M2 (2011-2012)
Cours de Combinatoire Algébrique
Fiche de T.D. numéro 5
Représentations des groupes symétriques

Exercice 1. (puissances extérieures de la représentation standard.)

On note V la représentation standard de S_n, définie par $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}(1, 1, \ldots, 1) \oplus V$.

Pour $k \in \{1, ..., n-1\}$, on considère les puissances extérieures $\bigwedge^k V$ de la représentation standard.

(a) Montrer que $\bigwedge^k \mathbb{C}^n = \bigwedge^k V \bigoplus \bigwedge^{k-1} V$.

(b) On note χ le caractère de la représentation $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$,

$$\chi(\sigma) = \sum_{K \subset \{1,\ldots,n\}} sgn(\sigma_{|K}),$$

où la somme porte sur tous les sous-ensembles de cardinal k et où $sgn_{|K}$ est la signature de la permutation obtenue par restriction de σ, si $\sigma(K) \neq K$ alors on pose $sgn_{|K} = 0$.

(c) Montrer que $\langle \chi, \chi \rangle = 2$. En déduire que la représentation $\bigwedge^k V$ est irréductible pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}$.

(d) Décrire et expliquer la symétrie par échange de k et $n-k$.

(e) Décrire la partition λ de n telle que $\bigwedge^k V$ soit isomorphe au module de Specht V_λ. (Indication : utiliser la restriction à S_{n-1})

Exercice 2. (involutions et tableaux standards)

Une involution dans S_n est une permutation w telle que $w^2 = 1$.

(a) Montrer que le nombre d'involutions dans S_n est

$$I_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}.$$

(b) Si on note t_λ le nombre de tableaux standard de forme λ, montrer que

$$\sum_{\lambda \vdash n} t_\lambda = I_n.$$

On pourra utiliser le fait que $\sum_{\lambda \vdash n} (t_\lambda)^2 = n!$.

Exercice 3. (Une preuve probabiliste de la formule des équerres.)

(voir `www.math.upenn.edu/~wilf/reprints.html`)

Cette preuve a été publiée par Curtis, Nijenhuis et Wilf en 1979 . On va montrer que le nombre t_λ de tableaux standard de forme λ (une partition de n) est donné par la formule de Frame, Robinson et Thrall (obtenue en 1954) :

$$t_\lambda = \frac{n!}{\prod e_{(i,j)}},$$

où $e_{(i,j)}$ est la taille de l'équerre de sommet la boîte indexée (i,j) du diagramme associé à λ. On pose

$$F_\lambda = F(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k) = \frac{n!}{\prod e_{(i,j)}}.$$

(a) Montrer que le nombre de tableaux standards de forme λ vérifie $t_\lambda = \sum t_\mu$, où on somme sur toutes les partitions μ de $n-1$ obtenues en enlevant un coin à la partition λ.

(b) Fixons un coin (a,b). Soit $P\colon (i,j) = (a_1,b_1) \to (a_2,b_2) \to \cdots \to (a_m,b_m) = (a,b)$ un chemin aléatoire dans les équerres qui part de (i,j) et aboutit au coin (a,b), c'est-à-dire, qu'une fois que la case (a_r,b_r) est fixée, on choisit au hasard uniforme une case (a_{r+1},b_{r+1}), différente de (a_r,b_r), dans l'équerre de sommet (a_r,b_r).

On note $H = (a_1, a_2, ..., a_m)$ et $V = (b_1, b_2, ..., b_m)$ les projections horizontales et verticales de P.

1) Montrer que la probabilité $p(H,V \mid i,j)$ qu'un chemin aléatoire commençant par la case (i,j) ait comme projections H et V est

$$p(H,V \mid i,j) = \prod_{k\in H, k\neq a} \frac{1}{e_{(k,b)}-1} \prod_{l\in V, l\neq b} \frac{1}{e_{(a,l)}-1} \quad .$$

2) Montrer que la probabilité $p(a,b)$ qu'un chemin aléatoire se termine par le coin (a,b) est

$$p(a,b) = \frac{F_\mu}{F_\lambda},$$

où μ est obtenue à partir de λ en enlevant le coin (a,b).

3) En déduire que

$$\sum_\mu \frac{F_\mu}{F_\lambda} = 1,$$

où on somme sur toutes les partitions μ de $n-1$ obtenues en enlevant un coin à la partition λ.

En déduire que $F_\lambda = t_\lambda$.