INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Université Louis Pasteur et C. N. R. S. (UMR 7501)

7, rue René Descartes,
67084 STRASBOURG cedex

SYNTHÈSE DES TRAVAUX

ET

PROGRAMME DE RECHERCHE

de

Yann Bugeaud

AMS classification 2000: 11D41, 11D45, 11D59, 11D61, 11J04, 11J68, 11J82, 11J86, 11K60.

Mots clefs : Formes linéaires de logarithmes, équations diophantiennes, approximation diophantienne.

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont naturellement à Maurice Mignotte : depuis que tu n'es plus directeur, on a enfin du temps pour travailler !

Merci à Rob Tijdeman d'avoir accepté de rédiger un rapport... tout en sachant qu'il ne serait pas présent à la soutenance, et ne profiterait donc pas de la succulente collation.

Merci également aux rapporteurs Michel Waldschmidt et Norbert Schappacher. Michel, ton travail était cependant facile, puisque tu suis de près mes travaux et que je bénéficie de tes nombreuses et précieuses remarques, ainsi que de tes constants encouragements ! Norbert, tu vois, même sans géométrie algébrique, on parvient à s'amuser (bon, d'accord, c'est peut-être encore mieux avec...) !

La présence dans le jury de Kálmán Győry et de Damien Roy me réjouit tout particulièrement, et je les remercie d'avoir accepté de faire une halte à Strasbourg sur le chemin d'Oberwolfach.

Je n'oublie pas non plus Yuri Bilu — même si notre premier contact fut, disons, un peu rude... —, Guillaume Hanrot, Yves Roy, Tarlok Shorey... (liste non exhaustive !)

Grand merci à Anthony pour la mise en forme du présent document.

(...) il faut continuer, je vais continuer.

Samuel Beckett.

PRÉSENTATION GÉNÉRALE

Le but du présent travail est d'exposer de manière accessible les principaux résultats que nous avons obtenus. À cet effet, dans un souci de clarté et de simplification, nous ne donnons pas toujours l'énoncé le plus général et omettons la plupart des démonstrations. Cependant, lorsque cela est possible, nous en esquissons les grandes lignes. Nous essayons également de montrer comment nos travaux s'inscrivent parmi les recherches récentes en approximation diophantienne. Le survol est articulé autour de deux grandes parties, elles-mêmes subdivisées en, respectivement, quatre et deux chapitres.

La première partie est consacrée à l'approximation diophantienne effective. Après de brefs rappels historiques, nous présentons plusieurs estimations récentes issues de la théorie des formes linéaires de logarithmes, théorie qui constitue l'un des points communs à la plupart de nos travaux. En second lieu, nous nous intéressons à la majoration de la taille des solutions d'équations diophantiennes classiques et nous appliquons nos résultats à la minoration du plus grand facteur premier de $ax^n + by^m$. Le troisième chapitre est consacré à l'approximation effective des nombres algébriques par des nombres rationnels et offre l'occasion d'un tour d'horizon des méthodes conduisant à une amélioration effective de l'inégalité de Liouville. Enfin, au chapitre IV, nous abordons le problème plus général de l'approximation par des nombres algébriques, qui fait l'objet depuis quelques années d'un net regain d'intérêt.

Le thème de la seconde partie du présent travail est la résolution explicite d'équations diophantiennes exponentielles. Après avoir discuté de la difficulté générale de tels problèmes, nous évoquons l'équation de Catalan et diverses généralisations de l'équation de Ramanujan–Nagell. Nous concluons par un chapitre spécifique consacré à l'équation

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q,$$

dans lequel nous illustrons les différentes techniques généralement utilisées pour la résolution d'équations diophantiennes exponentielles. En particulier, nous soulignons que les progrès théoriques sont tels que, combinés à la puissance de calcul des ordinateurs, nous savons résoudre des problèmes qui paraissaient hors d'atteinte voici quelques années, dont par exemple l'équation exponentielle en trois inconnues

$$\frac{10^n - 1}{10 - 1} = y^q.$$

En outre, nous concluons chaque chapitre en discutant des différentes perspectives de recherche qui s'offrent à nous.

Nous choisissons de numéroter les théorèmes figurant dans nos travaux, écrits en collaboration ou non, et d'utiliser des lettres pour désigner les autres résultats cités.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier

ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES ET FORMES LINÉAIRES DE LOGARITHMES

1. Introduction

En 1970, Matiiassevitch [88] a résolu le dixième problème de Hilbert en montrant qu'il n'existe aucun algorithme universel permettant de décider si une équation polynomiale à coefficients entiers admet ou non des solutions entières. Par opposition à ce résultat négatif, on connaît plusieurs familles d'équations dont les éventuelles solutions sont effectivement calculables ; les progrès dans cette direction sont toutefois rares, mais spectaculaires. Les premiers travaux importants, qui sont l'œuvre de Runge [111], remontent à la fin du siècle dernier et présentent une condition suffisante sur le polynôme irréductible $F(X,Y)$ à coefficients entiers afin que l'équation $F(x,y)=0$ ne possède qu'un nombre fini de solutions entières.

Ce résultat, effectif, ne couvre cependant pas les équations

$$G(x,y)=b, \qquad \text{en entiers } x,\ y, \tag{1}$$

où G est un polynôme homogène à coefficients entiers, irréductible sur $\mathbf{Q}$, de degré supérieur ou égal à 3 et b désigne un entier non nul, et il a fallu attendre 1909 pour que Thue [132] prouve la finitude du nombre de solutions de (1), nommée depuis lors « équation de Thue ». Son travail a ensuite été complété par Siegel [127], qui a montré que, $F(X,Y)$ désignant un polynôme à coefficients entiers, la courbe d'équation

$$F(x,y)=0$$

ne possède qu'un nombre fini de points (x,y) à coordonnées entières si elle est de genre strictement positif. Ces deux résultats sont malheureusement ineffectifs et ne donnent aucune information sur la taille des éventuelles solutions ; on ne peut donc en déduire la liste des solutions de (1) par simple énumération des valeurs possibles de x et de y, puisque l'on ne dispose pas de borne supérieure.

Une généralisation naturelle de (1) est l'équation dite de Thue–Mahler,

$$G(x,y)=b\,p_1^{z_1}\dots p_s^{z_s}, \qquad z_i\in\mathbf{N} \text{ et } x,y\in\mathbf{Z}, \tag{2}$$

où G et b vérifient les mêmes hypothèses que ci-dessus et les p_i sont des nombres premiers fixés, dont Mahler [87] a prouvé la finitude du nombre de solutions au moyen de techniques p-adiques ineffectives. Dans le même article, toujours à l'aide d'un analogue p-adique de la méthode de Thue–Siegel, il a montré que l'équation en S-unités

$$x+y=z, \qquad (x,y,z)=1, \tag{3}$$

où x, y et z sont des entiers inconnus dont les facteurs premiers appartiennent à un ensemble fini S fixé au préalable, ne possède qu'un nombre fini de solutions.

Du point de vue des applications, il convient de souligner que les équations de Thue et de Thue–Mahler, ainsi que les équations en S-unités, apparaissent dans de nombreux problèmes [60], si bien que tout nouveau progrès dans ce domaine se révèle riche de conséquences. Par contre, le résultat de Runge n'est que rarement utilisé, en raison de ses hypothèses trop restrictives.

Le point commun aux résultats connus en 1960 concernant les équations (1), (2) et (3), ainsi que leurs généralisations aux corps de nombres, est leur ineffectivité. En approximation diophantienne, le principal résultat effectif obtenu à cette date est dû à Gelfond [63] (*voir* également son ouvrage [64], dont l'édition russe est parue en 1952), qui a donné une minoration effective de

$$|\beta \log \alpha_1 - \log \alpha_2|, \tag{4}$$

pour des nombres algébriques α_1, α_2 et β, avec α_1 et α_2 multiplicativement indépendants. En outre, Gelfond a observé que si l'on disposait d'une généralisation de son résultat au cas d'une forme linéaire en un nombre quelconque de logarithmes, on en déduirait alors une preuve effective de la finitude du nombre des solutions de (1). En réalité, comme nous l'avons montré (*voir* [13] et le chapitre III), le résultat de Gelfond s'avère *presque* suffisant : une majoration effective de la taille des solutions de (1) découle d'une minoration de (4) légèrement plus fine que celle figurant dans [63].

La généralisation espérée par Gelfond a été obtenue par Baker [2] en 1966, qui est parvenu à développer et à approfondir les idées de [63]. Ses résultats, ainsi que leurs analogues non archimédiens, sont à la base de la plupart des résultats effectifs en approximation diophantienne et permettent de répondre affirmativement au dixième problème de Hilbert, si, bien sûr, on se restreint à certaines familles d'équations. En outre, on connaît de nombreuses équations diophantiennes sur lesquelles les méthodes ineffectives de Thue–Siegel ne donnent aucune information, mais dont on sait borner la taille des solutions grâce à la théorie des formes linéaires de logarithmes. C'est notamment le cas de l'équation de Catalan

$$x^p - y^q = 1, \qquad \text{en entiers } x \geq 2,\ y \geq 2,\ p \geq 2,\ q \geq 2,$$

ainsi que des équations

$$\frac{10^n - 1}{10 - 1} = y^q, \qquad \text{en entiers } y \geq 2,\ n \geq 2,\ q \geq 2,$$

et

$$\frac{x^5 - 1}{x - 1} = y^q, \qquad \text{en entiers } x \geq 2,\ y \geq 2,\ q \geq 2,$$

auxquelles sont consacrés les chapitres V et VI.

2. Les formes linéaires de logarithmes

Comme une majorité de nos travaux est consacrée ou bien à la théorie de Baker, ou bien à ses applications, il convient de commencer par préciser ce que signifie l'expression « forme linéaire de logarithmes » et de présenter plusieurs résultats importants de cette théorie.

Soit $n \geq 1$ un entier et, pour $1 \leq i \leq n$, soient x_i/y_i des nombres rationnels non nuls et b_i des entiers non nuls. Notons $B \geq 3$ un majorant des $|b_i|$ et, pour $1 \leq i \leq n$, soit $A_i \geq 3$

un majorant des quantités $|x_i|$ et $|y_i|$. On suppose que

$$\Lambda := \left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{b_1} \cdots \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{b_n} - 1 \tag{5}$$

est non nul. Observons que, comme on cherche à minorer $|\Lambda|$, on peut supposer $|\Lambda| \leq 1/2$, et on voit donc apparaître une *forme linéaire de logarithmes :*

$$|\Lambda| \geq \frac{|\log(1+\Lambda)|}{2} = \frac{1}{2}\left|b_1 \log \frac{x_1}{y_1} + \cdots + b_n \log \frac{x_n}{y_n}\right|.$$

Alors, par une simple estimation du dénominateur de (5), on obtient

$$\log|\Lambda| \geq -\sum_{i=1}^{n} b_i \log|y_i| \geq -B \sum_{i=1}^{n} \log A_i.$$

La dépendance en les A_i est très satisfaisante, au contraire de la dépendance en B. Or, pour résoudre de nombreux problèmes de théorie des nombres, on aimerait disposer d'une meilleure estimation en terme de B, quitte à faire quelques concessions relativement aux A_i. Baker a, le premier, démontré un tel résultat, et on sait par exemple maintenant (*voir* [6]) que, sous les hypothèses précédentes, on a

$$\log|\Lambda| \geq -(16n)^{2n+4} \log A_1 \ldots \log A_n \log B.$$

Plus généralement, on peut obtenir des minorations analogues si les x_i/y_i sont remplacés par des nombres algébriques α_i, les réels A_i étant alors étroitement liés à la taille des α_i. Nous avons donc besoin de définir la hauteur que nous choisissons, à savoir la *hauteur logarithmique absolue*. Soit θ un nombre algébrique et soit

$$P(X) = a_d \prod_{i=1}^{d} (X - \theta_i)$$

son polynôme minimal sur $\mathbf{Q}$, avec $a_d > 0$. La hauteur de θ, notée $\mathrm{h}(\theta)$, est par définition égale à

$$\mathrm{h}(\theta) = \frac{1}{d}\Big(\log a_d + \sum_{i=1}^{d} \log \max\{1, |\theta_i|\}\Big).$$

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres algébriques autres que 0 et 1, et soient $\log\alpha_1, \ldots, \log\alpha_n$ des déterminations quelconques de leurs logarithmes. Soient $b_1, \ldots, b_n$ des entiers non tous nuls tels que

$$\Lambda_a = |b_1 \log \alpha_1 + \cdots + b_n \log \alpha_n| \tag{6}$$

ne soit pas nul. Nous ne faisons pas de rappels historiques concernant les différentes améliorations successives apportées aux minorations de Λ_a, nous nous contentons simplement de citer trois estimations récentes, chacune ayant ses propres avantages et inconvénients par rapport aux autres. Soit D le degré d'un corps de nombres $\mathbf{K}$ contenant les α_i, soient $E \geq e$ et $A_1, \ldots, A_n$ des réels > 1 vérifiant

$$\log A_i \geq \max\Big\{\mathrm{h}(\alpha_i), \frac{\log E}{D}, \frac{E\,|\log \alpha_i|}{D}\Big\}, \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{7}$$

Notons également

$$B = \max\{3, |b_1|, \ldots, |b_n|\}.$$

La meilleure minoration de (6) en ce qui concerne la dépendance en le nombre n de logarithmes est, sous ces hypothèses générales, donnée par le résultat suivant dû à Baker & Wüstholz [6].

THÉORÈME A. *En posant $E = e$ dans (7), on a*

$$\log|\Lambda_a| > -18(n+1)!\, n^{n+1}(32D)^{n+2}\log(2nD)\log A_1 \ldots \log A_n \log B.$$

Le Théorème A est très satisfaisant du point de vue de la constante numérique, mais il a l'inconvénient de ne pas inclure tous les raffinements que l'on sait démontrer, en particulier ceux relatifs à la dépendance en les b_i. Ceci est illustré notamment au chapitre III, où nous avons besoin de l'estimation ci-dessous, due à Waldschmidt [137]. Dans un souci de simplification, nous ne présentons pas le résultat principal de [137], dont l'énoncé est assez technique, mais nous choisissons de citer le Théorème 10.22 de [138].

THÉORÈME B. *Outre les hypothèses du Théorème A, on suppose que b_n est non nul. Soient E^* et B' des réels vérifiant $B' \geq E^* \geq E$ et*

$$B' \geq \max_{1\leq j\leq n-1}\left\{\frac{|b_n|}{\log A_j} + \frac{|b_j|}{\log A_n}\right\}.$$

Alors, il existe une constante numérique effective C telle que

$$\log|\Lambda_a| \geq -C^n\, n^{3n}\log A_1 \ldots \log A_n \log B' \log E^* (\log E)^{-n-1}.$$

Le raffinement consistant à remplacer le facteur B par B', particulièrement intéressant lorsque $|b_n|$ est petit, possède de nombreuses applications, dont l'une est illustrée en détails au chapitre III. Quant au terme E, il intervient notamment lorsque les α_i sont des réels proches de 1, auquel cas on peut le choisir assez grand : il permet alors de remplacer le produit des $\log A_i$, tel qu'il apparaît au Théorème A, par leur somme, d'où des conséquences importantes et spectaculaires pour certaines équations diophantiennes (cf. la partie 3 du chapitre VI). Cette idée est apparue pour la première fois dans un travail de Shorey [120]. Le résultat principal de [137] est bien sûr totalement explicite, mais la constante numérique, ainsi d'ailleurs que la dépendance en n, est moins bonne que celle obtenue au Théorème A. Il ne faut pas perdre de vue que la taille de la constante intervient de manière prépondérante lorsque l'on s'intéresse à la résolution complète d'équations diophantiennes : plus la constante est petite et moins il reste d'équations à traiter ! Les minorations de formes linéaires en deux ou trois logarithmes apparaissent ainsi dans de nombreux problèmes. Alors que dans le cas de trois logarithmes on ne dispose pas, à présent, d'estimation pleinement satisfaisante, Laurent, Mignotte & Nesterenko [77] ont obtenu une excellente minoration pour les formes en deux logarithmes, dont le Théorème C ci-dessous constitue un corollaire. La qualité du résultat illustre la puissance des déterminants d'interpolation, introduits dans ce contexte par Laurent.

THÉORÈME C. *On suppose $n = 2$ dans (6) et que les nombres algébriques α_1 et α_2 sont multiplicativement indépendants. Notons $D' = [\mathbf{Q}(\alpha_1,\alpha_2) : \mathbf{Q}]/[\mathbf{R}(\alpha_1,\alpha_2) : \mathbf{R}]$. Soient A_1 et A_2 deux réels > 1 tels que*

$$\log A_i \geq \max\left\{\mathrm{h}(\alpha_i), \frac{1}{D'}, \frac{|\log\alpha_i|}{D'}\right\}, \qquad 1 \leq i \leq 2.$$

Posons

$$B' = \frac{b_1}{D'\log A_2} + \frac{b_2}{D'\log A_1}.$$

Alors, on a la minoration

$$\log|\Lambda_a| \geq -30.9 D'^4 \log A_1 \log A_2 \left(\max\left\{\log B' + 0.66, \frac{21}{D'}, \frac{1}{D'}\right\}\right)^2.$$

On observe que la dépendance en les b_i est moins bonne qu'au Théorème B, puisque $\log B'$ apparaît au carré. Cela ne restreint cependant aucunement le champ des applications.

L'analogue p-adique de la théorie de Baker a suscité de nombreux travaux, notamment de la part de Coates, van der Poorten, Dong et Yu, et, comme pendant aux Théorèmes A et B, nous choisissons de citer un résultat de Yu [144] (*voir* également [143] ainsi que [142] pour des références bibliographiques). On conserve les notations précédentes et l'on se donne un idéal premier $\mathfrak{p}$ inclus dans $\mathbf{K}$, au-dessus du nombre premier p. On note v_p l'extension de la valeur absolue p-adique usuelle à $\mathbf{C}_p$, le complété d'une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. On identifie le complété de $\mathbf{K}$ par rapport à la valuation induite par $\mathfrak{p}$, noté $\mathbf{K}_\mathfrak{p}$, à un sous-corps de $\mathbf{C}_p$ et on cherche à minorer

$$\Lambda_u = v_p\bigl(\alpha_1^{b_1} \dots \alpha_n^{b_n} - 1\bigr), \tag{8}$$

qui est fini car on a supposé $\alpha_1^{b_1} \dots \alpha_n^{b_n} - 1$ non nul. Soient $A_1, \dots, A_n$ des réels vérifiant

$$\log A_i \geq \max\{\mathrm{h}(\alpha_i), \log p\}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Théorème D. *Avec les notations ci-dessus, on a*

$$\Lambda_u < 12\left(\frac{6(n+1)D}{\sqrt{\log p}}\right)^{2(n+1)} p^D \log(e^5 nD) \log A_1 \dots \log A_n \log B.$$

La constante numérique est raisonnablement peu élevée, néanmoins, elle reste trop grande pour la plupart des applications. En outre, la dépendance en les b_i peut être améliorée (*voir* en particulier le Theorem 7.1 de [144]). Dans le cas plus spécifique de deux logarithmes, améliorant des estimations antérieures de Dong Pingping [59], nous avons établi [43] l'analogue non archimédien du Théorème C. La démonstration utilise également les déterminants d'interpolation et suit les mêmes étapes que [77], en incluant toutefois plusieurs arguments spécifiques au cas p-adique. Le Théorème 1 reprend l'un des corollaires du résultat principal de [43], les notations sont cependant légèrement différentes des précédentes.

Théorème 1. *On suppose que $n = 2$ dans (8) et que α_1 et α_2 sont des unités de $\mathbf{K}_\mathfrak{p}$ multiplicativement indépendantes. Notons $D' = [\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) : \mathbf{Q}]/f$, où f est le degré résiduel de l'extension de $\mathbf{K}_\mathfrak{p}$ à $\mathbf{C}_p$. Soient A_1 et A_2 deux réels > 1 tels que*

$$\log A_i \geq \max\left\{\mathrm{h}(\alpha_i), \frac{\log p}{D'}\right\}, \qquad 1 \leq i \leq 2.$$

Posons

$$B' = \frac{b_1}{D' \log A_2} + \frac{b_2}{D' \log A_1}.$$

Alors, on a la majoration

$$\Lambda_u \leq \frac{24p(p^D - 1)}{(p-1)(\log p)^4} D'^4 \log A_1 \log A_2 \left(\max\left\{\log B' + \log\log p + 0.4, \frac{10 \log p}{D'}, 10\right\}\right)^2.$$

Comme au Théorème C, le terme $\log B'$ apparaît ici au carré : il s'agit là d'une conséquence de la méthode, qui ne restreint cependant pas le champ d'applications du Théorème 1. Nous avons obtenu [31] une légère amélioration de cette estimation dans le cas où α_1 est p-adiquement très proche de 1, estimation qui s'est révélée particulièrement utile pour l'étude de l'équation diophantienne

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q, \qquad \text{en entiers } x \geq 2,\ y \geq 2,\ n \geq 3,\ q \geq 2, \tag{9}$$

à laquelle est consacré le chapitre VI. Notons dès à présent que c'est, entre autres, la petite taille des constantes numériques apparaissant au Théorème 1 qui nous a permis de résoudre (9) pour des valeurs de x fixées. En outre, le long article de Schinzel [114] recense de nombreuses applications des minorations de formes linéaires en deux logarithmes p-adiques.

Nous ne pouvons pas conclure cette partie sans mentionner que Matveev [89] et Yu [145] ont amélioré d'un facteur n^n la dépendance en le nombre n de logarithmes dans, respectivement, les Théorèmes A et D. Ainsi, sous la condition de Kummer, ils obtiennent une constante numérique de la forme C^n, où C est une constante absolue.

3. Perspectives

La théorie des formes linéaires de logarithmes est maintenant bien établie et les résultats obtenus sont dans l'ensemble satisfaisants pour de très nombreuses applications. Cependant, pour plusieurs raisons, on peut penser que des progrès restent à accomplir.

En premier lieu, aux Théorèmes D et 1, la dépendance en le nombre premier p fait intervenir un facteur p (et même p^D), alors que l'on pourrait espérer obtenir seulement $\log p$. Ceci s'explique essentiellement par le fait que la fonction exponentielle p-adique n'a pas un rayon de convergence infini. Il est possible qu'un argument astucieux permette de contourner cet obstacle.

En second lieu, les constantes numériques du Théorème C sont très bonnes, et ont ainsi permis la résolution complète de beaucoup d'équations diophantiennes. Cependant, de nombreux problèmes diophantiens, dont l'équation de Catalan et la recherche des puissances pures dans la suite de Fibonacci, conduisent à des formes linéaires en trois logarithmes, pour lesquelles on ne dispose à présent pas d'estimation aussi précises que celles données par le Théorème C. C'est essentiellement pour cette raison que ces problèmes célèbres demeurent à ce jour ouverts. L'un des obstacles majeurs à une amélioration spectaculaire des estimations connues dans le cas de trois logarithmes est le lemme de zéros, qui n'est pour l'instant pas pleinement satisfaisant.

Enfin, en troisième lieu, on aimerait pouvoir remplacer, dans toutes les estimations présentées ci-dessus, le produit des $\log A_i$ par leur somme. Cela est possible dans le cas archimédien si les α_i sont des réels proches de 1, grâce au paramètre E introduit dans le Théorème B, mais demeure conjectural dans le cas général.

Chapitre II

ÉQUATIONS EN S-UNITÉS, ÉQUATIONS ELLIPTIQUES ET PLUS GRAND FACTEUR PREMIER DE $ax^m + by^n$

1. Équations en S-unités

Dans notre thèse [24], qui regroupe, entre autres, les travaux [38, 39, 25], nous avons obtenu de nouvelles majorations explicites pour la taille des solutions de nombreuses familles classiques d'équations diophantiennes, dont les équations en S-unités, les équations de Thue–Mahler et les équations hyperelliptiques et superelliptiques

$$f(x) = ay^m, \qquad \text{en } x, y \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

où $f(X) \in \mathbf{Z}[X]$ est un polynôme de degré $n \geq 2$, a un entier non nul et $m \geq 2$ est tel que $mn \geq 6$. Après avoir précisé les notations que nous utilisons dans le présent chapitre, nous rappelons le résultat principal de [38].

On se place dans un corps de nombres $\mathbf{K}$ de degré d. On note $R_{\mathbf{K}}$ son régulateur, $h_{\mathbf{K}}$ son nombre de classes, $O_{\mathbf{K}}$ l'anneau des entiers de $\mathbf{K}$ et r le rang du groupe des unités de $\mathbf{K}$. On désigne par S un ensemble fini de places de $\mathbf{K}$ contenant l'ensemble S_∞ des places infinies, et par s (resp. t) le nombre de places (resp. de places finies) dans S. Si $S = S_\infty$, on pose $P = 1$, sinon P est le plus grand nombre premier au-dessus des places finies de S. Enfin, R_S désigne le S-régulateur de $\mathbf{K}$, O_S l'anneau des S-entiers de $\mathbf{K}$ et O_S^* son groupe des S-unités. On rappelle que R_S est la valeur absolue du déterminant de la matrice $\big(|\varepsilon_i|_{v_j}\big)_{1\leq i,j\leq s-1}$, où les ε_i forment un système fondamental de S-unités de $\mathbf{K}$ et les v_j sont $s-1$ éléments distincts de S ; en outre, R_S est non nul et sa valeur ne dépend pas du choix des ε_i et des v_j.

Comme au chapitre I, on utilise la hauteur absolue h et on adopte la convention d'écriture $\log^* a = \max\{1, \log a\}$.

Soient α et β deux éléments non nuls de $\mathbf{K}$, de hauteur majorée par H ($H \geq 1$). On considère l'équation

$$\alpha x + \beta y = 1, \qquad \text{en } x, y \in O_S^*. \tag{2}$$

Les premières majorations effectives de la taille des solutions d'équations au type (2) ont été obtenues par Baker (pour $t = 0$) [3], Coates [53, 54] et Sprindžuk [129]. Jusqu'à présent, les meilleurs résultats connus étaient dus à Győry [66] et, dans le cas particulier $t = 0$, à Sprindžuk [130], Schmidt [117] (avec des constantes non explicites) et à Győry (avec des constantes explicites) [67]. Le Théorème 1, qui combine le résultat principal de [38] et une estimation récente de Voutier [136], améliore les résultats précédents en ce qui concerne la dépendance en tous les paramètres.

Théorème 1. *Les solutions x, y de* (2) *vérifient*

$$\max\{\mathrm{h}(x), \mathrm{h}(y)\} < c_1\, P^d\, R_S (\log^* R_S)\big(\log^*(PR_S)/\log^* P\big)\, H, \tag{3}$$

où

$$c_1 = 3^{25}\left(10d^2(\log(3d))^3\right)^{s+1} s^{5s+10}$$

et

$$R_S \le R_{\mathbf{K}}\, h_{\mathbf{K}}(d\log^* P)^t.$$

Le principal progrès, à savoir l'amélioration de la dépendance en le régulateur de $\mathbf{K}$, a deux sources. En premier lieu, une idée de Schmidt assure le gain d'un facteur $R_{\mathbf{K}}$ par rapport au résultat de Győry dans le cas $t = 0$. Cette méthode, qui repose sur l'utilisation d'un système fondamental d'unités, se généralise naturellement au cadre non archimédien. Il suffit en effet de disposer d'un système fondamental de S-unités, dont on contrôle la taille, et d'estimations précises du S-régulateur. Pour cela, on s'inspire de précédents travaux de Brindza [22], Hajdu [70] et Pethő [103]. En particulier, on majore R_S par la quantité $R_{\mathbf{K}}\, h_{\mathbf{K}}\,(d\log^* P)^t$ — résultat obtenu indépendamment par Bilu [11] — et un facteur $R_{\mathbf{K}}$ apparaît alors dans la majoration finale, au lieu du terme $R_{\mathbf{K}}^s$.

Quant au progrès considérable concernant la constante numérique, il découle avant tout des nouvelles minorations de formes linéaires de logarithmes, dues à Waldschmidt [137] et à Yu Kunrui [143]. Notons que l'on obtiendrait une meilleure constante — précisément, le facteur s^{4s} remplacerait le facteur s^{5s} — si l'on utilisait un résultat de Baker & Wüstholz cité au chapitre I (Théorème A), mais un facteur supplémentaire $\log H$ apparaîtrait alors dans (3), lequel serait très préjudiciable au niveau des applications.

Toujours grâce à l'introduction du S-régulateur, nous avons pu substantiellement améliorer les estimations antérieures de la taille des solutions des équations de Thue–Mahler et des équations superelliptiques, ces dernières se ramenant *in fine* à des équations en S-unités et des équations de Thue–Mahler. En particulier, nous avons là encore réussi à faire disparaître la dépendance en le nombre de places dans l'exposant du régulateur $R_{\mathbf{K}}$. Un tel progrès a des conséquences spectaculaires (*voir* les survols [34] et [69]), illustrées notamment par les nouvelles minorations du plus grand facteur premier d'une forme binaire $ax^m + by^n$.

Par ailleurs, Győry [68] a appliqué le Théorème 1 pour améliorer ses précédentes estimations de la taille des solutions des équations définies par des formes décomposables, et Poulakis [105] l'a utilisé afin de donner des bornes explicites pour la taille des solutions d'une large classe d'équations diophantiennes, comprenant entre autres les équations de Thue et les équations elliptiques.

2. Le plus grand facteur premier de $ax^m + by^n$

Dans cette partie, nous énonçons les nouvelles minorations que nous avons obtenues concernant la minoration du plus grand facteur premier et de la partie sans facteur carré d'une forme binaire $ax^m + by^n$, un thème qui fait l'objet du survol [30]. Nous désignons par $P[n]$ (resp. $Q[n]$) le plus grand facteur premier (resp. le produit des facteurs premiers distincts) d'un entier $n \notin \{\pm 1, 0\}$ et convenons que $P[-1] = P[1] = P[0] = 1$ (resp. Q[-1] = Q[1] = Q[0] = 1).

Théorème 2. *Soient $m \ge 2$ et $n \ge 2$ deux entiers vérifiant $(m,n) \ne (2,2)$. Soient a, b, x et y des entiers non nuls avec x et y premiers entre eux. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Alors il existe une constante effective c_2, ne dépendant que de ε, m, n, a et b, telle que*

$$P[ax^m + by^n] \ge \frac{\log\log\max\{|x|, |y|\}}{(7+\varepsilon)\, m\, n \min\{m,n\}} \tag{4}$$

et

$$Q[ax^m + by^n] \geq \bigl(\log^* \max\bigl\{|x|, |y|\bigr\}\bigr)^{1/((2+\varepsilon)mn \min\{m,n\})}$$

dès que $\max\bigl\{|x|, |y|\bigr\} \geq c_2$.

Le Théorème 2 améliore considérablement un résultat de Kotov [76], datant d'une vingtaine d'années, et faisant intervenir dans (4) la fonction $(\log\log)^{1/2} \times (\log\log\log)^{1/2}$ au lieu de $\log\log$. L'énoncé de Kotov couvre le cas où a, b, x et y appartiennent à un corps de nombres quelconque $\mathbf{K}$, situation que nous avons également considérée. Le Théorème 2 s'obtient comme corollaire presque immédiat du travail [25] sur les équations superelliptiques (*voir*, par exemple, [29] pour un énoncé moins précis) ; cependant, la démonstration qui figure dans [35] (et qui nous a été suggérée par Yuri Bilu) est plus directe et peut se lire indépendamment de [25]. Qui plus est, elle conduit à l'amélioration suivante du résultat principal de [29] : la minoration (5) ci-dessous est indépendante du nombre de classes de $\mathbf{K}$. On désigne par N la norme de $\mathbf{K}$ sur $\mathbf{Q}$ et, pour $x \in O_{\mathbf{K}}$, on note $P[x]$ au lieu de $P[\mathrm{N}(x)]$.

THÉORÈME 3. *Soient $m \geq 2$ et $n \geq 2$ deux entiers vérifiant $(m,n) \neq (2,2)$. Soient α, β, x et $y \in O_{\mathbf{K}}$ avec x et y premiers entre eux. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Alors il existe une constante effective c_3, ne dépendant que de ε, m, n, $\mathbf{K}$ et de la hauteur de α et de β, telle que*

$$P[\alpha x^m + \beta y^n] \geq \frac{\log\log\max\bigl\{|\mathrm{N}(x)|, |\mathrm{N}(y)|\bigr\}}{(7+\varepsilon)\, d\, m\, n \min\{m,n\}}, \tag{5}$$

dès que $\max\bigl\{|\mathrm{N}(x)|, |\mathrm{N}(y)|\bigr\} \geq c_3$.

Si ce n'est au niveau de la constante numérique, qui peut vraisemblablement être remplacée par 5 ou 6, les techniques actuelles ne permettent pas d'améliorer le Théorème 3. Et tout laisse à penser qu'à moins d'une idée nouvelle significative, riche de conséquences dans le domaine des équations diophantiennes, aucun progrès n'est envisageable.

Soient a, b, x, y et n des entiers vérifiant

$$ab \neq 0, \qquad |x| > 1, \qquad y \neq 0, \qquad (x,y) = 1 \qquad \text{et} \qquad n \geq 2. \tag{6}$$

Shorey & *al.* [124] ont montré que $P[ax^m + by^n]$ tend vers l'infini quand m tend vers l'infini, indépendamment des entiers x et y premiers entre eux avec $|x| > 1$. Ce résultat est une conséquence des travaux de Baker sur les formes linéaires de logarithmes, et il est donc effectif. En outre, on n'en connaît pas de démonstration ineffective. Shorey [121] a obtenu un énoncé semi-explicite en 1980 : il a prouvé qu'il existe une constante effective $c_4 > 0$, ne dépendant que de a, b et n, telle que, pour tout entier $m \geq 2$, on ait

$$P[ax^m + by^n] > c_4\, (\log m)^{1/2} (\log\log m)^{1/2}. \tag{7}$$

Sa démonstration utilise des systèmes fondamentaux de S-unités de petite hauteur. En introduisant le S-régulateur, il est possible de construire de tels systèmes d'une manière nouvelle, de telle sorte que leur hauteur soit plus petite que celle des systèmes de Shorey. Il suffit ensuite de suivre pas à pas la preuve de [121] pour remplacer la fonction $(\log)^{1/2} \times (\log\log)^{1/2}$ apparaissant dans (7) par la fonction $\log$. Ceci a été réalisé dans [27] et illustre une nouvelle fois les progrès induits par l'utilisation du S-régulateur.

THÉORÈME 4. *Soient a, b, x, y et n des entiers vérifiant (6). Il existe des constantes effectives absolues $c_5 > 0$ et $c_6 > 0$ et une constante effective c_7, ne dépendant que de a, b et n, telle que, pour tout entier $m \geq 2$, on ait*

$$P[ax^m + by^n] > c_5 \frac{\log m}{n} \tag{8}$$

et

$$Q[ax^m + by^n] > m^{c_6/n}, \tag{9}$$

pour tout entier $m \geq c_7$.

Combinant (4) avec une version de (8) valable pour tout m, nous obtenons le corollaire suivant [34].

COROLLAIRE 1. *Soient a, b, x et y des entiers non nuls vérifiant $(x, y) = 1$, $|x| \geq 2$ et $(ax, by) = 1$. Soit $n \geq 2$ un entier. Il existe une constante effective c_8, ne dépendant que de a et de b, telle que*

$$P[ax^m + by^n] \geq \frac{c_8}{n^2}\left(\log m + \frac{\log^* \log^* \max\{|x|, |y|\}}{m}\right)$$

pour tout entier $m \geq 2$ vérifiant $mn \geq 6$.

Les techniques utilisées dans la démonstration du Théorème 4 s'appliquent également dans le cas où a, b, x et y appartiennent à un corps de nombres quelconque $\mathbf{K}$. À l'instar du Théorème 3, il semble tout à fait possible d'obtenir une minoration ne faisant intervenir que le degré de $\mathbf{K}$ et non son nombre de classes.

En outre, on déduit aisément de (9) une minoration de la distance entre deux puissances pures x^m et y^n, indépendante de x et y. Turk [135] fut le premier à obtenir un résultat de ce type, que nous avons par la suite considérablement amélioré [23]. L'approche de [23] repose sur la théorie des formes linéaires de logarithmes archimédiennes, contrairement à la démonstration de (9), où apparaissent également des formes non archimédiennes : ceci explique pourquoi le résultat de [23] est sensiblement meilleur que (9). L'énoncé suivant reprend le théorème principal de [40], qui étend légèrement le travail [23].

THÉORÈME 5. *Si a, b, x, y, $m \geq 2$ et $n \geq 2$ sont des entiers non nuls vérifiant $|y| \geq 2$ et $ax^m \neq -by^n$, alors on a*

$$|ax^m + by^n| \geq m^{2/5n}(20n)^{-2-11/n}(|b|^n \log^* |a|)^{-1/n}.$$

3. ÉQUATIONS ELLIPTIQUES

Soit $\mathbf{K}$ un corps de nombres de degré d et soient a et b deux éléments de $O_{\mathbf{K}}$. Les équations elliptiques

$$y^2 = x^3 + ax + b, \tag{10}$$

en inconnues x et $y \in O_{\mathbf{K}}$, constituent des exemples particuliers d'équations (1) et ont fait l'objet de nombreux travaux spécifiques, notamment de la part Sprindžuk [130], Schmidt [117], Poulakis [105] et Pintér [104]. Nous sommes parvenus à généraliser et à améliorer le résultat de Pintér, en présentant des majorations explicites pour la taille des solutions de (10) ne dépendant *presque* que des facteurs premiers du discriminant du polynôme $f(X) := X^3 + aX + b$ et des hauteurs de a et b. Ainsi, en notant H ($H \geq 1$) un majorant de $\mathrm{h}(a)$ et de $\mathrm{h}(b)$ et $\Delta_f := -4a^3 - 27b^2$ le discriminant de f, nous obtenons le résultat suivant, extrait de [26].

Théorème 6. *Soit t le nombre d'idéaux premiers distincts de $O_{\mathbf{K}}$ divisant Δ_f. Toutes les solutions (x,y) de (10) vérifient*

$$\max\{\mathrm{h}(x),\mathrm{h}(y)\} \leq 70\,H + \big(100(t+d)\big)^{100(t+d)}\,P[\Delta_f]^{24d}\,Q[\Delta_f]^{9d}\,|D_{\mathbf{K}}|^6\,\big(\log|D_{\mathbf{K}}|\big)^{12d+1}.$$

En outre, si $\mathbf{K}=\mathbf{Q}$, on a

$$\max\{|x|,|y|\} \leq H^{70}\exp\big\{(100P[\Delta_f])^{124(t+1)}\big\}. \tag{11}$$

L'intérêt majeur du Théorème 6, outre le fait qu'il présente une majoration totalement explicite, est la très faible dépendance en la hauteur du polynôme f. Elle est certes toujours présente, cependant des exemples montrent qu'il n'est pas possible de la supprimer, sauf sous certaines hypothèses additionnelles. C'est par exemple le cas si a et b sont premiers entre eux, comme l'illustre le résultat suivant, extrait de [32].

Théorème 7. *Supposons que a et $b \in O_{\mathbf{K}}$ soient premiers entre eux et que Δ_f ne soit pas nul. Il existe alors des constantes numériques effectives $c_8>0$ et $c_9>0$ et une constante effective c_{10} ne dépendant que de $\mathbf{K}$ telle que*

$$P[\Delta_f] \geq c_8\,\frac{\log^*\log^*\max\{|\mathrm{N}x|,|\mathrm{N}y|\}}{d}$$

et

$$Q[\Delta_f] \geq \big(2\,\log^*\max\{|\mathrm{N}x|,|\mathrm{N}y|\}\big)^{c_9/d}$$

pour tous entiers algébriques x et $y\in\mathbf{K}$ vérifiant (10), pourvu que $|\mathrm{N}\Delta_f|\geq c_{10}$.

Observons pour conclure que la dépendance en t dans la majoration (11) est bien meilleure que celle obtenue par Pintér [104], qui fait intervenir $(t+1)^2$ et non $(t+1)$: il s'agit là à nouveau d'une conséquence de l'utilisation du S-régulateur.

4. Perspectives

Il semble qu'à moins d'une grande idée nouvelle les résultats présentés dans ce chapitre ne puissent être améliorés de manière significative. Ils sont très dépendants des minorations de formes linéaires de logarithmes, mais même des progrès dans ce domaine n'entraîneraient pas nécessairement des améliorations spectaculaires, par exemple des Théorèmes 3 et 4, car d'autres facteurs, inhérents à la méthode de démonstration, apportent leur contribution, semble-t-il incompressible.

Chapitre III

AMÉLIORATION EFFECTIVE DE L'INÉGALITÉ DE LIOUVILLE

1. Introduction

Si α est un nombre réel irrationnel, on dit que μ est une mesure d'irrationalité de α s'il existe une constante $C(\alpha)$, dépendant uniquement de α, telle que

$$\left|\alpha - \frac{x}{y}\right| \geq \frac{C(\alpha)}{y^{\mu}}, \qquad \text{pour tout } (x,y) \in \big(\mathbf{Z}, \mathbf{N}\setminus\{0\}\big) \text{ avec } \mathrm{pgcd}(x,y)=1. \tag{1}$$

Si la constante $C(\alpha)$ peut être explicitée, la mesure d'irrationalité est dite *effective*, dans le cas contraire, elle est *ineffective*.

Il découle du principe des tiroirs que μ est nécessairement supérieur ou égal à 2. La première minoration de μ remonte à Liouville [85], qui a montré que tout nombre algébrique α de degré n a une mesure d'irrationalité effective inférieure ou égale à n (en particulier, la mesure d'irrationalité effective d'un nombre quadratique est donc égale à 2). Ceci ne permet cependant pas de prouver que l'équation diophantienne

$$F(X,Y) = b, \qquad \text{en inconnues } X \text{ et } Y \text{ entiers}, \tag{2}$$

où $F \in \mathbf{Z}[X,Y]$ est un polynôme homogène irréductible de degré au moins 3 et b un entier non nul, n'a qu'un nombre fini de solutions.

Ainsi que nous l'avons mentionné au chapitre I, un tel énoncé découle d'un travail de Thue [132] améliorant l'estimation de Liouville, de manière cependant ineffective : tout nombre algébrique α de degré $n \geq 3$ a une mesure d'irrationalité ineffective inférieure ou égale à $n/2+1$. Successivement, Siegel, Gelfond et Dyson ont substantiellement raffiné ce résultat, puis Roth [107] a démontré en 1955 le résultat optimal, à savoir que, pour tout réel ε strictement positif, $2+\varepsilon$ est une mesure d'irrationalité ineffective de α. Mis à part le théorème de Liouville, les résultats cités ci-dessus sont tous ineffectifs, et il a fallu patienter jusqu'en 1964 pour voir Alan Baker démontrer de bonnes mesures d'irrationalité effectives pour certains nombres algébriques, dont $\sqrt[3]{2}$ [1].

Théorème A. *Pour tout couple d'entiers (x,y) avec y non nul, on a*

$$\left|\sqrt[3]{2} - \frac{x}{y}\right| > \frac{10^{-6}}{y^{2.955}}.$$

À ce jour, trois voies différentes permettent d'améliorer de manière effective l'inégalité de Liouville. Ainsi, Baker [1], puis Chudnowski [52] et, entre autres, Easton, Bennett, Voutier, ont, à l'aide de techniques hypergéométriques inspirées de travaux de Thue et Siegel et basées sur les approximants de Padé, explicité de bonnes mesures d'irrationalité effectives pour certains nombres algébriques de la forme $\sqrt[r]{a}$, avec a et r entiers positifs.

L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle ne s'applique qu'au cas par cas et ne conduit pour l'instant à aucune formule valable pour tout nombre algébrique.

Un tel énoncé général a cependant été obtenu par Feldman [62], comme conséquence de la théorie des formes linéaires de logarithmes développée par Baker [2] : pour tout nombre algébrique α de degré $n \geq 3$, il existe un réel $\tau(\alpha) > 0$ tel que $n - \tau(\alpha)$ est une mesure d'irrationalité effective de α. Néanmoins, $\tau(\alpha)$ est très petit ; les meilleures estimations déduites de cette approche sont dues à Baker & Stewart [5] si α est de degré 3 et à Bugeaud & Győry [39] dans le cas général (*voir* également [28]).

Ces dernières années, Bombieri [16] et Bombieri & Mueller [19] ont développé une nouvelle méthode, basée sur le principe de Thue et le lemme de Dyson ; celle-ci ne s'applique toutefois qu'à une classe restreinte de nombres algébriques : les nombres de la forme $\sqrt[r]{a/b}$ qui admettent une bonne approximation rationnelle. Par la suite, Bombieri [17] a raffiné ce résultat et, sans faire appel à la théorie des formes linéaires de logarithmes, il en déduit, pour un nombre algébrique α arbitraire, une nouvelle mesure d'irrationalité effective de qualité très légèrement inférieure au résultat de [39]. La version p-adique du travail [17], ainsi que plusieurs améliorations substantielles, ont été obtenues par Bombieri & Cohen [18]. Tout récemment, Bombieri, van der Poorten & Vaaler [21] ont retravaillé cette méthode dans le cas des irrationnels cubiques et ont obtenu, sous certaines hypothèses, d'excellentes mesures d'irrationalité effectives, approchant parfois la valeur limite 2.

Dans ce qui suit, nous n'abordons pas la méthode basée sur les approximants de Padé et nous nous concentrons exclusivement sur les techniques qui conduisent à une amélioration de l'inégalité de Liouville *pour tout* nombre algébrique.

2. Synthèse des résultats

Le résultat suivant, dû à Feldman [62], repose sur la célèbre théorie de Baker [2] des formes linéaires en $m \geq 3$ logarithmes de nombres algébriques.

Théorème B. *Soit α un nombre algébrique réel de degré $n \geq 3$. Il existe alors deux constantes positives $C(\alpha)$ et $\tau(\alpha)$, que l'on peut expliciter, telles que, pour tout rationnel x/y avec $y > 0$, on a $|\alpha - x/y| > C(\alpha) y^{\tau(\alpha)-n}$.*

La nouveauté théorique importante, introduite par Feldman dans [61] (et élaborée par Baker dans ses « Sharpenings » [4]), est l'utilisation de $\binom{z}{k}$ au lieu de z^k dans la construction de la fonction auxiliaire. Pour simplifier, et en utilisant les notations du chapitre I, on peut considérer que cela entraîne une minoration de formes linéaires de logarithmes faisant intervenir la quantité B', définie au Théorème B du chapitre I. Par opposition, dans les précédents résultats de Baker, la dépendance en les coefficients b_i de la forme linéaire apparaît dans le terme $B = \max\{|b_1|, \ldots, |b_n|, 3\}$ et la minoration de $|\alpha - x/y|$ qui en résulte est de l'ordre de $y^{-n+c(\alpha)/\log\log y}$, où $c(\alpha)$ est une constante effective.

Depuis la parution des travaux de Feldman et de Baker présentant la démonstration du Théorème B, de nombreux et importants progrès ont été accomplis afin d'obtenir des constantes numériques peu élevées dans les minorations de formes linéaires de logarithmes. En utilisant les récents résultats de Waldschmidt [137] (et non ceux de Baker & Wüstholz [6], pour les raisons expliquées ci-dessus) et en suivant l'approche de Feldman et Baker, Bugeaud & Győry [39] ont calculé des constantes $C(\alpha)$ et $\tau(\alpha)$ pour lesquelles la conclusion du Théorème B se trouve vérifiée.

THÉORÈME 1. *Soit α un nombre algébrique de degré $n \geq 3$ et soit R le régulateur du corps $\mathbf{Q}(\alpha)$. Alors α a une mesure d'irrationalité effective majorée par $n - \tau_1(\alpha)^{-1}$, avec*

$$\tau_1(\alpha) = 3^{n+26}\, n^{15n+20}\, R \log \max\{e, R\}.$$

La méthode de Bombieri, dont il a été question au cours de l'introduction, est essentiellement différente. Elle se divise en deux étapes. Il convient tout d'abord d'améliorer l'inégalité de Liouville effective pour les nombres de la forme $\sqrt[r]{a}$, où l'entier r est suffisamment grand par rapport à la hauteur du nombre algébrique a. Ensuite, un argument de géométrie des nombres permet de ramener à ces cas particuliers le problème de l'approximation d'un nombre algébrique quelconque, et on obtient alors l'énoncé suivant [17].

THÉORÈME C. *Soit α un nombre algébrique de degré $n \geq 3$ et soit R le régulateur du corps $\mathbf{Q}(\alpha)$. Alors α a une mesure d'irrationalité effective majorée par $n - \tau_2(\alpha)^{-1}$, avec*

$$\tau_2(\alpha) = e^{500\, n^{12}}\, R.$$

Comme il le souligne dans son article [16], Bombieri n'a pas cherché à écrire une version raffinée de ce résultat, mais il affirme qu'avec cette méthode il lui paraît difficile d'obtenir une constante meilleure que n^{Cn^3}, où C est un réel positif. La dépendance en n est donc moins bonne qu'au Théorème 1.

Les deux étapes de la démonstration de Bombieri sont indépendantes, et, tout en suivant sa stratégie, il est possible (*voir* [28]) d'améliorer le Théorème C. Ainsi, on remarque que les meilleures minorations de formes linéaires en trois logarithmes permettent également d'améliorer l'inégalité de Liouville effective pour les nombres de la forme $\sqrt[r]{a}$, le résultat obtenu est même alors légèrement meilleur que celui figurant dans [39]. En outre, le lemme de géométrie des nombres de [16] a été ultérieurement amélioré par Bombieri & Cohen [18]. Combinant ces deux résultats, nous sommes parvenus à raffiner les Théorèmes 1 et C au niveau de la dépendance en n et en R.

THÉORÈME 2. *Soit α un nombre algébrique de degré $n \geq 3$ et soit R le régulateur du corps $\mathbf{Q}(\alpha)$. Alors, α a une mesure d'irrationalité effective majorée par $n - \tau_3^{-1}(\alpha)$, avec*

$$\tau_3(\alpha) = 10^{26\, n}\, n^{14\, n}\, R.$$

Sans idée nouvelle, il semble désespéré de songer à obtenir une meilleure dépendance en le régulateur ou une dépendance simplement exponentielle en n.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME B VIA LES FORMES LINÉAIRES EN DEUX LOGARITHMES

Depuis le milieu de ce siècle, on dispose, notamment grâce aux travaux de Gelfond [64], de minorations effectives de formes linéaires en deux logarithmes. En outre, comme on l'a souligné au chapitre I, Gelfond avait observé qu'une généralisation de son résultat aux formes linéaires en un nombre quelconque de logarithmes permettrait de démontrer le Théorème B.

Il s'avère qu'en réalité le résultat de Gelfond suffit *presque* à prouver le théorème de Baker–Feldman ! Le seul ingrédient qu'il manquait est en fait la nouveauté que Feldman

[61] a introduite vers 1968 dans les travaux de Baker, à savoir l'utilisation de $\binom{z}{k}$ au lieu de z^k dans la construction de la fonction auxiliaire.

Grâce à des idées figurant dans le travail de Bombieri & Cohen, dont en particulier un lemme de géométrie des nombres, nous sommes ainsi parvenus [13] à donner une démonstration du Théorème B qui évite le recours à la théorie de Baker des formes linéaires en $m \geq 3$ logarithmes. Il convient à ce titre de souligner que cette dernière théorie, certes bien établie, demeure beaucoup plus délicate que celle des formes linéaires en deux logarithmes.

Le travail [13] offre une démonstration courte, complète et élémentaire du Théorème B, qui peut parfaitement s'insérer dans un cours de troisième cycle.

4. Perspectives

Si une amélioration effective spectaculaire de l'inégalité de Liouville semble actuellement hors d'atteinte à moins d'une idée réellement novatrice, on peut cependant espérer obtenir de nouveaux résultats intéressants en considérant des problèmes d'approximation simultanée. La méthode développée par Bombieri serait alors vraisemblablement l'outil le mieux adapté, d'autant qu'elle n'a à ce jour sans doute pas été totalement exploitée. En outre, des minorations de formes linéaires de logarithmes simultanées pourraient également s'appliquer à ces questions.

Par ailleurs, ainsi que l'a noté Bombieri, le principe de Thue et la méthode reposant sur les approximants de Padé possèdent plusieurs points en commun, qu'il serait très intéressant de bien comprendre afin d'inventer une nouvelle approche qui les généraliserait.

Chapitre IV

APPROXIMATION PAR DES NOMBRES ALGÉBRIQUES

1. Le problème de Wirsing

Le théorème de Dirichlet affirme que pour tout nombre réel irrationnel ξ, il existe une infinité de rationnels irréductibles p/q vérifiant

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Il est naturel de tenter de le généraliser dans deux directions. La première consiste à étudier, pour un entier $n \geq 1$ fixé, l'approximation de ξ par des nombres algébriques de degré au plus n, alors que la seconde est basée sur l'approximation de 0 par les valeurs en ξ des polynômes non nuls à coefficients entiers et de degré au plus n. Avant toute chose, il est nécessaire de convenir d'une notion de taille : nous choisissons dans tout ce chapitre la hauteur naïve. Si le polynôme $P(X) \in \mathbf{Z}[X]$ s'écrit

$$P(X) = a_d\, X^d + \cdots + a_1\, X + a_0,$$

elle est définie par

$$\mathrm{H}(P) = \max_{0 \leq j \leq d} |a_j|.$$

En outre, la *hauteur* du nombre algébrique α, notée $\mathrm{H}(\alpha)$, est par définition celle de son polynôme minimal sur $\mathbf{Z}$.

Nous pouvons maintenant introduire les définitions suivantes.

Définition A. *Soient $n \geq 1$ un entier et ξ un nombre complexe. On note $w_n(\xi)$ la borne supérieure des nombres réels w pour lesquels il existe une infinité de polynômes P à coefficients entiers, de degré majoré par n, vérifiant*

$$0 < |P(\xi)| \leq \mathrm{H}(P)^{-w}.$$

De même, on note $w_n^*(\xi)$ la borne supérieure des nombres réels w^* pour lesquels il existe une infinité de nombres algébriques α, de degré majoré par n, vérifiant

$$0 < |\xi - \alpha| \leq \mathrm{H}(\alpha)^{-w^*-1}.$$

À présent, ξ désigne exclusivement un nombre réel. En outre, l'expression « pour presque tout ξ » est à prendre au sens de la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$. Mahler et Koksma ont établi deux classifications des nombres réels, basées respectivement sur les quantités $w_n(\xi)$ et $w_n^*(\xi)$. Elles sont en fait équivalentes : une étude détaillée figure par exemple dans le livre de Schneider [118].

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel ξ, on montre facilement (*voir* [115], page 44) que

$$w_n^*(\xi) \leq w_n(\xi),$$

et la minoration $w_n(\xi) \geq n$, valable si ξ n'est pas algébrique de degré $\leq n$, découle du théorème de Minkowski. Cependant, il n'est pas si facile de minorer $w_n(\xi)$ en fonction de $w_n^*(\xi)$. Les premiers résultats importants dans cette direction sont dus à Wirsing [141], qui a démontré que, si ξ n'est pas algébrique de degré $\leq n$, alors

$$\begin{aligned} w_n^*(\xi) &\geq w_n(\xi) - n + 1, \\ w_n^*(\xi) &\geq \frac{1}{2}\,(w_n(\xi) + 1) \end{aligned} \tag{1}$$

et

$$w_n^*(\xi) \geq \frac{w_n(\xi)}{w_n(\xi) - n + 1}. \tag{2}$$

Combinant (1) et (2), on obtient

$$w_n^*(\xi) \geq \frac{n+2}{4} + \frac{\sqrt{n^2 + 4n - 4}}{4}, \tag{3}$$

minoration sensiblement éloignée du résultat généralement conjecturé.

CONJECTURE A. *Soit $n \geq 1$ un entier. Pour tout nombre réel ξ qui n'est pas algébrique de degré $\leq n$, on a*

$$w_n^*(\xi) \geq n.$$

L'estimation (3) a été légèrement améliorée par Bernik & Tishchenko [9], qui ont obtenu

$$w_n^*(\xi) \geq \frac{n}{4} + \frac{\sqrt{n^2 + 16n - 8}}{4}. \tag{4}$$

La démonstration de (4), ainsi qu'une nouvelle preuve de (2), font l'objet du travail [33]. Pour être complet, il convient de noter que Davenport & Schmidt [56] ont démontré la Conjecture A pour $n = 2$ et que Tishchenko affirme avoir sensiblement amélioré (4) pour les petites valeurs de n. En outre, résolvant une conjecture de Mahler, Sprindžuk [128] a prouvé que la Conjecture A est vraie pour presque tout nombre réel. Elle l'est également pour tout réel ξ algébrique de degré supérieur à n : il s'agit là d'un corollaire immédiat au célèbre théorème du sous-espace de Schmidt (*voir* [115]).

Même si nous connaissons la valeur de $w_n^*(\xi)$, nous n'avons que peu d'information sur les meilleures approximations algébriques de ξ, les résultats précédents ne nous permettant pas de préciser leur degré, ni de savoir si elles sont nombreuses. Les travaux [49] et [37] abordent cette question, et nous détaillons dans la partie 2 les résultats nouveaux qui y figurent.

2. Approximation par des nombres algébriques de degré donné

Plusieurs énoncés portant sur l'approximation par des nombres algébriques, dans le même esprit que le théorème de Wirsing, font l'objet de récents travaux de Diaz, Laurent, Roy et Waldschmidt [58, 78, 79, 80, 109, 110]. Notamment, Laurent & Roy (*voir* [79], Corollaire 1) abordent la question posée à la fin de la partie précédente et prouvent que, si $n \geq 27$ et si le nombre réel ξ n'est pas algébrique de degré $\leq n$, alors il existe une infinité de nombres algébriques α vérifiant

$$0.001\, n \leq \deg(\alpha) \leq n \qquad \text{et} \qquad |\xi - \alpha| \leq \mathrm{H}(\alpha)^{-n/1000}. \tag{5}$$

Cet énoncé est un corollaire d'un résultat beaucoup plus général, qui s'obtient entre autres en utilisant la mesure de Mahler au lieu de la hauteur naïve. Cela apporte une flexibilité qui permet de prouver l'existence d'une infinité d'approximants de ξ, dont le degré et la hauteur vérifient des contraintes variées.

Cependant, (5) n'est pas pleinement satisfaisant, car ce résultat n'apporte aucune information sur la hauteur des bons approximants. Reprenant des arguments de Wirsing [141], nous avons (*voir* [37]) considérablement amélioré (5) dans le cas où ξ est un nombre algébrique, et également pour presque tout ξ.

Théorème 1. *Soient $n \geq 2$ un entier et ξ un réel qui n'est pas algébrique de degré $\leq n$. On suppose que $w_n(\xi) = n$ et que $w_{n-1}(\xi) < n$. Soient ε et λ des réels vérifiant $0 < \varepsilon < \lambda < n$. Alors, il existe un réel H_1, ne dépendant que de ξ, λ et ε, et, pour tout $H \geq H_1$, un nombre algébrique réel α vérifiant*

$$\deg(\alpha) = n, \qquad H^{1-\varepsilon/\lambda} \leq \mathrm{H}(\alpha) \leq H \qquad \textit{et} \qquad |\xi - \alpha| \leq \mathrm{H}(\alpha)^{-n-1+\varepsilon}.$$

D'après les résultats de Sprindžuk et de Schmidt mentionnés plus haut, le Théorème 1 est vrai pour presque tout réel ξ et pour tout nombre algébrique ξ. Il ne peut cependant être vrai pour *tous* les nombres réels ξ que l'on souhaite approcher. En effet, comme le montre le résultat suivant, déduit du Théorème 3 de [37], il convient d'exclure le cas des U^*-nombres de Koksma (ou des U-nombres de Mahler), qui sont par définition les réels ξ pour lesquels il existe un entier $n \geq 1$ tel que $w_n^*(\xi)$ est infini.

Théorème 2. *Soit ξ un U-nombre et soit $n \geq 1$ un entier pour lequel $w_n^*(\xi)$ est infini. Soient $a \geq 1$, $b \geq 1$ et $c \leq 1$ des réels strictement positifs. Soit D un entier supérieur à $2nb/c$. Alors il existe une suite de réels positifs $(X_k)_{k\geq 1}$, strictement croissante vers l'infini, satisfaisant la propriété suivante : si, pour un entier $k \geq 1$, le nombre algébrique β vérifie*

$$D \leq \deg(\beta) \leq aD \qquad \textit{et} \qquad X_k \leq \mathrm{H}(\beta) \leq X_k^b,$$

alors

$$\log|\xi - \beta| \geq \mathrm{H}(\beta)^{-cD}.$$

Le Théorème 2 confirme l'idée qu'un nombre réel ayant de très bonnes approximations algébriques ne peut pas avoir de trop nombreuses bonnes approximations. Le travail [37] contient d'autres résultats métriques, exprimés cette fois en terme de mesure de Mahler. En outre, suivant une idée de Bombieri & Mueller [20], le Théorème 1 permet d'obtenir des résultats nouveaux (*voir* [37], Théorème 5) sur le problème de l'amélioration effective de l'inégalité de Liouville, auquel est consacré le chapitre III.

On peut à juste titre considérer que le Théorème 1 n'améliore pas (5), puisque notre résultat n'est pas valable pour tout réel ξ. Une autre méthode, développée par Davenport & Schmidt [57] dans un travail sur l'approximation par des entiers algébriques, s'avère plus fructueuse. Leur idée est de construire, par des arguments de géométrie des nombres, les polynômes minimaux des bons approximants du réel ξ. Un examen attentif de leur démonstration montre qu'il est possible d'imposer diverses contraintes à ces polynômes, par exemple de demander qu'ils soient irréductibles. Ceci nous a permis, dans le travail [49], de substantiellement améliorer (5).

THÉORÈME 3. *On définit la suite $(\nu_k)_{k\geq 2}$ par $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = (3+\sqrt{5})/2$, $\nu_4 = 3$ et $\nu_k = [(k+1)/2]$ pour $k \geq 5$, les crochets désignant la fonction partie entière. Soient $n \geq 5$ (resp. $n = 3$ ou 4, $n = 2$) un entier et ξ un nombre réel, qui n'est pas algébrique de degré au plus $\frac{(n-1)}{2}$ (resp. au plus 2, au plus 1). Alors il existe une constante positive c ne dépendant que de ξ et de n, et une infinité de nombres algébriques (resp. d'entiers algébriques) α réels de degré exactement $n-1$ (resp. n) tels que*

$$0 < |\xi - \alpha| \leq c\,\mathrm{H}(\alpha)^{-\nu_n} (\log \mathrm{H}(\alpha))^{\nu_n}.$$

Outre le Théorème 3, le travail [49] contient de nouveaux résultats sur l'approximation des nombres réels par des entiers algébriques. De la même manière que nous avons défini précédemment les quantités $w_n(\xi)$ et $w_n^*(\xi)$, nous introduisons le réel $w_n'(\xi)$, qui mesure la qualité de l'approximation de ξ par des entiers algébriques.

DÉFINITION B. *On note $w_n'(\xi)$ la borne supérieure des nombres réels w' pour lesquels il existe une infinité d'entiers algébriques α, de degré majoré par n, vérifiant*

$$0 < |\xi - \alpha| \leq \mathrm{H}(\alpha)^{-w'}.$$

Nous sommes parvenus à établir une inégalité analogue à (2), qui relie $w_n(\xi)$ non plus à $w_n^*(\xi)$, mais à $w_n'(\xi)$.

THÉORÈME 4. *Soit $n \geq 3$ un entier. Soit ξ un nombre réel qui n'est pas algébrique de degré $\leq n-1$. Alors*

$$w_n'(\xi) \geq \frac{w_{n-1}(\xi)+1}{w_{n-1}(\xi)-n+2}.$$

Du Théorème 4, on déduit en particulier que $w_n'(\xi) = n$ pour presque tout réel ξ et pour tout nombre algébrique réel ξ de degré supérieur à n, ce dernier résultat étant dû à Schmidt (*voir* [115]). De nouvelles idées semblent cependant nécessaires afin de démontrer l'estimation généralement conjecturée.

CONJECTURE B. *Soit $n \geq 1$ un entier. Pour tout nombre réel ξ qui n'est ni algébrique de degré $\leq n-1$, ni entier algébrique de degré n, on a*

$$w_n'(\xi) \geq n.$$

3. PERSPECTIVES

Outre les Conjectures A et B, de nombreuses questions relatives à l'approximation par des nombres algébriques demeurent ouvertes. L'une d'elles est relative à la classification de

Mahler. Schmidt a prouvé l'existence de T-nombres, puis les a répartis de manière naturelle en sous-classes, mais son résultat n'est pas pleinement satisfaisant car il n'entraîne pas que *toute* sous-classe est non vide.

Peu d'énoncés sont relatifs à l'approximation par des entiers algébriques. La difficulté majeure est que l'on ne peut pas faire appel au principe des tiroirs, et donc on ne dispose pas d'une méthode efficace pour construire des polynômes unitaires prenant de petites valeurs en un réel ξ fixé. La seule approche connue à ce jour a été élaborée par Davenport & Schmidt [57], et il est raisonnable de penser qu'elle n'a pas été totalement exploitée.

Tout récemment, Beresnevich [8] a démontré que les nombres algébriques réels de degré n forment un *système régulier*, ce qui, pour simplifier, signifie qu'ils sont assez bien répartis sur la droite réelle. Son résultat est optimal, modulo une constante numérique, et devrait avoir de nombreuses conséquences intéressantes qui restent à découvrir, dont notamment des énoncés d'approximation métriques, c'est-à-dire valables pour presque tout nombre réel, au sens de la mesure de Lebesgue.

Chapitre V

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES EXPONENTIELLES

1. Introduction

Les équations de Thue et les équations superelliptiques, considérées au chapitre II, constituent des cas particuliers d'équations de la forme $F(x, y) = 0$, où F est un polynôme fixé. Nous nous intéressons à présent aux équations diophantiennes exponentielles, nommées ainsi car y figurent des exposants inconnus. De façon générale, elles s'écrivent sous la forme

$$F\big(x_1, x_1^{n_1}, \ldots, x_k, x_k^{n_k}, a_1^{m_1}, \ldots, a_\ell^{m_\ell}\big) = 0, \tag{1}$$

où les x_i, m_i et n_i sont des entiers inconnus, les a_i sont des entiers fixés et F est un polynôme à coefficients entiers. La plus célèbre est incontestablement l'équation de Fermat $x^n + y^n + z^n = 0$, récemment résolue par Wiles et Taylor & Wiles [140, 131]. Les techniques actuelles ne permettent en général pas de traiter une équation au type (1), ni de conclure qu'elle a, ou non, une infinité de solutions. Cependant, lorsque $\ell \leq 1$ et $k \leq 2$, il est possible, sur certains exemples, d'obtenir des informations non triviales sur les solutions de (1) et parfois même de les déterminer toutes. À cet effet, on utilise entre autres des outils d'approximation diophantienne, notamment les minorations de formes linéaires de logarithmes — archimédiennes et ultramétriques — et la méthode hypergéométrique, qui repose sur les approximants de Padé et dont il est également question au chapitre III. L'ouvrage de Shorey & Tijdeman [126] apporte des informations exhaustives sur l'état des connaissances, en 1986, dans le domaine des équations diophantiennes exponentielles, et les avancées récentes (jusqu'en 1996) font l'objet d'un survol de Tijdeman [134].

Un premier exemple de résultat issu de la théorie de Baker et qui, semble-t-il, ne découle pas des travaux antérieurs de Thue, Siegel et Roth, est illustré par l'équation

$$f(x) = y^m, \qquad \text{en inconnues } x, y, m \in \mathbf{Z},\ |y| \geq 2,\ m \geq 2, \tag{2}$$

où $f \in \mathbf{Z}[X]$ est irréductible de degré ≥ 3. Nous savons qu'alors (*voir* [23] pour une estimation explicite) m est majoré par une constante effective ne dépendant que de f et donc, en utilisant des résultats connus sur les équations superelliptiques (par exemple ceux de [25]), $|x|$ et $|y|$ sont également bornés de manière effective. Toutefois, les majorations ainsi obtenues sont plusieurs fois exponentielles, et excluent *ipso facto* toute détermination complète de l'ensemble des solutions de (2) par simple énumération. Ainsi, résoudre complètement une équation diophantienne exponentielle fixée apparaît être un problème difficile et le seul moyen d'y parvenir consiste à essayer de tirer au maximum parti des propriétés du polynôme définissant (1), avant d'appliquer les méthodes les plus fines d'approximation diophantienne… sauf si bien sûr des manipulations algébriques élémentaires ou des considérations de congruence permettent de conclure directement !

En réalité, aucune technique n'est à privilégier et nous devons combiner tous les outils à notre disposition, du plus élémentaire au plus raffiné, sans omettre, en dernier recours, l'ordinateur, bien utile souvent pour résoudre les quelques équations *polynomiales* qui subsistent après application des résultats théoriques, parmi lesquels figurent, quasi incontournables, les minorations de formes linéaires de logarithmes. Nous illustrons ceci par l'étude de trois exemples concrets qui ont fait l'objet de très nombreux travaux : l'équation de Catalan, l'équation de Ramanujan–Nagell et ses généralisations, ainsi que l'équation

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q.$$

Les deux premiers exemples sont traités, respectivement, dans les parties 2 et 3, tandis que le chapitre VI est consacré spécifiquement au troisième, sur lequel nous avons obtenu de nombreux et importants résultats nouveaux.

2. L'Équation de Catalan

Voici plus d'un siècle et demi, Eugène Catalan [51], dans une lettre à Leopoldt von Crelle, a posé la question suivante : les entiers 8 et 9 sont-ils les deux seules puissances pures consécutives ? En d'autres termes, le problème de Catalan revient à résoudre l'équation diophantienne exponentielle

$$x^m - y^n = 1 \qquad \text{avec } m, n \geq 2, \text{ et } |x|, |y| > 1,$$

qui admet la solution évidente $3^2 - 2^3 = 1$. Clairement, il suffit de se restreindre aux exposants premiers et donc à l'équation

$$x^p - y^q = 1 \qquad \text{avec } p, q \geq 2 \text{ premiers et } |x|, |y| > 1. \tag{3}$$

Il découle des travaux de V. A. Lebesgue [84], Nagell [99] et Ko Chao [75] que si (3) possède une solution autre que la solution triviale, alors p et q sont supérieurs ou égaux à cinq. Cassels [50] a démontré en 1960 le résultat fondamental suivant qui est à la base de tous les travaux ultérieurs concernant (3) : si (x, y, p, q) vérifie (2), alors p divise y et q divise x. En outre, Tijdeman [133], au moyen de la théorie des formes linéaires de logarithmes, a prouvé de manière effective la finitude du nombre de solutions de (3).

Par la suite, Inkeri [72, 74], Mignotte [93] puis Schwarz [119] ont démontré un critère portant sur la paire d'exposants (p, q) et assurant que, sous certaines hypothèses faisant notamment intervenir le nombre de classes relatif du plus petit sous-corps imaginaire contenu dans le p-ième corps cyclotomique, l'équation (3) n'a pas de solution. Tout récemment, Mihailescu [98] a effectué un progrès considérable, en parvenant à se passer de l'hypothèse sur le nombre de classes. Il a ainsi démontré le résultat suivant, qui améliore notablement les critères connus jusqu'alors.

Théorème A. *Si le quadruplet (x, y, p, q) vérifie (3) avec p et q impairs, alors on a simultanément*

$$p^{q-1} \equiv 1 \bmod q \qquad \textit{et} \qquad q^{p-1} \equiv 1 \bmod p. \tag{4}$$

Il existe cependant des paires (p, q) de nombres premiers qui vérifient (4), et, si $7 \leq p \leq q \leq 10^6$, elles forment l'ensemble

$$\mathcal{E} := \{(83, 4867), (911, 318917), (2903, 18787)\}.$$

Pour résoudre les équations (3) correspondantes, Mignotte a utilisé un critère basé sur des considérations de congruences [91]. Il n'a cependant jamais publié de démonstration complète concernant la paire $(2903, 18787)$, pour laquelle le critère présenté dans [91] échoue (il convient en fait de se placer dans un corps quadratique avant d'utiliser des congruences). Le Théorème 1 ci-dessous, extrait de [41], propose une nouvelle manière de traiter l'équation de Catalan quand le critère de Mihailescu échoue, et s'avère notamment efficace pour les trois paires formant l'ensemble $\mathcal{E}$: leur vérification n'a nécessité qu'une minute de calcul sur ordinateur. En outre, il améliore les résultats d'Inkeri [72].

THÉORÈME 1. *Soient $q > p$ deux nombres premiers impairs. S'il existe des entiers $x > 0$ et $y > 0$ tels que $|x^p - y^q| = 1$, alors q divise le nombre de classes relatif du p-ième corps cyclotomique.*

Le Théorème 1 entraîne les résultats suivants, qui ne sont pas nouveaux, mais que nous démontrons dans [41] indépendamment de la théorie des formes linéaires de logarithmes.

COROLLAIRE A. *Soit p un nombre premier impair. Les triplets (x, y, q) tels que (x, y, p, q) est solution de (3) sont en nombre fini.*

En vertu du Théorème 1, pour établir ce corollaire, il suffit de prouver que pour $p \geq 3$ et q des nombres premiers fixés, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers x et y vérifiant $x^p - y^q = 1$. Or un tel résultat a été obtenu (de manière ineffective) par Siegel [127]. Il s'agit là de la première démonstration connue du Corollaire A ne faisant pas appel à la théorie des formes linéaires de logarithmes.

À l'aide de la table des valeurs des nombres de classes relatifs des corps cyclotomiques — que l'on peut trouver dans le livre de Washington [139] —, le Théorème 1 nous permet, d'un simple coup d'œil, de démontrer que de nombreuses paires (p, q) de nombres premiers ne peuvent être des paires d'exposants pour l'équation de Catalan. On obtient en particulier le résultat suivant qui, sans être nouveau, n'était pas connu en 1992, comme le montrent deux notes de Mignotte [90, 92]. Il est important de souligner que les résultats obtenus dans [95, 96, 97] font appel à la théorie des formes linéaires de logarithmes et ont requis de nombreux mois de calcul sur ordinateur. Par opposition, le Théorème 1 est complètement élémentaire.

COROLLAIRE B. *L'équation (2) n'admet, outre $(3, 2, 2, 3)$, aucune solution (x, y, p, q) avec $\min\{p, q\} \leq 41$.*

Afin de démontrer le Théorème 1, nous regardons (3) comme une équation superelliptique

$$f(x) = y^q \qquad \text{en entiers } x, y \in \mathbf{Z}, \tag{5}$$

où $q \geq 3$ est un entier fixé et $f(X) \in \mathbf{Z}[X]$. Comme nous l'avons signalé au chapitre I, deux méthodes permettent de majorer la taille des solutions de (5) : la méthode de Runge, qui ne s'applique que sous des hypothèses très particulières mais conduit à de bonnes majorations, et la méthode issue de la théorie des formes linéaires de logarithmes, qui s'applique en toute généralité, mais les bornes qui en découlent sont plusieurs fois exponentielles. Cependant, une nouvelle technique se trouve en filigrane dans les articles de Bilu [12] et Bilu & Hanrot [14] relatifs à la résolution explicite de (5). À l'instar de la méthode de Runge, elle est élémentaire et conduit à de très bonnes estimations explicites, mais ne s'applique pas à (5) en toute généralité. Toutefois, elle permet de traiter (3), sous réserve que l'on puisse factoriser cette équation, condition qui se traduit par l'hypothèse portant sur le nombre de classes dans l'énoncé du Théorème 1.

Le champ d'applications de cette nouvelle méthode est certes restreint, mais ne se réduit pas à l'équation de Catalan. Ainsi, grâce à elle, nous sommes parvenus à obtenir de nouveaux résultats relatifs à l'équation diophantienne

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = y^q.$$

Les détails figurent dans la partie 5 du chapitre VI.

3. L'équation de Ramanujan–Nagell et ses généralisations

Ramanujan a observé que l'équation diophantienne

$$x^2 + 7 = 2^n, \qquad \text{en entiers } x \geq 1,\ n \geq 1, \tag{6}$$

possède les solutions $(x, n) = (1, 3), (3, 4), (5, 5), (11, 7)$ et $(181, 15)$, mais il n'est pas parvenu à démontrer que ce sont les seules et il a fallu attendre les travaux de Nagell [101] pour que cette question soit résolue par l'affirmative. De nouvelles démonstrations ont ensuite été publiées, dont les références figurent dans le survol de Ramasamy [106]. Outre son intérêt historique, l'équation (6), appelée équation de Ramanujan–Nagell, est remarquable en ce sens qu'elle possède de nombreuses solutions, contrairement aux autres équations de la forme

$$x^2 + D = p^n, \qquad \text{en entiers } x \geq 1,\ n \geq 1, \tag{7}$$

où $D \geq 1$ et $p \geq 2$ sont fixés, p étant un nombre premier qui ne divise pas D. Ainsi, complétant des travaux de Apéry et Beukers (qui a également étudié (7) avec $D < 0$ [10]), Le [83] a démontré qu'à l'exception de (6) toute équation (7) possède au maximum deux solutions. Nous avons considérablement amélioré ce résultat [48] — en traitant en fait une classe d'équations plus générale que les équations (7) — et avons en particulier obtenu le théorème définitif suivant.

Théorème 2. *Soit $D \geq 1$ un entier et soit $p \geq 2$ un nombre premier ne divisant pas D. Alors l'équation diophantienne*

$$x^2 + D = p^n, \qquad \text{en entiers } x \geq 1,\ n \geq 1,$$

possède au plus une solution, sauf si $(D, p) = (7, 2)$ ou s'il existe un entier $r \geq 3$ tel que $(D, p) = (2^{r+1} - 1, 2)$, auxquels cas elle possède respectivement cinq et deux solutions, données par $n \in \{3, 4, 5, 7, 15\}$ et $n \in \{r + 1, 2r\}$.

La démonstration du Théorème 2 repose essentiellement sur un résultat récent de Bilu, Hanrot & Voutier [15], qui ont déterminé la liste exhaustive des termes u_n des suites récurrentes linéaires binaires de Lucas–Lehmer qui ne possèdent pas de diviseur primitif. Outre les propriétés des polynômes cyclotomiques, leur preuve utilise des minorations fines de formes linéaires de logarithmes [77], ainsi que de longs calculs sur ordinateur.

Une généralisation naturelle de (7), et donc de (6), est donnée par l'équation

$$x^2 + D = y^n, \qquad \text{en entiers } x \geq 1,\ y \geq 2,\ n \geq 2, \tag{8}$$

où $D \geq 1$ est un entier fixé. La détermination de l'ensemble des solutions de (8) a fait l'objet de nombreux travaux (*voir* par exemple le travail très complet de Cohn [55]), et demeure un problème ouvert même pour de petites valeurs de D, comme $D = 7$, $D = 15$ et $D = 25$ (notons cependant que Mike Bennett a annoncé avoir résolu $x^2 + 7 = y^n$). Le résultat principal de [48] permet entre autres de résoudre (8) pour de nombreuses valeurs de D, par exemple pour $D \in \{2, 5, 6, 10, 13, 14, 17\}$, équations cependant déjà traitées auparavant à l'aide d'arguments différents. Qui plus est, la méthode employée dans [48] et basée sur [15] s'applique aussi à (8), pourvu que D et n vérifient certaines hypothèses.

L'équation de Ramanujan–Nagell s'écrit également sous la forme $(2x + 1)^2 + 7 = 2^{n+2}$, ou encore $x^2 + x + 2 = 2^n$, c'est-à-dire

$$x^2 + x + 1 = \frac{2^n - 1}{2 - 1}.$$

Ainsi, l'équation de Goormaghtigh

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{y^n - 1}{y - 1}, \qquad \text{en entiers } x \geq 2,\ y \geq 2,\ n \geq 4, \tag{9}$$

constitue une autre généralisation de (6). Elle possède deux solutions $(x, y, n) = (5, 2, 5)$ et $(90, 2, 13)$, mais on ignore si ce sont les seules. Toutefois, un corollaire du résultat principal de [48] affirme qu'il n'y en a pas d'autres si y a au plus deux facteurs premiers, améliorant ainsi un théorème de Le [83], qui résout (9) lorsque y est une puissance d'un nombre premier.

4. Perspectives

Comme l'a noté Tijdeman [134], *it is remarkable that we can deal with equations containing terms y^n where both y and n are unknown.* Les progrès dans ce domaine sont en fait très récents et reposent pour l'essentiel sur la bonne qualité des minorations de formes linéaires en deux logarithmes, dans les cadres archimédien et ultramétrique. Cependant, les méthodes actuelles ne permettent pas la résolution d'une équation arbitraire de la forme

$$ax^2 + bx + c = y^n \qquad \text{en entiers } n > 1,\ x,\ y,$$

mais on peut penser que, d'ici quelques années, un tel progrès sera accompli.

Outre l'équation de Catalan, d'autres problèmes résistent encore, malgré de nombreuses recherches. Ce n'est certes plus le cas de l'équation $x^2 + 7 = y^n$, qui vient d'être résolue par Mike Bennett, mais on ne sait toujours pas si $x^2 + 25 = y^n$ possède ou non une solution avec x multiple de 5. Par ailleurs, on pense que 1, 8 et 144 sont les seules puissances pures dans la suite de Fibonacci : la démonstration de cette conjecture marquerait une avancée notable dans le domaine des équations diophantiennes exponentielles.

Chapitre VI

L'ÉQUATION DIOPHANTIENNE DE NAGELL–LJUNGGREN $\frac{x^n-1}{x-1}=y^q$

1. Introduction

L'équation de Catalan, étudiée au chapitre précédent, fait intervenir la suite des nombres entiers qui sont des puissances pures, et aborde le problème de sa répartition au sein de l'ensemble des entiers. Dans le même ordre d'idées, il est naturel de se demander si tel nombre, dont l'écriture en base dix possède des propriétés de symétrie, appartient ou non à cette suite. C'est ce problème que nous examinons en détail au cours du présent chapitre, dont le point d'orgue est la démonstration d'une conjecture datant de plus de cinquante ans : un nombre entier supérieur à 1 et ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 en base dix n'est pas une puissance pure. En d'autres termes, nous avons résolu [45] l'équation diophantienne

$$\frac{10^n-1}{10-1}=y^q, \qquad \text{en entiers } y>1,\ n>2,\ q\geq 2,$$

et, plus généralement, nous nous intéressons tout au long de ce chapitre à l'équation

$$\frac{x^n-1}{x-1}=y^q, \qquad \text{en entiers } x>1,\ y>1,\ n>2,\ q\geq 2. \tag{1}$$

Elle intervient notamment en théorie des groupes [65] et possède également des applications à des problèmes d'irrationalité [112].

Les premiers travaux relatifs à (1) remontent à 1920 et sont dus à Nagell [99, 100]. Une vingtaine d'années plus tard, Ljunggren [86] clarifia quelques imprécisions et compléta la démonstration du résultat suivant.

Théorème A. *Outre les trois solutions*

$$\frac{3^5-1}{3-1}=11^2, \qquad \frac{7^4-1}{7-1}=20^2 \qquad et \qquad \frac{18^3-1}{18-1}=7^3, \tag{$\mathcal{S}$}$$

l'équation (1) *ne possède aucune solution* (x,y,n,q) *si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :*

(i) $q=2$,

(ii) 3 *divise* n,

(iii) 4 *divise* n,

(iv) $q=3$ *et* $n\not\equiv 5 \pmod 6$.

À ce jour, nous ne connaissons aucune autre solution de (1) et les travaux les plus récents conduisent à conjecturer qu'une telle solution n'existe pas.

Conjecture A. *L'équation* (1) *ne possède que les trois solutions* ($\mathcal{S}$).

Compte tenu de l'état actuel de nos connaissances, cette question semble par trop ambitieuse, alors que la Conjecture B, qui se déduit aisément de la conjecture *abc* (*voir* par exemple [116], pages 205 et suivantes), paraît plus abordable.

Conjecture B. *L'équation* (1) *possède un nombre fini de solutions.*

Nous disposons de nombreux résultats en direction de la Conjecture B, notamment dus à Shorey & Tijdeman [125], et obtenus comme conséquences des travaux de Baker sur les minorations de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques. La partie 2 est exclusivement consacrée à ces énoncés *de finitude*, alors que, dans les parties suivantes, nous faisons le point sur les nouveaux résultats en direction de la Conjecture A et présentons des énoncés *de résolution complète* de (1), sous, bien sûr, certaines hypothèses additionnelles.

2. Application des formes linéaires de logarithmes : résultats de finitude

Comme on l'a déjà souligné au cours des précédents chapitres, la théorie des formes linéaires de logarithmes, initialement développée par Baker, s'est avérée, et continue à se révéler, très riche d'applications dans le domaine des équations diophantiennes. À la différence des résultats d'approximation diophantienne obtenus par Thue, Siegel et Roth, elle conduit à des énoncés effectifs, en ce sens qu'elle permet non seulement d'affirmer que certaines équations ont un nombre fini de solutions, mais également d'expliciter une borne numérique, certes le plus souvent très élevée, pour la taille des éventuelles solutions. À titre d'illustration significative, voici un théorème démontré par Shorey & Tijdeman [125] (*voir* aussi [126]).

Théorème B. *Soit $x \geq 2$ un entier fixé. Il existe une constante effective $C_1(x)$ telle que toute solution (x, y, n, q) de* (1) *vérifie* $\max\{y, n, q\} \leq C_1(x)$. *Soit $p \geq 2$ un nombre premier fixé. Il existe une constante effective $C_2(p)$ telle que toute solution (x, y, n, q) de* (1) *avec p divisant yn vérifie* $\max\{y, n, q\} \leq C_2(p)$.

Par la suite, Shorey [121, 122] et Le [82] ont abordé la Conjecture B sous d'autres angles, prouvant, par exemple, que (1) n'a qu'un nombre fini de solutions (x, y, n, q) pour lesquelles le nombre de facteurs premiers distincts de n est au moins égal à $q-1$. Plus récemment, Hirata-Kohno & Shorey [71] se sont intéressés à (1) lorsque x est une puissance ν-ième, avec $\nu \geq 3$ un nombre premier fixé.

Théorème C. *Soient $\nu \geq 3$ et $q \geq 3$ des nombres premiers vérifiant*

$$q > 2(\nu - 1)(2\nu - 3).$$

Il existe une constante effective $C_3(\nu)$, ne dépendant que de ν, telle que toute solution (x, y, n, q) de (1) dans laquelle x est une puissance ν-ième vérifie $\max\{x, y, n, q\} \leq C_3(\nu)$.

Malgré les progrès effectués par Hirata-Kohno & Shorey, on ne sait toujours pas démontrer la Conjecture B, même si l'on suppose que $q = 5$ et que x est un cube ! Par contre, et c'est l'objet de la partie suivante, l'équation (1) ne possède aucune solution (x, y, n, q), où x est un carré.

3. Premiers exemples de résolution complète de l'équation de Nagell–Ljunggren

Il a fallu patienter un demi-siècle après les travaux de Ljunggren pour que voie le jour un nouvel énoncé de résolution complète de (1). Démontré par Le [82], il traite le cas très particulier où x est une puissance q-ième.

Théorème D. *L'équation* (1) *ne possède aucune solution* (x, y, n, q) *où* x *est une puissance* q*-ième.*

La preuve combine des minorations de formes linéaires de logarithmes avec des techniques hypergéométriques remontant à Siegel [127], deux outils qui apparaissent dans la plupart des démonstrations des théorèmes récents relatifs à (1).

La résolution de (1) lorsque x est un carré s'est finalement révélée faisable, mais elle a demandé beaucoup d'efforts, ainsi que de longs calculs, tant par la méthode suivie par Bennett [7] que par celle développée par Saradha & Shorey [113, 47]. Elle a été accomplie indépendamment dans les travaux [7] et [47].

Théorème 1. *L'équation* (1) *n'admet aucune solution* (x, y, n, q) *où* x *est un carré.*

Afin d'illustrer ce chapitre par une démonstration, nous détaillons les étapes principales de la preuve du théorème principal de [47], qui traite les équations non résolues par Saradha & Shorey, à savoir (1) avec $x = z^2$ et $z \leq 31$, $z \notin \{2, 3, 4, 8, 9, 16, 27\}$.

Tout d'abord, un argument facile de factorisation montre qu'il suffit de prouver le résultat quand n est impair. Supposons donc que les entiers $z \geq 2$, $n \geq 5$, $q \geq 3$ et $y \geq 2$ avec n impair vérifient l'équation

$$\frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1} = y^q.$$

Alors, il existe deux entiers y_1 et y_2 tels que

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = y_1^q \qquad \text{et} \qquad \frac{z^n + 1}{z + 1} = y_2^q. \tag{2}$$

Première étape. Éliminant z^n du système (2), on obtient l'équation

$$(z + 1)\, y_2^q - (z - 1)\, y_1^q = 2,$$

qui fait apparaître une forme linéaire en deux logarithmes, que l'on minore à l'aide des estimations très précises de [77]. Ceci nous permet de borner q et en fait de prouver que q est majoré par 200, indépendamment de $z \geq 5$, et par 132, indépendamment de $z \geq 12$. Le fait que l'on obtienne une borne pour q indépendante de z est une conséquence directe du terme E figurant dans le Théorème B du chapitre I.

Deuxième étape. Avant toute chose, on observe que Saradha & Shorey [113] ont démontré que l'on a nécessairement $(z\,\varphi(z), q) = 1$, où φ désigne l'indicateur d'Euler. Or cette information supplémentaire nous permet d'appliquer un lemme de nature hypergéométrique, démontré par Le [81] puis raffiné par Saradha & Shorey [113]. On obtient ainsi une très bonne majoration de z en fonction de q, à savoir $z \leq 1.61\, q^{1/2}$. En réalité, on démontre des estimations légèrement plus précises, lesquelles, combinées au résultat de la première étape, entraînent $z \leq 11$. Par conséquent, on est ramené à étudier un nombre fini de paires (z, q).

Troisième étape. Pour chaque paire (z, q) restant, on vérifie que n est congru à 1 modulo q. Pour cela, on regarde l'équation $x^n - 1 = (x-1)\, y^q$, avec x et q fixés. Si p est un nombre premier de la forme $kq+1$, alors $(y^q)^k \equiv 1 \pmod{p}$, donc y^q ne prend qu'un petit nombre de valeurs modulo p. Ainsi n ne prend également qu'un petit nombre de valeurs modulo $p-1$, en particulier modulo q. Pour obtenir le résultat souhaité, l'expérience montre qu'il suffit de considérer en général deux ou trois tels nombres premiers p, en tout cas rarement plus de six.

Quatrième étape. Compte-tenu des trois étapes précédentes, on est ramené à considérer un nombre fini d'équations de la forme

$$xX^q - (x-1)Y^q = \pm 1. \tag{3}$$

Plus précisément, il ne reste à traiter que les équations

$$5X^q - 4Y^q = 1, \qquad 17 \le q \le 71,$$

$$6X^q - 5Y^q = 1, \qquad 17 \le q \le 67,$$

$$7X^q - 8Y^q = -1, \qquad 17 \le q \le 61.$$

À ce stade, deux possibilités s'offrent à nous : ou bien appliquer le Théorème F ci-dessous, ou bien procéder de la manière suivante, détaillée dans [47].

Ces équations sont toutes des équations de Thue, dont on sait majorer explicitement la taille des solutions, et par conséquent, *en principe*, les déterminer toutes. Or les meilleures bornes actuellement connues (*voir* [39]) sont de l'ordre de $10^{10^{500}}$, donc bien trop élevées pour envisager une résolution complète. Qu'à cela ne tienne ! Comme, grâce à l'étape précédente, on sait que n est de la forme $\nu q + 1$, il suffit en fait de montrer que ces équations ne possèdent aucune solution (X, Y) avec X ou Y une puissance ν-ième. On a donc une majoration de ν, puis de n, de l'ordre de 10^{500}. Pour conclure, on utilise à nouveau l'argument de congruences décrit dans la troisième étape afin de montrer que n est nécessairement congru à 1 modulo un entier M, suffisamment grand (*i.e.* $> 10^{500}$), et on obtient ainsi une contradiction.

Au vu de cette démonstration, on constate qu'il ne reste plus beaucoup d'efforts à fournir afin de résoudre (1) lorsque n est congru à 1 modulo q. Cela a été effectué par Mignotte [94], qui a dû simplement traiter quelques équations supplémentaires au type (3), pour lesquelles la méthode décrite ci-dessus s'applique sans la moindre modification.

THÉORÈME E. *La seule solution* (x, y, n, q) *de l'équation* (1) *avec* $n \equiv 1 \pmod{q}$ *est* $(3, 11, 5, 2)$.

Il n'est pas surprenant que l'on soit parvenu à démontrer les Théorèmes D et E. En effet, l'équation diophantienne considérée dans chacun des énoncés se réécrit sous la forme $g(z) = y^q$, où g est un polynôme à coefficients entiers, unitaire, de degré multiple de q. Les conditions d'application du théorème de Runge sont alors réunies, et l'on dispose d'excellentes majorations de z et de y.

En outre, ces deux théorèmes découlent facilement de l'énoncé remarquable suivant, dû à Bennett [7].

THÉORÈME F. *Soient a, b et n des entiers vérifiant $a > b \geq 1$ et $n \geq 3$. Alors l'équation*

$$|ax^n - by^n| = 1$$

admet au plus une solution en entiers positifs (x, y).

Il est bon d'insister sur le fait que le Théorème F résout complètement les équations (3), alors que la méthode employée dans [47] permet seulement de montrer qu'elles n'ont pas de solution (X, Y), où X (ou Y) est une (très) grande puissance d'un entier.

4. Résolution complète de l'équation de Nagell–Ljunggren pour un entier x fixé

Nous abordons maintenant l'équation (1) sous un nouvel angle et supposons désormais que x est fixé. D'après le Théorème B, on sait alors que (1) n'admet qu'un nombre fini de solutions, mais, en 1998, aucun exemple de résolution complète n'était connu. L'outil principal que nous avons utilisé, à savoir les minorations de formes linéaires de logarithmes non archimédiennes, n'avait pas été exploité précédemment. Nous avons appliqué les estimations fines de [43] et un léger raffinement [31], qui s'est avéré *ad hoc* et précieux pour l'étude de (1), afin de démontrer le résultat suivant, extrait de [46].

THÉORÈME 2. *Si l'équation (1) a une solution (x, y, n, q) avec $n \geq 5$, alors il existe un nombre premier p tel que p divise x et q divise $p - 1$. En particulier, on a $x \geq 2q + 1$.*

Comme corollaire immédiat, sachant que (1) est résolue pour $q = 2$, on en déduit le théorème souligné dans l'introduction, et démontré dans [45].

THÉORÈME 3. *Un entier supérieur à 1 et ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 en base dix n'est pas une puissance pure.*

La méthode générale suivie lors de la démonstration du Théorème 2 est essentiellement la même que celle qui nous a permis de prouver le Théorème 3, aussi nous nous contentons de donner quelques détails dans le cas de l'équation (1) avec $x = 10$. Il s'agit alors de résoudre l'équation diophantienne

$$\frac{10^n - 1}{10 - 1} = y^q, \qquad \text{en entiers } q \geq 3,\ y \geq 2,\ n \geq 3,$$

qui se réécrit sous la forme

$$\frac{10^n}{10 - 1} = y^q - \left(\frac{1}{1 - 10}\right)^1 =: \Lambda. \tag{4}$$

On observe que la valuation 5-adique de Λ, notée $v_5(\Lambda)$, est égale à n. Or le résultat principal de [43] nous permet de *majorer* la valuation p-adique d'expressions de la forme $\alpha_1^{b_1} - \alpha_2^{b_2}$, et dans le cas présent, on obtient

$$v_5(\Lambda) \leq 300 \log y \log^2 q. \tag{5}$$

En outre, il découle de (4) que $10^n > y^q$, et donc

$$v_5(\Lambda) = n > \frac{q \log y}{\log 10}. \tag{6}$$

Combinant (5) et (6), on obtient une majoration de q et, très précisément, on parvient à montrer que q n'est pas plus grand que 2063. On a ainsi ramené la résolution de (4) à la résolution de 311 équations (car il y a 311 nombres premiers entre 2 et 2063) en *deux* inconnues n et y.

Nous pouvons par conséquent considérer que q est fixé. Comme lors de la troisième étape de la démonstration du Théorème 1, des considérations de congruence entraînent que n est nécessairement égal à 1 modulo q. D'où une contradiction avec le Théorème E, et la fin de la démonstration du théorème.

La conclusion du Théorème 2 peut paraître artificielle, mais elle illustre parfaitement les limites des méthodes employées. Comme toutes les solutions de (1) vérifiant $q = 2$ sont connues, le Théorème 2 résout complètement (1) quand x est un produit de nombres premiers de la forme $2^a + 1$. En outre, comme l'on dispose grâce aux travaux de Inkeri [73] de quelques informations sur (1) avec $q = 3$, on connaît toutes les solutions de (1) si x est une puissance quelconque d'un entier inférieur ou égal à 20 et différent de 11, la seule équation pour laquelle on ne sache pas conclure étant

$$\frac{11^{tn} - 1}{11^t - 1} = y^5, \qquad \text{en entiers } q \geq 3,\ t \geq 1,\ n \geq 3. \tag{7}$$

L'un des arguments utilisés lors de la démonstration du Théorème 2 ne s'applique pas à (7) : il s'agit du lemme de nature hypergéométrique démontré par Le [81] et raffiné par Saradha & Shorey [113] (dont il est question lors de la deuxième étape de la démonstration du Théorème 1), qui nous aurait permis de majorer t. Mais, précisément, il requiert qu'aucun facteur premier de x ne soit congru à 1 modulo q. À notre connaissance, aucun autre argument ne permet de majorer t, alors que l'on sait facilement (méthode de congruences et Théorème E) résoudre (7) lorsque t est *fixé*...

Pour contourner cette difficulté, il suffit de modifier les arguments utilisés dans la démonstration de la troisième étape de la preuve du Théorème 1. On fixe des entiers x et q et on ne considère plus l'équation (1), mais l'équation $(x^{tn} - 1)/(x^t - 1) = y^q$, en inconnues $n \geq 3$, $t \geq 1$ et $y \geq 2$. La méthode, qui repose également sur des congruences modulo des nombres premiers p de la forme $kq + 1$, permet de conclure que n est congru à 1 modulo q, et ce *indépendamment* de la valeur de t. Elle est détaillée dans [44]. Notons qu'il suffit, dans la plupart des cas, de combiner les informations obtenues pour cinq ou six valeurs de p, mais que l'examen de (7) modulo 13421 entraîne immédiatement que n est congru à 0, 1 ou 2 modulo 10. Ces trois possibilités sont exclues car, d'une part, n est impair (cela découle de résultats connus sur l'équation de Catalan) et, d'autre part, n n'est pas congru à 1 modulo 5, d'après le Théorème E.

Nous avons suivi [44] cette méthode afin de traiter les petites valeurs de x qui échappent au Théorème 2.

Théorème 4. *Si l'équation* (1) *possède une quatrième solution* (z^t, y, n, q) *avec* $t \geq 1$, *alors* $z > 10000$.

En conclusion de ce chapitre, il est bon de souligner que nous disposons maintenant des moyens adéquats pour résoudre complètement (1) avec $x = z^t$, pour *tout* z fixé : il suffit d'appliquer le Théorème 2 afin de se ramener à un ensemble fini, totalement explicite, de valeurs de q, puis, pour celles-ci, d'utiliser la méthode suivie lors de la preuve du Théorème 4. Bien sûr, le temps de calcul croît avec la taille de z...

5. Une extension du théorème de Nagell et Ljunggren

Le Théorème B affirme que (1) n'a qu'un nombre fini de solutions (x, y, n, q) pour lesquelles n est divisible par un nombre premier p ; cependant, (1) n'est complètement résolue que dans le cas $p = 3$ (cf. Théorème A). La méthode que nous présentons maintenant et qui fait l'objet de [42] permet d'étendre les résultats de Nagell et Ljunggren aux nombres premiers $p = 5$ et $p = 7$, ainsi que de résoudre (1) pour de petites valeurs du couple (p, q).

Théorème 5. *Si (x, y, n, q) est une éventuelle quatrième solution de (1) et si p est un diviseur premier impair de n, alors ou bien $p \geq 29$, ou bien $(p, q) \in \{(11, 11), (13, 13), (17, 17), (19, 19), (23, 23)\}$. En outre, on a $(p, q) \notin \{(29, 5), (29, 19), (29, 23), (31, 23), (37, 5), (37, 7), (37, 11), (67, 5)\}$, et si $q = 3$, alors $p \geq 101$.*

Nous indiquons maintenant les grandes lignes de la démonstration. Soient $p \geq 5$ un nombre premier et n un multiple de p. Une étude facile des facteurs premiers de $(x^n - 1)/(x - 1)$ montre que si l'équation (1) a une solution (x, y, n, q), alors l'une des équations

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = y^q, \qquad \frac{x^p - 1}{x - 1} = p\, y^q \tag{8}$$

admet une solution vérifiant $x \geq 2$. Il nous suffit donc de résoudre ces deux équations pour les couples (p, q) figurant dans l'énoncé du Théorème 5. Au premier abord, cela semble irréaliste car les bornes théoriques pour la taille des solutions des équations superelliptiques $f(x) = ay^m$ sont très élevées, et, sauf dans certains cas bien particuliers, l'ordinateur ne peut les résoudre dès que, disons, $m \times \deg(f)$ excède 20. Cependant, dans les deux exemples qui nous intéressent, le polynôme f est cyclotomique et possède ainsi de sympathiques propriétés, que nous sommes parvenus à exploiter, pourvu que p soit différent de q et que q ne divise pas le nombre de classes relatif du p-ième corps cyclotomique, condition que l'on retrouve dans l'énoncé du Théorème 1 du chapitre V. Cette méthode, dont l'origine remonte à des travaux de Bilu [12] et Bilu & Hanrot [14], et qui a également été utilisée avec succès dans le cadre de l'équation de Catalan [41], permet de majorer x par une borne de l'ordre de $p^q\, q^{pq}$, et il suffit alors d'une simple énumération pour achever la résolution des équations (8).

Par ailleurs, un résultat classique de la théorie des équations diophantiennes exponentielles affirme que, pour les équations (8), on sait majorer q en fonction de p. Les bornes reposent entre autres sur des minorations de formes linéaires en ≥ 3 logarithmes, et sont de ce fait très élevées : supérieures à $(3p)^{10p}$ si l'on applique les meilleures estimations actuelles [23]. Or, grâce aux propriétés des polynômes cyclotomiques, exploitées dans le cadre de l'équation de Catalan par Mignotte, il s'avère en fait possible de ne faire appel qu'à des formes linéaires en deux logarithmes pour borner q en fonction de p dans les équations (8) : on obtient alors par exemple $q \leq 5521$ pour $p = 5$, et $q \leq 9000p^2 \log^4 p$ pour tout p premier. Il ne reste alors plus qu'un nombre raisonnable de couples $(5, q)$ à traiter, pour lesquels on applique la méthode décrite dans le précédent paragraphe… si toutefois p n'est pas égal à q ! Dans le cas contraire, on se voit contraint d'utiliser les techniques développées par Bilu & Hanrot [14] et, malgré de multiples astuces de programmation, les capacités actuelles des ordinateurs ne nous permettent pas de résoudre (8) dès que $p = q \geq 11$.

6. Une généralisation de l'équation de Nagell–Ljunggren

Après s'être demandé si un nombre ne s'écrivant qu'avec le chiffre 1 en base x pouvait être une puissance pure, il est naturel de se poser la même question pour les nombres s'écrivant avec le même chiffre, ou bien avec le même bloc de chiffres, répété plusieurs fois. Ce problème s'avère en général plus simple que l'étude de (1), et il fut résolu, dans le cas de la base 10 et pour tout chiffre autre que 1, par Obláth [102] dès 1956. Par la suite, Inkeri [73] considéra le cas d'autres bases, mais il buta lui aussi sur l'équation (1). Il observa cependant que si l'on sait résoudre (1) pour un entier $x \geq 2$ fixé, alors il devient assez facile de résoudre l'équation

$$a\,\frac{x^n-1}{x-1} = y^q, \qquad \text{en inconnues } n \geq 3,\ x \geq 2,\ 1 \leq a < x,\ y \geq 2,\ q \geq 2, \tag{9}$$

par exemple en étudiant les diviseurs premiers de $(x^n - 1)/(x - 1)$. Nous sommes ainsi parvenus à démontrer le résultat suivant [36] et avons les moyens de résoudre complètement (9) pour toute valeur fixée de x... dans les limites, bien sûr, des possibilités des ordinateurs !

Théorème 6. *Les seules solutions de l'équation (9) avec $x \leq 100$ ou $x = 1000$ sont*

$$\begin{aligned}(a,x,y,n,q) \in \big\{&(1,3,11,5,2),(1,7,20,4,2),(4,7,40,4,2),(1,18,7,3,3),\\ &(7,18,49,3,2),(7,18,7,3,4),(8,18,14,3,3),(3,22,39,3,2),\\ &(12,22,78,3,2),(19,30,133,3,2),(21,41,1218,4,2),\\ &(13,68,247,3,2),(52,68,494,3,2),(58,99,7540,4,2)\big\}.\end{aligned}$$

En particulier, ce théorème affirme que si a, b et c désignent n'importe quel chiffre, alors aucun des nombres non nuls écrits en base dix

$$aa\ldots aa, \qquad abab\ldots abab \qquad \text{et} \qquad abcabc\ldots abcabc$$

n'est une puissance pure, sauf, bien sûr, les nombres a, ab et abc lorsque ceux-ci sont des puissances parfaites.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. Baker, *Rational approximations to $\sqrt[3]{2}$ and other algebraic numbers*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 15 (1964), 375–383.

[2] ———, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers*, Mathematika 12 (1966), 204–216.

[3] ———, *Contributions to the theory of Diophantine equations.* I, *On the representation of integers by binary forms.* II, *The Diophantine equation $y^2 = x^3 + k$*, Phil. Trans. R. Soc. London A 263 (1968), 173–208.

[4] ———, *A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms I–III*, Acta Arith. 21 (1972), 117–129 ; 24 (1973), 33–36 ; 27 (1975), 247–252.

[5] A. Baker and C. Stewart, *On effective approximations to cubic irrationals*, New Advances in Transcendence Theory, A. Baker ed., Cambridge University Press, 1988, 1–24.

[6] A. Baker and G. Wüstholz, *Logarithmic forms and group varieties*, J. reine angew. Math. 442 (1993), 19–62.

[7] M. Bennett, *Rational approximation to algebraic number of small height : The Diophantine equation $|ax^n - by^n| = 1$*, J. reine angew. Math. (à paraître).

[8] V. Beresnevich, *On approximation of real numbers by real algebraic numbers*, Acta Arith. 90 (1999), 97–112.

[9] V. Bernik and K. Tishchenko, *Integral polynomials with an overfall of the coefficient values and Wirsing's problem*, Dokl. Akad. Nauk Belarusi., 37-5 (1993), 9–11.

[10] F. Beukers, On the generalized Ramanujan–Nagell equation II, Acta Arith. 39 (1981), 113–123.

[11] Y. Bilu, Effective analysis of integral points on algebraic curves, thesis, Beer Sheva, 1993.

[12] ———, *Solving superelliptic Diophantine equations by the method of Gelfond–Baker*, preprint 94–09, Mathématiques Stochastiques, Univ. Bordeaux 2 (1994).

[13] Y. Bilu et Y. Bugeaud, *Démonstration du théorème de Baker-Feldman via les formes linéaires en deux logarithmes*, J. Th. Nombres Bordeaux (à paraître).

[14] Y. Bilu et G. Hanrot, *Solving superelliptic Diophantine equations by Baker's method*, Compositio Math. 112 (1998), 273–312.

[15] Y. Bilu, G. Hanrot and P. M. Voutier, with an appendix by M. Mignotte, Existence of primitive divisors of Lucas and Lehmer sequences (soumis).

[16] E. Bombieri, *On the Thue-Siegel-Dyson Theorem*, Acta Math. 148 (1982) 255–296.

[17] ———, *Effective Diophantine approximation on $\mathbf{G}_m$*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 20 (1993), 61–89.

[18] E. Bombieri and P. B. Cohen, *Effective Diophantine Approximation on* $\mathbf{G}_m$*, II*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 24 (1997), 205–225.

[19] E. Bombieri and J. Mueller, *On effective measures of irrationality for* $\sqrt[n]{(a/b)}$ *and related numbers*, J. reine angew. Math. 342 (1983), 173–196.

[20] ———, *Remarks on the approximation to an algebraic number by algebraic numbers*, Mich. Math. J. 33 (1986), 83–93.

[21] E. Bombieri, A. J. van der Poorten and J. D. Vaaler, *Effective Measures of Irrationality for Cubic Extensions of Number Fields*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 23 (1996), 211–248.

[22] B. Brindza, *On the generators of* S*-unit groups in algebraic number fields*, Bull. Austral. Math. Soc. 43 (1991), 325–329.

[23] Y. Bugeaud, *Sur la distance entre deux puissances pures*, C. R. Acad. Sci. Paris 322 (1996), 1119–1121.

[24] ———, *Formes linéaires de logarithmes et applications*, Thèse de doctorat, Strasbourg, Publication de l'I.R.M.A., 1996.

[25] ———, *Bounds for the solutions of superelliptic equations*, Compositio Math. 107 (1997), 187–219.

[26] ———, *On the size of integer solutions of elliptic equations*, Bull. Austral. Math. Soc. 57 (1998), 199–206.

[27] ———, *Sur le plus grand facteur premier de* $ax^n + by^m$, C. R. Acad. Sci. Paris 326 (1998), 661–665.

[28] ———, *Bornes effectives pour les solutions des équations en* S*-unités et des équations de Thue-Mahler*, J. Number Theory 71 (1998), 227–244.

[29] ———, *On the greatest prime factor of* $\alpha x^n + \beta y^m$, Proceedings of the Number Theory Conference, Eger 1996, 115–122, Eds. Győry, Pethő, Sós. De Gruyter (1998), 115–122.

[30] ———, *Lower bounds for the greatest prime factor of* $ax^m + by^n$, Proceedings of the Number Theory conference held in Ostravice, Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis 6 (1998), 53–57.

[31] ———, *Linear forms in p-adic logarithms and the Diophantine equation* $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 127 (1999), 373–381.

[32] ———, *On the size of integer solutions of elliptic equations, II*, Bull. Greek Math. Soc. (à paraître).

[33] ———, *On the approximation by algebraic numbers with bounded degree*, Proceedings of the Number Theory Conference, Graz 1998 (à paraître).

[34] ———, *Fundamental systems of* S*-units with small height and their application to Diophantine equations*, Publ. Math. Debrecen. (à paraître).

[35] ———, *On the greatest prime factor of* $ax^m + by^n$*, II*, Bull. London Math. Soc. (à paraître).

[36] ———, *On the Diophantine equation* $a\,\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, Proceedings of the Number Theory Conference, Turku 1999 (à paraître).

[37] ———, *Approximation par des nombres algébriques*, J. Number Theory (à paraître).

[38] Y. Bugeaud and K. Győry, *Bounds for the solutions of unit equations*, Acta Arith. 74 (1996), 67–80.

[39] Y. Bugeaud and K. Győry, *Bounds for the solutions of Thue–Mahler equations and norm form equations*, Acta Arith. 74 (1996), 273–292.

[40] Y. Bugeaud and L. Hajdu, *Lower bounds for the difference* $ax^n - by^m$, Acta Math. Hung. (à paraître).

[41] Y. Bugeaud et G. Hanrot, *Un nouveau critère pour l'équation de Catalan*, Mathematika (à paraître).

[42] Y. Bugeaud, G. Hanrot et M. Mignotte, *Sur l'équation diophantienne* $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$*, III* (soumis).

[43] Y. Bugeaud et M. Laurent, *Minoration effective de la distance p-adique entre puissances de nombres algébriques*, J. Number Theory 61 (1996), 311–342.

[44] Y. Bugeaud et M. Mignotte, *Sur l'équation diophantienne* $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$*, II*, C.R.A.S. Série I, t. 328 (1999).

[45] ———, *On integers with identical digits*, Mathematika (à paraître).

[46] Y. Bugeaud, M. Mignotte and Y. Roy *On the Diophantine equation* $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$, Pacific J. Math. (à paraître).

[47] Y. Bugeaud, M. Mignotte, Y. Roy and T. N. Shorey, *The Diophantine equation* $\frac{x^n-1}{x-1} = y^q$ *has no solution with x square*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 127 (1999), 353–372.

[48] Y. Bugeaud and T. N. Shorey, *On the number of solutions of the generalized Ramanujan–Nagell equation* (soumis).

[49] Y. Bugeaud et O. Teulié, *Approximation d'un nombre réel par des nombres algébriques de degré donné*, Acta Arith. (à paraître).

[50] J. W. S. Cassels, *On the equation* $a^x - b^y = 1$*, II*, Proc. Cambridge Society 56 (1960), 97–103.

[51] E. Catalan, *Note extraite d'une lettre adressée à l'éditeur*, J. reine angew. Math. 27 (1844), 192.

[52] G. V. Chudnovsky, *On the method of Thue-Siegel*, Ann. of Math. 117 (1983), 325–382.

[53] J. Coates, *An effective p-adic analogue of a theorem of Thue*, Acta Arith. 15 (1969), 279–305.

[54] ———, *An effective p-adic analogue of a theorem of Thue, II*, Acta Arith. 16 (1970), 399–412.

[55] J. H. E. Cohn, *The Diophantine equation* $x^2 + C = y^n$, Acta Arith. 65 (1993), 367–381.

[56] H. Davenport and W. M. Schmidt, *Approximation to real numbers by quadratic irrationals*, Acta Arith. 13 (1967), 169–176.

[57] H. Davenport et W. M. Schmidt, *Approximation to real numbers by algebraic integers*, Acta Arith. 15 (1969), 393–416.

[58] G. Diaz, *Une nouvelle propriété d'approximation diophantienne*, C. R. Acad. Sci. Paris 324 (1997), 969–972.

[59] Pingping Dong, *Minoration de combinaisons linéaires de deux logarithmes p-adiques*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5) 12 (1991), 195–250.

[60] J. H. Evertse, K. Győry, C. L. Stewart and R. Tijdeman, *S-unit equations and their applications*, in « New Advances in Transcendence Theory » (Ed. A. Baker), 110-174. Cambridge University Press, 1988.

[61] N. I. Feldman, *Improved estimate for a linear form of the logarithms of algebraic numbers* (en russe), Mat. Sb. 77 (1968), 256–270. Également : Math. USSR. Sb. 6 (1968) 393–406.

[62] ———, *Une amélioration effective de l'exposant dans le théorème de Liouville* (en russe), Izv. Akad. Nauk 35 (1971), 973–990. Également : Math. USSR Izv. 5 (1971), 985–1002.

[63] A. O. Gelfond, *Sur la divisibilité de la différence des puissances de deux nombres entiers par une puissance d'un idéal premier*, Mat. Sb. 7 (1940), 7–25.

[64] ———, *Transcendental and algebraic numbers*, Dover publ., New York, 1960.

[65] R. M. Guralnick, *Subgroups of Prime Power Index in a Simple Group*, J. Algebra 81 (1983), 304–311.

[66] K. Győry, *On the number of solutions of linear equations in units of an algebraic number field*, Comment. Math. Helv. 54 (1979), 583–600.

[67] ———, *On the solutions of linear Diophantine equations in algebraic integers of bounded norm*, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. 22/23 (1980), 225–233.

[68] ———, *Bounds for the solutions of decomposable form equations*, Publ. Math. Debrecen 52 (1998), 1–31.

[69] ———, *Recent bounds for the solutions of decomposable form equations*, Proceedings of the Number Theory Conference, Eger 1996, 255–270, Eds. Győry, Pethő, Sós. De Gruyter, 1998.

[70] L. Hajdu, *A quantitative version of Dirichlet's S-unit theorem in algebraic number fields*, Publ. Math. Debrecen 42 (1993), 239–246.

[71] N. Hirata-Kohno and T. N. Shorey *On the equation $(x^m-1)/(x-1) = y^q$ with x power*, Analytic Number Theory, ed. Y. Motohashi, London Math. Soc. Lecture Note Series 247 (1997), 343–351, Cambridge University Press, Cambridge.

[72] K. Inkeri, *On Catalan's problem*, Acta Arith. 9 (1964), 285–290.

[73] ———, *On the Diophantine equation $a(x^n-1)/(x-1) = y^m$*, Acta Arith. 21 (1972), 299–311.

[74] ———, *On Catalan's conjecture*, J. Number Theory 34 (1990), 142–152.

[75] Ko Chao, *On the Diophantine equation $x^2 = y^n + 1$, $xy \neq 0$*, Sci. Sinica 14 (1965), 457–460.

[76] S. V. Kotov, *Ueber die maximale Norm der Idealteiler des Polynoms* $\alpha x^m + \beta y^n$ *mit den algebraischen Koeffizienten*, Acta Arith. 31 (1976), 219–230.

[77] M. Laurent, M. Mignotte et Y. Nesterenko, *Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation*, J. Number Theory 55 (1995), 285–321.

[78] M. Laurent and D. Roy, *Criteria of algebraic independence with multiplicities and interpolation determinants*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 1845–1870.

[79] ———, *Sur l'approximation algébrique en degré de transcendance un*, Ann. Institut Fourier 49 (1999), 27–55.

[80] ———, *Criteria of algebraic independence with multiplicities and approximation by hypersurfaces* ; preprint, rapport CICMA 06 (1998).

[81] Maohua Le, *A note on the Diophantine equation* $(x^m - 1)/(x - 1) = y^n$, Acta Arith. 64 (1993), 19–28.

[82] ———, *A note on the Diophantine equation* $(x^m - 1)/(x - 1) = y^n + 1$, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 116 (1994), 385–389.

[83] ———, *On the Diophantine equation* $(x^3 - 1)/(x - 1) = (y^n - 1)/(y - 1)$, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 1063–1074.

[84] V. A. Lebesgue, *Sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation* $x^m = y^2 + 1$, Nouv. Ann. Math. 9 (1850), 178–181.

[85] J. Liouville, *Remarques relatives à des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 18 (1844), 883–885 et 910–911.

[86] W. Ljunggren, *Noen Setninger om ubestemte likninger av formen* $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$, Norsk. Mat. Tidsskr. 25 (1943), 17–20.

[87] K. Mahler, *Zur Approximation algebraischer Zahlen, I. Ueber den grössten Primteiler binärer Formen*, Math. Ann. 107 (1933), 691–730.

[88] Yu. Matiiassevitch, *Le dixième problème de Hilbert. Son indécidabilité*, trad. P. Cegielski et D. Richard, Masson, Paris–Milan–Barcelone, 1995.

[89] E. M. Matveev, *Explicit lower estimates for rational homogeneous forms in logarithms of algebraic numbers*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 62 (1998), 81–136. Trad. anglaise : Izv. Math. 62 (1998), 723–772.

[90] M. Mignotte, *Sur l'équation de Catalan*, C. R. Acad. Sci. Paris 314 (1992), 165–168.

[91] ———, *Un critre lmentaire pour l'quation de Catalan*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 15 (1993), 199–200.

[92] ———, *Sur l'équation de Catalan (II)*, Theorical Computer Science 123 (1994), 145–149.

[93] ———, *A criterion on Catalan's equation*, J. Number Theory 52 (1995), 280–283.

[94] ———, *On the Diophantine equation* $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$, Proceedings of the Number Theory Conference, Graz 1998 (à paraître).

[95] M. Mignotte and Y. Roy, *Catalan's equation has no new solution with either exponent less than 10651*, Experimental Mathematics 4 (1995), 259–268.

[96] ———, *Minorations pour l'équation de Catalan*, C. R. Acad. Sci. Paris 324 (1997), 377–380.

[97] ———, *Lower Bounds for Catalan's Equation*, The Ramanujan J. 1 (1997), 351–356.

[98] P. Mihailescu, *A class number free criterion for Catalan's conjecture* (soumis).

[99] T. Nagell, *Des équations indéterminées* $x^2 + x + 1 = y^n$ *et* $x^2 + x + 1 = 3y^n$, Nordsk. Mat. Forenings Skr. (1) 2 (1920), 14 pages.

[100] ———, *Note sur l'équation indéterminée* $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$, Norsk. Mat. Tidsskr. 2 (1920), 75–78.

[101] ———, *The Diophantine equation* $x^2 + 7 = 2^n$, Ark. Math. 4 (1960), 185–187.

[102] R. Oblàth, *Une propriété des puissances parfaites*, Mathesis 65 (1956), 356–364.

[103] A. Pethő, *Beiträge zur Theorie der S-Ordnungen*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 37 (1981), 51–57.

[104] A. Pintér, *On the magnitude of integer points on elliptic curves*, Bull. Austral. Math. Soc. 52 (1995), 195–199.

[105] D. Poulakis, *Integer points on algebraic curves with exceptional units*, J. Austral. Math. Soc. 63 (1997), 145–164.

[106] A. M. S. Ramasamy, *Ramanujan's equation*, J. Ramanujan Math. Soc. 7 (1992), 133–153.

[107] K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika 2 (1955), 1–20.

[108] D. Roy and M. Waldschmidt, *Quadratic relations between logarithms of algebraic numbers*, Proc. Japan Acad. Ser. A 71 (1995), 151–153.

[109] ———, *Approximation diophantienne et indépendance algébrique de logarithmes*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 30 (1997), 753–796.

[110] ———, *Simultaneous approximation and algebraic independence, Ramanujan Math. J.* 1 (1997), 379–430.

[111] C. Runge, *Ueber ganzzahlige Lösungen von Gleischungen zwischen zwei veränderlichen*, J. Reine Angew. Math. 100 (1887), 425–435.

[112] J. W. Sander, *Irrationality Criteria for Mahler's Numbers*, J. Number Theory 52 (1995), 145–156.

[113] N. Saradha and T. N. Shorey, *The equation* $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$ with x square, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 125 (1999), 1–19.

[114] A. Schinzel, *On two theorems of Gelfond and some of their applications*, Acta Arith. 13 (1967), 177–236.

[115] W. M. Schmidt, Approximation to algebraic numbers, Monographie de l'Enseignement Mathématique 19, Genève, 1971.

[116] ———, Diophantine Approximations and Diophantine equations, Lecture Notes in Math. 785, Springer, Berlin, 1991.

[117] ———, *Integer points on curves of genus* 1, Compositio Math. 81 (1992), 33–59.

[118] T. Schneider, Introduction aux nombres transcendants, Paris, Gauthier-Villars, 1959.

[119] W. Schwarz, *A note on Catalan's equation*, Acta Arith. 72 (1995), 277–279.

[120] T. N. Shorey, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers with small coefficients I, II*, J. Indian Math. Soc. (N. S.) 38 (1974), 271–284 ; ibid. 38 (1974), 285–292.

[121] ———, *On the greatest prime factor of* $ax^m + by^n$, Acta Arith. 36 (1980), 21–25.

[122] ———, *Perfect powers in values of certain polynomials at integer points*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 99 (1986), 195–207.

[123] ———, *On the equation* $z^q = (x^n - 1)/(x - 1)$, Indag. Math. 48 (1986), 345–351.

[124] T. N. Shorey, A. J. van der Poorten, R. Tijdeman and A. Schinzel, *Applications of the Gelfond-Baker method to Diophantine equations*, Advances in transcendence theory, Academic Press, London and New-York, 1977, 59–77.

[125] T. N. Shorey and R. Tijdeman, *New applications of Diophantine approximations to Diophantine equations*, Math. Scand. 39 (1976), 5–18.

[126] ———, *Exponential Diophantine equations*, Cambridge Tracts in Mathematics 87, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[127] C. L. Siegel, *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. 1 (1929), 41–69.

[128] V. G. Sprindžuk, Mahler's problem in metric number theory, Amer. Math. Soc., Transl. math. monogr. **25**, Providence, R. I., 1969.

[129] V. G. Sprindžuk, *Estimations effectives pour les équations diophantiennes exponentielles « ternaires »* (en russe), Dok. Akad. Nauk BSSR 13 (1969), 777–780.

[130] V. G. Sprindžuk, Classical Diophantine Equations, Lecture Notes in Math. 1559, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[131] R. Taylor and A. Wiles, *Ring–theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. 141 (1995), 553–572.

[132] A. Thue, *Ueber Annäherungswerte algebraischer Zahlen*, J. reine angew. Math. 135 (1909), 284–305.

[133] R. Tijdeman, *On the equation of Catalan*, Acta Arith. 29 (1976), 197–209.

[134] ———, *Exponential Diophantine equations 1986–1996*, Proceedings of the Number Theory Conference, Eger 1996, 523–539, Eds. Győry, Pethő, Sós. De Gruyter, 1998.

[135] J. Turk, *On the difference between perfect powers*, Acta Arith. 45 (1986), 289–307.

[136] P. M. Voutier, *An effective lower bound for the height of algebraic numbers*, Acta Arith. 74 (1996), 81–95.

[137] M. Waldschmidt, *Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques*, Canadian J. Math. 45 (1993), 176–224.

[138] M. Waldschmidt, *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (à paraître).

[139] L.C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[140] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. 141 (1995), 443–551.

[141] E. Wirsing, *Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades*, J. reine angew. Math. 206 (1961), 67–77.

[142] K. Yu, *Linear forms in p-adic logarithms*, Acta Arith. 53 (1989), 107–186.

[143] ———, *Linear forms in p-adic logarithms* III, Compositio Math. 91 (1994), 241–276.

[144] ———, *p–adic logarithmic forms and group varieties, I*, J. reine angew. Math. 502 (1999), 29–92.

[145] ———, *p–adic logarithmic forms and group varieties, II*, Acta Arith. 89 (1999), 337–378.