M2 (2011-2012)
Cours de Combinatoire Algébrique
Fiche de T.D. numéro 7
Nombre de tableaux semistandard de forme λ

Definition À chaque case x, de coordonnées (i,j), du diagramme de Ferrers de la partiion λ, on associe d'un part son *contenu* $c(x) = j - i$, d'autre part sa *longueur d'équerre* $h(x) = \lambda_i + \lambda^*_j - i + j$. On pose $n(\lambda) = \sum_i (i-1)\lambda_i$.

Exercice 1

1. Vérifier que les longueurs d'équerre de la $i-$ème ligne de λ constituent la suite des entrées compris entre 1 et $\lambda_i + n - i$, privée des entiers $\lambda_i - \lambda_j - i + j$ pour $j > i$.

2. Soit q une indéterminée. En utilisant la formule déterminantale pour s_λ avec $x_i = q^{i-1}$ montrer que
$$a_{\lambda+\delta}(1, q, \dots, q^{n-1}) = q^{n(\lambda)+n(n-1)(n-2)/6} \prod_{i<j} (1 - q^{\lambda_i - \lambda_j - i + j}).$$

3. En déduire que
$$s_\lambda(1, q, \dots, q^{n-1}) = q^{n(\lambda)} \prod_{x \in \lambda} \frac{1 - q^{n+c(x)}}{1 - q^{h(x)}}.$$

4. Calculer $s_\lambda(1, \dots, 1)$.

5. En déduire que le nombre de tableaux semistandard de forme λ, numérotés d'entiers inférieurs au égaux à n, est égal à
$$K_\lambda(n) = \prod_{x \in \lambda} \frac{n + c(x)}{h(x)}.$$

6. Poser $y_1 = \cdots = y_n = 1/n$ dans une des indentités de Cauchy. Quand n tend vers l'infini obtenir
$$\frac{f^\lambda}{|\lambda|!} = \lim_{n \to \infty} \frac{K_\lambda(n)}{n^{|\lambda|}}.$$

7. En déduire la formule des équerres
$$f^\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{x \in \lambda} h(x)}.$$