Théorie des nombres / *Number Theory*

SUR LA DISTANCE ENTRE DEUX PUISSANCES PURES

Yann Bugeaud

Résumé – On établit une nouvelle minoration de la distance entre deux entiers distincts x^n et y^m qui ne dépend que des exposants n et m.

On the difference between two perfect powers

Abstract – We give a new lower bound for the difference between two distinct integers x^n and y^m involving only the exponents n and m.

Turk [4] (voir aussi Shorey [3]) a montré que si les entiers x, y, n et m vérifient

$$x \geq 1, \quad y \geq 2, \quad n \geq 2, \quad m \geq 2 \ \text{ et } \ x^n \neq y^m, \tag{1}$$

alors il existe une constante absolue c_1 effective telle que

$$|x^n - y^m| > \frac{1}{n} \exp\Big\{ \frac{c_1}{n^2} \big(\log m \, \log\log(m+1)\big)^{1/2} \Big\}.$$

Dans cette note, nous améliorons substantiellement cette estimation.

Théorème 1. *Si x, y, n et m sont des entiers vérifiant (1), alors*

$$|x^n - y^m| \geq m^{2/5n} \, n^{-5} \, 2^{-6-42/n}.$$

Remarque 1. Si x, y, n et m sont des entiers vérifiant (1) et $x^n \geq 3$, le Théorème 1 permet d'améliorer la minoration (44) de Turk [4]. Plus précisément, en suivant son raisonnement, on obtient

$$|x^n - y^m| > c_2 \, n^{-5} \, (\log\log x^n)^{1/13n},$$

où c_2 est une constante absolue effective.

Le Théorème 1 s'obtient comme corollaire d'un résultat plus général, inspiré du Theorem 4 de Brindza, Evertse et Győry [1].

Soit f un polynôme unitaire à coefficients entiers, de degré $n \geq 2$, et n'ayant que des racines simples. On note H sa hauteur (i.e. le maximum des valeurs absolues des coefficients de f) et D son discriminant, non nul par hypothèse. Soit $a \neq 0$ un entier, on considère l'équation superelliptique

$$f(x) = a\, y^m \ \text{ en } \ x, y, m \in \mathbf{Z}, \ |y| > 1, \ m > 1. \tag{2}$$

On convient de noter $\log_* u$ pour $\max\{\log u, 1\}$ et on désigne par $\log_2$ le logarithme en base 2.

Théorème 2. *Sous ces hypothèses, toute solution (x,y,m) de (2) vérifie*

$$m < \max\big\{n\log_2(2H+3),\ 2^{15(n+6)}\,n^{7n}\,|D|^{3/2}\,(\log|D|)^{3n}\,\log_*^2|a|\,\log_*\log_*|a|\big\}.$$

Remarque 2. Du Théorème 2 découlent des minorations explicites de $x^n - ay^m$, qui précisent et améliorent un résultat de Shorey [3].

Preuve du Théorème 2 : Il suffit d'adapter la preuve du Theorem 4 de [1] qui concerne le cas particulier où f est irréductible et $a=1$. On se contente de préciser les menues différences et les grandes lignes du raisonnement, pour plus de détails, il convient de consulter [1].

Soit (x,y,m) une solution de (2). Notons tout d'abord que si $|x| \le H+2$, alors, les racines de f étant majorées en module par $H+1$, on obtient $2^m \le (2H+3)^n$ et le théorème est prouvé. Ainsi, on suppose $|x| > H+2$, d'où l'on déduit $|x-\xi| \ge 1$ et $|x-\xi| \le |ay^m|$ pour toute racine ξ de f.

Ecrivons $f = P_1 \dots P_l$ comme produit de polynômes à coefficients entiers, unitaires et irréductibles. On peut supposer

$$|P_1(x)| \ge y^{m/l}. \tag{3}$$

Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_t$ les racines du polynôme P_1. Dans le corps $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\alpha_1)$, le plus grand diviseur commun aux idéaux $[x-\alpha_1]$ et $\big[(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_t)P_2\dots P_l\big]$ divise l'idéal $\big[f'(\alpha_1)\big]$. Comme $\mathrm{N}_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}\big(f'(\alpha_1)\big) = \pm D$, il existe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ idéaux entiers de $\mathbf{K}$ vérifiant

$$\mathrm{N}_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{a}) \le |D|,\ \ \mathrm{N}_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{b}) \le |aD| \ \text{ et }\ \mathfrak{a}\,[x-\alpha_1] = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c}^m. \tag{4}$$

On note, respectivement, h, R, r et $D_{\mathbf{K}}$ le nombre de classes, le régulateur, le rang du groupe des unités et le discriminant de $\mathbf{K}$. On rappelle que $D_{\mathbf{K}}$ divise D. L'équation (4) implique

$$\alpha\,(x-\alpha_1)^h = \varepsilon\,\beta\,\gamma^m, \tag{5}$$

où α, β, γ sont, respectivement, des générateurs des idéaux principaux $\mathfrak{a}^h$, $\mathfrak{b}^h$, $\mathfrak{c}^h$ et ε est une unité de $\mathbf{K}$. De plus, on peut supposer (cf. le Lemma 2 et l'inégalité (6.27) de [2]) que

$$\max\big\{\mathrm{h}(\alpha),\mathrm{h}(\beta)\big\} \le \exp\big\{(16n)^n\,|D_{\mathbf{K}}|^{1/2}\,\big(\log|D_{\mathbf{K}}|\big)^n\,\log_*|a|\big\}, \tag{6}$$

où $h(\xi)$ désigne la hauteur absolue multiplicative du nombre algébrique ξ.

Pour $i=1,\dots,t$, on désigne par ϕ_i le $\mathbf{Q}$-automorphisme entre $\mathbf{K}$ et $\mathbf{Q}(\alpha_i)$ défini par $\phi_i(\alpha_1) = \alpha_i$. Le Lemma 1 de [2] assure l'existence d'un système fondamental $\{\eta_1,\dots,\eta_r\}$ d'unités de $\mathbf{K}$ vérifiant

$$\begin{gathered}\prod_{i=1}^{r}\log\mathrm{h}(\eta_i) \le 2^{-r+1}\,(r!)^2\,t^{-r}\,R \\ \text{et}\ \ \log\mathrm{h}(\eta_i) \le 4^{-r+1}\,(r!)^2\,t^{-1}\,(\log 3t)^{3r-3}\,R,\ \ i=1,\dots,r.\end{gathered} \tag{7}$$

Ainsi, quitte à multiplier γ par une unité, l'équation (5) entraîne

$$(x-\alpha_i)^h = \big(\phi_i(\eta_1)\big)^{k_{i,1}}\dots\big(\phi_i(\eta_r)\big)^{k_{i,r}}\,\phi_i(\beta/\alpha)\,\phi_i(\gamma)^m,\ \ i=1,\dots,t, \tag{8}$$

où les $k_{i,j}$ sont des entiers vérifiant $|k_{i,j}| < m$. De $\max_{1 \le i \le t} |x - \alpha_i|^h \le |a\, y^m|^h$, on déduit

$$\log \mathrm{h}(\gamma) < (16n)^{n+1}\, |D_{\mathbf{K}}|^{1/2} \bigl(\log |D_{\mathbf{K}}|\bigr)^n \, \log_* |a| \, \log |y|. \tag{9}$$

Quitte à renuméroter les racines de P_1, on peut supposer que

$$\min_{1 \le i \ne j \le t} \left| \frac{\alpha_i - \alpha_j}{x - \alpha_i} \right| = \left| \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{x - \alpha_1} \right|.$$

La minoration (3) et

$$|D| \ge |\mathrm{Discr}(P_1)| = \prod_{1 \le i \ne j \le t} |\alpha_i - \alpha_j|$$

entraînent

$$\prod_{1 \le i \ne j \le t} \left| \frac{\alpha_i - \alpha_j}{x - \alpha_i} \right| \le \frac{|D|}{y^{(t-1)m/l}}\,.$$

Par conséquent, sous l'hypothèse $|y|^{m/2tl} > h\,|D|$ (dans le cas contraire, le théorème est démontré), on obtient

$$\Lambda := \left| \left(\frac{x - \alpha_2}{x - \alpha_1} \right)^h - 1 \right| < |y|^{-m/2tl}. \tag{10}$$

Si $\Lambda = 0$, alors $(\alpha_1 - \alpha_2)/(x - \alpha_1)$ est un entier algébrique et (2) entraîne alors la majoration $m \le n^3 \log_2 |D|$.

Si $\Lambda \ne 0$, on applique le Corollaire 10.4 de Waldschmidt [5], qui, avec (8), (6), (7) et (9), mène après quelques calculs à

$$\Lambda > \exp\bigl\{-2^{14(n+4)}\, n^{6(n+2)} \,(\log 3n)^n\, |D|^{3/2} \bigl(\log |D|\bigr)^{3n-1} \log |y| \, \log_*^2 |a| \, \log m\bigr\}. \tag{11}$$

Comparant (10) et (11), il vient

$$m \le 2^{15(n+6)}\, n^{7n}\, |D|^{3/2} \bigl(\log |D|\bigr)^{3n} \log_*^2 |a| \, \log_* \log_* |a|.$$

Ceci achève la preuve du théorème. □

Preuve du Théorème 1 : Soit k un entier non nul, on applique le Théorème 2 à l'équation $f(x) = y^m$, où f est le polynôme $X^n - k$, de hauteur $H = |k|$ et de discriminant $D = \pm n^n\, k^{n-1}$. On obtient alors la majoration $m \le 2^{15(n+7)}\, n^{25n/2}\, |k|^{5n/2}$, d'où découle le Théorème 1. □

Références

[1] B. Brindza, J. H. Evertse et K. Győry, *Bounds for the solutions of some diophantine equations in terms of discriminants*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 51 (1991), 8–26.

[2] Y. Bugeaud et K. Győry, *Bounds for the solutions of Thue-Mahler equations and norm form equations*, Acta Arith., à paraître.

[3] T. N. Shorey, *On the greatest prime factor of* $ax^m + by^n$, Acta Arith. 36 (1980), 21–25.

[4] J. Turk, *On the difference between perfect powers*, Acta Arith. 45 (1986), 289–307.

[5] M. Waldschmidt, *Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques*, Canadian J. Math. 45 (1993), 176–224.

Yann Bugeaud
Université Louis Pasteur
U. F. R. de mathématiques
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG

e-mail : bugeaud@pari.u-strasbg.fr
tel : 88 41 63 48 fax : 88 61 90 69