M2 (2011-2012)
Cours de Combinatoire Algébrique
Fiche de T.D. numéro 8
Algèbres de Hopf

Exercice 0. (Primitifs et inverse)
Calculer l'antipode d'un élément primitif dans une algèbre de Hopf.
Montrer que si x et y sont primitifs, alors $[x, y] := x * y - y * x$ est aussi primitif.

Exercice 1. (Primitifs et inverse dans les algèbres de groupes)
Soit G un groupe fini. Trouver les éléments primitifs de l'algèbre de Hopf $\mathbb{C}[G]$.
Vérifier que l'inverse $g \mapsto g^{-1}$ donne bien l'antipode de $\mathbb{C}[G]$.

Exercice 2. (Puissances divisées)
Soit C l'espace vectoriel $\mathbb{C}[t]$. Montrer qu'il existe sur C une structure de cogèbre telle que

$$\Delta(t^n) = \sum_{p+q=n} t^p \otimes t^q$$

Trouver un produit gradué $*$ sur C qui fait de $(C, *, \Delta)$ une bigèbre.
Décrire l'antipode de C.

Exercice 3. (Convolution)
Soit H une algèbre de Hopf. On considère le produit de convolution sur les applications linéaires de H dans H.
a) Montrer que si H est commutative, le sous-espace des morphismes d'algèbres de H dans H est stable par convolution.
b) Montrer que si H est commutative ou cocommutative, le carré de l'antipode est l'identité.

Exercice 4. (Matrices)
Soit $\mathbb{C}[a, b, c, d]$ l'anneau des polynomes en $\{a, b, c, d\}$.
a) Montrer que les formules

$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c, \quad \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d,$$
$$\Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c, \quad \Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d,$$

font de $(\mathbb{C}[a, b, c, d], \times, \Delta)$ une bigèbre.

b) Soit $\det = ad - bc$ dans $\mathbb{C}[a, b, c, d]$. Montrer que $\Delta(\det) = \det \otimes \det$. En déduire une structure de bigèbre sur l'anneau quotient de $\mathbb{C}[a, b, c, d]$ par l'idéal engendré par $\det - 1$.

c) Comment généraliser aux matrices de taille n ?

Exercice 5. (Coproduit des bases)

Calculer l'action du coproduit Δ sur les bases classiques de fonctions symétriques $p_\lambda, m_\lambda, e_\lambda, h_\lambda$ en utilisant la définition en termes de somme d'alphabets.

Exercice 6. (Des h aux p)

Trouver une expression simple de la somme $\sum_{n \geq 0} h_n$ sous forme d'une exponentielle d'une fonction des p_λ. En déduire le coproduit des h_n.