\alpha) - p/q| < \Psi(q)$ n'a qu'un nombre fini de solutions alors $\sum_{q \geq 1} q\Psi(q) < +\infty$. En fait, on doit avoir

$$\Psi(q) \leq \frac{1}{2^{2n} q^2}$$

pour

$$\begin{aligned} K(a_1, 1, a_2, 4, a_3, &a_4, 16, \dots, a_{2^n}, 2^{2n}) < q \\ &\leq K(a_1, 1, a_2, 4, a_3, a_4, 16, \dots, a_{2^n}, 2^{2n}, a_{2^n+1}, a_{2^n+2}, \dots, a_{2^{n+1}}, 2^{2n+2}) \end{aligned}$$

et $n \geq n_0$. Alors, comme $\sum_{a < n \leq b} \frac{1}{n} < \log \frac{b}{a}$ et

$$\begin{aligned} \frac{K(a_1, 1, a_2, 4, a_3, a_4, 16, \dots, a_{2^n}, 2^{2n}, a_{2^n+1}, a_{2^n+2}, \dots, a_{2^{n+1}}, 2^{2n+2})}{K(a_1, 1, a_2, 4, a_3, a_4, 16, \dots, a_{2^n}, 2^{2n})} &< (2^{2n+2} + 1)^{2^n + 1} \\ &< (2^{2n+3})^{2^{n+1}}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{q > K(a_1, 1, a_2, 4, a_3, a_4, 16, \dots, a_{2^{n_0}}, 2^{2n_0})} & q\Psi(q) \\ &\leq \sum_{n \geq n_0} \frac{\log \frac{K(a_1, 1, a_2, 4, a_3, a_4, 16, \dots, a_{2^n}, 2^{2n}, a_{2^n+1}, a_{2^n+2}, \dots, a_{2^{n+1}}, 2^{2n+2})}{K(a_1, 1, a_2, 4, a_3, a_4, 16, \dots, a_{2^n}, 2^{2n})}}{2^{2n}} \\ &< \sum_{n \geq n_0} \frac{(2n+3) 2^{n+1} \log 2}{2^{2n}} = \sum_{n \geq n_0} \frac{(2n+3) \log 2}{2^{n-1}} < +\infty. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 5. □

Démonstration du Théorème 6.

Écrivons $\xi = [0; a_1, a_2, \ldots]$. Pour $n \geq 1$, posons $F(n) = \sum_{q=1}^{n} q/f(q)$, comme dans la démonstration du Théorème 4. On va montrer que, pour presque tout ξ, il existe une infinité d'entiers n tels que

$$a_k \leq \frac{F(\lceil \sqrt{2}^n \rceil) f(\lceil \sqrt{2}^k \rceil)}{2^k}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n.$$

D'après un théorème de Khintchine [13], pour presque tout ξ, il existe k_0 tel que $a_k < k^2$ pour tout $k \geq k_0$ (cette assertion se déduit également du Lemme 2.2). On va supposer que ξ possède cette propriété.

Soit $m_1 = 1$ et, pour $r \geq 1$, posons

$$m_{r+1} = \min\{m > m_r : F(\lceil \sqrt{2}^m \rceil) f(1) > m_r^2\}.$$

On va estimer la probabilité pour que l'inégalité

$$a_k \leq F(\lceil \sqrt{2}^{m_{r+1}} \rceil) f(\lceil \sqrt{2}^k \rceil)/2^k$$

soit vraie pour tout k vérifiant $m_r < k \leq m_{r+1}$. Pour chaque k fixé, d'après le Corollaire 2.3, la probabilité que l'on ait $a_k \leq F(\lceil \sqrt{2}^{m_{r+1}} \rceil) f(\lceil \sqrt{2}^k \rceil)/2^k$ est, quelles que soient les valeurs de $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, plus grande que

$$1 - \frac{2^{k+1}}{F(\lceil \sqrt{2}^{m_{r+1}} \rceil) f(\lceil \sqrt{2}^k \rceil)} \geq \exp\bigl(-2^{k+2}/F(\lceil \sqrt{2}^{m_{r+1}} \rceil) f(\lceil \sqrt{2}^k \rceil)\bigr).$$

Par conséquent, la probabilité que ces inegalités soient vraies pour tout k vérifiant $m_r < k \leq m_{r+1}$ est plus grande que

$$\exp\Bigl(-\sum_{k=m_r+1}^{m_{r+1}} \frac{2^{k+2}}{F(\lceil \sqrt{2}^{m_{r+1}} \rceil) f(\lceil \sqrt{2}^k \rceil)}\Bigr).$$

On note maintenant que, pour tout $k \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} F(\lceil \sqrt{2}^k \rceil) - F(\lceil \sqrt{2}^{k-1} \rceil) &= \sum_{q=\lceil \sqrt{2}^{k-1} \rceil + 1}^{F(\lceil \sqrt{2}^k \rceil)} \frac{q}{f(q)} \\ &\geq (\lceil \sqrt{2}^k \rceil - \lceil \sqrt{2}^{k-1} \rceil) \frac{\lceil \sqrt{2}^k \rceil}{f(\lceil \sqrt{2}^k \rceil)} \\ &\geq \frac{1}{4} \frac{\lceil \sqrt{2}^k \rceil^2}{f(\lceil \sqrt{2}^k \rceil)} \geq \frac{2^{k-2}}{f(\lceil \sqrt{2}^k \rceil)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=m_r+1}^{m_{r+1}} \frac{2^{k+2}}{F(\lceil\sqrt{2}^{m_{r+1}}\rceil)f(\lceil\sqrt{2}^{k}\rceil)} &= \frac{16}{F(\lceil\sqrt{2}^{m_{r+1}}\rceil)} \sum_{k=m_r+1}^{m_{r+1}} \frac{2^{k-2}}{f(\lceil\sqrt{2}^{k}\rceil)} \\
&\leq \frac{16}{F(\lceil\sqrt{2}^{m_{r+1}}\rceil)} \sum_{k=m_r+1}^{m_{r+1}} (F(\lceil\sqrt{2}^{k}\rceil) - F(\lceil\sqrt{2}^{k-1}\rceil)) \\
&= \frac{16}{F(\lceil\sqrt{2}^{m_{r+1}}\rceil)} (F(\lceil\sqrt{2}^{m_{r+1}}\rceil) - F(\lceil\sqrt{2}^{m_r}\rceil)) < 16,
\end{aligned}
$$

et donc la probabilité que l'on ait $a_k \leq F(\lceil\sqrt{2}^{m_{r+1}}\rceil)f(\lceil\sqrt{2}^{k}\rceil)/2^k$ pour tout k vérifiant $m_r < k \leq m_{r+1}$ est plus grande que $\exp(-16)$. On conclut que, pour presque tout ξ, il existe une infinité d'entiers positifs r pour lesquels $a_k \leq F(\lceil\sqrt{2}^{m_{r+1}}\rceil)f(\lceil\sqrt{2}^{k}\rceil)/2^k$ pour tout entier k tel que $m_r < k \leq m_{r+1}$. Pour un tel entier r suffisamment grand, comme $a_k < k^2$ pour tout k assez grand, on a, pour $k \leq m_r$,

$$
a_k < m_r^2 < F(\lceil\sqrt{2}^{m_{r+1}}\rceil)f(1) \leq F(\lceil\sqrt{2}^{m_{r+1}}\rceil)f(\lceil\sqrt{2}^{k}\rceil)/2^k
$$

et donc $a_k \leq F(\lceil\sqrt{2}^{m_{r+1}}\rceil)f(\lceil\sqrt{2}^{k}\rceil)/2^k$ pour tout k tel que $1 \leq k \leq m_{r+1}$, comme on le souhaitait.

On suppose que ξ vérifie cette propriété et que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est telle que, pour une infinité de valeurs de n,

$$
a_n > \frac{1}{\tilde{G}(n)} > \frac{1}{G(n)} = \frac{f(4^n)F(4^n)}{4^{2n}} \geq \frac{f(q_{n-1})F(4^n)}{q_{n-1}^2}.
$$

Cette dernière condition est vérifiée pour presque tout ξ (on raisonne comme dans la démonstration du Théorème 4).

Soit $(n_j)_{j\geq 1}$ la suite croissante d'entiers définie par $n_1 = 1$ et, pour $j \geq 1$,

$$
n_{j+1} = \min\Big\{ n > n_j : \frac{f(q_{n-1})}{a_n q_{n-1}^2} \leq \frac{f(q_{n_j-1})}{a_{n_j} q_{n_j-1}^2} \Big\}.
$$

Notons que, comme il existe une infinité de valeurs de n vérifiant $a_n > f(q_{n-1})F(4^n)/q_{n-1}^2$, on a $\liminf_{n\to\infty} f(q_{n-1})/a_n q_{n-1}^2 = 0$, et donc la suite $(n_j)_{j\geq 1}$ est bien définie pour tout entier positif j.

Posons

$$
\Psi(q_{n_j-1}) = \frac{1}{3a_{n_j} q_{n_j-1}^2}
$$

et

$$
\Psi(q) = \frac{f(q_{n_j-1})}{f(q)} \frac{1}{3a_{n_j} q_{n_j-1}^2} = \frac{f(q_{n_j-1})}{3a_{n_j} q_{n_j-1}^2 f(q)}, \qquad (q_{n_j-1} \leq q < q_{n_{j+1}-1}).
$$

Observons que, comme $q \mapsto f(q)/q^2$ est croissante, pour $q_{n_j-1} \le q < q_{n_{j+1}-1}$ on a $f(q)/q^2 \ge f(q_{n_j-1})/q_{n_j-1}^2$, d'où

$$\frac{f(q_{n_j-1})}{3a_{n_j}q_{n_j-1}^2 f(q)} \le \frac{1}{3a_{n_j}q^2} < \frac{1}{2q^2}.$$

Ainsi, si $|\xi - p/q| < \Psi(q)$, alors il existe un entier n tel que $q = q_{n-1}$. On a aussi

$$\frac{f(q_{n-1})}{a_n q_{n-1}^2} \ge \frac{f(q_{n_j-1})}{a_{n_j}q_{n_j-1}^2},$$

d'où

$$\Psi(q_{n-1}) = \frac{f(q_{n_j-1})}{3a_{n_j}q_{n_j-1}^2 f(q_{n-1})} \le \frac{1}{3a_n q_{n-1}^2}.$$

Alors, comme précédemment, (1.2) n'a pas de solutions.

Comme

$$f(q)\Psi(q) = f(q_{n_j-1})\Psi(q_{n_j-1}) = \frac{f(q_{n_j-1})}{3a_{n_j}q_{n_j-1}^2}$$

pour $q_{n_j-1} \le q < q_{n_{j+1}-1}$, le choix de la suite $(n_j)_{j\ge1}$ entraîne que la fonction $q \mapsto q^2\Psi(q)$ est décroissante.

Il reste maintenant à établir (1.3). À cet effet, notons que

$$\begin{aligned} S_j := \sum_{q=q_{n_j}}^{q_{n_{j+1}}-1} q\Psi(q) &= \frac{f(q_{n_j-1})}{3a_{n_j}q_{n_j-1}^2} \sum_{q=q_{n_j}}^{q_{n_{j+1}}-1} \frac{q}{f(q)} \\ &= \frac{f(q_{n_j-1})(F(q_{n_{j+1}}-1) - F(q_{n_j}-1))}{3a_{n_j}q_{n_j-1}^2}. \end{aligned}$$

On a aussi, pour $n_j \le n < n_{j+1}$,

$$\sum_{q=q_{n_j-1}}^{q_n} q\Psi(q) = \frac{f(q_{n_j-1})}{3a_{n_j}q_{n_j-1}^2} \sum_{q=q_{n_j-1}}^{q_n} \frac{q}{f(q)} = \frac{f(q_{n_j-1})(F(q_n) - F(q_{n_j}-1))}{3a_{n_j}q_{n_j-1}^2}. \tag{3.4}$$

Si l'on choisit n assez grand et tel que

$$a_k \le \frac{F(\lceil\sqrt{2}^n\rceil)f(\lceil\sqrt{2}^k\rceil)}{2^k}, \quad \text{pour } 1 \le k \le n,$$

et si on somme les inégalités (3.4) à partir de $q_{n_{j_0}}$, où j_0 est le plus grand entier j tel que $F(q_{n_j}-1) \le F(q_n)/2$, et jusqu'à q_n, alors on obtient la minoration

$$\frac{f(q_{n_j-1})(F(q_n) - F(q_{n_{j_0}}-1))}{3a_{n_j}q_{n_j-1}^2} \ge \frac{f(q_{n_j-1})F(q_n)}{6a_{n_j}q_{n_j-1}^2}.$$

Comme $n \geq n_j$, on a $a_{n_j} \leq F(\lceil \sqrt{2}^n \rceil) f(\lceil \sqrt{2}^{n_j} \rceil)/2^{n_j}$. Comme $q_{n_j} - 1 \geq \lceil \sqrt{2}^{n_j} \rceil$ et $q_n \geq \lceil \sqrt{2}^n \rceil$, on a

$$\frac{f(q_{n_j}-1)}{(q_{n_j}-1)^2} \geq \frac{f(\lceil \sqrt{2}^{n_j} \rceil)}{\lceil \sqrt{2}^{n_j} \rceil^2} > \frac{f(\lceil \sqrt{2}^{n_j} \rceil)}{2^{n_j+1}}$$

et $F(q_n) \geq F(\lceil \sqrt{2}^n \rceil)$, donc

$$a_{n_j} \leq \frac{F(\lceil \sqrt{2}^n \rceil) f(\lceil \sqrt{2}^{n_j} \rceil)}{2^{n_j}} \leq \frac{2F(q_n) f(q_{n_j}-1)}{(q_{n_j}-1)^2}$$

et alors $f(q_{n_j-1})F(q_n)/(6a_{n_j} q_{n_j-1}^2) \geq 1/12$. Cela montre que la série $\sum_{q=1}^{\infty} q\Psi(q)$ diverge.
□

Démonstration du Théorème 7.

Soit $\xi = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ un élément de X_λ. Soit Ψ une fonction telle que $q \mapsto q^\lambda \Psi(q)$ est décroissante et $|\xi - p/q| < \Psi(q)$ n'a qu'un nombre fini de solutions. Alors, la série $\sum_{q\geq 1} q\Psi(q)$ converge. Par (2.1), pour tout n assez grand, on a $\Psi(q_n) \leq \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$. Alors, pour tout q suffisamment grand,

$$q^\lambda \Psi(q) \leq \min_{q_n \leq q, n \geq n_0} q_n^\lambda \Psi(q_n) \leq \min_{q_n \leq q} \frac{1}{a_{n+1} q_n^{2-\lambda}},$$

d'où

$$\Psi(q) \leq \Psi_\xi(q) := \min_{q_n \leq q} \frac{1}{a_{n+1} q_n^{2-\lambda} q^\lambda}.$$

On note aussi que, par (2.1), on a $\tilde{\Psi}(q) := \Psi_\xi(q)/3$ pour $q \geq 1$. On en déduit que $|\xi - p/q| > \tilde{\Psi}(q)$ pour tout q assez grand. En effet, si $q_n \leq q < q_{n+1}$ et $|\xi - p/q| \leq \tilde{\Psi}(q) \leq \frac{1}{3a_{n+1}q_n^{2-\lambda}q^\lambda}$, alors

$$|q\xi - p| \leq \frac{1}{3a_{n+1} q_n^{2-\lambda} q^{\lambda-1}} \leq \frac{1}{3a_{n+1}q_n} < |q_n\xi - p_n|,$$

en contradiction avec $q < q_{n+1}$.

Ces remarques impliquent que

$$\xi \in X_\lambda \iff \sum_{q \geq 1} q\Psi_\xi(q) < +\infty.$$

Posons n_1=1 et, pour $j \geq 1$,

$$n_{j+1} = \min\Big\{ n > n_j : \frac{1}{a_{n+1}q_n^{2-\lambda}} < \frac{1}{a_{n_j+1}q_{n_j}^{2-\lambda}} \Big\}.$$

Pour $q_{n_j} \leq q < q_{n_{j+1}}$, on a $\Psi_\xi(q) = \frac{1}{a_{n_j+1} q_{n_j}^{2-\lambda} q^\lambda}$, et donc

$$\sum_{q \geq 1} q \Psi_\xi(q) = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{a_{n_j+1} q_{n_j}^{2-\lambda}} \sum_{q_{n_j} \leq q < q_{n_{j+1}}} \frac{1}{q^{\lambda-1}}.$$

Comme $\sum_{q_{n_j} \leq q < q_{n_{j+1}}} \frac{1}{q^{\lambda-1}}$ est de l'ordre de $\frac{q_{n_{j+1}}^{2-\lambda} - q_{n_j}^{2-\lambda}}{2-\lambda}$, pour que ξ appartienne à X_λ, il est nécessaire que $\lim_{j \to \infty} a_{n_j+1} = +\infty$. Par conséquent, $\sum_{q_{n_j} \leq q < q_{n_{j+1}}} \frac{1}{q^{\lambda-1}}$ est de l'ordre de $\frac{q_{n_{j+1}}^{2-\lambda}}{2-\lambda}$, et l'on a

$$\xi \in X_\lambda \iff \sum_{j \geq 1} \frac{1}{a_{n_j+1}} \left(\frac{q_{n_{j+1}}}{q_{n_j}} \right)^{2-\lambda} < +\infty.$$

Nous allons maintenant établir que $\dim X_\lambda \leq \lambda/2$. La discussion précédente montre que, pour tout entier positif M assez grand, X_λ est contenu dans la réunion dénombrable pour $n_0 \geq 1$ des ensembles

$$Y(\lambda, M, n_0) := \{\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] : \prod_{1 \leq j \leq n, a_j \geq M} a_j \geq q_n^{2-\lambda}, \text{pour tout } n \geq n_0\},$$

dont on va estimer la dimension.

Pour tout $\beta > 1/2$ fixé, on choisit un entier M suffisamment grand de telle sorte que la dimension d_M de l'ensemble F_M des nombres réels dont tous les quotients partiels sont au moins égaux à M soit plus petite que β (l'existence d'un tel M est assurée par [9]). Comme, pour tout entier r, on a

$$Y(\lambda, M, n_0) \cap [r, r+1) = (Y(\lambda, M, n_0) \cap [0, 1)) + r,$$

il nous suffit d'estimer la dimension de $Y = Y(\lambda, M, n_0) \cap [0, 1)$.

Pour tout entier positif k_0 suffisamment grand, l'ensemble Y est contenu dans la réunion pour $k \geq k_0$ des intervalles

$$I(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \{[0; a_1, a_2, \ldots, a_m, \alpha] : \alpha > 1\}$$

tels que

$$2^k \leq q_m = K(a_1, a_2, \ldots, a_m) < 2^{k+1}.$$

On note que la longueur d'un tel intervalle vérifie $|I(a_1, a_2, \ldots, a_m)| < 2^{-2k}$.

Pour $k \geq k_0$ fixé, et pour tout intervalle $I(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ comme ci-dessus, on considère les suites $\pi_1(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ et $\pi_2(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ formées respectivement par les quotients partiels $a_i < M$ et par les quotients partiels $a_i \geq M$, en gardant l'ordre dans lequel ils apparaissent dans la suite de départ $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. On a nécessairement

$$\text{Card}(\pi_2(a_1, a_2, \ldots, a_m)) = O(k/\log M) = o(k),$$

et donc le nombre de suites $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ qui ont une même image par (π_1, π_2) est $2^{o(k)}$. On a aussi

$$
\begin{aligned}
2^{-o(k)} K(\pi_1(a_1, a_2, \ldots, a_m)) K(\pi_2(a_1, a_2, \ldots, a_m)) &\leq K(a_1, a_2, \ldots, a_m) \\
&\leq 2^{o(k)} K(\pi_1(a_1, a_2, \ldots, a_m)) K(\pi_2(a_1, a_2, \ldots, a_m)).
\end{aligned}
$$

Pour tout entier positif $j \leq k$ on considère l'ensemble $Y_{j,k}$ des suites $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ comme ci-dessus et telles que

$$2^j \leq K(\pi_1(a_1, a_2, \ldots, a_m)) < 2^{j+1}.$$

Comme on a

$$K(\pi_2(a_1, a_2, \ldots, a_m)) \geq \prod_{1 \leq j \leq m, a_j \geq M} a_j \geq (K(a_1, a_2, \ldots, a_m))^{2-\lambda} \geq (2^k)^{2-\lambda},$$

si $Y_{j,k}$ n'est pas l'ensemble vide, il vient $j \leq k(\lambda - 1 + o(1))$ et

$$K(\pi_2(a_1, a_2, \ldots, a_m)) = 2^{(1+o(1))k-j}.$$

Alors, pour k et j fixés, on a au plus $(2^{(1+o(1))k-j})^{2d_M}$ choix pour $\pi_2(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, et au plus $(2^{j+1})^2$ choix pour $\pi_1(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. On a donc au plus

$$2^{o(k)} (2^{j+1})^2 (2^{(1+o(1))k-j})^{2d_M} = 2^{(2d_m+o(1))k+2(1-d_M)j} < 2^{(3d_M+\beta)k/2} \cdot 2^j$$

choix pour $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Si on somme cette expression sur $j = 1, \ldots, k(\lambda - 1 + o(1))$, on a, pour k fixé, au plus

$$2^{(3d_M+\beta)k/2} \cdot 2^{k(\lambda-1+o(1))} < 2^{(d_M+\beta+\lambda-1)k}$$

choix pour $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Comme $|I(a_1, a_2, \ldots, a_m)| < 2^{-2k}$, on a

$$\sum_{k \geq k_0} 2^{(d_M+\beta+\lambda-1)k} (2^{-2k})^{(2\beta+\lambda-1)/2} = \sum_{k \geq k_0} 2^{-(\beta-d_M)k} = O(1),$$

d'où la majoration $\dim Y \leq (2\beta + \lambda - 1)/2$. Comme $\beta > 1/2$ est arbitraire, on en déduit que $\dim X_\lambda \leq \lambda/2$.

Pour finir la démonstration, nous allons montrer que $\dim X_\lambda \geq \lambda/2$.

Pour tout entier $m \geq 8$, on note C_m l'ensemble des nombres réels de $(0, 1)$ dont tous les quotients partiels sont inférieurs ou égaux à m. Jarník [12] a montré que $\dim C_m$ excède $1 - \frac{1}{m \log 2}$.

Soit m un entier suffisamment grand et soit $\delta > 0$ un nombre réel. Soit $\xi = [0; a_1, a_2, \ldots]$ un élément de C_m. Nous allons construire des fractions continues du type

$$\tilde{\xi} = [0; b_1, b_2, b_3, \ldots] = [0; a_1, a_2, \ldots, a_{r_1}, c^{(1)}, a_{r_1+1}, a_{r_1+2}, \ldots, a_{r_2}, c^{(2)}, a_{r_2+1}, a_{r_2+2}, \ldots],$$

où $r_1 = 1, c^{(1)} = 2$ et, pour tout $j \geq 2$, l'entier r_j est le plus petit entier r tel que $r > r_{j-1}$ et

$$\Big(\frac{K(a_1, a_2, \ldots, a_{r_1}, c^{(1)}, a_{r_1+1}, a_{r_1+2}, \ldots, c^{(j-1)}, a_{r_{j-1}+1}, a_{r_{j-1}+2}, \ldots, a_r)}{K(a_1, a_2, \ldots, a_{r_1}, c^{(1)}, a_{r_1+1}, a_{r_1+2}, \ldots, a_{r_{j-1}})}\Big)^{2-\lambda+\delta} > c^{(j-1)};$$

en outre, $c^{(j)}$ est un entier arbitraire compris entre $2c^{(j-1)}$ et $(2 + 1/j^2)c^{(j-1)}$.

L'ensemble $\hat{\mathcal{C}}$ des nombres réels $\tilde{\xi}$ ainsi construits est un ensemble de Cantor dont on va estimer la dimension de Hausdorff. Notons que, si $c = \prod_{j \geq 1}(1+\frac{1}{2j^2})$, alors $2^j \leq c^{(j)} < c \cdot 2^j$ pour tout $j \geq 1$, et, si $\tilde{\xi}$ est un nombre réel comme ci-dessus, alors, en posant $\tilde{n}_j := r_j + j - 1$, on a $b_{\tilde{n}_j+1} = c^{(j)}$, et, en notant q_n le continuant $K(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, on obtient que $q_{\tilde{n}_j+1}/q_{\tilde{n}_j}$ est de l'ordre de $(2^j)^{\frac{1}{2-\lambda+\delta}}$. Par suite, $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{a_{\tilde{n}_j+1}} (\frac{q_{\tilde{n}_j+1}}{q_{\tilde{n}_j}})^{2-\lambda}$ est de l'ordre de

$$\sum_{j \geq 1} 2^{-j} (2^j)^{\frac{2-\lambda}{2-\lambda+\delta}} = \sum_{j \geq 1} 2^{\frac{-\delta j}{2-\lambda+\delta}} < +\infty.$$

Il n'est pas difficile de voir qu'il existe une constante t tel que, pour n assez grand, la suite $(n_j)_{j \geq 1}$ associée à $\tilde{\xi}$ comme au début de la démonstration de ce théorème vérifie $n_j = \tilde{n}_{j+t}$ pour tout j assez grand, d'où l'on déduit que $\hat{\mathcal{C}} \subset X_\lambda$.

Rappelons l'énoncé de la Proposition 5.2 de [4] (qui est l'Example 4.6 de [7]). Considérons une suite décroissante $[0, 1] = E_0 \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ de sous-ensembles de $[0, 1]$ tels que chaque E_k est une union disjointe finie d'intervalles fermés. Supposons que, pour tout $k \geq 1$, chaque intervalle composant E_{k-1} contient au moins $\hat{m}_k \geq 2$ intervalles composant E_k, et que ceux-ci sont séparés par des intervalles de longueur au moins égale à ε_k, où $0 < \varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$. Alors la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor $\mathcal{C} := \cap_{k=0}^{\infty} E_k$ vérifie

$$\dim \mathcal{C} \geq \liminf_{k \to +\infty} \frac{\log(\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_{k-1})}{-\log(\hat{m}_k \varepsilon_k)}.$$

Nous allons construire des ensembles $\hat{E}_k$, qui sont des unions disjointes d'intervalles fermés et vérifient $\hat{\mathcal{C}} = \cap_{k=0}^{\infty} \hat{E}_k$. Ils vont nous permettre d'utiliser la Proposition 5.2 de [4] pour minorer $\dim \hat{\mathcal{C}}$. Pour ce faire, on va décrire, pour tout élément $\tilde{\xi}$ de $\hat{\mathcal{C}}$ et pour tout $k \geq 1$, l'intervalle composant $\hat{I}_k(\tilde{\xi})$ de $\hat{E}_k$ qui contient ξ. Pour toute suite finie d'entiers positifs $b_1, b_2, \ldots, b_r$, posons

$$J^{(m)}(b_1, b_2, ..., b_r) := \Big\{[0; b_1, b_2, ..., b_r, x] : x \in [\frac{m+2}{m+1}, m+1]\Big\}.$$

Pour $k \geq 1$, notons

$$\hat{I}_k(\tilde{\xi}) = J^{(m)}(a_1, a_2, \ldots, a_{r_k}, c^{(k)}).$$

Observons que $q_{\tilde{n}_j+1}/q_{\tilde{n}_j}$ est de l'ordre de $(2^j)^{\frac{1}{2-\lambda+\delta}}$ et que $K(a_1, a_2, \ldots, a_{r_k}, c^{(k)})$ et $q_{\tilde{n}_k}$ sont de l'ordre de $2^{\frac{(1+o(1))k^2}{2(2-\lambda+\delta)}}$. Comme $K(a_{r_k+1}, a_{r_k+2}, \ldots, a_{r_{k+1}})$ est de l'ordre de

$2^{-k}q_{\tilde{n}_{k+1}}/q_{\tilde{n}_k}$, donc de l'ordre de $(2^k)^{\frac{\lambda-1-\delta}{2-\lambda+\delta}}$, on a au moins $(2^k)^{2(1-\frac{1}{m\log 2})\frac{\lambda-1-\delta}{2-\lambda+\delta}}$ choix possibles pour $a_{r_k+1}, a_{r_k+2}, \ldots, a_{r_{k+1}}$. Comme on dispose de $c^{(k-1)}/k^2 = 2^{(1-o(1))k}$ choix possibles pour $c^{(k)}$, on peut alors, en considérant m grand et δ petit, prendre $\hat{m}_k$ de l'ordre de

$$(2^k)^{\frac{2(\lambda-1)}{2-\lambda}+1-o(1)} = (2^k)^{\frac{\lambda}{2-\lambda}-o(1)},$$

et le produit $\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_{k-1}$ est alors de l'ordre de $(2^{k^2})^{\frac{\lambda}{2(2-\lambda)}-o(1)}$.

D'autre part, ε_k est de l'ordre de $q_{\tilde{n}_k}^{-2}$, donc de l'ordre de $2^{\frac{-(1+o(1))k^2}{2-\lambda+\delta}} = 2^{\frac{-(1+o(1))k^2}{2-\lambda}}$, et la Proposition 5.2 de [4] rappelée ci-dessus nous donne

$$\dim \hat{\mathcal{C}} \geq \liminf_{k\to+\infty} \frac{\log(\hat{m}_1 \ldots \hat{m}_{k-1})}{-\log(\hat{m}_k \varepsilon_k)} = (1-o(1))\frac{\lambda(2-\lambda)}{2(2-\lambda)} = (1-o(1))\frac{\lambda}{2},$$

ce qui entraîne la minoration $\dim X_\lambda \geq \lambda/2$. □

Démonstration du Théorème 8.

Soit $\xi = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ un élément de Y_b. Soit Ψ une fonction telle que la fonction $q \mapsto q(\log\log q)^{b\log\log q}\Psi(q)$ est décroissante et $|\xi - p/q| < \Psi(q)$ n'a qu'un nombre fini de solutions. Alors, la série $\sum_{q\geq 1} q\Psi(q)$ converge. Par (2.1), pour tout n assez grand, on a $\Psi(q_n) \leq \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$. Alors, pour tout q suffisamment grand,

$$\begin{aligned} q(\log\log q)^{b\log\log q}\Psi(q) &\leq \min_{q_n\leq q, n\geq n_0} q_n(\log\log q_n)^{b\log\log q_n}\Psi(q_n) \\ &\leq \min_{q_n\leq q} \frac{(\log\log q_n)^{b\log\log q_n}}{a_{n+1}q_n}, \end{aligned}$$

d'où

$$\Psi(q) \leq \Psi_\xi(q) := \min_{q_n\leq q} \frac{(\log\log q_n)^{b\log\log q_n}}{a_{n+1}q_n q(\log\log q)^{b\log\log q}}.$$

On note aussi que, par (2.1), en posant $\tilde{\Psi}(q) := \Psi_\xi(q)/3$ pour $q \geq 1$, il vient $|\xi - p/q| > \tilde{\Psi}(q)$ pour tout q assez grand. En effet, si $q_n \leq q < q_{n+1}$ et

$$|\xi - p/q| \leq \tilde{\Psi}(q) \leq \frac{(\log\log q_n)^{b\log\log q_n}}{3a_{n+1}q_n q(\log\log q)^{b\log\log q}},$$

alors

$$|q\xi - p| \leq \frac{(\log\log q_n)^{b\log\log q_n}}{3a_{n+1}q_n(\log\log q)^{b\log\log q}} \leq \frac{1}{3a_{n+1}q_n} < |q_n\xi - p_n|,$$

en contradiction avec $q < q_{n+1}$.

Ces remarques impliquent que

$$\xi \in Y_b \iff \sum_{q\geq 1} q\Psi_\xi(q) < +\infty.$$

Posons n_1=1 et, pour $j \geq 1$,

$$n_{j+1} = \min\Big\{ n > n_j : \frac{(\log\log q_n)^{b\log\log q_n}}{a_{n+1}q_n} < \frac{(\log\log q_{n_j})^{b\log\log q_{n_j}}}{a_{n_j+1}q_{n_j}} \Big\}. \tag{3.5}$$

Pour $q_{n_j} \leq q < q_{n_{j+1}}$, on a

$$\Psi_\xi(q) = \frac{(\log\log q_{n_j})^{b\log\log q_{n_j}}}{a_{n_j+1}q_{n_j}q(\log\log q)^{b\log\log q}}$$

et donc

$$\sum_{q\geq 1} q\Psi_\xi(q) = \sum_{j\geq 1} \frac{(\log\log q_{n_j})^{b\log\log q_{n_j}}}{a_{n_j+1}q_{n_j}} \sum_{q_{n_j}\leq q<q_{n_{j+1}}} \frac{1}{(\log\log q)^{b\log\log q}}.$$

Comme $\sum_{q_{n_j}\leq q<q_{n_{j+1}}} \frac{1}{(\log\log q)^{b\log\log q}}$ est de l'ordre de

$$\frac{q_{n_{j+1}}}{(\log\log q_{n_{j+1}})^{b\log\log q_{n_{j+1}}}} - \frac{q_{n_j}}{(\log\log q_{n_j})^{b\log\log q_{n_j}}},$$

pour que ξ appartienne à Y_b, il est nécessaire que $\lim_{j\to\infty} a_{n_j+1} = +\infty$, et donc $\sum_{q_{n_j}\leq q<q_{n_{j+1}}} \frac{1}{(\log\log q)^{b\log\log q}}$ est de l'ordre de $\frac{q_{n_{j+1}}}{(\log\log q_{n_{j+1}})^{b\log\log q_{n_{j+1}}}}$, et l'on a

$$\xi \in Y_b \iff \sum_{j\geq 1} \frac{q_{n_{j+1}}(\log\log q_{n_j})^{b\log\log q_{n_j}}}{a_{n_j+1}q_{n_j}(\log\log q_{n_{j+1}})^{b\log\log q_{n_{j+1}}}} < +\infty.$$

Nous allons maintenant établir que $\dim Y_b \leq \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/b}}$.

Pour $q \geq 10$, posons $f(q) := (\log\log q)^{b\log\log q}$. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel suffisamment petit. Comme la fonction $q \mapsto f(q)/q^\varepsilon$ est décroissante pour q suffisamment grand, la série $\sum_{j\geq 1} \frac{1}{a_{n_j+1}} \Big(\frac{q_{n_{j+1}}}{q_{n_j}}\Big)^{1-\varepsilon}$ converge, pour tout nombre réel ξ appartenant à Y_b. On obtient alors, pour n assez grand, $\prod_{n_j<n} a_{n_j+1} \geq q_n^{1-\varepsilon}$.

La discussion précédente montre que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble Y_b est contenu dans la réunion dénombrable (pour n_0 entier positif) des ensembles

$$Z(b,\varepsilon,n_0) := \{[a_0;a_1,a_2,\ldots] : \prod_{n_j<n} a_{n_j+1} > q_n^{1-\varepsilon}, \text{pour tout } n \geq n_0\},$$

dont on va estimer la dimension.

Comme, pour tout entier r, on a

$$Z(b,\varepsilon,n_0) \cap [r,r+1) = (Z(b,\varepsilon,n_0) \cap [0,1)) + r,$$

il nous suffit d'estimer la dimension de $Z = Z(b, \varepsilon, n_0) \cap [0, 1)$. Pour tout entier positif k_0 suffisamment grand, l'ensemble Z est contenu dans la réunion pour $k \geq k_0$ des intervalles

$$I(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \{[0; a_1, a_2, \ldots, a_m, \alpha] : \alpha > 1\}$$

tels que

$$2^k \leq q_m = K(a_1, a_2, \ldots, a_m) < 2^{k+1}.$$

On note que la longueur d'un tel intervalle vérifie $2^{-2k-3} < |I(a_1, a_2, \ldots, a_m)| < 2^{-2k}$.

Pour $k \geq k_0$ fixé, et pour chaque intervalle $I(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ comme ci-dessus, on considère les suites $\pi_1(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ et $\pi_2(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ formées respectivement par les quotients partiels a_{n_j+1}, où $n_j < m$, et par les quotients partiels a_i avec $i \leq m$, en conservant l'ordre dans lequel ils apparaissent dans la suite originale $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Soit A_j le produit des quotients partiels a_n pour $n_j + 1 < n \leq n_{j+1}$. Si ξ appartient à Y_b, alors on a

$$\sum_{j \geq 1} \frac{A_j (\log\log q_{n_j})^{b \log\log q_{n_j}}}{(\log\log(A_j a_{n_j+1} q_{n_j}))^{b \log\log(A_j a_{n_j+1} q_{n_j})}} < +\infty.$$

Comme, pour tout $\lambda \geq 1$, la fonction f vérifie $f(\lambda q) \leq \lambda f(q)$ pour q suffisament grand, il vient

$$\sum_{j \geq 1} \frac{(\log\log q_{n_j})^{b \log\log q_{n_j}}}{(\log\log a_{n_j+1} q_{n_j})^{b \log\log(a_{n_j+1} q_{n_j})}} < +\infty. \tag{3.6}$$

Pour $j \geq 1$, posons $\tilde{a}_j := a_{n_j+1}$ et $\tilde{q}_j := K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_j)$. Alors, pour tout $\lambda \geq 1$, la fonction $q \mapsto f(\lambda q)/f(q)$ est décroissante pour $q \geq \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$, et donc, par (3.6), on a

$$C := \sum_{j \geq 1} \frac{(\log\log \tilde{q}_j)^{b \log\log \tilde{q}_j}}{(\log\log \tilde{q}_{j+1})^{b \log\log \tilde{q}_{j+1}}} < +\infty.$$

Pour tout entier k suffisamment grand, on déduit de l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique que

$$\begin{aligned} \frac{(\log\log \tilde{q}_1)^{b \log\log \tilde{q}_1}}{(\log\log \tilde{q}_{k+1})^{b \log\log \tilde{q}_{j+1}}} &\leq \Big(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{(\log\log \tilde{q}_j)^{b \log\log \tilde{q}_j}}{(\log\log \tilde{q}_{j+1})^{b \log\log \tilde{q}_{j+1}}} \Big)^k \\ &\leq \Big(\frac{C}{k} \Big)^k < \frac{(\log\log \tilde{q}_1)^{b \log\log \tilde{q}_1}}{((1-\varepsilon)(k+1)/b)^{(1-\varepsilon)(k+1)}}, \end{aligned}$$

et donc $\log\log \tilde{q}_{k+1} > (1-\varepsilon)(k+1)/b$ et

$$\tilde{q}_{k+1} > \exp(\exp((1-\varepsilon)(k+1)/b)) = \exp(\exp((1-\varepsilon)/b)^{k+1}).$$

Cela implique que, pour une infinité d'entiers r, on a $\tilde{a}_r > \exp(\exp((1-2\varepsilon)/b)^r)$. Posons $\Pi(\xi) = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots)$. D'après [17], Claim 2, l'ensemble Z se décompose sous la forme $Z = Z' \cup Z''$ selon le comportement des images de ses éléments par Π, où l'on a posé

$$\begin{aligned} Z' =&\{\xi \in Z : K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) > \exp(\exp((1-3\varepsilon)/b)^n/3) \text{ et} \\ &K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n, \tilde{a}_{n+1}) > K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n)^{\exp((1-3\varepsilon)/b)} \text{ pour une infinité de } n\} \end{aligned}$$

et

$$Z'' = \{\xi \in Z : K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n, \tilde{a}_{n+1}) > K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n)^{1+2\exp((1-3\varepsilon)/b)} \text{ pour une infinité de } n\}.$$

Pour tout entier positif k_0 suffisamment grand, l'ensemble Z' est contenu dans la réunion pour $k \geq k_0$ des sous-ensembles de Z' composés des élements $[0; a_1, a_2, \ldots]$ tels que, pour un certain entier positif m, $2^k \leq q_m = K(a_1, a_2, \ldots, a_m) < 2^{k+1}$, il existe un entier positif j tel que

$$m = n_{j+1}, K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_j) > \exp(\exp((1-3\varepsilon)/b)^j/3)$$

et

$$K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_j, \tilde{a}_{j+1}) > K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_j)^{\exp((1-3\varepsilon)/b)}.$$

On a alors

$$\frac{\exp((1-3\varepsilon)/b)^j}{3} < \log K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_j, \tilde{a}_{j+1}) \leq \log q_m \leq (k+1)\log 2,$$

et donc $j = O(\log k)$. En particulier, $j = o(k)$, et donc le nombre de suites $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ qui ont une même image par (π_1, π_2) est $2^{o(k)}$.

On a alors

$$\begin{aligned} 2^{-o(k)} K(\pi_1(a_1, a_2, \ldots, a_m)) K(\pi_2(a_1, a_2, \ldots, a_m)) &\leq K(a_1, a_2, \ldots, a_m) \\ &\leq 2^{o(k)} K(\pi_1(a_1, a_2, \ldots, a_m)) K(\pi_2(a_1, a_2, \ldots, a_m)). \end{aligned}$$

Comme

$$K(\pi_1(a_1, a_2, \ldots, a_m)) \geq \prod_{n_j < m} a_{n_j+1} \geq (K(a_1, a_2, \ldots, a_m))^{1-\varepsilon} \geq (2^k)^{1-\varepsilon},$$

on en déduit que

$$K(\pi_2(a_1, a_2, \ldots, a_m)) \leq 2^{(\varepsilon + o(1))k}.$$

En particulier, on a $O(2^{(2\varepsilon+o(1))k})$ choix possibles pour $\pi_2(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Claim 3 de [17] implique qu'on a au plus $2^{k+1}(2 + (k+1)\log 2)^{O(\log k)} = 2^{(1+o(1))k}$ choix possibles pour $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_j) = \pi_1(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Alors, comme

$$\left|\xi - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{1}{q_m q_{m+1}} < \frac{1}{K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_j)^{1+\exp((1-3\varepsilon)/b)}},$$

et

$$\begin{aligned} K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_j) = K(\pi_1(a_1, a_2, \ldots, a_m)) &\geq \prod_{n_j < m} a_{n_j+1} \\ &\geq (K(a_1, a_2, \ldots, a_m))^{1-\varepsilon} \geq (2^k)^{1-\varepsilon}, \end{aligned}$$

on peut recouvrir Z' par l'union pour $k \geq k_0$ de $2^{(1+2\varepsilon+o(1))k}$ intervalles de longueur plus petite que $(2^{-k})^{(1-\varepsilon)(1+\exp((1-3\varepsilon)/b))}$, et donc la dimension de Hausdorff de Z' est au plus égale à $\frac{1+2\varepsilon}{(1-\varepsilon)(1+\exp((1-3\varepsilon)/b))}$.

De manière analogue, pour tout entier positif k_0 suffisamment grand, l'ensemble Z'' est contenu dans la réunion pour $k \geq k_0$ des sous-ensembles de Z' formés des éléments $\xi = [0; a_1, a_2, \ldots]$ tels que, pour un certain entier positif m, $2^k \leq q_m = K(a_1, a_2, \ldots, a_m) < 2^{k+1}$, il existe un entier positif j tel que $m = n_{j+1}$ et

$$K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \ldots, \tilde{a}_j, \tilde{a}_{j+1}) > K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \ldots, \tilde{a}_j)^{1+2\exp((1-3\varepsilon)/b)}.$$

Comme

$$\left|\xi - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{1}{q_m q_{m+1}} < \frac{1}{K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \ldots, \tilde{a}_j)^{2+2\exp((1-3\varepsilon)/b)}},$$

il existe $O(2^{2k})$ suites $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ avec $2^k \leq q_m = K(a_1, a_2, \ldots, a_m) < 2^{k+1}$. Or

$$\begin{aligned} K(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_j) = K(\pi_1(a_1, a_2, \ldots, a_m)) &\geq \prod_{n_j < m} a_{n_j+1} \\ &\geq (K(a_1, a_2, \ldots, a_m))^{1-\varepsilon} \geq (2^k)^{1-\varepsilon}, \end{aligned}$$

on peut donc recouvrir Z'' par l'union pour $k \geq k_0$ de $O(2^{2k})$ intervalles de longueur plus petite que $(2^{-k})^{(1-\varepsilon)(2+2\exp((1-3\varepsilon)/b))}$. Par conséquent, la dimension de Hausdorff de Z'' est au plus égale à $\frac{1}{(1-\varepsilon)(1+\exp((1-3\varepsilon)/b))}$.

Comme $\varepsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, on conclut que $\dim Y_b \leq \frac{1}{1+\exp(1/b)}$.

Pour finir la démonstration, nous allons montrer que $\dim Y_b \geq \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/b}}$.

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel suffisamment petit et posons $\tilde{b} := \exp(\frac{1+\varepsilon}{b})$. D'après [8], la dimension de Hausdorff de l'ensemble

$$K := \{\xi = [0; a_1, a_2, ...] \in [0,1] : \exp(\tilde{b}^n) \leq a_n \leq 3\exp(\tilde{b}^n), \text{ pour tout } n \geq 1\}$$

vérifie

$$\dim K \geq \frac{1}{1+\tilde{b}} = \frac{1}{1+\exp((1+\varepsilon)/b)}.$$

Il existe un entier positif n_0 tel que, pour tout ξ appartenant à K, on a $a_{n+1} > a_n$ pour tout $n \geq n_0$. Cela implique qu'il existe des entiers positifs m_0 et c tels que, pour tout ξ appartenant à K et tout entier $j \geq m_0$, on a $n_j = j + c$, où la suite $(n_j)_{j\geq 1}$ est définie par (3.5). Alors, pour tout ξ appartenant à K,

$$\begin{aligned} \xi \in Y_b \iff &\sum_{j\geq 1} \frac{q_{n_{j+1}} (\log\log q_{n_j})^{b\log\log q_{n_j}}}{a_{n_j+1} q_{n_j} (\log\log q_{n_{j+1}})^{b\log\log q_{n_{j+1}}}} < +\infty \\ \iff &\sum_{n\geq 1} \frac{q_{n+1} (\log\log q_n)^{b\log\log q_n}}{a_{n+1} q_n (\log\log q_{n+1})^{b\log\log q_{n+1}}} < +\infty. \end{aligned}$$

Mais, pour ξ appartenant à K, le quotient $\frac{q_{n+1}}{a_{n+1}q_n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Comme $q_n \geq \exp(\frac{\tilde{b}^{n+1}-\tilde{b}}{\tilde{b}-1})$ et $q_n = O(3^n \exp(\frac{\tilde{b}^{n+1}}{\tilde{b}-1}))$, on a $\log\log q_n = (n+1)\log\tilde{b} - \log(\tilde{b}-1) + o(1)$, et donc

$$\begin{aligned}\frac{(\log\log q_n)^{b\log\log q_n}}{(\log\log q_{n+1})^{b\log\log q_{n+1}}} &\leq \frac{1}{(\log\log q_{n+1})^{b(\log\log q_{n+1}-\log\log q_n)}} \\ &= \frac{1}{((n+2)\log\tilde{b} - \log(\tilde{b}-1) + o(1))^{b\log\tilde{b}+o(1)}} \\ &= \frac{1}{((n+2)\log\tilde{b} - \log(\tilde{b}-1) + o(1))^{1+\varepsilon+o(1)}} = \frac{1}{n^{1+\varepsilon+o(1)}},\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que, pour tout ξ appartenant à K, la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{q_{n+1}(\log\log q_n)^{b\log\log q_n}}{a_{n+1}q_n(\log\log q_{n+1})^{b\log\log q_{n+1}}}$$

converge et donc que K est inclus dans Y_b. Comme $\dim K \geq \frac{1}{1+\tilde{b}} = \frac{1}{1+\exp((1+\varepsilon)/b)}$, et ε peut être choisi arbitrairement petit, on conclut que $\dim Y_b \geq \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/b}}$. □

Remerciements. Cet article trouve son origine dans une remarque et plusieurs questions de Michel Waldschmidt, que les auteurs remercient chaleureusement.

Références bibliographiques

[1] C. Aistleitner, *A note on the Duffin-Schaeffer conjecture with slow divergence*, Bull. London Math. Soc. 46 (2014), 164–168.

[2] V. V. Beresnevich, H. Dickinson, and S. L. Velani, *Measure theoretic laws for lim sup sets*, Mem. Amer. Math. Soc. 179 (2006), no. 846, x+91 pp.

[3] V. Beresnevich, G. Harman, A. Haynes, and S. Velani, *The Duffin–Schaeffer conjecture with extra divergence. II*, Math. Z. 275 (2013), 127–133.

[4] Y. Bugeaud, Approximation by algebraic numbers. Cambridge Tracts in Mathematics 160, Cambridge University Press, 2004.

[5] Y. Bugeaud and C. G. Moreira, *Sets of exact approximation order by rational numbers III*, Acta Arith. 146 (2011), 177–193.

[6] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, *Khintchine's problem in metric Diophantine approximation*, Duke J. 8 (1941), 243–255.

[7] K. Falconer, Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications. John Wiley & Sons, 1990.

[8] D. J. Feng, J. Wu, J.-C. Liang and S. Tseng, *Appendix to the paper by T. Łuczak - a simple proof of the lower bound: "On the fractional dimension of sets of continued fractions"*, Mathematika 44 (1997), 54–55.

[9] I. G. Good, *The fractional dimensional theory of continued fractions*, Proc. Camb. Phil. Soc. 37 (1941), 199–228.

[10] G. Harman, Metric Number Theory, LMS Monographs New Series, vol. 18, Clarendon Press, 1998.

[11] A. K. Haynes, A. D. Pollington, and S. L. Velani, *The Duffin–Schaeffer conjecture with extra divergence*, Math. Ann. 353 (2012), 259–273.

[12] V. Jarník, *Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen*, Práce Mat.-Fiz. 36 (1928/29), 91–106.

[13] A. Khintchine, Continued Fractions, University of Chicago Press, 1964.

[14] S. Lang, Introduction to Diophantine approximations. Second edition. Springer-Verlag, New York, 1995. x+130 pp.

[15] P. Lévy, *Sur le développement en fraction continue d'un nombre choisi au hasard*, Compositio Math. 3 (1936), 286–303.

[16] L. Liangpan, *A note on the Duffin–Schaeffer conjecture*, Unif. Distrib. Th. 8 (2013), 151–156.

[17] T. Łuczak *On the fractional dimension of sets of continued fractions*, Mathematika 44 (1997), 50–53.

[18] O. Perron, Die Lehre von den Ketterbrüchen. Teubner, Leipzig, 1929.

[19] W. Philipp, *A conjecture of Erdős on continued fractions*, Acta Arith. 28 (1975/76), 379–386.

[20] M. Waldschmidt, Recension de la monographie [4], Gaz. Math. 106 (2005), 117–123.

Yann Bugeaud
Université de Strasbourg
Mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG (France)

e-mail : bugeaud@math.unistra.fr

Carlos Gustavo Moreira
IMPA

Estrada Dona Castorina 110
RIO DE JANEIRO (Brasil)

gugu@impa.br