M2 (2011-2012)
Cours de Combinatoire Algébrique
Fiche de T.D. numéro 4
Bases duales et nombre de Kostka

Exercice 1 (Homomorphisme signe) Soit $\lambda = \langle 1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots \rangle \vdash n$. On définit

$$\varepsilon_\lambda = (-1)^{m_2+m_4+\cdots}.$$

Montrer que

1. $\epsilon_\lambda = (-1)^{n-\ell(\lambda)}$
2. si $\sigma \in S_n$ et $\rho(\sigma) = \langle 1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots \rangle$ est le type cyclique de σ, montrer que l'application $\sigma \mapsto \varepsilon_{\rho(\sigma)}$ est l'homomorphisme signe.

Exercice 2 (Bases duales pour $\langle , \rangle$) Soient $\{u_\lambda\}$ et $\{v_\lambda\}$ deux bases de Λ, telles que pour toute $\lambda \vdash n$, $u_\lambda, v_\lambda \in \Lambda^n$. Alors $\{u_\lambda\}$ et $\{v_\lambda\}$ sont duales si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in Par} u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \prod_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1}.$$

Exercice 3 Un tableau semi-standard de Young avec les ligne remplies dans l'ordre non croissant et les colonnes dans l'ordre decroissant est appelé un reverse SSYT.
On note $\hat{K}_{\lambda/\mu,\alpha}$ le nombre de reverse SSYT de forme λ/μ et contenu α. Montrer que

$$\hat{K}_{\lambda/\mu,\alpha} = K_{\lambda/\mu,\alpha}.$$

Exercice 4 Si $\mu, \lambda \vdash n$ avec $\mu \trianglelefteq \lambda$ montrer que $K_{\lambda,\mu} \neq 0$.
Remarque. On a prouvé l'implication inverse pendant le cours.

Exercice 5 Montrer que

$$\sum_{\mu \vdash n} q^{\ell(\mu)-1} m_\mu = \sum_{j=0}^{n-1} (q-1)^j s_{n-j,1^j},$$

où s_λ est la fonction de Schur indexée par λ.