M2R (2011-2012)
Cours de Combinatoire Algébrique
Fiche de T.D. numéro 1
Représentations des groupes finis

Soit G un groupe fini. Les représentations sont supposées de dimension finie.

Exercice 1.

Soit (V, ρ) une représentation de G. Soit W un sous-espace vectoriel G-stable de V. Soit p_o un projecteur sur W. Soit p défini par

$$p = \frac{1}{\#G} \sum_{t \in G} \rho(t) p_o \rho(t^{-1}). \tag{1}$$

(a) Montrer que p est un projecteur.

(b) Montrer que p commute avec $\rho(t)$ pour tout $t \in G$.

Exercice 2.

(a) Soit R une représentation de degré 1 de G.

Montrer qu'il existe une représentation R' de G telle que $R \otimes R'$ soit isomorphe à la représentation triviale de G.

(b) Soit M une représentation irréductible de G. Montrer que $R \otimes M$ est irréductible, sans utiliser les caractères.

(c) Même question en utilisant les caractères et le critère d'irréductibilité.

Exercice 3.

Soit (V, ρ) une représentation de G. On note $S^2(V)$ le sous-espace vectoriel de $V \otimes V$ engendré par les vecteurs de la forme

$$x \otimes y + y \otimes x. \tag{2}$$

(a) Montrer que $S^2(V)$ est une sous-représentation de V.

(b) Trouver une représentation supplémentaire. (On pourra utiliser un projecteur)

Exercice 4.

Soit (V, ρ) une représentation de G.

(a) Montrer qu'on peut définir une représentation de G sur l'espace vectoriel dual de V.

(b) Calculer le caractère de cette représentation en fonction de celui de (V, ρ).

Exercice 5.

Montrer que le caractère du produit tensoriel de deux représentations est le produit des caractères.

Exercice 6.

Soit X un ensemble fini muni d'une action du groupe G. On note $(\mathbb{C}X, \rho)$ la représentation associée et χ son caractère.

(a) Montrer que la multiplicité de la représentation triviale dans $(\mathbb{C}X, \rho)$ est le nombre c d'orbites de l'action de G sur X. En déduire que $(\chi, 1) = c$.

On suppose maintenant que l'action de G sur X est transitive (une seule orbite). En particulier, on peut décomposer la représentation $(\mathbb{C}X, \rho)$ et écrire $\chi = 1 + \theta$.

(b) Montrer l'équivalence entre les énoncés suivants :

[i] L'action est doublement transitive : pour tous x, y distincts et x', y' distincts dans X, on peut trouver $s \in G$ tel que $x' = sx$ et $y' = sy$.

[ii] G a exactement deux orbites dans $X \times X$: la diagonale et son complémentaire

[iii] On a $(\chi^2, 1) = 2$.

[iv] La représentation θ est irréductible.

Exercice 7.

Soient G_1 et G_2 deux groupes finis. Soit $G = G_1 \times G_2$ le groupe produit.

(a) Si (V_i, ρ_1) et (V_2, ρ_2) sont des repr. de G_1 et G_2, définir une représentation de G sur $V_1 \otimes V_2$.

(b) Calculer son caractère en fonction de ceux de V_1 et V_2

(c) Montrer que si V_1 et V_2 sont irréductibles, alors $V_1 \otimes V_2$ est irréductible.

(d) Montrer que tout repr. irred. de G est de cette forme.

Exercice 8.

On considère le groupe symétrique S_4, groupe des permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Calculer le nombre de caractères irréductibles de S_4.

(b) Trouver les caractères de degré 1 de S_4.

(c) Trouver les degrés des caractères irréductibles de S_4.

(d) Décomposer la représentation provenant de l'action de S_4 sur $\{1, 2, 3, 4\}$ en irréductibles.

(e) Construire la table des caractères de S_4.