M2 (2011-2012)
Cours de Combinatoire Algébrique
Fiche de T.D. numéro 3
Partitions et fonctions symétriques

Exercice 1 (Ordre de dominance)

1. Montrer que $(Par(n), \subseteq)$ et $(Par(n), \trianglelefteq)$ sont des treillis.

2. Montrer que $(Par(n), \trianglelefteq)$ est un treillis symétrique, i.e.

$$\mu \trianglelefteq \lambda \Leftrightarrow \lambda^* \trianglelefteq \mu^*.$$

3. $(Par(n), \trianglelefteq)$ est une chaîne $\Leftrightarrow n \leq 5$.

4. $(Par(n), \trianglelefteq)$ est gradué $\Leftrightarrow n \leq 6$.

5. Montrer que l'ordre lexicographique est une extension linéaire de l'ordre de dominance, i.e.

$$\mu \trianglelefteq \lambda \Rightarrow \mu \leq^R \lambda.$$

Exercice 2 On considère le développement

$$h_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} N_{\lambda\mu} m_\mu.$$

1. Montrer que $N_{\lambda\mu}$ est égal au nombre de matrices $A = (a_{ij})$ avec entrées dans $\mathbb{N}$, telles que $row(A) = \lambda$ et $col(A) = \mu$.

2. En déduire l'identité remarquable

$$\begin{aligned} \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} &= \sum_{\lambda,\mu} N_{\lambda\mu} m_\lambda(x) m_\mu(y) \\ &= \sum_{\lambda \in Par} m_\lambda(x) h_\mu(y). \end{aligned}$$

Exercice 3 Montrer que

1. $$H(t) = \sum_{n \geq 0} h_n t^n = \prod_{n \geq 0} (1 - x_n t)^{-1};$$

2. $$E(t) = \sum_{n \geq 0} e_n t^n = \prod_{n \geq 0} (1 + x_n t).$$

Exercice 4 Développer la serie $\prod_{i \geq 1}(1+x_i+x_i^2)$ en terms de fonctions symétriques élémentaires.

Exercice 5 Montrer que

$$h_r(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^{n-1+r} \prod_{i \neq k} (x_k - x_i)^{-1}.$$

Exercice 6 Soit $w \in S_n$ de type cyclique $\lambda = \langle 1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots \rangle$. Montrer bijectivement que le nombre de permutations σ qui commutent avec w est egal à $z_\lambda = 1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \cdots$.

Exercice 7 Soit Ω^n le sous-espace de Λ^n formé par toutes $f \in \Lambda^n$ telles que

$$f(x_1, -x_1, x_3, x_4, \ldots) = f(x_3, x_4, \ldots).$$

Par exemple, $m_1 = x_1 + x_2 + \cdots \in \Omega^1$. Trouver une bases simple pour Ω^n, et exprimer la dimension de Ω^n en terms de particulières partitions de n.

Exercice 8 Soir $f \in \Lambda^n$, et pour $g \in \Lambda^n$ on définit $g_k \in \Lambda^{nk}$ par

$$g_k(x_1, x_2, \ldots) = g(x_1^k, x_2^k, \ldots).$$

Montrer que

$$\omega f_k = (-1)^{n(k-1)} (\omega f)_k.$$