Université Claude Bernard Lyon 1

M1 - Combinatoire

Feuille 6 : Formule des équerres

Soit $\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$, une partition de n. Soit (i,j) une case du diagramme de Young de λ. L'équerre associée à la case (i,j) est l'ensemble $H_{i,j}$ qui contient (i,j) ainsi que les cases du diagramme se trouvant en-dessous ou à droite de (i,j). On désigne par $h_{i,j}$ (h comme hook length) la longueur de l'équerre partant de la case (i,j), c'est-à-dire

$$h_{i,j} := |H_{i,j}|.$$

En Figure 1, l'équerre partant de la case $(2,2)$ est de longueur 6, on a donc $h_{2,2} = 6$.

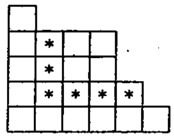

Figure 1: La partition $\lambda = (6,5,4,4,1)$.

Formule des équerres
Soient $n \in \mathbb{N}$ et λ une partition de n. Alors le nombre de tableaux standards de Young de forme λ est donné par

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} h_{i,j}},$$

où le produit porte sur toutes les cases du diagramme de Young de λ.

Exercice 43. Soit $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k)$ une partition de n. Notons

$$\ell_1 = \lambda_1 + k - 1 > \ell_2 = \lambda_2 + k - 2 > \ldots > \ell_k = \lambda_k \geq 0.$$

Montrer que :

a) La formule des équerres est équivalent à la formule

$$f^\lambda = \frac{n! \prod_{i<j}(\ell_i - \ell_j)}{\ell_1! \cdot \ell_2! \cdots \ell_k!} =: F(\ell_1, \ldots, \ell_k).$$

b) Vérifier que les nombres f^λ satisfont la récurrence suivante :

$$f^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)} = \sum_{i=1}^{k} f^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_i - 1,\ldots,\lambda_k)},$$

où $f^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_i-1,\ldots,\lambda_k)} = 0$ si la séquence n'est pas une partition.

c) Montrer, à l'aide de la Formule de Taylor, l'identité suivante

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \Delta(x_1, \ldots, x_i + t, \ldots, x_k) = \left(x_1 + \ldots + x_k + \binom{k}{2} t \right) \cdot \Delta(x_1, \ldots, x_k),$$

où $\Delta(\ell_1, \ldots, \ell_k) := \prod_{i<j} (\ell_i - \ell_j)$ est le déterminant de Vandermonde.

d) En déduisez une preuve par récurrence de la formule des équerres en montrant que

$$F(\ell_1, \ldots, \ell_k) = \sum_{i=1}^{k} F(\ell_1, \ldots, \ell_i - 1, \ldots, \ell_k).$$

Exercice 44. Prouver la formule determinantale suivante pour f^λ :

$$f^\lambda = n! \cdot \left| \frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right|_{i,j=1,\ldots,k}.$$